POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

KWARTALNIK

TOM V • ZESZYT 3

WARSZAWA • 1957

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

O PEWNYM USTALONYM ZAGADNIENIU PRZESTRZENNYM TERMOSPRĘŻYSTOŚCI

1. Niech na obszarze płaskim Γ, należącym do płaszczyzny ograniczającej półprzestrzeń sprężystą, dana będzie temperatura $T_0(\xi, \eta)$; poza obszarem Γ niech temperatura T_0 będzie równa zeru. Zadanie, jakie sobie stawiamy, to wyznaczenie składowych stanu naprężenia (σ_{ij}) w rozpatrywanej półprzestrzeni sprężystej. Tak sformułowane zagadnienie rozwiążemy w sposób najprostszy posługując się funkcjami Greena[1].

Oznaczmy przez $T^*(x, y, z; \xi, \eta)$ temperaturę w punkcie $P(x, y, z)$ półprzestrzeni sprężystej, wywołaną działaniem temperatury T_0 na nieskończenie małym obszarze $d\Gamma$ w otoczeniu punktu $B(\xi, \eta)$ leżącego w płaszczyźnie ograniczającej półprzestrzeń sprężystą, a więc w płaszczyźnie $z = 0$. Inaczej mówiąc zakładamy, że w płaszczyźnie $z = 0$ temperatura jest równa zeru poza obszarem $d\Gamma$, gdzie wielkość jej wynosi T_0.

Oznaczmy dalej przez $\sigma_{ij}^*(x, y, z; \xi, \eta)$ składowe stanu naprężenia w punkcie $P(x, y, z)$ półprzestrzeni sprężystej, wywołane działaniem temperatury T_0 na obszarze $d\Gamma$.

Wtedy przy danym rozkładzie temperatury $T_0(\xi, \eta)$ na obszarze Γ leżącym w płaszczyźnie ograniczającej półprzestrzeń sprężystą otrzymamy dla wyznaczenia temperatury T i składowych stanu naprężenia (σ_{ij}) w punkcie $P(x, y, z)$ następujące związki całkowe:

$$T(x, y, z) = \iint_{(\Gamma)} T_0(\xi, \eta)\, T^*(x, y, z; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{1.1}$$

$$\sigma_{ij}(x, y, z) = \iint_{(\Gamma)} T_0(\xi, \eta)\, \sigma_{ij}^*(x, y, z; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{1.2}$$

gdzie

$$i, j = x, y, z, \qquad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}.$$

Punkt ciężkości rozwiązania zagadnienia polega na wyznaczeniu funkcji Greena T^* i σ_{ij}^*; obliczenie wielkości T i σ_{ij} dla danych kształtów obszarów Γ polega na wykonaniu kwadratur według wzorów (1.1) i (1.2).

[1] Rozpatrywane tu zagadnienie zostało na innej drodze rozwiązane w nieopublikowanej dotąd w całości pracy E. Sternberga i E. L. Mac Dowella, [3].

2. Niech jądro cieplne $(T_0\, d\Gamma)$ działa w punkcie $B(\xi, \eta)$ w płaszczyźnie $z = 0$, to jest w płaszczyźnie ograniczającej półprzestrzeń sprężystą. W półprzestrzeni sprężystej powstanie pole temperatur T^*. Spełnić ono powinno równanie przewodnictwa cieplnego

$$\nabla^2 T^* = 0, \tag{2.1}$$

gdzie

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Warunki brzegowe równania (2.1) kształtują się w sposób następujący:

(a) w płaszczyźnie $z = 0$ powinno być

$$T^*(x, y, 0; \xi, \eta) = (T_0\, d\Gamma)\, \delta(x - \xi)\, \delta(y - \eta), \tag{2.2}$$

(b) w nieskończoności powinno być $T^* = 0$. We wzorze tym symbol δ oznacza funkcję Diraca.

Przyjmując rozwiązanie równania (2.1) w postaci

$$T^* = \int_0^\infty \int_0^\infty H(\alpha, \beta, z) \cos \beta (y - \eta) \cos \alpha (x - \xi)\, d\alpha\, d\beta, \tag{2.3}$$

sprowadzimy równanie (2.1) do równania różniczkowego zwyczajnego

$$\frac{d^2 H}{dz^2} - \gamma^2 H = 0, \tag{2.4}$$

gdzie

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Ponieważ dla $z \to \infty$ funkcja H powinna dążyć do zera (gdyż $T^* = 0$), zatem

$$H(\alpha, \beta, z) = C(\alpha, \beta)\, e^{-\gamma z}. \tag{2.5}$$

Zważywszy na pierwszy warunek brzegowy (2.2) otrzymamy rozwiązanie równania (2.1) w postaci

$$T^*(x, y, z; \xi, \eta) = \frac{T_0\, d\Gamma}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\gamma z} \cos \beta (y - \eta) \cos \alpha (x - \xi)\, d\alpha\, d\beta \tag{2.6}$$

albo

$$T^*(x, y, z; \xi, \eta) = \frac{T_0\, d\Gamma}{2\pi} \frac{z}{R^3}, \tag{2.7}$$

gdzie

$$R = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{1/2}.$$

Dla wyznaczenia składowych stanu naprężenia (σ^*_{ij}) posłużymy się potencjałem termosprężystego przemieszczenia Φ^*. Wiadomo, że za pomocą funkcji Φ^* układ trzech równań przemieszczeniowych Lamégo doprowadzić można do jednego równania, [1],

$$\nabla^2 \Phi^* = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_t T^*, \tag{2.8}$$

gdzie ν jest liczbą Poissona, a α_t jest współczynnikiem rozszerzalności liniowej cieplnej.

Korzystając ze wzoru (2.6) napiszemy

$$\nabla^2 \Phi^* = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_t \frac{T_0 d\Gamma}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\gamma z} \cos \alpha (x-\xi) \cos \beta (y-\eta) \, d\alpha \, d\beta$$

albo też

$$(2.9) \quad \begin{cases} \nabla^2 \Phi^* = A \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\vartheta \sin \vartheta z}{(\alpha^2+\beta^2+\vartheta^2)} \cos \alpha (x-\xi) \cos \beta (y-\eta) \, d\alpha \, d\beta \, d\vartheta, \\ A = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{2 T_0 d\Gamma}{\pi^3} \alpha_t . \end{cases}$$

Rozwiązujemy równanie (2.9) przy założeniu (zresztą dowolnym), że $\Phi^* = 0$ dla $z = 0$.

Przyjmiemy, że

$$(2.10) \quad \Phi^* = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty D(\alpha, \beta, \vartheta) \cos \alpha (x-\xi) \cos \beta (y-\eta) \sin \vartheta z \, d\alpha \, d\beta \, d\vartheta .$$

Rozwiązanie równania (2.9) otrzymamy w postaci

$$(2.11) \quad \Phi^* = -A \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\vartheta \sin \vartheta z}{(\alpha^2+\beta^2+\vartheta^2)^2} \cos \alpha (x-\xi) \cos \beta (y-\eta) \, d\alpha \, d\beta \, d\vartheta .$$

Po wykonaniu całkowań znajdujemy, że

$$(2.12) \quad \Phi^* = -\frac{A\pi^2}{8} \frac{z}{R} .$$

Znajomość funkcji Φ^* pozwala na wyznaczenie składowych stanu naprężenia ze wzorów [1]:

$$(2.13) \quad \begin{cases} \bar{\sigma}^*_{xx} = -2G\left(\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial z^2}\right) = -\frac{AG\pi^2}{4} \frac{z}{R^3}\left[1 + \frac{3(x-\xi)^2}{R^2}\right], \\ \bar{\sigma}^*_{yy} = -2G\left(\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial z^2}\right) = -\frac{AG\pi^2}{4} \frac{z}{R^3}\left[1 + \frac{3(y-\eta)^2}{R^2}\right], \\ \bar{\sigma}^*_{zz} = -2G\left(\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial y^2}\right) = -\frac{AG\pi^2}{4} \frac{z}{R^3}\left(1 - \frac{3z^2}{R^2}\right), \\ \bar{\sigma}^*_{xz} = 2G \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x \partial z} = \frac{AG\pi^2}{4} \frac{x-\xi}{R^3}\left(1 - \frac{3z^2}{R^2}\right), \\ \bar{\sigma}^*_{yz} = 2G \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial y \partial z} = \frac{AG\pi^2}{4} \frac{y-\eta}{R^3}\left(1 - \frac{3z^2}{R^2}\right), \\ \bar{\sigma}^*_{xy} = 2G \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x \partial y} = -\frac{3AG\pi^2}{4} \frac{(x-\xi)(y-\eta)z}{R^5} . \end{cases}$$

Zauważymy, że przy założeniu $\Phi^* = 0$ na brzegu $z = 0$ została spełniona tylko część warunków brzegowych. Mianowicie w płaszczyźnie $z = 0$ znika naprężenie normalne $\bar{\sigma}^*_{zz}$, nie znikają natomiast naprężenia styczne $\bar{\sigma}^*_{zx}$ i $\bar{\sigma}^*_{yz}$; w nieskończoności natomiast znikają wszelkie naprężenia.

Dla doprowadzenia do zera występujących w płaszczyźnie $z = 0$ naprężeń stycznych należy do składowych stanu naprężenia $(\bar{\sigma}^*_{ij})$ dodać składowe $(\bar{\bar{\sigma}}^*_{ij})$. Te ostatnie otrzymamy z rozwiązania dodatkowego zagadnienia, ale już zagadnienia izotermicznego. Mianowicie wyznaczyć należy w półprzestrzeni sprężystej składowe $(\bar{\bar{\sigma}}^*_{ij})$ wywołane działaniem naprężeń $-\bar{\sigma}^*_{xz}$, $-\bar{\sigma}^*_{yx}$ w płaszczyźnie $z = 0$.

Dla wyznaczenia składowych stanu naprężenia $(\bar{\bar{\sigma}}^*_{ij})$ posłużymy się funkcją B. G. Galerkina φ, która spełnić powinna równanie biharmoniczne, [2],

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0, \tag{2.14}$$

z następującymi warunkami brzegowymi:

(a) w płaszczyźnie $z = 0$

$$\bar{\bar{\sigma}}^*_{zz} = 0, \qquad \bar{\sigma}^*_{xz} + \bar{\bar{\sigma}}^*_{xz} = 0, \qquad \bar{\sigma}^*_{yz} + \bar{\bar{\sigma}}^*_{yz} = 0; \tag{2.15}$$

(b) w nieskończoności wszelkie składowe stanu naprężenia $(\bar{\bar{\sigma}}^*_{ij})$ powinny by równe zeru.

Po wyznaczeniu funkcji φ wyliczymy składowe stanu naprężenia $(\bar{\bar{\sigma}}^*_{ij})$ ze wzorów

$$\left\{\begin{aligned}
&\bar{\bar{\sigma}}^*_{xx} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right), \qquad \bar{\bar{\sigma}}^*_{yy} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right),\\
&\bar{\bar{\sigma}}^*_{zz} = \frac{\partial}{\partial z}\left[(1-\nu) \nabla^2 \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right],\\
&\bar{\bar{\sigma}}^*_{xy} = -\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \, \partial y \, \partial z}, \qquad \bar{\bar{\sigma}}^*_{xz} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \nu \nabla^2 \varphi\right),\\
&\bar{\bar{\sigma}}^*_{yz} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \nu \nabla^2 \varphi\right).
\end{aligned}\right. \tag{2.16}$$

Ostateczne składowe stanu naprężenia, spełniające wszelkie warunki brzegowe, otrzymamy (stosując superpozycję) z następujących wzorów:

$$\sigma^*_{ij} = \bar{\sigma}^*_{ij} + \bar{\bar{\sigma}}^*_{ij}. \tag{2.17}$$

Funkcję φ przyjmujemy w postaci

$$\varphi = \int_0^\infty \int_0^\infty Z(\alpha, \beta, z) \cos \alpha (x - \xi) \cos \beta (y - \eta) \, d\alpha \, d\beta, \tag{2.18}$$

gdzie

$$Z(\alpha, \beta, z) = [C(\alpha, \beta) + D(\alpha, \beta)\gamma z]\, e^{-\gamma z}, \qquad \gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Funkcja (2.18) spełnia równanie (2.14) oraz warunki w nieskończoności.

Z pierwszego warunku brzegowego grupy (2.15) otrzymujemy

$$C(\alpha, \beta) = -D(\alpha, \beta)(1 - 2\nu). \tag{2.19}$$

Dwa dalsze warunki grupy (2.15) sprowadzają się do jednego warunku

$$(1 - \nu)\gamma^2 Z(\alpha, \beta, 0) + \nu Z''(\alpha, \beta, 0) + \frac{A\pi G}{2}\frac{1}{\gamma} = 0. \tag{2.20}$$

Przedstawiliśmy tu naprężenia $\bar{\sigma}^*_{xz}$ i $\bar{\sigma}^*_{yz}$ dla $z = 0$ za pomocą całek

$$\left\{\begin{aligned} [\bar{\sigma}^*_{xz}]_{z=0} &= \frac{A\pi G}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\alpha}{\gamma}\sin\alpha(x - \xi)\cos\beta(y - \eta)\, d\alpha\, d\beta, \\ [\bar{\sigma}^*_{yz}]_{z=0} &= \frac{A\pi G}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\beta}{\gamma}\cos\alpha(x - \xi)\sin\beta(y - \eta)\, d\alpha\, d\beta. \end{aligned}\right. \tag{2.21}$$

Zważywszy, że $Z(\alpha, \beta, 0) = C(\alpha, \beta)$ oraz $Z''(\alpha, \beta, 0) = \gamma^2 D(\alpha, \beta)$, otrzymamy ze związku (2.20)

$$C(\alpha, \beta) = -\frac{A\pi G}{2\gamma^3}(1 - 2\nu), \qquad D(\alpha, \beta) = \frac{A\pi G}{2\gamma^3}. \tag{2.22}$$

Tak więc funkcja φ przyjmie postać

$$\varphi = -\frac{GA\pi}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty (1 - 2\nu - \gamma z)\frac{e^{-\gamma z}}{\gamma^3}\cos\alpha(x - \xi)\cos\beta(y - \eta)\, d\alpha\, d\beta, \tag{2.23}$$

a po scałkowaniu

$$\varphi = -\frac{GA\pi^2}{4}\left[2(1 - \nu)z\ln\frac{z + R}{r} - (1 - 2\nu)R\right], \tag{2.24}$$

gdzie $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$.

Znajomość funkcji φ pozwala już na wyznaczenie składowych stanu naprężenia $(\bar{\sigma}^*_{ij})$ ze wzorów (2.16):

$$(2.25)\quad \left\{\begin{aligned}
\bar{\bar{\sigma}}^*_{xx} &= -\frac{GA\pi^2 z}{4Rr^2}\left\{2(1-\nu)\left[1+\frac{(x-\eta)^2}{r^2}\left(\frac{z^2}{R^2}-3\right)\right]+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{r^2}{R^2}\left[1+\frac{3(x-\xi)^2}{R^2}\right]\right\},\\
\bar{\bar{\sigma}}^*_{yy} &= -\frac{GA\pi^2 z}{4Rr^2}\left\{2(1-\nu)\left[1+\frac{(x-\xi)^2}{r^2}\left(\frac{z^2}{R^2}-3\right)\right]+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{r^2}{R^2}\left[1+\frac{3(y-\eta)^2}{R^2}\right]\right\},\\
\bar{\bar{\sigma}}^*_{zz} &= -\frac{GA\pi^2}{4}\frac{z}{R^3}\left(1-\frac{3z^2}{R^2}\right),\qquad \bar{\bar{\sigma}}^*_{xz} = -\frac{GA\pi^2}{4}\frac{(x-\xi)}{R^3}\left(1-\frac{3z^2}{R^2}\right),\\
\bar{\bar{\sigma}}^*_{yz} &= -\frac{GA\pi^2}{4}\frac{(y-\eta)}{R^3}\left(1-\frac{3z^2}{R^2}\right),\\
\bar{\bar{\sigma}}^*_{xy} &= -\frac{GA\pi^2}{4}\frac{(x-\xi)(y-\eta)}{R^3}z\left[2(1-\nu)\frac{z^2-3R^2}{r^4}-\frac{3}{R^2}\right].
\end{aligned}\right.$$

Ostateczne składowe stanu naprężenia $(\bar{\bar{\sigma}}^*_{ij})$ otrzymamy na podstawie wzorów (2.17)

$$(2.26)\quad \left\{\begin{aligned}
\sigma^*_{xx} &= -\frac{GA\pi^2 z}{2Rr^2}(1-\nu)\left[1+\frac{(y-\eta)^2}{r^2}\left(\frac{z^2}{R^2}-3\right)\right],\\
\sigma^*_{yy} &= -\frac{GA\pi^2 z}{2Rr^2}(1-\nu)\left[1+\frac{(x-\xi)^2}{r^2}\left(\frac{z^2}{R^2}-3\right)\right],\\
\sigma^*_{xy} &= -\frac{GA\pi^2}{2}\frac{z(x-\xi)(y-\eta)}{R^3}(1-\nu)\frac{z^2-3R^2}{r^4},\\
\sigma^*_{zz} &= 0,\qquad \sigma^*_{xz} = 0,\qquad \sigma^*_{yz} = 0.
\end{aligned}\right.$$

Interesujący jest tu fakt znikania naprężenia normalnego σ^*_{zz} oraz naprężeń stycznych σ^*_{xz} i σ^*_{yz}. Znikają te naprężenia oczywiście również przy dowolnym rozkładzie temperatury $T_0(\xi, \eta)$ w obszarze Γ płaszczyzny $z=0$.

3. Znajomość funkcji T^* [wzór (2.7)] i funkcji σ^*_{ij} [wzór (2.26)] pozwala już na podstawie związków (1.1) i (1.2) wyznaczyć pole temperatur i składowe stanu naprężenia dla dowolnego rozkładu $T_0(\xi, \eta)$ na obszarze Γ. Przykładowo wyznaczymy funkcję T, wywołaną stanem $T_0=\text{const}$ na obszarze prostokąta o bokach $2a$ i $2b$, przy czym przyjmujemy, że osie symetrii prostokąta pokrywają się z osiami współrzędnych.

Otrzymamy, zgodnie ze wzorem (1.1), że

$$(3.1)\qquad T=\frac{T_0 z}{2\pi}\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b}\frac{d\xi\, d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{3/2}}.$$

Po wykonaniu całkowania znajdujemy, że

$$(3.2)\quad T=\frac{T_0}{2\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{(x-a)(y-b)}{zR_1}-\operatorname{arc\,tg}\frac{(x-a)(y+b)}{zR_2}-\right.$$
$$\left.-\operatorname{arc\,tg}\frac{(x+a)(y-b)}{zR_3}+\operatorname{arc\,tg}\frac{(x+a)(y+b)}{zR_4}\right],$$

gdzie

$$R_{1,2}=[(x-a)^2+(y\mp b)^2+z^2]^{1/2},\qquad R_{3,4}=[(x+a)^2+(y\mp b)^2+z^2]^{1/2}.$$

Łatwo sprawdzić, że T znika w nieskończoności oraz w płaszczyźnie $z=0$ poza obszarem prostokąta. Wewnątrz prostokąta: $T=T_0=$ const. W analogiczny sposób korzystając ze wzoru (1.2) oraz ze wzorów (2.26) wyznaczymy składowe stanu naprężenia σ_{ij}.

Rozpatrzmy jeszcze przypadek szczególny, mianowicie taki, w którym T_0 jest funkcją niezależną od η. W tym przypadku T^* jak i T jest funkcją jedynie zmiennych x, z. Funkcję T^* traktować należy jako pole temperatury wywołane działaniem stanu T_0 równomiernie rozłożonego wzdłuż prostej $x=\xi$. Otrzymamy tutaj

$$(3.3)\qquad T^*=\frac{T_0 z}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{3/2}}=\frac{T_0 z}{\pi\,[(x-\xi)^2+z^2]}.$$

Łatwo sprawdzić, że w tym przypadku składowe stanu naprężenia poza naprężeniem σ^*_{yy} będą równe zeru.

Naprężenie

$$(3.4)\qquad \sigma^*_{yy}=-2G\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t T^*=-\frac{2G}{\pi}\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t\frac{z}{(x-\xi)^2+z^2}$$

jest jedynie funkcją zmiennych x i z.

W przypadku gdy $T_0=$ const na paśmie nieograniczonym o szerokości a, leżącym na płaszczyźnie $z=0$, znajdziemy

$$T=\frac{T_0 z}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}\frac{d\xi}{(x-\xi)^2+z^2}=\frac{T_0}{\pi}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x-a}{z}-\operatorname{arc\,tg}\frac{x+a}{z}\right)=\frac{T_0}{\pi}(\vartheta_2-\vartheta_1).$$

Widoczne jest, że dla dowolnego punktu $N(x,z)$ leżącego na płaszczyźnie $z=0$ otrzymamy $\vartheta_2-\vartheta_1=\pi$, gdy punkt $N(x,y)$ leży w obrębie pasa oraz $\vartheta_2-\vartheta_1=0$, gdy punkt ten leży poza obrębem pasa.

W rozpatrywanym przypadku różnym od zera pozostaje naprężenie σ^*_{yy}, przy czym

$$\sigma^*_{yy}=-2G\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t\frac{T}{\pi}(\vartheta_2-\vartheta_1).$$

Literatura cytowana w tekście

[1] E. Melan i H. Parcus, *Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder,* Wiedeń 1953.

[2] B. G. Galerkin, *K woprosu ob issledowanji napriażenij i dieformacji w uprugom izotropnom tiele*, Dokł. AN SSSR, 1930.

[3] E. Sternberg i E. L. Mac Dowell, *On the Steady-State Thermoelastic Problem for the Half-Space (I),* IX. Intern. Congr. Appl. Mech., Book of Abstracts, Bruksela 1956.

Резюме

О НЕКОТОРОЙ СТАНЦИОНАРНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПРОБЛЕМЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ

В работе определяется поле температуры T и составляющие напряженного состояния (σ_{ij}) в упругом полупространстве, полагая, что на плоскости, ограничивающей полупространство, дана температура $T_0(\xi, \eta)$ в области Γ, а вне ее $T = 0$.

Задача решается при использовании функции Грина, определяя поле температур T^* и компоненты напряженного состояния (σ^*_{ij}) для случая, в котором в плоскости $z = 0$, $T = 0$ вне бесконечно малой области $d\Gamma$, в которой $T = T_0$. При использовании интегральных выражений (1.1) и (1.2) определяют T и σ_{ij} для произвольного распределения температуры $T_0(\xi, \eta)$ в области Γ.

Во второй части работы определяются функции Грина T^*, Φ^* и функция Галеркина φ, пользуясь при этом трансформацией Фурье. Полученные функции Грина для напряжения (σ^*_{ij}) характерны тем, что три составляющие этого состояния, а именно напряжения σ^*_{zz}, σ^*_{zx} и σ^*_{zy} равны нулю.

В третьей части работы рассматривается частный случай наличия $T_0 = \text{const}$ в прямоугольнике со сторонами $2a$ и $2b$, а также случай наличия постоянной температуры T_0 на бесконечной полосе шириной $2a$. В этом последнем случае лишь напряжение σ^*_{yy} принимает различные значения, неравняющиеся нулю.

Summary

A STEADY-STATE THREE-DIMENSIONAL THERMO-ELASTIC PROBLEM

The object of this paper is to determine the temperature field T and the stress components (σ_{ij}) in an elastic semi-space, assuming that the temperature in the region Γ of the plane bounding the semi-space is known and equal to $T_0(\xi, \eta)$, the region outside Γ being kept at $T = 0$.

The problem is solved by means of the Green's function. The temperature field T^* is determined and the stress components (σ^*_{ij}), in the

case where $T = 0$ over the whole plane $z = 0$ except an infinitely small region $d\Gamma$ where $T = T_0$. Using integral expressions (1.1) and (1.2), T and σ_{ij} are determined for any temperature distribution $T_0(\xi, \eta)$ inside the region Γ. In the second part of the paper, the G r e e n's functions T^* and Φ^* and the G a l e r k i n's function φ are determined, using the F o u r i e r transformation. The G r e e n's functions obtained for the stress (σ^*_{ij}) are characterized by the fact that the three components σ^*_{zz}, σ^*_{zx} and σ^*_{zy} are zero.

In the third part of the paper, consideration is given to the particular case of $T_0 = \text{const}$ over a rectangle whose sides are $2a$ and $2b$, and that of $T_0 = \text{const}$ over an infinite strip of width $2a$. In the latter case, only the stress σ^*_{yy} differs from zero.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 marca 1957 r.