XV KONFERENCJA NAUKOWA KOMITETU INŻYNIERII PAN
I KOMITETU NAUKI PZITB

REFERATY I KOMUNIKATY

Tom I

Część I – TEORIA KONSTRUKCJI

Część II – KONSTRUKCJE METALOWE

POZNAŃ – 1969 – KRYNICA

XV KONFERENCJA NAUKOWA KOMITETU INŻYNIERII PAN
I KOMITETU NAUKI PZITB - KRYNICA 1969

Prof. dr inż. Witold Nowacki
Warszawa

PŁASKIE ZAGADNIENIA TERMOSPRĘŻYSTOŚCI

1. WPROWADZENIE

W niniejszej pracy zajmiemy się płaskim stanem odkształcenia i płaskim stanem naprężenia, wywołanym w ośrodku sprężystym mikropolarnym (w ośrodku Cosseratów) działaniem temperatury. Rozpatrywać będziemy jedynie zagadnienie stacjonarnego przepływu ciepła.

Zanim przejdziemy do zagadnienia płaskiego, omówimy pokrótce ogólny stan naprężenia w ciele mikropolarnym.

Działanie temperatury daje powód do powstania w ciele pola przemieszczeń $\underline{u}(\underline{x},t)$ oraz obrotów $\underline{\varphi}(\underline{x},t)$. Stan deformacji ciała opisany jest przez dwa niesymetryczne tensory, tensor deformacji γ_{ji} i tensor krzywiznowo-skrętny $\varkappa_{ji}$. Tensory te związane są z wielkościami $\underline{u}$ i $\underline{\varphi}$ w sposób następujący [1] ÷ [3]

$$\gamma_{ji} = u_{i,j} - \epsilon_{kji}\varphi_k, \quad \varkappa_{ji} = \varphi_{i,j}, \quad i,j,k = 1,2,3. \tag{1.1}$$

Stan naprężenia charakteryzowany jest przez dwa niesymetryczne tensory; tensor naprężeń (siłowych) σ_{ji} oraz tensor naprężeń momentowych μ_{ji}. Tensory te są związane z tensorami γ_{ji} i $\varkappa_{ji}$ następującymi równaniami konstytutywnymi [4]

$$\sigma_{ji} = (\mu+\alpha)\gamma_{ji} + (\mu-\alpha)\gamma_{ji} + (\lambda\gamma_{kk} - \nu\theta)\delta_{ij}, \tag{1.2}$$
$$\mu_{ji} = (\gamma+\varepsilon)\varkappa_{ji} + (\gamma-\varepsilon)\varkappa_{ij} + \beta\varkappa_{kk}\delta_{ij}, \quad ij,k = 1,2,3.$$

Równania te należy traktować jako rozszerzone na ośrodek mikropolarny równania Duhamel'a-Neumann'a. W związkach (1.2) μ, λ są stałymi Lamé-go, a $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ dalszymi stałymi materiałowymi. Dalej jest $\nu = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$, gdzie α_t jest współczynnikiem liniowej rozszerzalności termicznej.

Jeśli (1.2) i (1.1) wstawić do równań równowagi

$$\sigma_{ji,j} = 0, \quad \epsilon_{ijk}\sigma_{jk} + \mu_{ji,j} = 0, \tag{1.3}$$

to otrzymamy układ równań w przemieszczeniach i obrotach

$$(1.4)\qquad (\mu+\alpha)\nabla^2\underline{u} + (\lambda+\mu-\alpha)\operatorname{grad}\operatorname{div}\underline{u} + 2\alpha\operatorname{rot}\underline{\varphi} = \nu\operatorname{grad}\theta,$$

$$(\gamma+\varepsilon)\nabla^2\underline{\varphi} - 4\alpha\underline{\varphi} + (\beta+\gamma-\varepsilon)\operatorname{grad}\operatorname{div}\underline{\varphi} + 2\alpha\operatorname{rot}\underline{u} = 0,\quad \nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Występujący w tym równaniu wzrost temperatury θ (wzrost odniesiony do temperatury stanu naturalnego), wyznaczymy z równania przewodnictwa cieplnego

$$(1.5)\qquad \nabla^2\theta = -\frac{W}{\lambda_0}.$$

Tutaj W jest ilością ciepła, wydzieloną w jednostce czasu i w jednostce objętości a λ_0 jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego.

Do równań (1.4) (1.5) należy dodać warunki brzegowe, które sformułujemy w postaci:

$$(1.6)\qquad \begin{gathered} p_i = \sigma_{ji}\, n_j = 0, \quad m_i = \mu_{ji}\, n_j = 0, \\ \lambda_0 \frac{\partial\theta}{\partial n} = \lambda_1(\vartheta - \theta). \end{gathered}$$

Pierwsze dwa warunki odnoszą się do braku obciążeń (sił i momentów) na powierzchni A, ograniczającej ciało. Trzeci warunek opisuje swobodną wymianę ciepła na powierzchni A. Tutaj ϑ jest temperaturą ośrodka otaczającego ciało, λ_0 jest współczynnikiem wewnętrznego, — a λ_1 zewnętrznego przewodnictwa cieplnego.

Rozważania dalsze przeprowadzimy dla płaskiego stanu odkształcenia. W końcu pracy podamy przejście do płaskiego stanu naprężenia.

2. PŁASKI STAN ODKSZTAŁCENIA. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE I ICH ROZWIĄZANIE

W płaskim stanie odkształcenia wszelkie przyczyny i skutki są zależne od dwu jedynie zmiennych. Przyjmując, że pole przemieszczeń i obrotów nie zależy od zmiennej x_3, mamy

$$(2.1)\qquad \underline{u} \equiv (u_1, u_2, 0), \qquad \underline{\varphi} \equiv (0, 0, \varphi_3),$$

gdzie u_1, u_2, φ_3 są funkcjami zmiennych x_1, x_2.

Zgodnie z definicją (1.1) otrzymamy dla płaskiego stanu odkształcenia następujące składowe tensorów γ_{ji} oraz $\varkappa_{ji}$:

(2.2) $$\gamma_{11} = \partial_1 u_1, \quad \gamma_{22} = \partial_2 u_2, \quad \gamma_{12} = \partial_1 u_2 - \varphi_3,$$
$$\gamma_{21} = \partial_2 u_1 + \varphi_3, \quad \varkappa_{13} = \partial_1 \varphi_3, \quad \varkappa_{23} = \partial_2 \varphi_3.$$

Pozostałe wielkości γ_{ji} i $\varkappa_{ji}$ są równe zeru. Ze związków (1.2) otrzymamy

$$\sigma_{ji} = (\mu+\alpha)\gamma_{ji} + (\mu-\alpha)\gamma_{ij} + (\lambda\gamma_{kk} - \nu\theta)\delta_{ij}, \quad i,j=1,2,$$

(2.3) $$\sigma_{33} = \lambda\gamma_{kk} - \nu\theta$$
$$\mu_{j3} = (\gamma+\varepsilon)\varkappa_{j3}, \quad \gamma_{kk} = \gamma_{11} + \gamma_{22}, \quad i,j=1,2.$$

Tutaj $\gamma_{kk} = \gamma_{11} + \gamma_{22}$. Stan naprężenia σ_{ji} oraz stan naprężeń momentowych μ_{ji} charakteryzowany jest następującymi macierzami

(2.4) $$\underline{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{vmatrix} \quad \underline{\mu} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \mu_{13} \\ 0 & 0 & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & 0 \end{vmatrix}$$

Równania równowagi (1.3) ograniczają się dla płaskiego stanu odkształcenia do trzech równań

(2.5) $$\partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{21} = 0,$$
$$\partial_1 \sigma_{12} + \partial_2 \sigma_{22} = 0,$$
$$\sigma_{12} - \sigma_{21} + \partial_1 \mu_{13} + \partial_2 \mu_{23} = 0.$$

Eliminacja naprężeń z równań (2.5) przy uwzględnieniu (2.2) i (2.3) prowadzi do układu trzech równań

(2.6) $$(\mu+\alpha)\nabla_1^2 u_1 + (\lambda+\mu-\alpha)\partial_1 e + 2\alpha\partial_2\varphi_3 = \nu\partial_1\theta,$$
$$(\mu+\alpha)\nabla_1^2 u_2 + (\lambda+\mu-\alpha)\partial_2 e - 2\alpha\partial_1\varphi_3 = \nu\partial_2\theta,$$
$$(\gamma+\varepsilon)\nabla_1^2\varphi_3 - 4\alpha\varphi_3 + 2\alpha(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) = 0.$$

Tutaj

$$\nabla_1^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \qquad e = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2.$$

W układzie współrzędnych biegunowych mamy do czynienia z następującymi wektorami przemieszczeń i obrotów

(2.7) $$\underline{u} \equiv (u_r, u_t, 0), \quad \underline{\varphi} = (0,0,\varphi_z)$$

W układzie tym równania (2.6) przyjmują postać

$$(2.8)\quad (\mu+\alpha)\left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\Theta}{\partial\Theta}\right) + (\partial+\mu-\alpha)\frac{\partial e}{\partial r} + 2\alpha\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_z}{\partial\Theta} = \nu\frac{\partial\Theta}{\partial r},$$

$$(\mu+\alpha)\left(\nabla^2 u_\Theta - \frac{U\Theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\Theta}\right) + (\lambda+\mu-\alpha)\frac{\partial e}{r\partial\Theta} - 2\alpha\frac{\partial\varphi_z}{\partial r} = \nu\frac{\partial\Theta}{r\partial\Theta},$$

$$\left[(\gamma+\varepsilon)\nabla^2 - 4\alpha\right]\varphi_z + \frac{2\alpha}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(u_\Theta r) - \frac{\partial\varphi_r}{\partial\Theta}\right) = 0.$$

Tutaj

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}, \quad e = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\Theta}{\partial r}.$$

W przypadku zagadnienia jednowymiarowego, odnoszącego się do przestrzeni, półprzestrzeni i warstwy sprężystej, gdy $u_1 = u_1(x_1)$, $u_2 = 0$, z układu równań (2.6) pozostaje nam jedynie równanie:

$$(2.9)\qquad (\lambda+2\mu)\,\partial_1^2 u_1 = \nu\,\partial_1\Theta, \qquad \varphi_3 = 0.$$

W przypadku deformacji osiowo-symetrycznej, gdy $u_r = u_r(r)$, $u_\Theta = 0$, układ równań (2.8) redukuje się do jednego równania

$$(2.10)\qquad (\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right)u_r = \nu\frac{\partial\Theta}{\partial r}.$$

Otrzymaliśmy tu równania (2.9) (2.10) identyczne z równaniami klasycznej termosprężystości w przypadku zagadnień jednowymiarowych. Tensor naprężenia σ_{ji} jest symetryczny; tensor naprężeń momentowych μ_{ji} jest równy zeru.
Wróćmy do równań (2.6) i wprowadźmy do nich wektor

$$(2.11)\qquad \underline{\boldsymbol{\zeta}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\underline{\mathbf{u}} - \underline{\boldsymbol{\varphi}}$$

albo

$$\zeta_1 = 0, \quad \zeta_2 = 0, \quad \zeta_3 = \frac{1}{2}(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) - \varphi_3.$$

Równania (2.6) przyjmą postać

$$\mu\nabla_1^2\mu_1 + (\lambda+\mu)\,\partial_1 e - 2\alpha\,\partial_2\zeta_3 = \nu\partial_1\Theta,$$

$$(2.12)\qquad \mu\nabla_1^2 u_2 + (\lambda+\mu)\partial_2 e + 2\alpha\,\partial_1\zeta_3 = \nu\partial_2\Theta,$$

$$\left[(\gamma+\varepsilon)\nabla_1^2 - 4\alpha\right]\zeta_3 - \frac{1}{2}(\gamma+\varepsilon)\nabla_1^2(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) = 0.$$

Rozwiązanie tego układu równań złożymy z dwu części

$$(2.13)\qquad u_1 = u_1' + u_1'', \qquad u_2 = u_2' + u_2'',$$
$$\varsigma_3 = \varsigma_3' + \varsigma_3'', \qquad \varsigma_3' = 0.$$

Tutaj funkcje z „primem" winny być całkami szczególnymi równań niejednorodnych (2.12), a funkcje z dwoma „primami" winny być rozwiązaniami ogólnymi równań jednorodnych (2.12). Wstawiając (2.13) do (2.12), otrzymamy

$$\mu\nabla_1^2 u_1' + (\lambda+\mu)\,\partial_1 e' = r\,\partial_1 \Theta,$$
$$(2.14)\qquad \mu\nabla_1^2 u_2' + (\lambda+\mu)\,\partial_2 e' = r\,\partial_2 \Theta,$$
$$\nabla_1^2(\partial_1 u_2' - \partial_2 u_1') = 0, \quad \varsigma_3' = 0,$$

oraz

$$\mu\nabla_1^2 u_1'' + (\lambda+\mu)\partial_1 e'' - 2\alpha\,\partial_2 \varsigma_3'' = 0,$$
$$\mu\nabla_1^2 u_2'' + (\lambda+\mu)\partial_2 e'' + 2\alpha\,\partial_1 \varsigma_3'' = 0,$$
$$(2.15)\qquad \left[(\gamma+\varepsilon)\nabla_1^2 - 4\alpha\right]\varsigma_3'' - \tfrac{1}{2}(\gamma+\varepsilon)\nabla_1^2(\partial_1 u_2'' - \partial_2 u_1'') = 0.$$

Otrzymaliśmy równania $(2.14)_{1,2}$ identyczne z równaniami klasycznej termosprężystości [5]. Warunek $\varsigma_3' = 0$ prowadzi do zależności $\varphi_3' = \frac{1}{2}(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1')$, słusznej dla klasycznej teorii sprężystości. Warunek $(2.14)_3$ będzie spełniony przez przyjęcie przemieszczeń u_1', u_2' w postaci

$$(2.16)\qquad u_1' = \partial_1\phi, \quad u_2' = \partial_2\phi.$$

Wstawiając (2.16) do równań $(2.14)_{1,2}$ otrzymamy po scałkowaniu równanie Poissona dla funkcji ϕ:

$$(2.17)\qquad \nabla_1^2\phi = m\,\Theta, \quad m = \frac{\nu}{\lambda+2\mu}.$$

Funkcja ϕ jest całką szczególną układu równań (2.14); jest tym samym całką szczególną równań różniczkowych (2.12).

Naprężenia i odkształcenia z „primami" wyrazimy przy pomocy funkcji ϕ w sposób następujący:

$$(2.18)\qquad \gamma_{ji}' = \phi_{,ij}, \quad \varkappa_{ji}' = 0, \quad \sigma_{ji}' = 2\mu\,(\phi_{,ij} - \delta_{ij}\nabla_1^2\phi), \quad \mu_{ji}' = 0.$$

W przypadku obszaru nieskończonego, funkcja ϕ wyraża się wzorem [5]

$$\phi(\xi_1, \xi_2) = -\frac{m}{4\pi}\int_V \frac{\theta(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2}{r(x_1,x_2;\, \xi_1, \xi_2)}, \tag{2.19}$$

gdzie

$$r = \left[(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2\right]^{1/2}.$$

Jeśli obszar jest ograniczony to należy rozwiązać równanie (2.17) z warunkiem $\phi = 0$ na brzegu.

Pozostaje jeszcze rozwiązać układ równań (2.15), dotyczący już zagadnienia izotermicznego ($\theta = 0$). Jest to typowe zagadnienie brzegowe teorii sprężystości ośrodka mikropolarnego. Jeśli zakładamy, że brzeg jest nieobciążony, to warunki brzegowe dla układu równań przyjmiemy w postaci

$$(\sigma_{ji} + \sigma''_{ji})\, n_j = 0, \quad \mu''_{ji}\, n_j = 0, \quad i,j=1,2. \tag{2.20}$$

Znając już przemieszczenia u''_1, u''_2 i obrót φ''_3 wyznaczymy naprężenia σ''_{ji}, σ''_{ji} ze wzorów (2.3), (oczywiście kładąc w nich $\theta = 0$). W następnym punkcie podamy odmienną drogą wyznaczania naprężeń σ''_{ji}, μ''_{ji}, przy użyciu funkcji naprężeń, drogę szczególnie dogodną, gdy brzeg ciała ma być wolny od naprężeń.

3. FUNKCJE NAPRĘŻEŃ ZAGADNIENIA TERMOSPRĘŻYSTEGO

Wróćmy do wzorów (2.2). Łatwo zauważymy, że między wielkościami w nich występującymi zachodzą następujące zależności

$$\partial_1 \gamma_{21} - \partial_2 \gamma_{11} - \varkappa_{13} = 0, \quad \partial_1 \gamma_{22} - \partial_2 \gamma_{12} - \varkappa_{23} = 0, \tag{3.1}$$
$$\partial_1 \varkappa_{23} - \partial_2 \varkappa_{13} = 0.$$

Zależnościom tym można nadać postać

$$\partial_1^2 \gamma_{22} + \partial_2^2 \gamma_{11} = \partial_1 \partial_2(\gamma_{12} + \gamma_{21}),$$

$$\partial_2^2 \gamma_{12} - \partial_1^2 \gamma_{21} = \partial_1 \partial_2(\gamma_{22} - \gamma_{11}) - (\partial_1 \varkappa_{13} + \partial_2 \varkappa_{23}), \tag{3.2}$$

$$\partial_1 \varkappa_{23} - \partial_2 \varkappa_{13} = 0.$$

Są to równania zwartości dla zagadnienia dwuwymiarowego w ośrodku mikropolarnym. Rozwiązując zależności (2.3) względem wielkości γ_{ji}, i $\varkappa_{ji}$

$(i,j = 1,2)$ i wstawiając je do równań (3.2) otrzymamy trzy równania w naprężeniach [6]

$$\partial_1^2 \sigma_{11} + \partial_2^2 \sigma_{22} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \nabla_1^2(\sigma_{11}+\sigma_{22}) + \frac{\mu\nu}{\lambda+\mu} \nabla_1^2 \Theta = \partial_1\partial_2 (\sigma_{12}+\sigma_{21}),$$

$$(3.3) \qquad (\partial_2^2 - \partial_1^2)(\sigma_{12}+\sigma_{21}) + \frac{\mu}{\alpha} \nabla_1^2(\sigma_{12}-\sigma_{21}) = 2\,\partial_1\,\partial_2(\sigma_{22}-\sigma_{11}) +$$

$$- \frac{4\mu}{\gamma+\varepsilon}(\partial_1 \mu_{13} + \partial_2 \mu_{23}), \qquad \partial_1 \mu_{23} - \partial_2 \mu_{13} = 0.$$

Wprowadźmy funkcje naprężeń F i φ i zwiążmy je z naprężeniami następującymi związkami [7]:

$$\sigma_{11} = \partial_2^2 F - \partial_1\partial_2\varphi, \quad \sigma_{22} = \partial_1^2 F + \partial_1\partial_2\varphi,$$

$$(3.4) \qquad \sigma_{12} = -\partial_1\partial_2 F - \partial_2^2\varphi, \quad \sigma_{21} = -\partial_1\partial_2 F + \partial_1^2\varphi,$$

$$\mu_{13} = \partial_1\varphi, \qquad \mu_{23} = \partial_2\varphi.$$

Wstawiając (3.4) do równań (2.5) stwierdzimy, że równania równowagi są tożsamościowo spełnione. Wstawiając (3.4) do równań zwartości $(3.3)_{1,2}$ otrzymamy następujące równania

$$(3.5) \qquad \nabla_1^2 \nabla_1^2 F + \varkappa \nabla_1^2 \Theta = 0, \quad \nabla_1^2(1 - l^2 \nabla_1^2)\varphi = 0,$$

gdzie

$$l^2 = \frac{(\alpha+\mu)(\gamma+\varepsilon)}{4\alpha\mu}, \quad \varkappa = \frac{2\mu\nu}{\lambda+2\mu}.$$

Funkcje F i φ nie są od siebie niezależne, związane są relacjami $(3.1)_{1,2}$. Z zależności tych otrzymamy

$$-\partial_1(1 - l^2 \nabla_1^2)\varphi = A\partial_2 \nabla_1^2 F + B\,\partial_2\,\Theta,$$

$$(3.6) \qquad \partial_2(1 - l^2 \nabla_1^2)\varphi = A\partial_1 \nabla_1^2 F + B\,\partial_1\,\Theta.$$

Należy jeszcze podać warunki brzegowe dla równań (3.5). Zakładamy, że brzeg s jest wolny od obciążeń. Warunek ten wyrażają równania:

$$(3.7) \qquad \sigma_{ji}\, n_j = 0, \quad \mu_{3j}\, n_j = 0, \quad j = 1,2, \quad x \in s,$$

które przez wprowadzenie funkcji φ i F prowadzą do równań:

(3.8) $$\frac{d}{ds}(\partial_2 F - \partial_1\varphi) = 0, \quad \frac{d}{ds}(\partial_1 F + \partial_2\varphi) = 0, \quad \frac{d\varphi}{dn} = 0.$$

Wielkości $\frac{d}{ds}$, $\frac{d}{dn}$ są pochodnymi wzdłuż brzegu s i wzdłuż normali do tego brzegu.

Rozwiązanie równań (3.5) możemy przedstawić w postaci

(3.9) $$F = F' + F'', \quad \varphi = \varphi' + \varphi'', \quad \varphi' = 0.$$

Tutaj F' jest całką szczególną równania

(3.10) $$\nabla_1^2 \nabla_1^2 F' + \varkappa\nabla_1^2 \theta = 0, \quad \varphi' = 0.$$

Łatwo sprawdzić, że funkcje F', φ' prowadzą do symetrycznego tensora naprężenia

(3.11) $$\sigma'_{ji} = \sigma'_{ij} = -(\partial_i \partial_j - \delta_{ij} \nabla_1^2) F', \quad \mu'_{ji} = 0.$$

Funkcja naprężeń F' jest jednocześnie całką szczególną dla ośrodka Hooke'a; rozwiązaniem szczególnym równania klasycznej termosprężystości.

Spełnione są wreszcie warunki (3.6), które przyjmują tu postać

(3.12) $$\partial_1(\nabla_1^2 F' + \varkappa\theta) = 0, \quad \partial_2(\nabla_1^2 F' + \varkappa\theta) = 0,$$

i prowadzą do równania (3.10).

Funkcje F'', φ'' winny spełniać równania

(3.13) $$\nabla_1^2 \nabla_1^2 F'' = 0, \quad \nabla_1^2(1 - l^2 \nabla_1^2)\varphi'' = 0,$$

z warunkami brzegowymi:

(3.14) $$(\sigma'_{ji} + \sigma''_{ji}) n_j = 0, \quad \mu''_{3j} n_j = 0, \quad j=1,2.$$

Spełnione winny być również zależności

(3.15) $$\begin{aligned} -\partial_1(1 - l^2 \nabla_1^2)\varphi'' &= A\partial_2 \nabla_1^2 F'', \\ \partial_2(1 - l^2 \nabla_1^2)\varphi'' &= A\partial_1 \nabla_1^2 F''. \end{aligned}$$

Ogólnie dowiedliśmy, że w zagadnieniach płaskiego stanu odkształcenia rozwiązanie zagadnienia termosprężystego złożyć można z dwu części:

a) z rozwiązania szczególnego niejednorodnych równań klasycznej termosprężystości oraz

b) z rozwiązania ogólnego jednorodnych równań różniczkowych mikropolarnej sprężystości (przy $\theta = 0$). W szczególnych przypadkach zagadnień jednowymiarowych oraz w zagadnieniach dwuwymiarowych w ciałach nieograniczonych wystarczy nam rozwiązanie wskazane pod a).

Wróćmy jeszcze do układu równań (3.5). Rozpatrzmy nieskończony, jednospójny walec, ogrzany na pobocznicy. Jeśli w walcu brak będzie źródeł ciepła, to $\nabla_1^2 \theta = 0$. Równania $(3.5)_{1,2}$ stają się jednorodne. Jednorodność równań różniczkowych (3.5) oraz warunków brzegowych (3.8) prowadzi do stwierdzenia, że $F \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$ w całym obszarze walca. Fakt ten pociąga za sobą brak naprężeń σ_{ji}, μ_{j3}, $j = 1,2$, co wynika ze związków (3.4). Jedynym, różnym od zera naprężeniem pozostaje σ_{33}. Dane jest ono wzorem (2.3)

$$\sigma_{33} = \lambda\gamma_{kk} - \nu\theta = -\frac{\mu(3\lambda+2\mu)\alpha_t}{\lambda+\mu} = -E\alpha_t\,\theta\,. \tag{3.16}$$

Uzyskany tu wynik głosi, że walec nieskończony może się rozszerzać bez naprężeń w płaszczyźnie x_1, x_2. Naprężenie normalne σ_{33} jest różne od zera; jest proporcjonalne do temperatury $\theta(x_1,x_2)$.

Wykazaliśmy w ten sposób słuszność znanego twierdzenia I.N.Muszeliszwili również i do ośrodka mikropolarnego [8].

Należy jeszcze podać wzory dla płaskiego stanu naprężenia, dla tarczy o grubości h. Wszelkie niżej podane wielkości σ_{ji}, μ_{ji}, θ są średnimi wartościami wzdłuż grubości h. W płaskim stanie odkształcenia jest $\sigma_{j3} = 0$, $j = 1,2,3$. Związki między naprężeniami i deformacjami dane są wzorami

$$\sigma_{ji} = (\mu+\alpha)\,\gamma_{ji} + (\mu-\alpha)\,\gamma_{ij} + (\lambda'\gamma_{kk} - \nu'\theta)\,\delta_{ij}, \tag{3.17}$$

$$\mu_{j3} = (\gamma+\varepsilon)\,\varkappa_{j3}, \qquad \gamma_{kk} = \gamma_{11} + \gamma_{22}, \quad i,j,k = 1,2.$$

Tutaj

$$\lambda' = \frac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu}, \quad \nu' = \frac{(3\lambda+2\mu)2\mu\alpha_t}{\lambda+2\mu}, \quad \gamma_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\,\gamma_{kk}.$$

W miejsce równania $(3.5)_1$ mamy

$$\nabla_1^2\,\nabla_1^2 F + \varkappa'\nabla_1^2\,\theta = 0, \quad \varkappa' = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)\alpha_t}{\lambda+\mu}, \tag{3.18}$$

podczas gdy równanie $(3.5)_2$ pozostaje bez zmian.

Równanie przewodnictwa cieplnego, przy założeniu swobodnej wymiany ciepła w płaszczyznach $x_3 = \pm h$, przyjmuje następującą postać [9]

$$\nabla_1^2\,\theta - \varepsilon_0\,\theta = -\varepsilon_0\vartheta - \frac{W}{\lambda_0}, \quad \varepsilon_0 = \frac{2\lambda_1}{\lambda_0 h}\,. \tag{3.19}$$

Tutaj Θ jest średnią temperatury wzdłuż grubości tarczy, a W odpowiednio średnią wartością wydajności źródła ciepła, ϑ jest temperaturą otaczającego ośrodka, λ_0 współczynnikiem wewnętrznego, a λ_1 zewnętrznego przewodnictwa cieplnego.

Literatura

[1] Kuwczyński E.W., Aero E.L.: „Kontynualna teoria niesymetrycznej sprężystości" (w języku rosyjskim). Fizyka Twierdowo Tieła, 5 (1963)

[2] Palmow N.A.: „Podstawowe równania niesymetrycznej sprężystości" (w języku rosyjskim). Prikł. Mat. Mech. 28 (1964).

[3] Eringen A.C., Suhubi E.S.: „Nonlinear theory of micro-elastic solids". Part I, Int. J. Eng. Sci. 2 (1964), 189, part II - Int. J. Eng. Sci. 2 (1964), 389.

[4] Nowacki W.: „Couple-stresses in the theory of thermoelasticity" Proc. of IUTAM Symposium on Irrevenible Aspects in Continuum Mechanics, Vienna. Springer-Verlag (1966).

[5] Nowacki W.: „Zagadnienie termosprężystości" PWN Warszawa, 1960.

[6] Schaefer H.: „Versuch einer Elastisitätstheorie des zweidimensionalen ebenen Cosserat Kontinuums". Misz. Angew. Math. Festschift Tollmien. Berlin 1962, Akademie Verlag.

[7] Mindlin R.D., Tiersten H.F.: „Effects of couple-stresses in linear elasticity". Arch. Rat. Mech. Anal. 11 (1962).

[8] Muszeliszwili J.N.: „Podstawowe zagadnienia matematycznej teorii sprężystości" (w jęz. rosyjskim). Moskwa i Leningrad, 1948, wydanie III.

[9] Nowacki W.: „Mechanika Budowli, Tom III", PWN Warszawa, 1966 str. 498.

PLANE PROBLEMS OF THERMOELASTICITY

Summary

In the present paper relations and differential equations are derived for the plane problem of thermoelasticity in a micropolar medium(Cosserat medium). Differential equations in displacements and rotations are given as well as differential equations describing the function of stress. It has been shown that the solution of the thermoelastic problem may be a composition of two parts, namely

a) the particular solution of non-homogeneous differential equations of classical thermoelasticity and

b) the general solution of homogeneous differential equations of micropolar isothermal elasticity.

In particular cases discussed in this paper the solution indicated in a) proved to be sufficient.