

Maschinenbau TECHNIK



TECHNISCH-WISSENSCHAFTLICHE ZEITSCHRIFT
FÜR WERKZEUGMASCHINEN-, SCHWERMASCHINEN-, KRAFT- UND ARBEITSMASCHINEN-
SOWIE SPEZIALMASCHINENBAU

JAHRESINHALTSVERZEICHNIS

1954

DRITTER JAHRGANG



VEB VERLAG TECHNIK · BERLIN NW 7 · UNTER DEN LINDEN 12

Über einige Fälle der Verdrehung (Torsion) von Stäben*)

Von W. NOWACKI¹⁾

DK620.1.05

Gegenstand der Arbeit ist die Ermittlung genauer Lösungen einer Anzahl Festigkeitsfragen gerader Stäbe mit rechteckigem Querschnitt, in denen schmale Schlitz eingeschnitten sind — wie auch bei Stäben, deren Querschnitt aus mehreren Rechtecken besteht. Es werden Stäbe mit dem Querschnitt eines Kreisringstückes und des eines Kreises, die mit schmalen Schlitz versehen sind, behandelt.

1. Wir setzen für die im Aufsatz angenommenen Stäbe eine anisotropisch-orthogonale (orthotropische) Struktur des Werkstoffes voraus.

Wie aus der Theorie der Verdrehung gerader Stäbe bekannt [1], sind die Komponenten der Schubspannung τ_{xz} und τ_{xy} (Achse z ist zur Erzeugenden des Stabes parallel), die in dem Stab zur Wirkung kommen, eine Funktion der Flächenverdrehung $\psi(x, y)$ in der Differentialgleichung:

$$\frac{1}{G_{23}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{G_{13}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2 \vartheta \quad (1.1)$$

mit der Randbedingung $\psi = \text{const}$ (im Falle eines kompakten, vollen Bereiches des Stabquerschnittes ist $\psi = 0$). Die Komponenten der Schubspannungen haben den Wert:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.2)$$

In der Gl. (1.1) sind G_{13} und G_{23} Formänderungs-Module (Schubmodule) in den Richtungen y und x der orthotropischen Struktur des Stabes, ϑ ist der Verdrehungswinkel. Den unbekannten Verdrehungswinkel des Stabes ermitteln wir aus der Gleichung:

$$M = 2 \iint \psi \, dx \, dy = \vartheta C, \quad (1.3)$$

wobei M Verdrehungsmoment und C Verdrehungssteifigkeit sind.

Mit Rücksicht auf eine verständlichere mechanische Auslegung bestimmter mathematischer Vorgänge werden wir solche Erscheinungen beachten, die sich durch eine der Gl. (1.1) analoge Differentialgleichung darstellen lassen und zwar, Erscheinungen der Durchwölbung einer entlang der Randkonturen aufliegenden Membrane von denselben senkrecht zueinander wirkenden Spannungen S_x und S_y im Spannungszustand. Dies erfolgt, wenn die Spannungen durch den konstanten Druck p belastet werden. Die Durchwölbungsfläche solch einer Membrane erhalten wir durch die Lösung der Gleichung:

$$S_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + S_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -p \quad (1.4)$$

mit der Grenzbedingung $w = 0$ auf den Umfang der Membranfläche. Aus dem Vergleich der Differentialgleichungen (1.1) und (1.4) und aus den analogen Grenzwertbedingungen geht hervor, daß man aus den Fragen der Durchwölbung einer Membrane auch tatsächlich zu der Frage der Torsion gerader Stäbe übergehen kann.

Wenn wir die Spannungen so wählen, daß

$$\frac{S_x}{S_y} = \frac{G_{13}}{G_{23}} = \lambda^2, \quad (1.4.1)$$

kann man die Funktion $\psi(x, y)$ als die Funktion der Durchwölbung der Membrane bei konstanter Belastung $2 G_{13} S_y \vartheta$ behandeln.

Wir haben also folgenden Zusammenhang:

$$\psi = c w, \quad (1.5)$$

wobei:

$$c = \frac{2 G_{13} \vartheta S_y}{P}$$

Daraus sind die Schubspannungen:

$$\tau_{xz} = C \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (1.5.1)$$

zu bestimmen.

2. Betrachten wir jetzt eine gleichmäßig aufgespannte rechteckige Membrane auf die im Punkt ξ, η die geballte Kraft P wirkt. Wir entwerfen nunmehr für die Membrane für einen beliebigen Punkt (x, y) eine Einflußfläche der Durchwölbung. Diese wird als $w(x, y; \xi, \eta)$ bezeichnet. Sie wird gleichzeitig eine Greensche Funktion der rechteckigen Membrane bilden.

Bevor wir zur Lösung der gestellten Aufgabe übergehen, ermitteln wir erst die Greensche Funktion für ein endlos langes Band von der Breite a , auf das die geballte Kraft P wirkt. Bezeichnen wir diese Greensche Funktion mit \bar{w}_1 . Für $y > 0$ erhalten wir hier für die Spannungen S_x und S_y die homogene Differentialgleichung:

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial y^2} = 0 \quad (2.1)$$

wo:

$$\lambda^2 = \frac{S_x}{S_y}$$

Da entlang der Geraden $x = 0$ und $x = a$ die Durchwölbung gleich Null ist, können wir die obige Gleichung wie folgt darstellen:

$$\bar{w}_1 = \sum_{n=1, 2, \dots} Y_n(y) \sin a_n x, \quad \left(a_n = \frac{n\pi}{a}\right) \quad (2.2)$$

Auf diese Weise überführen wir die Gl. (2.1) in eine gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 Y_n}{dy^2} - \lambda^2 a_n^2 Y_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.3)$$

mit der Lösung:

$$Y_n(y) = A_n e^{-\lambda a_n y} + B_n e^{\lambda a_n y} \quad (2.4)$$

Für $y > 0$ ist leicht festzustellen, daß $B = 0$, denn für $y \rightarrow \infty$ muß sich der Wert der Durchwölbung dem Null nähern.

Daraus ergibt sich:

$$\bar{w}_1 = \sum_{n=1, 2, \dots} A_n e^{-\lambda a_n y} \sin a_n x \quad (2.4.1)$$

Die Konstante A_n ermitteln wir aus der Bedingung, die besagt, daß in jedem Punkt der Achse x die vertikalen Komponenten der Spannung S_y und die Kraft P im Gleichgewicht bleiben müssen. Daraus resultiert

$$S_y \left[\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial y} \right]_y = P(x) \quad (2.5)$$

Unter der Ausnutzung der Tatsache, daß die Durchwölbung der Membrane auf die x -Achse bezogen symmetrisch ist, erhalten wir:

$$\left[\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial y} \right]_y = - \left[\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial x} \right]_x = \left[\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial y} \right]_{y=0}$$

Nach dem Einsetzen dieser Verbindung in (2.5) erhalten wir:

$$-2 S_y \left[\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial y} \right]_{y=0} = P(x) \quad (2.6)$$

Für die Funktion $P(x)$ entwickeln wir die Fouriersche Reihe:

$$P(x) = \frac{2 P}{a} \sum_{n=1, 2, \dots} \sin a_n \xi \sin a_n x \quad (2.7)$$

*) Archiwum Mechaniki Stosowanej (Archiv der angewandten Mechanik), Warszawa (1953) Bd. V, H. 1, S. 21 bis 46; Übersetzer *Lerach*.

¹⁾ Die Arbeit wurde am 6. Oktober 1953 auf der wissenschaftlichen Zusammenkunft der IV. Abteilung der Polnischen Akademie der Wissenschaften vorgetragen.

Aus der Bedingung (2.6) erhalten wir:

$$A_n = \frac{P}{S_y \lambda n \pi} \sin a_n \xi. \quad (2.8)$$

Also ergibt sich

$$\bar{w}_1(x, y; \xi, 0) = \frac{P}{S_y \lambda \pi} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{e^{-\lambda a_n y}}{n} \sin a_n \xi \sin a_n x \quad \text{für } y > 0 \quad (2.9)$$

und

$$\bar{w}_1(x, y; \xi, 0) = \frac{P}{S_y \lambda \pi} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{e^{\lambda a_n y}}{n} \sin a_n \xi \sin a_n x \quad \text{für } y < 0. \quad (2.10)$$

Die Gleichungen (2.9) und (2.10) können wir zusammenfassen:

$$\bar{w}_1(x, y; \xi, 0) = -\frac{P}{4\pi S_y \lambda} \ln \frac{\cos h \frac{\lambda \pi y}{a} - \cos \frac{\pi}{a} (x - \xi)}{\cos h \frac{\lambda \pi y}{a} - \cos \frac{\pi}{a} (x + \xi)} \quad \text{für } y \geq 0. \quad (2.11)$$

Wir bemerken, daß für $x = \xi$ die Durchwölbung unstetig wird, wie ein Logarithmus.

Ermitteln wir jetzt die Greensche Funktion der rechteckigen Membrane (Bild 1) mit den zueinander senkrechten Spannungen S_x und S_y . Zu diesem Zweck schneiden wir aus dem endlosen Streifen ein Rechteck mit den Seiten a und b heraus. Für $y = \pm b/2$ ist die Durchwölbung $\neq 0$. Und so erhalten wir für $y = +b/2$:

$$\bar{w}_1\left(x, \frac{b}{2}; \xi, \eta\right) = \frac{P}{\pi \lambda S_y} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{e^{-\lambda a_n \left(\frac{b}{2} - \eta\right)}}{n} \sin a_n \xi \sin a_n x, \quad (2.12)$$

und für $y = -b/2$:

$$\bar{w}_1\left(x, -\frac{b}{2}; \xi, \eta\right) = \frac{P}{\pi \lambda S_y} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{e^{-\lambda a_n \left(\frac{b}{2} + \eta\right)}}{n} \sin a_n \xi \sin a_n x. \quad (2.13)$$

Die Greensche Funktion $w_1(x, y; \xi, \eta)$ für ein Rechteck ermitteln wir als eine Summe zweier Flächen:

$$w_1(x, y; \xi, \eta) = \bar{w}_1(x, y; \xi, \eta) + w_2(x, y; \xi, \eta), \quad (2.14)$$

wobei die Funktion $w_2(x, y; \xi, \eta)$ die nachstehende Differentialgleichung erfüllt:

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = 0 \quad (2.15)$$

mit den Randbedingungen:

$$(1) \quad x=0, \quad w_2=0,$$

$$(2) \quad x=a, \quad w_2=0,$$

$$(3) \quad y=+b/2, \quad w_2\left(x, \frac{b}{2}; \xi, \eta\right) = -\bar{w}_1\left(x, \frac{b}{2}; \xi, \eta\right),$$

$$(4) \quad y=-b/2, \quad w_2\left(x, -\frac{b}{2}; \xi, \eta\right) = -\bar{w}_1\left(x, -\frac{b}{2}; \xi, \eta\right). \quad (2.16)$$

Wir wählen die Lösung der Gleichung in der Form:

$$w_2 = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} (A_n \cos h \lambda a_n y + B_n \sin h \lambda a_n y) \sin a_n x. \quad (2.17)$$

Die Randbedingungen 1 und 2 sind hier erfüllt. Zwei weitere Bedingungen geben uns die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} A_n \cos h \frac{\gamma_n}{2} + B_n \sin h \frac{\gamma_n}{2} &= -\frac{P}{\pi S_y \lambda} \frac{e^{-\lambda a_n \left(\frac{b}{2} - \eta\right)}}{n} \sin a_n \xi, \\ A_n \cos h \frac{\gamma_n}{2} - B_n \sin h \frac{\gamma_n}{2} &= -\frac{P}{\pi S_y \lambda} \frac{e^{-\lambda a_n \left(\frac{b}{2} + \eta\right)}}{n} \sin a_n \xi, \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

wo:

$$\gamma_n = \lambda a_n b.$$

Diese Gleichungen lösend, erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} A_n &= -\frac{P e^{-\frac{\gamma_n}{2}}}{\pi S_y \lambda n} \frac{\cos h \lambda a_n \eta}{\cos h \frac{\gamma_n}{2}} \sin a_n \xi, \\ B_n &= -\frac{P e^{-\frac{\gamma_n}{2}}}{\pi S_y \lambda n} \frac{\sin h \lambda a_n \eta}{\sin h \frac{\gamma_n}{2}} \sin a_n \xi. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Die Greensche Funktion für ein Rechteck nimmt also bei $y \geq \eta$ zum Schluß die folgende Gestalt an:

$$\left. \begin{aligned} w_1(x, y; \xi, \eta) &= \frac{P}{\pi \lambda S_y} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \left[e^{-\lambda a_n (y - \eta)} \right. \\ &\quad \left. - e^{-\frac{\gamma_n}{2}} \left(\frac{\cos h \lambda a_n \eta}{\cos h \frac{\gamma_n}{2}} \cos h \lambda a_n y \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\sin h \lambda a_n \eta}{\sin h \frac{\gamma_n}{2}} \sin h \lambda a_n y \right) \right] \sin a_n \xi \sin a_n x \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

und für $y \leq \eta$:

$$\left. \begin{aligned} w_1(x, y; \xi, \eta) &= \frac{P}{\pi \lambda S_y} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \left[e^{-\lambda a_n (\eta - y)} \right. \\ &\quad \left. - e^{-\frac{\gamma_n}{2}} \left(\frac{\cos h \lambda a_n \eta}{\cos h \frac{\gamma_n}{2}} \cos h \lambda a_n y \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\sin h \lambda a_n \eta}{\sin h \frac{\gamma_n}{2}} \sin h \lambda a_n y \right) \right] \sin a_n \xi \sin a_n x. \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Die Gleichungen (2.20) und (2.21) lassen sich noch zusammenfassen:

$$\left. \begin{aligned} w_1(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{P}{4\pi S_y} \ln \frac{\cos h \frac{\lambda \pi}{a} (y - \eta) - \cos \frac{\pi}{a} (x - \xi)}{\cos h \frac{\lambda \pi}{a} (y - \eta) - \cos \frac{\pi}{a} (x + \xi)} \\ &\quad - \frac{P}{\pi \lambda S_y} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{\cos h \lambda a_n (y + \eta)}{\sin h \gamma_n} \right. \\ &\quad \left. - e^{-\gamma_n} \cos h \lambda a_n (y - \eta) \right] \sin a_n \xi \sin a_n x. \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

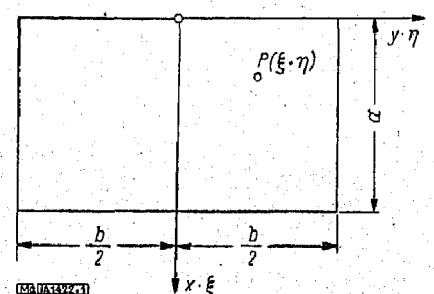


Bild 1. Ermittlung der Greenschen Funktionen einer rechteckigen Membrane

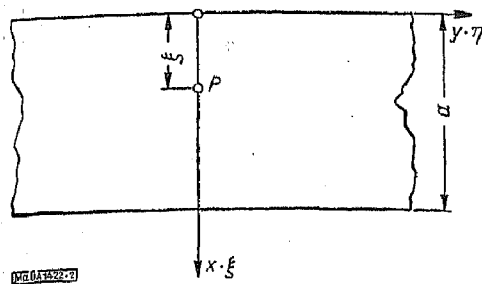


Bild 2. Verlauf der Greenschen Funktionen an einer rechteckigen Membrane

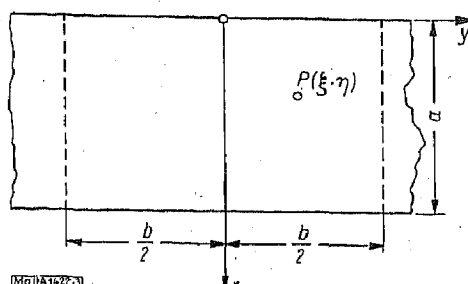


Bild 3. Verlauf der Greenschen Funktionen an einer rechteckigen Membrane

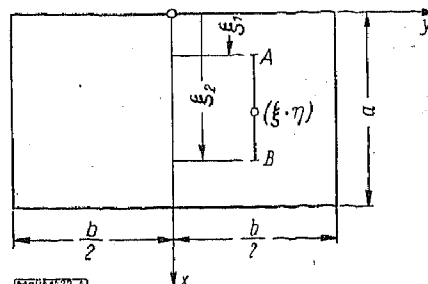


Bild 4. Verlauf der Greenschen Funktionen an einer rechteckigen Membrane

Das erste Glied der rechten Seite der Gl. (2.22) entspricht der Greenschen Funktion eines unendlichen Bandes, das zweite bringt den Einfluß der die Membrane stützenden Geraden $y = \pm b/2$ zum Ausdruck. Mit Hilfe der Greenschen Funktion kann man mittels Integration die im beliebigen Punkt x, y durch die Belastung $p(\xi, \eta)$ verursachte Durchwölbung der Membrane errechnen:

$$w(x, y) = \iint w_1(x, y; \xi, \eta) p(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (2.23)$$

Für den Fall einer gleichmäßigen Belastung einer rechteckigen Membrane erhalten wir:

$$w_0(x, y) = \frac{4 p a^2}{\pi^3 \lambda S_y} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n^3} \left(1 - \frac{\cos h \lambda a_n y}{\cos h \frac{\gamma_n}{2}} \right) \sin a_n x. \quad (2.24)$$

3. Die Durchwölbung einer rechteckigen Membrane, die durch eine gleichmäßig verteilte Belastung p beschwert, durch die Spannungen S_x und S_y auseinandergezogen und auf den Abschnitt AB bezogen ist, findet ihren Ausdruck in der Gleichung:

$$w(x, y) = w_0(x, y) + \int_{\xi_1}^{\xi_2} R(\xi) w_1(x, y; \xi, \eta) d\xi. \quad (3.1)$$

Die unbekannte Auflagerkraft $R(\xi)$ ermitteln wir aus der Bedingung, daß $w(x, \eta) = 0$ für $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$:

$$w_0(x, \eta) + \int_{\xi_1}^{\xi_2} R(\xi) w_1(x, \eta; \xi, \eta) d\xi = 0. \quad (3.2)$$

Nach dem Einsetzen des Wertes der Funktion erhalten wir:

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} R(\xi) \left[\ln \frac{1 - \cos \frac{\pi}{a} (x - \xi)}{1 - \cos \frac{\pi}{a} (x + \xi)} + 4 \sum_{n=1,2,\dots} \frac{1}{n} \frac{\cos h \lambda a_n 2 \eta - e^{-\gamma_n}}{\sin h \gamma_n} \sin a_n \xi \sin a_n x \right] d\xi = \frac{16 p a^2}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n^3} \left(1 - \frac{\cos h \lambda a_n \eta}{\cos h \frac{\gamma_n}{2}} \right) \sin a_n x. \quad (3.3)$$

Aus dieser Integralgleichung erster Art von Fredholm können wir $R(\xi)$ ermitteln und aus der Formel (3.1) die Durchwölbung der Membrane $w(x, y)$ errechnen.

Lösen wir diese Aufgabe für den Fall $\eta = 0$, für eine quadratische Membrane und eine Stütze von der Länge $a/2$ (Bild 5), wie auch für:

$$\lambda^2 = \frac{S_x}{S_y} = \frac{G_{13}}{G_{23}}.$$

Für eine Membrane dieser Art wird die Gl. (3.3) übergehen in:

$$\int_0^{a/2} R(\xi) \left[\ln \frac{1 - \cos \frac{\pi}{a} (x - \xi)}{1 - \cos \frac{\pi}{a} (x + \xi)} + 8 \sum_{n=1,2,\dots} \frac{1}{n(1 + e^{\gamma_n})} \sin a_n x \sin a_n \xi \right] d\xi = \frac{16 p a^2}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n^3} \left(1 - \frac{1}{\cos h \frac{\gamma_n}{2}} \right) \sin a_n x. \quad (3.3.1)$$

Die Integrale sind in obiger Gleichung wegen ihrer komplizierten Kerne angenähert und durch Summen ersetzt worden. In Bild 5 ist die angenäherte graphische Darstellung der Funktion $R(\xi)$ wiedergegeben. Im Punkt B gibt die angenäherte Lösung einen endlichen Wert. Die genaue Lösung müßte in diesem Punkt einen unendlichen Wert der Reaktion ergeben.

Im Falle, daß die Länge der Auflage gleich groß der Seite a wird, erhält die Gl. (3.2) nach dem Einsetzen des Wertes für $w_1(x, y; \xi, \eta)$ aus der Formel (2.20) die Gestalt:

$$\int_0^a R(\xi) \left(\sum_{n=1,2,\dots} \frac{1}{n} \operatorname{tg} h \frac{\gamma_n}{2} \sin a_n \xi \sin a_n x \right) d\xi = - \frac{4 p a^2}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n^3} \left(1 - \frac{1}{\cos h \frac{\gamma_n}{2}} \right) \sin a_n x. \quad (3.4)$$

Für ungleiche n erhalten wir:

$$\int_0^a R(\xi) \sin a_n \xi d\xi = - \frac{4 p a^2}{\pi^2 n^2} \operatorname{tg} h \frac{\gamma_n}{2} \quad (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (3.5)$$

Die rechte Seite der Gleichung können wir als Faktoren der Entwicklung der Funktion $R(\xi)$ in eine Fouriersche Reihe behandeln:

$$R(x) = - \frac{8 p a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n^2} \operatorname{tg} h \frac{\gamma_n}{2} \sin a_n x. \quad (3.6)$$

Dieses Resultat ist identisch mit solchen, die auf anderen Wegen ermittelt wurden.

Angegebenes Vorgehen kann man auf beliebig viele lineare Auflagen, die zu einer Seite der rechteckigen Membrane parallel sind, ausdehnen.

Betrachten wir eine rechteckige Membrane mit zwei Auflagen $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ (Bild 6). Bezeichnen wir die durch die im Punkt (ξ_1, η_1) wirkende Kraft $R_1 = 1$ verursachte Durchwölbungsfläche mit $w_1(x, y; \xi_1, \eta_1)$ und die durch die im Punkt (ξ_2, η_2) wirkende Kraft $R_2 = 1$ verursachte Durchwölbungsfläche mit $w_2(x, y; \xi_2, \eta_2)$.

Im Falle der Belastung mit p wird die Gleichung der Durchwölbung der Membrane gegeben durch die Formel:

$$w(x, y) = w_0(x, y) + \int_0^{b_1} R_1(\xi_1) w_1(x, y; \xi_1, \eta_1) d\xi_1 + \int_{c_1}^{c_2} R_2(\xi_2) w_2(x, y; \xi_2, \eta_2) d\xi_2. \quad (3.7)$$

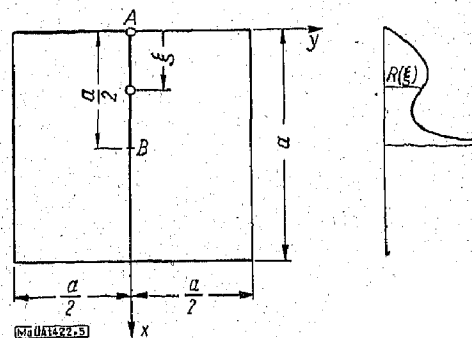


Bild 5. Angenäherte graphische Darstellung der Funktion $R(\xi)$

Die unbekannten Funktionen $R_1(\xi_1)$ und $R_2(\xi_2)$ ermitteln wir aus den Bedingungen, daß die Durchwölbungswerte in $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ gleich Null sein müssen. Dies führt zu folgenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} w_0(x, \eta_1) + \int_0^{b_1} R_1(\xi_1) w_1(x, \eta_1; \xi_1, \eta_1) d\xi_1 \\ + \int_{c_1}^{c_2} R_2(\xi_2) w_2(x, \eta_1; \xi_2, \eta_2) d\xi_2 = 0, \\ w_0(x, \eta_2) + \int_0^{b_1} R_1(\xi_1) w_1(x, \eta_2; \xi_1, \eta_1) d\xi_1 \\ + \int_{c_1}^{c_2} R_2(\xi_2) w_2(x, \eta_2; \xi_2, \eta_2) d\xi_2 = 0, \\ 0 \leq \xi_1 \leq b_1, \quad c_1 \leq \xi_2 \leq c_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Bei k -Auflagern erhalten wir ein System von Integralgleichungen mit den unbekannten Funktionen R_i ($i = 1, 2, \dots, k$).

Einen ähnlichen Fall stellt die Membrane mit zwei Stützen, wie in Bild 7, dar.

Hier sind die Gegenkräfte entlang der Abschnitte $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$, die wir als $P_1(\xi)$ und $P_2(\eta)$ bezeichnen, unbekannt. Die durch die Kraft $P_1 = 1$ im Punkt $\xi, 0$ erwirkte Durchwölbung bezeichnen wir mit $w_1(x, y; \xi, 0)$, und die durch die Kraft $P_2 = 1$ im Punkt $a/2, \eta$ erwirkte Durchwölbung durch $w_2(x, y; a/2, \eta)$.

Die Durchwölbung der Membrane, wie in Bild 7 dargestellt, ergibt sich aus der Formel:

$$w(x, y) = w_0(x, y) + \int_{A_1 B_1} P_1(\xi) w_1(x, y; \xi, 0) d\xi + \int_{A_2 B_2} P_2(\eta) w_2(x, y; a/2, \eta) d\eta. \quad (3.9)$$

Die Funktionen $P_1(\xi)$ und $P_2(\eta)$ ermitteln wir, ähnlich wie im vorherigen Beispiel, durch die Null-Bedingung der Durchwölbung entlang der Abschnitte $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$:

$$\left. \begin{aligned} w_0(x, 0) + \int_{A_1 B_1} P_1(\xi) w_1(x, 0; \xi, 0) d\xi \\ + \int_{A_2 B_2} P_2(\eta) w_2(x, 0; a/2, \eta) d\eta = 0, \\ w_0(a/2, y) + \int_{A_1 B_1} P_1(\xi) w_1(a/2, y; \xi, 0) d\xi \\ + \int_{A_2 B_2} P_2(\eta) w_2(a/2, y; a/2, \eta) d\eta = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Das hier angegebene Vorgehen wird gestatten, mehrere andere technisch wichtige Fälle von Durchwölbungen einer Membrane bzw. der Verdrehung von Stäben zu lösen. In Bild 8 sind die Beispiele genannt, die man lösen kann, wenn man sich der oben angegebenen Methode bedient.

4. Erörtern wir den Fall einer Membrane, die am Rande $y = 0$ in einem Teil dieses Randes gestützt wird ($w = 0$) und in einem anderem jedoch frei ist ($\left[\frac{\partial w}{\partial y}\right]_{y=0} = 0$), und die mit dem gleichmäßigen Druck p belastet wird (Bild 9).

Im Bereich $0 \leq x \leq c$ ist die Durchwölbung w eine Funktion von x ; im Bereich $c \leq x \leq a$ ist sie gleich Null. Die Durchwölbung der Membrane bei gewählten Randbedingungen kommt durch die nachstehende Beziehung zum Ausdruck:

$$w(x, y) = w_0(x, y) + \int_0^c w(\xi, 0) k(x, y; \xi, 0) d\xi. \quad (4.1)$$

Hier bedeutet $w_0(x, y)$ die Durchwölbungsfläche der Membrane in der Grundform, d. h. in solcher, in der die Membrane entlang des Randes $y = 0$ gestützt wird ($w = 0$). Der Kern $k(x, y; \xi, 0)$ ist eine Greensche Funktion der Durchwölbung im Punkt $(\xi, 0)$. Die unbekannte Funktion der Durchwölbung $w(\xi, 0)$ ermitteln wir aus der Randbedingung $\left[\frac{\partial w}{\partial y}\right]_{y=0} = 0$ im Bereich $0 \leq x \leq c$:

$$\frac{\partial w_0(x, 0)}{\partial y} + \int_0^c w(\xi, 0) \frac{\partial k(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} d\xi = 0. \quad (4.2)$$

Wenn $w(\xi, 0)$ bekannt, können wir aus der Gl. (4.1) die Durchwölbung der Membrane im beliebigen Punkt (x, y) ermitteln.

Suchen wir die Funktion $k(x, y; \xi, 0)$. Sie erfüllt die Gleichung:

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} = 0 \quad (4.3)$$

mit den Randbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad y = 0, \quad k(x, 0; \xi, 0) = \frac{2}{a} \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \sin a_n \xi \sin a_n x \\ (2) \quad y = 0, \quad k(x, b; \xi, 0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Für diese Randbedingungen erhalten wir durch die Lösung der Gleichung (4.3)

$$k(x, y; \xi, 0) = \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} (A_n \cos h \lambda a_n y + B_n \sin h \lambda a_n y) \sin a_n x, \quad (4.5)$$

$$\text{wo: } A_n = \frac{2}{a} \sin a_n \xi,$$

$$B_n = -A_n \operatorname{ctg} h \gamma_n = -\frac{2}{a} \operatorname{ctg} h \gamma_n \sin a_n \xi.$$

Die Funktion $k(x, y; \xi, 0)$ kann man wie folgt darstellen:

$$k(x, y; \xi, 0) = \frac{2}{a} \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} [e^{-\lambda a_n y} + \sin h \lambda a_n y (1 - \operatorname{ctg} h \gamma_n)] \sin a_n \xi \sin a_n x \quad (4.6)$$

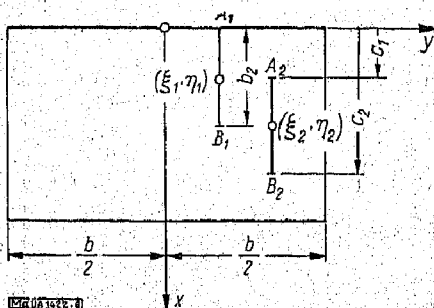


Bild 6. Rechteckige Membrane mit zwei Unterlagen $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$

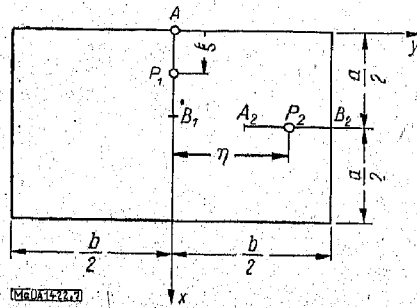


Bild 7. Durchwölbung einer Membrane mit zwei Stützen

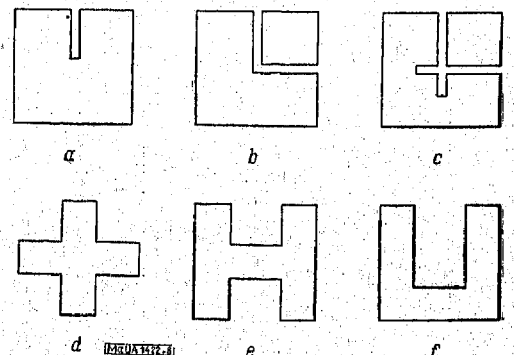


Bild 8 (rechts). Beispiele, um die wichtigsten Fälle der Durchwölbung einer Membrane von Stäben zu ermitteln

oder:

$$k(x, y; \xi, 0) = -\frac{\sin h \lambda a y}{2 a} \left[\frac{1}{\cos h \lambda a y - \cos a(x + \xi)} - \frac{1}{\cos h \lambda a y - \cos a(x - \xi)} \right] - \frac{2}{a} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_n}}{\sin h \gamma_n} \sin h \lambda a_n y \sin a_n \xi \sin a_n x, \quad \left(a = \frac{\pi}{a} \right). \quad (4.7)$$

Daraus:

$$\frac{\partial k(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} = -\frac{\pi \lambda}{2 a^2} \left[\frac{1}{1 - \cos a(x + \xi)} - \frac{1}{1 - \cos a(x - \xi)} \right] - \frac{2 \pi \lambda}{a^2} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{n e^{-\gamma_n}}{\sin h \gamma_n} \sin a_n \xi \sin a_n x. \quad (4.8)$$

Das erste Glied besitzt eine Besonderheit bei $x = \xi$, das zweite ist regulär und stellt eine konvergente Reihe dar.

Die Durchwölbung w_0 in der Grundform kann man durch die nachstehende Gleichung darstellen:

$$w_0(x, y) = \frac{4 p a^2}{S_y \lambda \pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(1 - \cos h \lambda a_n y + \operatorname{tg} h \frac{\gamma_n}{2} \sin h \lambda a_n y \right) \sin a_n x. \quad (4.9)$$

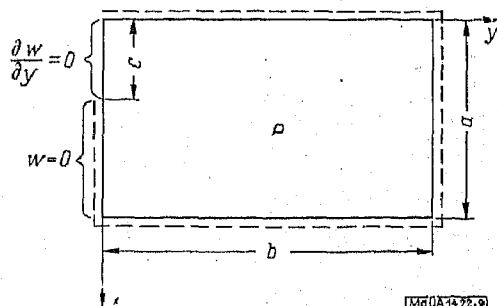


Bild 9. Membrane, die an einem Teil des Randes gestützt wird, jedoch an dem anderen frei ist und mit einem gleichmäßigen Druck p belastet wird

Gl. (4.2) erhält dann die endgültige Form:

$$-\frac{4 p a}{\pi^2 S_y} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \operatorname{tg} h \frac{\gamma_n}{2} \sin a_n x - \int_0^a w(\xi, 0) \left[\frac{\pi \lambda}{2 a^2} \left(\frac{1}{1 - \cos a(x + \xi)} - \frac{1}{1 - \cos a(x - \xi)} \right) + \frac{2 \pi \lambda}{a^2} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{n e^{-\gamma_n}}{\sin h \gamma_n} \sin a_n \xi \sin a_n x \right] d\xi = 0. \quad (4.10)$$

Die oben dargestellte Methode kann man bei Membranen anwenden, die sich aus Rechtecken zusammensetzen (Bild 10).

Im Schnitt $\beta - \beta$ ist die Funktion $w(\xi)$ unbekannt. Für die Membrane I erhalten wir:

$$w_I(x, y) = w_{0,I}(x, y) + \int_0^{a_1} w(\xi) k^I(x, y; \xi, 0) d\xi. \quad (4.11)$$

Für die Membrane II:

$$w_{II}(x, y_1) = w_{0,II}(x, y_1) + \int_0^{a_1} w(\xi) k^{II}(x, y_1; \xi, 0) d\xi. \quad (4.12)$$

Entlang des Abschnitts $\beta - \beta$ haben wir:

$$\left[\frac{\partial w_I}{\partial y} \right]_{y=0} = \left[\frac{\partial w_{II}}{\partial y_1} \right]_{y_1=0}. \quad (4.13)$$

Daraus:

$$\frac{\partial w_{0,I}(x, 0)}{\partial y} + \frac{\partial w_{0,II}(x, 0)}{\partial y_1} + \int_0^{a_1} w(\xi) \left[\frac{\partial k^I(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} + \frac{\partial k^{II}(x, 0; \xi, 0)}{\partial y_1} \right] d\xi = 0, \quad (4.14)$$

wo:

$$\frac{\partial w_{0,I}(x, 0)}{\partial y} = -\frac{4 p a}{S_y \pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{tg} h \frac{\gamma_n}{2} \sin a_n x, \\ \frac{\partial w_{0,II}(x, 0)}{\partial y_1} = -\frac{4 p a_1}{S_y \pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{tg} h \frac{\gamma_n'}{2} \sin a_n' x, \\ \gamma_n = \lambda a_n b, \quad \gamma_n' = \lambda a_n' b_1, \quad a_n = \frac{n\pi}{a}, \quad a_n' = \frac{n\pi}{a_1}, \\ a = \frac{\pi}{a}, \quad a' = \frac{\pi}{a_1},$$

$$\frac{\partial k^I(x, 0; \xi, 0)}{\partial y} = -\frac{\pi \lambda}{2 a^2} \left[\frac{1}{1 - \cos a(x + \xi)} - \frac{1}{1 - \cos a(x - \xi)} \right] - \frac{2 \pi \lambda}{a^2} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{n e^{-\gamma_n}}{\sin h \gamma_n} \sin a_n \xi \sin a_n x, \\ \frac{\partial k^{II}(x, 0; \xi, 0)}{\partial y_1} = -\frac{\pi \lambda}{2 a_1^2} \left[\frac{1}{1 - \cos a'(x + \xi)} - \frac{1}{1 - \cos a'(x - \xi)} \right] - \frac{2 \pi \lambda}{a_1^2} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{n e^{-\gamma_n'}}{\sin h \gamma_n'} \sin a_n' \xi \sin a_n' x.$$

Im Falle $a = a_1$ und $b = b_1$, erhalten wir die Gleichung (4.10) in den Integrationsgrenzen 0 bis a .

Wenn wir annehmen, daß $b \rightarrow \infty$, erhalten wir:

$$\int_0^a w(\xi) \left[\frac{1}{1 - \cos a(x + \xi)} - \frac{1}{1 - \cos a(x - \xi)} \right] d\xi = -\frac{8 p a^3}{\pi^3 \lambda S_y} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin a_n x. \quad (4.15)$$

Die Lösung dieser Integralgleichung ist $w(\xi) = \frac{p}{2 S_y} \xi(a - \xi)$, d. h. die bekannte „zylindrische“ Form der Durchwölbung der Membrane.

Je nach der Form der Membrane wählen wir entweder die unbekannten Auflager-Gegenkräfte (Bild 8a, 8b, 8c) oder aber die Durchwölbungen (Bild 8b, 8d, 8e, 8f). Die Symmetrie der Beziehungen 8d, 8e und 8f ausnützend, können wir die unbekannte Durchwölbungs-Funktion aus nur einer Integralgleichung ermitteln.

5. Beschäftigen wir uns jetzt mit einem zylindrischen Stab, dessen Struktur anisotropisch-orthogonal ist.

Die Schubspannungen τ_{rz} und $\tau_{\varphi z}$ werden in diesem Falle errechnet aus den Formeln:

$$\tau_{rz} = \frac{1}{r_1} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1}, \quad \tau_{\varphi z} = -\frac{\partial \psi}{\partial r_1}. \quad (5.1)$$

Die Verdrehungsfunktion ψ erfüllt hier die Gleichung²⁾:

$$a_{44} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r_1^2} + a_{55} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi_1^2} + a_{44} \frac{1}{r_1} \frac{\partial \psi}{\partial r_1} = -2 \vartheta. \quad (5.2)$$

Hier sind a_{44} und a_{55} Materialkonstante, die die Orthotropie des Werkstoffs charakterisieren.

Die Gl. (5.2) übergeht in (5.3):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial \psi}{\partial r_1} + \frac{a_{55}}{a_{44}} \frac{1}{r_1^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi_1^2} = -\frac{2 \vartheta}{a_{44}} \quad (5.3)$$

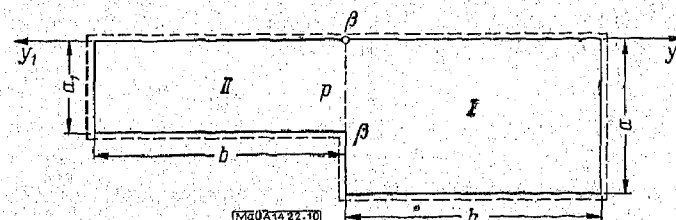


Bild 10. Membranen, die sich aus Rechtecken zusammensetzen und nach der im Text erwähnten rechnerischen Ermittlung zu bestimmen sind

²⁾ [1].

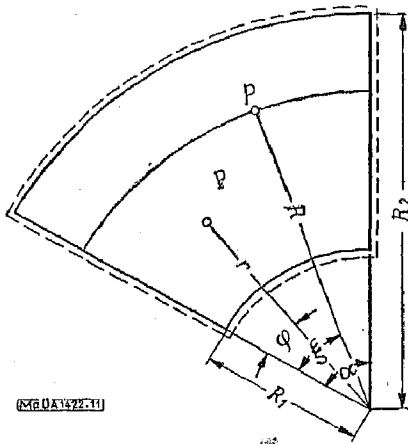


Bild 11. Kreisringstück für das die Greensche Funktion zu ermitteln ist

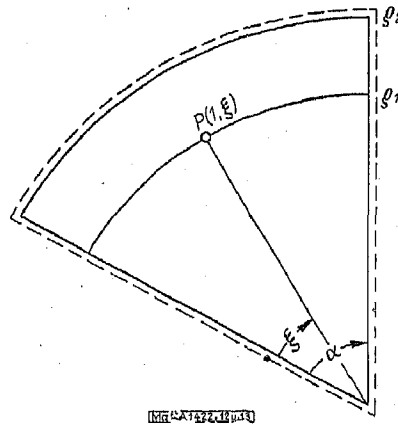


Bild 12. Funktionsverlauf der Faktoren und Randbedingungen im Kreisringstück

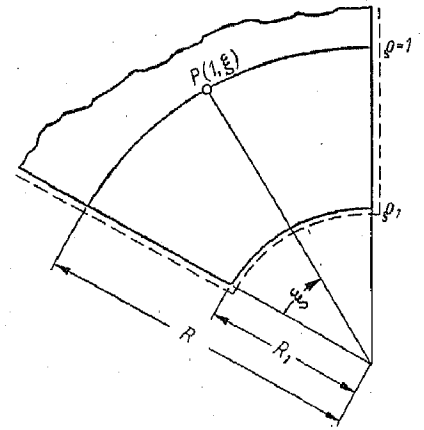


Bild 13. Funktionsverlauf der Faktoren und Randbedingungen im Kreisringstück

im Bereich D_1 . Sie wird der Differentialgleichung der Durchwölbung der Membrane im Bereich D identisch:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \frac{1}{r^2} = -\frac{p}{S}, \quad (5.4)$$

wenn angenommen wird, daß wir die Membrane mit einer konstanten Belastung von der Intensivität $p = \frac{2 \vartheta S}{a_{44}}$ beschweren. Den Übergang vom Bereich D_1 in den Bereich D erhalten wir dank der verfeinerten Transformation:

$$\varphi = \varphi_1 \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{55}}} = \varphi_1 \beta, \quad r = r_1.$$

Daraus:

$$\tau_{rz} = \frac{c}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \beta, \quad \tau_{\varphi z} = -c \frac{\partial w}{\partial r}, \quad (5.5)$$

wobei:

$$\psi = c w, \quad c = \frac{2 S \vartheta}{a_{44} p}.$$

Betrachten wir jetzt ein Kreisringstück (Bild 11) und konstruieren wir für dieses die Greensche Funktion. Der erste Teil der Aufgabe besteht in der Ermittlung der Durchwölbungsfunktion der Membrane. Diese Funktion muß die Gl. (5.4) für $p = 0$ und die Randbedingungen entlang der Seiten $\varphi = 0$ und $\varphi = \alpha$ erfüllen. Die Lösung suchen wir in der Form:

$$\bar{w}_1(r, \varphi) = \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} F_n(r) \sin k_n \varphi, \quad (5.6)$$

wobei: $k_n = \frac{n \pi}{a}.$

Diese Gleichung erfüllt die Randbedingungen $\bar{w}_1(r, 0) = 0$ und $\bar{w}_1(r, a) = 0$. Die homogene partielle Differentialgleichung übergeht in eine gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 F_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF_n}{dr} - \left(\frac{n \pi}{r a}\right)^2 F_n = 0, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (5.7)$$

Legen wir fest, daß die Kraft P auf einen Punkt mit den Ordinaten R, ξ wirkt.

Darüber hinaus wählen wir zusätzlich eine neue Veränderliche $\varrho = \frac{r}{R}$. Die Gl. (5.7) erhält dann die Gestalt:

$$\frac{d^2 F_n}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dF_n}{d\varrho} - \left(\frac{n \pi}{\varrho a}\right)^2 F_n = 0. \quad (5.8)$$

Als Lösung dieser Gleichung erhalten wir die Funktion:

$$F_n(\varrho) = C_1 \varrho^{nk} + C_2 \varrho^{-nk} \quad \left(k = \frac{\pi}{a}\right).$$

Der Bogen $R = \text{const}$ teilt die Membrane in zwei Bereiche, I und II. Im Bereich I:

$$F_{n, I} = C_1 \varrho^{nk} \quad \text{für} \quad r \leq R \text{ oder } \varrho \leq 1. \quad (5.9.1)$$

Im Bereich II:

$$F_{n, II} = C_2 \varrho^{-nk} \quad \text{für} \quad r \geq R \text{ oder } \varrho \geq 1. \quad (5.9.2)$$

Für $\varrho = 1$ muß die Bedingung erfüllt werden:

$$\bar{w}_I(1, \varphi) = \bar{w}_{II}(1, \varphi).$$

Daraus:

$$C_1 = C_2.$$

Entwickeln wir die im Punkt R, ξ wirkende Kraft P in eine Fouriersche Reihe:

$$P(\varphi) = \frac{2 P}{R a} \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \sin n k \xi \sin n k \varphi.$$

Für $\varrho = 1$ muß die Gleichgewichtsbedingung erfüllt werden:

$$S \left(\frac{\partial \bar{w}_I(1, \varphi)}{\partial r} - \frac{\partial \bar{w}_{II}(1, \varphi)}{\partial r} \right) = P(\varphi). \quad (5.10)$$

Daraus:

$$C_1 = C_2 = \frac{P}{n \pi S} \sin k n \xi.$$

Die Greensche Funktion für $\varrho \leq 1$ erhält die Form:

$$\bar{w}_I(\varrho, \varphi; 1, \xi) = \frac{P}{\pi S} \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \varrho^{nk} \sin n k \xi \sin n k \varphi, \quad (5.11.1)$$

und für $\varrho \geq 1$:

$$\bar{w}_{II}(\varrho, \varphi; 1, \xi) = \frac{P}{\pi S} \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \varrho^{-nk} \sin n k \xi \sin n k \varphi. \quad (5.11.2)$$

Diese Greensche Funktion können wir auch in der geschlossenen Form (für $\varrho \geq 1$) darstellen:

$$\bar{w}_I(\varrho, \varphi; 1, \xi) = -\frac{P}{4 \pi S} \ln \frac{1 - 2 \varrho^k \cos k(\varphi - \xi) + \varrho^{2k}}{1 - 2 \varrho^k \cos k(\varphi + \xi) + \varrho^{2k}}. \quad (5.12.1)$$

oder:

$$\bar{w}_I(\varrho, \varphi; 1, \xi) = -\frac{P}{4 \pi S} \ln \frac{\cos h(k \ln \varrho) - \cos k(\varphi - \xi)}{\cos h(k \ln \varrho) - \cos k(\varphi + \xi)}. \quad (5.12.2)$$

Für $\varrho = 1$ erhalten wir:

$$\bar{w}_I(1, \varphi; 1, \xi) = -\frac{P}{4 \pi S} \ln \left[\frac{\sin \frac{k(\varphi - \xi)}{2}}{\sin \frac{k(\varphi + \xi)}{2}} \right]. \quad (5.12.3)$$

Die auf diese Weise konstruierte Greensche Funktion erfüllt jedoch nicht die Randbedingungen für $r = R_1$ und $r = R_2$, für die die Durchwölbung ebenfalls gleich Null sein müßte.

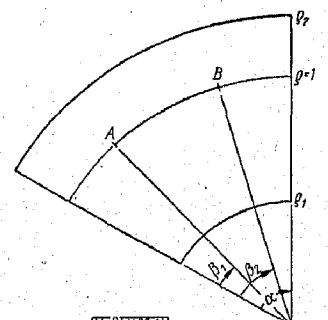


Bild 14. Betrachtung einer Membrane als Kreisringausschnitt

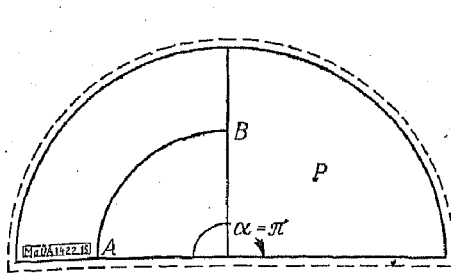


Bild 15. Graphische Darstellung der rechnerischen Lösung

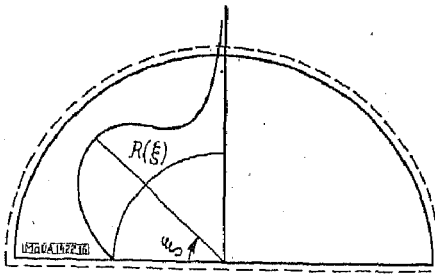
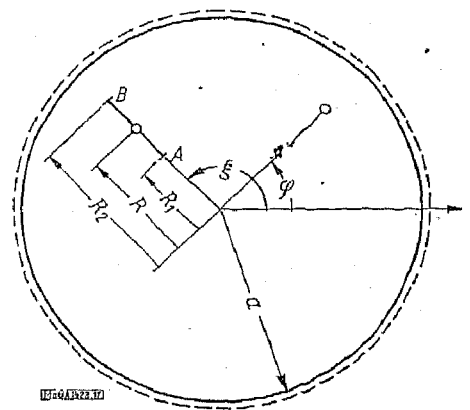


Bild 16. Graphische Darstellung der rechnerischen Lösung

Bild 17. Darstellung der Membrane, die einer linearen Stütze entlang des Randes sich auf dem Radius eines Kreises befindet und aufliegt



Damit auch diese Bedingungen erfüllt werden, stellen wir die Greensche Funktion des Kreisringstücks als eine Summe zweier Durchwölbungen dar:

$$w_1(\varrho, \varphi; 1, \xi) = \bar{w}_1(\varrho, \varphi; 1, \xi) + w_2(\varrho, \varphi; 1, \xi), \quad (5.13)$$

wobei w_2 sowohl die Gleichung von Laplace wie auch die nachstehenden Randbedingungen erfüllt:

$$\left. \begin{aligned} w_2(\varrho, 0) &= 0 \\ w_2(\varrho, \alpha) &= 0 \\ w_2(\varrho_1, \varphi) &= -\bar{w}_1(\varrho_1, \varphi; 1, \xi) \\ w_2(\varrho_2, \varphi) &= -\bar{w}_1(\varrho_2, \varphi; 1, \xi), \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

wobei:

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= R_1/R, \\ \varrho_2 &= R_2/R. \end{aligned}$$

Die Funktion w_2 wählen wir in der Gestalt der Reihe:

$$w_2(\varrho, \varphi) = \frac{P}{\pi S} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} (A_n \varrho^{nk} + B_n \varrho^{-nk}) \sin nk\varphi. \quad (5.15)$$

Aus den Randbedingungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} A_n \varrho_1^{nk} + B_n \varrho_1^{-nk} &= -\varrho_1^{nk} \sin nk\xi, \\ A_n \varrho_2^{nk} + B_n \varrho_2^{-nk} &= -\varrho_2^{nk} \sin nk\xi, \end{aligned}$$

woraus:

$$\begin{aligned} A_n &= -\frac{1 - \varrho_1^{2nk}}{\varrho_2^{2nk} - \varrho_1^{2nk}} \sin nk\xi, \\ B_n &= \frac{(1 - \varrho_2^{2nk}) \varrho_1^{2nk}}{\varrho_2^{2nk} - \varrho_1^{2nk}} \sin nk\xi. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Folgerung:

$$\begin{aligned} w_2(\varrho, \varphi; 1, \xi) &= -\frac{P}{\pi S} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(1 - \varrho_1^{2nk}) \varrho^{nk} - (1 - \varrho_2^{2nk}) \varrho_1^{2nk} \varrho^{-nk}}{\varrho_2^{2nk} - \varrho_1^{2nk}} \sin nk\varphi \\ &\quad \sin nk\xi \sin nk\varphi \quad \text{für } \varrho \leq 1. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Nach dem Ermitteln der Funktion \bar{w}_1 und w_2 , und somit auch der Funktion w_1 , kommen wir zu der Erörterung der Sonderfälle.

a) $\varrho_1 = 0, \varrho_2 > 1$.

Die Greensche Funktion läßt sich darstellen durch die geschlossene Form:

$$\begin{aligned} w_1(\varrho, \varphi; 1, \xi) &= -\frac{P}{4\pi S} \ln \frac{1 - \varrho^k \cos k(\varphi - \xi) + \varrho^{2k}}{1 - \varrho^k \cos k(\varphi + \xi) + \varrho^{2k}} \\ &\quad + \frac{P}{4\pi S} \ln \frac{\varrho_2^{4k} - 2(\varrho \varrho_2^2) \cos k(\varphi - \xi) + \varrho^{2k}}{\varrho_2^{4k} - 2(\varrho \varrho_2^2) \cos k(\varphi + \xi) + \varrho^{2k}} \end{aligned} \quad (5.17.1)$$

oder:

$$\begin{aligned} w_1(\varrho, \varphi; 1, \xi) &= -\frac{P}{4\pi S} \ln \frac{\cos h(k \ln \varrho) - \cos k(\varphi - \xi)}{\cos h(k \ln \varrho) - \cos k(\varphi + \xi)} \\ &\quad + \frac{P}{4\pi S} \ln \frac{\cos h\left(k \ln \frac{\varrho_2^2}{\varrho}\right) - \cos k(\varphi - \xi)}{\cos h\left(k \ln \frac{\varrho_2^2}{\varrho}\right) - \cos k(\varphi + \xi)} \end{aligned} \quad (5.17.2)$$

b) $\varrho_1 \neq 0, \varrho_2 \rightarrow \infty$.

Für diesen Sonderfall erhalten wir ebenfalls die geschlossene Formel:

$$\begin{aligned} w_1(\varrho, \varphi; 1, \xi) &= -\frac{P}{4\pi S} \ln \frac{\cos h(k \ln \varrho) - \cos k(\varphi - \xi)}{\cos h(k \ln \varrho) - \cos k(\varphi + \xi)} \\ &\quad + \frac{P}{4\pi S} \ln \frac{\cos h\left(k \ln \frac{\varrho_1^2}{\varrho}\right) - \cos k(\varphi - \xi)}{\cos h\left(k \ln \frac{\varrho_1^2}{\varrho}\right) - \cos k(\varphi + \xi)}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Betrachten wir jetzt eine Membrane in der Gestalt eines Kreisringausschnitts (Bild 14), die gleichmäßig aufgespannt und durch die Belastung $p = \text{const}$ beschwert, entlang des Bogens AB vom Punkt $B(1, \beta_2)$ bis Punkt $A(1, \beta_1)$ aufliegt.

Die Durchwölbung solch einer Membrane errechnen wir auf Grund der Regel der Superposition aus der Formel:

$$w(\varrho, \varphi) = w_0(\varrho, \varphi) + \int_{\beta_1}^{\beta_2} R(\xi) w_1(\varrho, \varphi; 1, \xi) R d\xi, \quad (5.19)$$

wo $w_0(\varrho, \varphi)$ gleich ist der Durchwölbung der Membrane, die nur entlang des Randes gestützt wird, wobei diese Durchwölbung durch die Belastung $p = \text{const}$ hervorgerufen wurde, und $R(\xi)$ die unbekannte Auflagerkraft ist, die wir aus der Bedingung:

$$w(1, \varphi) = 0 \quad \text{für } \beta_1 \leq \varphi \leq \beta_2$$

ermitteln.

Daraus ergibt sich:

$$w_0(1, \varphi) + \int_{\beta_1}^{\beta_2} R(\xi) w_1(1, \varphi; 1, \xi) R d\xi = 0. \quad (5.20)$$

Die in der Gl. (5.19) enthaltene Funktion $w_0(\varrho, \varphi)$ ist die Lösung der Gleichung $\nabla^2 w_0 = -p/S$ mit der Randbedingung $w_0 = 0$ entlang des Randes des Kreisringausschnitts³⁾.

$$\begin{aligned} w_0(r, \varphi) &= \frac{4p}{\pi S} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 k^2 - 4)} (1 + A_n r^{nk-2} \\ &\quad + B_n r^{-nk+2}) \sin nk\varphi; \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \text{wo: } A_n &= -\frac{R_2^{nk+2} - R_1^{nk+2}}{R_2^{2nk} - R_1^{2nk}}, \\ B_n &= -\frac{R_1^{nk+2} R_2^{nk+2} - (R_2^{nk-2} - R_1^{nk-2})}{R_2^{2nk} - R_1^{2nk}}. \end{aligned}$$

Die Lösung der Gl. (5.20) erläutern wir an Hand des einfachen Beispiels einer Membrane wie in Bild 15.

Gegeben ist:

$$R_1 = 0, \quad \alpha = \pi, \quad k = 1.$$

Aus der Gl. (5.21) finden wir also:

$$w_0(R, \varphi) = \frac{4p}{\pi S} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 - 4)} (1 - \varrho_2^{-n+2}) \sin n\varphi.$$

Und aus der Formel (5.17.2) ist:

$$\begin{aligned} w_1(1, \varphi; 1, \xi) &= \\ &= -\frac{1}{4\pi S} \left[2 \ln \left(\frac{\sin \frac{\varphi - \xi}{2}}{\sin \frac{\varphi + \xi}{2}} \right) - \ln \frac{\cos h(2 \ln \varrho_2) - \cos(\varphi - \xi)}{\cos h(2 \ln \varrho_2) - \cos(\varphi + \xi)} \right] \end{aligned}$$

³⁾ [3].

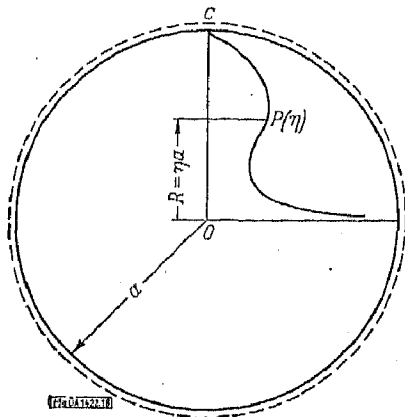


Bild 18. Graphische Darstellung der angenäherten Lösung der Integralgleichung (6.5) unter Berücksichtigung, daß die Kreismembrane auf dem Rand entlang des Radiuses aufliegt

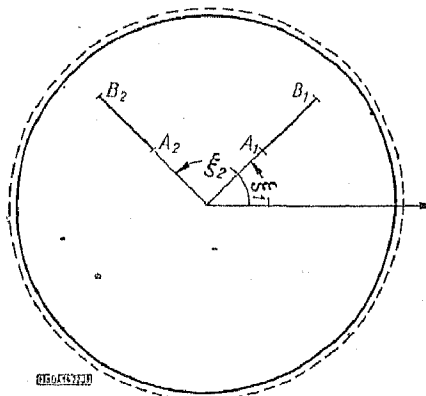


Bild 19. Graphische Darstellung der angenäherten Lösung der Integralgleichung (6.5).

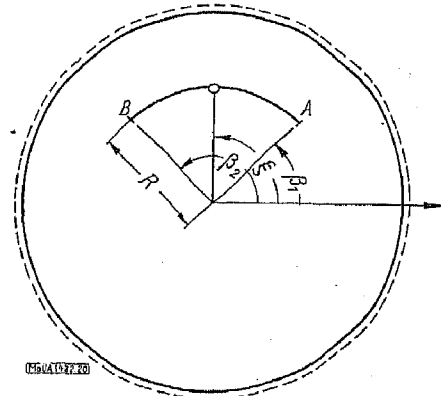


Bild 20. Durchwölbung der durch eine gleichmäßige Kraft belasteten Kreismembrane, die sich sowohl auf den Außenrand, wie auch auf eine krumme Linie stützt

Für $R = R_2/2$ erhält die Integralgleichung (5.20) die Form:

$$\int_0^{\pi/2} R(\xi) \left[2 \ln \left(\frac{\sin \frac{\varphi - \xi}{2}}{\sin \frac{\varphi + \xi}{2}} \right) - \ln \frac{\cos h(2 \ln \varrho_2) - \cos(\varphi - \xi)}{\cos h(2 \ln \varrho_2) - \cos(\varphi + \xi)} \right] d\xi = \frac{4pR_2^2}{R} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-4)} (1-2^{2-n}) \sin n\varphi. \quad (5.22)$$

Die angenäherte Lösung der Gl. (5.22) illustriert das Bild 16.

6. Betrachten wir jetzt eine Kreismembrane, die sowohl entlang des Randes, wie auch entlang einer linearen Stütze AB , die sich auf dem Radius des Kreises befindet, aufliegt (Bild 17).

Beim Fehlen der letztgenannten Stütze erhalten wir eine kreissymmetrische Durchwölbung:

$$w_0(\xi) = \frac{p a^2}{4 S} (1 - \varrho^2),$$

$$\text{wo:} \quad \varrho = \frac{r}{a}.$$

Die Greensche Funktion einer Kreismembrane hat die bekannte Gestalt⁴⁾:

$$w_1(r, \varphi; R, \xi) = \frac{P}{4 \pi S} \ln \frac{r^2 R^2 - 2 a^2 R r \cos(\varphi - \xi) + a^4}{a^2 [r^2 + R^2 - 2 r R \cos(\varphi - \xi)]} \quad (6.2.1)$$

oder:

$$w_1(\varrho, \varphi; \eta, \xi) = \frac{P}{4 \pi S} \ln \frac{\cos h(\ln \varrho \eta) - \cos(\varphi - \xi)}{\cos h(\ln \varrho \eta) - \cos(\varphi + \xi)}, \quad (6.2.2)$$

$$\text{wo:} \quad \varrho = \frac{r}{a}, \quad \eta = \frac{R}{a}.$$

Die gesamte Durchwölbung der Membrane, die durch die Belastung $p = \text{const}$ hervorgerufen ist, wie auch die unbekannte Funktion der Auflagerkraft $P(\eta)$ sind in der Formel enthalten:

$$w(\varrho, \varphi) = w_0(\varrho) + \int_{\eta_1}^{\eta_2} P(\eta) w_1(\varrho, \varphi; \eta, \xi) a d\eta. \quad (6.3)$$

Die unbekannte Funktion der Auflagerkraft finden wir aus der Null-Bedingung des Durchwölbungswertes entlang des Abschnitts AB :

$$w_0(\varrho, \xi) + \int_{\eta_1}^{\eta_2} P(\eta) w_1(\varrho, \xi; \eta, \xi) a d\eta = 0 \quad (6.4)$$

oder nach dem Einsetzen entsprechender Funktionen:

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} P(\eta) \ln \frac{\varrho \eta - 1}{\varrho - \eta} d\eta = -\frac{p a \pi}{2} (1 - \varrho^2). \quad (6.5)$$

Das Bild 18 gibt das Ergebnis der angenäherten Lösung der Integralgleichung (6.5) wieder, wenn die Kreismembrane außerdem auf dem Rand zusätzlich entlang des Radius OC aufliegt.

Obige Betrachtungen lassen sich auch auf Kreismembranen, die sich auf zwei, drei und mehr zusätzliche lineare

*) [4].

Auflagen stützen, verallgemeinern. Bei zwei zusätzlichen Stützen haben wir:

$$w(\varrho, \varphi) = w_0(\varrho) + \int_{A_1 B_1} P_1(\eta_1) w_1(\varrho, \varphi; \eta_1, \xi_1) a d\eta_1 + \int_{A_2 B_2} P_2(\eta_2) w_2(\varrho, \varphi; \eta_2, \xi_2) a d\eta_2. \quad (6.6)$$

Die unbekannten Funktionen $P_1(\eta_1)$ und $P_2(\eta_2)$ ermitteln wir aus den Integralgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} w_0(\varrho) + \int_{A_1 B_1} P_1(\eta_1) w_1(\varrho, \xi_1; \eta_1, \xi_1) a d\eta_1 + \int_{A_2 B_2} P_2(\eta_2) w_2(\varrho, \xi_1; \eta_2, \xi_2) a d\eta_2 &= 0, \\ w_0(\varrho) + \int_{A_1 B_1} P_1(\eta_1) w_1(\varrho, \xi_2; \eta_1, \xi_1) a d\eta_1 + \int_{A_2 B_2} P_2(\eta_2) w_2(\varrho, \xi_2; \eta_2, \xi_2) a d\eta_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

Die Durchwölbung der durch $p = \text{const}$ belasteten Kreismembrane, die sich sowohl auf den Außenrand wie auch zusätzlich auf der Kurven $R = \text{const}$ stützt (Bild 20), ist:

$$w(\varrho, \varphi) = w_0(\varrho) + \int_{\beta_1}^{\beta_2} P(\xi) w_1(\varrho, \varphi; \varrho_0, \xi) R_0 d\xi \quad (6.8)$$

$$\left(\varrho_0 = \frac{R_0}{a} \right).$$

Die unbekannte Funktion $P(\xi)$ ermitteln wir aus der Integralgleichung:

$$w_0(\xi) + \int_{\beta_1}^{\beta_2} P(\xi) w_1(\varrho_0, \varphi; \varrho_0, \xi) R_0 d\xi = 0 \quad (6.9)$$

oder:

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} P(\xi) \ln \frac{\cos h(2 \ln \varrho_0) - \cos(\varphi - \xi)}{1 - \cos(\varphi - \xi)} d\xi = -\frac{p a^2 \pi}{R_0} (1 - \varrho_0^2). \quad (6.10)$$

Die oben angegebene Methode der Lösung komplizierter (zusammengesetzter) Fälle von (reiner) Verdrehung anisotropischer Stäbe oder Fragen der Durchwölbung von Kreismembranen kann auch bei anderen physikalischen Erscheinungen, deren mathematische Formulierung zu Differentialgleichungen und Randbedingungen derselben Form, wie hier besprochen, führen, angewendet werden. Als Beispiel kann man das Problem der laminaren (wirbellosen) Strömung einer idealen Flüssigkeit im Gefäß von derselben Gestalt wie die eines der Verdrehung ausgesetzten Stabes — oder das Problem der ebenen Strömung der Grundwasser oder aber auch das Problem der Funktion der Spannungen der Stäbe beim Biegen nennen.

MaUA 1422

Literatur

- [1] Lechnicki, S. G.: Teoria uprugosti anizotropnego ciała.
- [2] Olzak, W.: O skrócaniu prętów anizotropowych w świetle teorii odkształceń nieliniowych, Arch. Mech. Sts. 3-4 (1951).
- [3] Sommerfeld, A., u. O. Frank: Die Deformation der Kreismembran, Zeitschr. f. Biol. B. XI, 6-7 (1913).
- [4] Tölke, F.: Praktische Funktionslehre, 1950, S. 337.