BIULETYN WOJSKOWEJ AKADEMII TECHNICZNEJ

im. Jarosława Dąbrowskiego

ROK XVII LISTOPAD 11 (195)

WARSZAWA 1968

BIULETYN WOJSKOWEJ AKADEMII TECHNICZNEJ IM. J. DĄBROWSKIEGO
Rok XVII, nr 11 (195), listopad 1968 r.

SYLWESTER KALISKI
WITOLD NOWACKI

TWIERDZENIE CAŁKOWE DLA FALOWEGO RÓWNANIA PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO

STRESZCZENIE

W pracy podano podstawowe twierdzenia o wzajemności i twierdzenia całkowe dla uogólnionego, falowego równania przewodnictwa cieplnego [1].

* * *

§ 1. Uwagi wstępne

Klasyczne równanie przewodnictwa cieplnego jest, jak wiadomo, równaniem typu parabolicznego i charakteryzuje się paradoksalną, z punktu widzenia fizycznego, własnością nieskończenie wielkiej prędkości propagacji zaburzeń cieplnych. Paradoks powyższy nie prowadzi jednakże w przeważającej liczbie problemów praktycznych do fałszywych ilościowo rezultatów ze względu na silne zanikanie zaburzeń cieplnych od źródła. Jednakże w przypadku silnie niestacjonarnych lub szybko zmiennych w czasie procesów termicznych efekt skończonej prędkości propagacji zaburzeń cieplnych może mieć istotne znaczenie jakościowe, a niekiedy i ilościowe. Dotyczy to szczególnie efektów sprzężonych pola termicznego z polem sprężystym i elektro-magnetycznym. W związku z tym w [1], wychodząc z dynamicznej (niestacjonarnej) modyfikacji prawa Fouriera oraz modyfikacji rozważań termodynamicznych, wyprowadzono falowo-hiperboliczne równanie przewodnictwa cieplnego. W [2] bazując na falowych równaniach termo-magneto-sprężystości podano ideę zmierzenia prędkości propagacji zaburzeń termicznych w oparciu o efekt Czerenkowa.

Klasyczne równanie falowe posiada opracowany od dawna zespół twierdzeń całkowych. W niniejszym komunikacie podajemy analogiczny zespół twierdzeń całkowych dla falowego równania przewodnictwa cieplnego [1].

§ 2. Twierdzenie o wzajemności

Rozpatrzmy rozszerzone, falowe równanie przewodnictwa cieplnego wyprowadzone w [1]:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\varkappa}\partial_t - \beta^2\partial_t^2\right)\Theta(\vec{x},t) = -\frac{Q(\vec{x},t)}{\varkappa} \tag{2.1}$$

W równaniu tym występuje dodatkowy (w stosunku do klasycznego równania przewodnictwa cieplnego) człon falowy $\beta^2\partial_t^2\Theta$.

W równaniu (2.1) oznaczają: $\Theta(\vec{x}, t)$ — temperatura, $\varkappa = \lambda/c_\varepsilon$, gdzie λ jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego a c_ε ciepłem właściwym przy stałym odkształceniu ciała. Dalej $\beta^2 = \tau c_\varepsilon/\lambda$, gdzie τ — czas relaksacji; $Q = \frac{W}{c_\varepsilon}$, gdzie W jest ilością ciepła wytworzoną w jednostce objętości i jednostce czasu.

Dla $\beta \to 0$ równanie (2.1) przechodzi na klasyczne równanie przewodnictwa cieplnego. Wyprowadzimy najpierw twierdzenie o wzajemności, a z niego szereg dalszych twierdzeń szczegółowych, stanowiących uogólnienie znanych twierdzeń z teorii przewodnictwa cieplnego, [3] oraz równania falowego.

Rozpatrzmy dwa układy przyczyn i skutków. Do przyczyn zaliczymy działanie źródeł ciepła Q, Q', działanie średniej temperatury na brzegu ciała A $(\Theta, \Theta', \vec{x} \in A)$ względnie przepływ ciepła przez powierzchnię A ograniczająca ciało $\left(\lambda_0 \frac{\partial\Theta}{\partial n}, \lambda_0 \frac{\partial\Theta'}{\partial n}, \vec{x} \in A\right)$. Skutkami są temperatury $(\Theta, \Theta', \vec{x} \in V)$ w punkcie $\vec{x}$ i w czasie t. Pierwszy układ przyczyn i skutków opisany jest równaniem różniczkowym (2.1). Do równania tego dodamy warunki brzegowe:

$$\Theta(\vec{x},t) = h(\vec{x},t), \quad \vec{x} \in A_u; \quad \lambda_0 \frac{\partial\Theta(\vec{x},t)}{\partial n} = k(\vec{x},t), \quad x \in A_\sigma \tag{2.2}$$

oraz warunki początkowe:

$$\Theta(\vec{x},0) = f(\vec{x}), \quad \dot{\Theta}(\vec{x},0) = g(\vec{x}), \quad \vec{x} \in V, \quad t=0 \tag{2.3}$$

Tutaj przez A_u oznaczamy tę część powierzchni A, na której zadana jest temperatura, przez A_σ tę część powierzchni A, na której zadany jest przepływ ciepła.

Drugi układ przyczyn i skutków spełnia równanie

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\varkappa}\partial_t - \beta^2\partial_t^2\right)\Theta'(\vec{x},t) = -\frac{\Theta'(\vec{x},t)}{\varkappa} \tag{2.4}$$

z warunkami brzegowymi:

$$\Theta'(\vec{x},t) = h'(\vec{x},t), \quad x \in A_u, \quad \lambda_0 \frac{\partial\Theta'(\vec{x},t)}{\partial n} = k'(\vec{x},t), \quad x \in A_\sigma \tag{2.5}$$

oraz warunkami początkowymi:

$$\Theta'(\vec{x},0) = f'(\vec{x}), \quad \dot{\Theta}'(\vec{x},0) = g'(\vec{x}) \tag{2.6}$$

W dalszych rozważaniach wygodniej będzie posłużyć się równaniami (2.1) i (2.4), na których dokonano transformacji całkowych Laplace'a.

Oznaczając przez

$$\overline{\Theta}(\vec{x},p)=\mathcal{L}[\Theta(\vec{x},t)]=\int_0^\infty e^{-pt}\,\Theta(\vec{x},t)\,dt, \qquad \text{it.d.}$$

przedstawimy równania (2.1), (2.4), przy uwzględnieniu warunków początkowych (2.3) i (2.6) w postaci:

$$\left(\nabla^2-\frac{p}{\varkappa}-\beta^2p^2\right)\overline{\Theta}(\vec{x},p)=-\frac{\overline{Q}}{\varkappa}-\left(\frac{1}{\varkappa}+\beta^2p\right)f(\vec{x})-g(\vec{x})\beta^2 \tag{2.7}$$

$$\left(\nabla^2-\frac{p}{\varkappa}-\beta^2p^2\right)\overline{\Theta}'(\vec{x},p)=-\frac{\overline{Q}'}{\varkappa}-\left(\frac{1}{\varkappa}+\beta^2p\right)f'(\vec{x})-g'(\vec{x})\beta^2 \tag{2.8}$$

Pomnóżmy równanie (2.7) przez $\overline{\Theta}'$, równanie (2.8) przez $\overline{\Theta}$. Odejmijmy tak przemnożone równania od siebie, scałkujmy je po obszarze V ciała. Stosując przekształcenie Greena, mamy:

$$\int_A\left(\overline{\Theta}'\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial n}-\overline{\Theta}'\frac{\partial\overline{\Theta}'}{\partial n}\right)dA=-\frac{1}{\varkappa}\int_V(\overline{Q}\,\overline{\Theta}'-\overline{Q}'\overline{\Theta})\,dV+$$

$$-\left(\frac{1}{\varkappa}+p\beta^2\right)\int_V(\overline{\Theta}'f-\overline{\Theta}f')\,dV-\beta^2\int_V(\overline{\Theta}'g-\overline{\Theta}g')\,dV \tag{2.9}$$

Dokonując odwrotnej transformacji Laplace'a na równaniu (2.9) oraz wykorzystując twierdzenie o splocie, otrzymamy następującą postać twierdzenia o wzajemności

$$\int_0^t d\tau\int_A\left[\Theta'(\vec{x},t-\tau)\frac{\partial\Theta(\vec{x},\tau)}{\partial n}-\Theta(\vec{x},\tau)\frac{\partial\Theta'(\vec{x},t-\tau)}{\partial n}\right]dA(\vec{x})+$$

$$+\frac{1}{\varkappa}\int_0^t d\tau\int_V[\Theta'(\vec{x},t-\tau)\,Q(\vec{x},\tau)-\Theta(\vec{x},\tau)\,Q'(\vec{x},t-\tau)]\,dV(\vec{x})+ \tag{2.10}$$

$$+\frac{1}{\varkappa}\int^V[(f(\vec{x})+\varkappa\beta^2g(\vec{x}))\,\Theta'(\vec{x},t)-(f'(\vec{x})+\varkappa\beta^2g'(\vec{x}))\,\Theta(\vec{x},t)]\,dV(\vec{x})+$$

$$+\beta^2\frac{\partial}{\partial t}\int_V[f(\vec{x})\,\Theta'(\vec{x},t)-f'(\vec{x})\,\Theta(\vec{x},t)]\,dV(\vec{x})=0$$

W przypadku ciała nieskończonego równanie (2.10) dozna znacznego uproszczenia, gdyż przy założeniu, że źródła ciepła i warunki początkowe odnoszą się do obszaru ograniczonego, znikają całki początkowe.

Rozpatrzmy przypadek szczególny, gdy w punkcie ξ ciała nieskończonego działa źródło skupione i chwilowe $Q=\delta(\vec{x}-\vec{\xi})\,\delta(t)$, a w punkcie η, źródło skupione i chwilowe $Q' = \delta(\vec{x} - \vec{\eta})\,\delta(t)$. Z równania (2.10) otrzymamy:

$$\int_0^t d\tau \int_V \delta(\vec{x}, -\vec{\xi})\,\delta(\tau)\,\Theta'(\vec{x}, \vec{\eta}, t-\tau)\,dV(\vec{x}) - \int_0^t d\tau \int_V \delta(\vec{x} - \vec{\eta})\,\delta(t-\tau)\,\Theta(\vec{x}, \vec{\xi}, \tau)\,dV(\vec{x})$$

skąd:

$$\Theta'(\vec{\xi}, \vec{\eta}, t) = \Theta(\vec{\eta}, \vec{\xi}, t) \tag{2.11}$$

W przypadku szczególnym, gdy źródła ciepła i temperatur zmieniają się w sposób harmoniczny w czasie, zatem gdy

$$\Theta(\vec{x}, t) = \Theta^*(\vec{x})\,e^{-i\omega t}, \quad Q'(\vec{x}, t) = Q'^*(\vec{x})\,e^{-i\omega t}$$

to relacja wzajemności przyjmie postać:

$$\int_A \left(\Theta'^* \frac{\partial \Theta^*}{\partial n} - \Theta^* \frac{\partial \Theta'^*}{\partial n}\right) dA = -\frac{1}{\varkappa} \int_V (Q^* \Theta'^* - Q'^* \Theta^*)\,dV(\vec{x}) \tag{2.12}$$

§ 3. Zmodyfikowany potencjał opóźniony

Rozpatrzmy ciało nieskończone, w którym działają ośrodki $Q(\vec{x}, t)$ rozmieszczone w obszarze ograniczonym V'. Załóżmy dalej, że mamy do czynienia z jednorodnymi warunkami początkowymi. Temperatura Θ spełnia równanie (2.1). Wyznaczymy ją z twierdzenia o wzajemności (2.10) przyjmując $\Theta' = G(\vec{x}, \vec{\xi}, t)$, gdzie funkcja G spełnia równanie:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\varkappa}\partial_t - \beta^2 \partial_t^2\right) G(\vec{x}, \vec{\xi}, t) = -\frac{1}{\varkappa}\,\delta(\vec{x} - \vec{\xi})\,\delta(t) \tag{3.1}$$

i wyraża temperaturę wywołaną działaniem skupionego i chwilowego źródła ciepła w punkcie $\vec{\xi}$. Zakładamy, że funkcja G spełnia jednorodne warunki początkowe. Dokonując na (3.1) transformacji całkowej Laplace'a otrzymamy:

$$\left[\nabla^2 - p\left(\frac{1}{\varkappa} + \beta^2 p\right)\right] \overline{G}(\vec{x}, \vec{\xi}, p) = -\frac{1}{\varkappa}\,\delta(\vec{x} - \vec{\xi}) \tag{3.2}$$

Całką szczególną tego równania jest funkcja

$$\overline{G}(\vec{x}, \vec{\xi}, p) = \frac{1}{4\pi\varkappa R} \exp\left[-R\sqrt{\frac{p}{\varkappa}(1 + \varkappa\beta^2 p)}\right] \tag{3.3}$$

gdzie $R = |\vec{x} - \vec{\xi}|$

Retransformata funkcji (3.3) ma postać [4]:

$$G(\vec{x}, \vec{\xi}, t) = \frac{1}{8\pi\varkappa^2\beta}\,e^{-\frac{t}{2\varkappa\beta^2}}\,\frac{I_1\left(\frac{1}{2\varkappa\beta^2}\sqrt{t^2 - R^2\beta^2}\right)}{\sqrt{t^2 - R^2\beta^2}}\,H(t - R\beta) +$$

$$+\frac{1}{4\pi\varkappa R}e^{-\frac{t}{2\varkappa\beta^2}}\delta(t-R\beta) \tag{3.4}$$

Z twierdzenia o wzajemności (2.10) przy $Q' = \delta(\vec{x}-\vec{\xi})\,\delta(t)$;

$$\Theta = G(\vec{x},\vec{\xi},t); \quad f=g=f'=g'=0 \quad \text{wynika}$$

$$\Theta(\vec{\xi},t) = \int_0^t d\tau \int_V Q(\vec{x},t-\tau)\,G(\vec{x},\vec{\xi},\tau)\,dV(\vec{x}) \tag{3.5}$$

Stąd z uwagi na (3.4) znajdujemy:

$$\Theta(\vec{\xi},t) = \frac{1}{4\pi\varkappa}\int_V \frac{Q(\vec{x},t-R\beta)}{R(\vec{x},\vec{\xi})}e^{-\frac{R}{2\varkappa\beta}}dV(\vec{x}) + \frac{1}{8\pi\varkappa^2\beta}\int_0^t d\tau\int_V Q(\vec{x},t-\tau)\,\times$$

$$\times e^{-\frac{\tau}{2\varkappa\beta^2}}\frac{I_1\left(\frac{1}{2\varkappa\beta^2}\sqrt{\tau^2-R^2\beta^2}\right)}{\sqrt{\tau^2-R^2\beta^2}}H(\tau-R\beta)\,dV(\vec{x}) \tag{3.6}$$

W wyrażeniu (3.6) występuje argument opóźniony $t-R\beta$ $(R \leqslant t/\beta)$, przy czym argument ten występuje w pierwszej całce bezpośrednio bez sumowania po czasie. Mamy więc do czynienia tutaj z potencjałem opóźnionym.

Dla $\beta \to 0$ z (3.3) otrzymujemy:

$$\overline{G}(\vec{x},\vec{\xi},p) = \frac{1}{4\pi\varkappa R}\exp\left(-R\sqrt{\frac{p}{\varkappa}}\right) \tag{3.7}$$

Stąd:

$$G(\vec{x},\vec{\xi},t) = \frac{1}{8\pi\varkappa\sqrt{\pi t^3}}\exp\left(-\frac{R^2}{4\varkappa t}\right) \tag{3.8}$$

oraz na podstawie (3.4):

$$\Theta(\vec{x},t) = \frac{1}{8\pi\varkappa}\int_0^t d\tau\int_V \frac{Q(\vec{x},t-\tau)}{\sqrt{\pi t^3}}\exp\left(-\frac{R^2}{4\pi\tau}\right)dV(\vec{x}) \tag{3.9}$$

co pokrywa się ze znanym wyrażeniem z teorii klasycznego równania przewodnictwa cieplnego.

Ze wzoru (2.10) wyznaczyć możemy również temperaturę $\Theta(\vec{x},t)$ wywołaną działanie warunków początkowych (2.3). Dla $Q' = \delta(\vec{x}-\vec{\xi})\delta(t)$, $Q=0$, $\Theta' = G(\vec{x},\vec{\xi},t)$, $f'=g'=0$ mamy:

$$\Theta(\vec{\xi},t) = \frac{1}{\varkappa}\int_V [f(\vec{x})+\beta^2\varkappa\, g(\vec{x})]\,G(\vec{x},\vec{\xi},t)\,dV(\vec{x}) +$$

$$+\beta^2 \varkappa \int_V f(\vec{x}) \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{\xi}, t)}{\partial t} dV(\vec{x}) \tag{3.10}$$

gdzie funkcja G dana jest wzorem (3.4).

Zastosujemy teraz twierdzenie o wzajemności (2.10) do ciała ograniczonego powierzchnią A, przy założeniu, że warunki początkowe są jednorodne, a na brzegu A zadane są warunki brzegowe (2.2). Jako drugi układ przyczyn i skutków dobieramy sobie chwilowe i skupione źródło ciepła $Q' = \delta(\vec{x} - \vec{\xi})\,\delta(t)$, które wywołuje w ciele rozkład temperatury $\Theta' = \hat{G}(\vec{x}, \vec{\xi}, t)$. Funkcja Greena spełniać powinna równanie różniczkowe:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\varkappa}\partial_t - \beta^2 \partial_t^2\right) \hat{G}(\vec{x}, \vec{\xi}, t) = -\frac{\delta(\vec{x} - \vec{\xi})\,\delta(t)}{\varkappa} \tag{3.11}$$

z jednorodnym warunkiem początkowym oraz z jednorodnymi warunkami brzegowymi:

$$\hat{G}(\vec{x}, \vec{\xi}, t) = 0 \text{ na } A_u, \qquad \frac{\partial \hat{G}(\vec{x}, \vec{\xi}, t)}{\partial n} = 0 \text{ na } A_\sigma \tag{3.12}$$

Równanie (2.10), w którym zakładamy: $g = f = g' = f' = 0$, $Q' = \delta(\vec{x} - \vec{\xi})\,\delta(t)$, $\Theta' = \hat{G}(\vec{x}, \vec{\xi}, t)$ przyjmie postać:

$$\begin{aligned} \Theta(\vec{\xi}, t) = & \int_0^t d\tau \int_V Q(\vec{x}, \tau)\, \hat{G}(\vec{x}, \vec{\xi}, t - \tau)\, dV(\vec{x}) + \\ & + \varkappa \int_0^t \left[\int_{A_\sigma} \hat{G}(\vec{x}, \vec{\xi}, t - \tau) \frac{k(\vec{x}, \tau)}{\lambda_0} dA(\vec{x}) - \int_{A_u} \frac{\partial \hat{G}(\vec{x}, \vec{\xi}, t - \tau)}{\partial n} h(\vec{x}, \tau)\, dA(\vec{x})\right] \end{aligned} \tag{3.13}$$

Odpowiednio dobrana funkcja $\hat{G}$ zezwala nam uzyskać temperaturę drogą całkowania. Zakładamy, że funkcje $Q(\vec{x}, \tau)$, $\vec{x} \in V$ oraz $(\vec{x}, \tau)$, $\vec{x} \in A_\sigma$, $h(\vec{x}, \tau)$, $\vec{x} \in A_u$ są funkcjami zadanymi.

Jeśli temperatura $\Theta(\vec{x}, t)$ zadana jest na całej powierzchni A, to:

$$\begin{aligned} \Theta(\vec{\xi}, t) = & \int_0^t d\tau \int_V Q(\vec{x}, \tau)\, \mathring{G}(\vec{x}, \vec{\xi}, t - \tau)\, dV(\vec{x}) + \\ & - \varkappa \int_0^t d\tau \int_V \Theta(\vec{x}, \tau) \frac{\partial \mathring{G}(\vec{x}, \vec{\xi}, t - \tau)}{dn} dV(\vec{x}) \end{aligned} \tag{3.14}$$

gdzie funkcja $\mathring{G}(\vec{x}, \vec{\xi}, t)$ winna spełniać równanie (3.10) z jednorodnymi warunkami początkowymi i jednorodnym warunkiem brzegowym:

$$\mathring{G}(\vec{x}, \vec{\xi}. t) = 0 \text{ na } A$$

§ 4. Analogon twierdzenia Kirchhoffa

Rozważmy obszar wewnętrzny B^+ o brzegu A, na którym zadane są funkcje Θ i $\frac{\partial\Theta}{\partial n}$. Pragniemy wyznaczyć funkcję Θ w punkcie $\vec{\xi} \in B^+$ wyrażając ją przez całkę powierzchniową na A przy pomocy funkcji Greena G dla obszaru nieskończonego oraz funkcji Θ, $\frac{\partial\Theta}{\partial n}$ na A.

Zakładamy, że w obszarze B^+ brak jest źródła ciepła ($Q = 0$) oraz że warunki początkowe są jednorodne ($f = g = f' = g' = 0$). Kładąc ponadto $\Theta' = G(\vec{x}, \vec{\xi}, t)$, $Q' = \delta(\vec{x} - \vec{\xi})\,\delta(t)$ do równania (2.9) mamy

$$\bar{\Theta}(\vec{\xi}, p) = \varkappa \int_A \left[\bar{G}(\vec{x}, \vec{\xi}, p)\,\frac{\partial\bar{\Theta}(\vec{x}, p)}{\partial n} - \bar{\Theta}(\vec{x}, \vec{\xi}, p)\,\frac{\partial\bar{G}(\vec{x}, \vec{\xi}, p)}{\partial n}\right] dA(\vec{x}) \tag{4.1}$$

Przedstawmy $\bar{G}(\vec{x}, \vec{\xi}, p)$ ze wzoru (3.3) w postaci:

$$\bar{G}(\vec{x}, \vec{\xi}, p) = \frac{1}{4\pi R\varkappa}\left[e^{-R\beta p} + p\bar{F}(\vec{x}, \vec{\xi}, p)\right] \tag{4.2}$$

gdzie.

$$\bar{F} = \frac{1}{p}\left[\exp\left(-R\beta\sqrt{p\left(\frac{1}{\beta^2\varkappa} + p\right)}\right) - e^{-R\beta p}\right]$$

W ten sposób wzór (4.1) przyjmie postać:

$$\begin{aligned}\bar{\Theta}(\vec{\xi}, p) = \frac{1}{4\pi}\int_A \left[\left(\frac{e^{-R\beta p}}{R}\right)\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial n} - \bar{\Theta}\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-R\beta p}}{R}\right)\right] dA(\vec{x}) + \\ + \frac{1}{4\pi}\int_A \left\{\left(\frac{p\bar{F}}{R}\right)\frac{\partial\bar{F}}{\partial n} - \bar{\Theta}\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{p\bar{F}}{R}\right)\right\} dA(\vec{x})\end{aligned} \tag{4.3}$$

Wykonanie odwrotnej transformacji Laplace'a na równaniu (4.3) daje po prostych przekształceniach:

$$\begin{aligned}\Theta(\vec{\xi}, t) = -\frac{1}{4\pi}\int_A \left\{\left[\Theta(\vec{x}, t)\right]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{\beta}{R}\frac{\partial R}{\partial n}\left[\frac{\partial\Theta(\vec{x}, t)}{\partial t}\right] - \frac{1}{R}\left[\frac{\partial\Theta(\vec{x}, t)}{\partial n}\right]\right\} dA(\vec{x}) + \\ + \frac{1}{4\pi}\int_0^t d\tau \int_A \left\{\frac{1}{R}\,\frac{\partial F(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau}\,\frac{\partial\Theta(\vec{x}, t-\tau)}{\partial n} - \Theta(\vec{x}, t-\tau)\,\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{R}\,\frac{\partial F(\vec{x}, \tau)}{\partial\tau}\right]\right\} dA(\vec{x})\end{aligned} \tag{4.4}$$

przy $\vec{\xi} \in B^+$

gdzie [4]:

$$F(\vec{x}, t) = \begin{cases} 0 & t \leqslant R\beta \\ -\dfrac{R}{2\beta\varkappa}\displaystyle\int_t^\infty e^{-\frac{t'}{\beta^2\varkappa}} \dfrac{\left(I_1 \frac{1}{\beta^2\varkappa}\sqrt{t'^2 - R^2\beta^2}\right)}{\sqrt{t'^2 - R^2\beta^2}} dt', & t > R\beta \end{cases}$$

oraz

$$[\Theta(\vec{x},t)] = \Theta(\vec{x},t - R\beta), \quad \left[\frac{\partial\Theta(\vec{x},t)}{\partial t}\right] = \frac{\partial\Theta(\vec{x},t - R\beta)}{\partial t}, \quad \left[\frac{\partial\Theta(\vec{x},t)}{\partial n}\right] = \frac{\partial\Theta(\vec{x},t - R\beta)}{\partial n}.$$

Pierwsza całka w wyrażeniu (3.4) ma postać analogiczną do całki Kirchhoffa w klasycznym równaniu falowym [5]. Dla $\frac{1}{\varkappa} = 0$ w lewej stronie równania (2.1), zatem po opuszczeniu członu dyfuzyjnego w równaniu (2.1) jest $F \equiv 0$ i powstaje znana całka Kirchhoffa.

W przypadku szczególnym harmonicznie w czasie zmieniającego się pola tmperatury, wzór (4.1) przechodzi na:

$$\Theta^*(\vec{\xi}) = \varkappa \int_A \left\{ G^*(\vec{x}, \xi) \frac{\partial\Theta^*(\vec{x})}{\partial n} - \Theta^*(\vec{x}) \frac{\partial G^*(\vec{x},\vec{\xi})}{\partial n} \right\} dA(\vec{x}), \quad \vec{\xi} \in B^+ \tag{4.5}$$

Tutaj funkcja G^* przyjmuje postać:

$$G^* = \frac{1}{4\pi R\varkappa} \exp\left[-R\sqrt{\frac{i\omega}{\varkappa} - \beta^2\omega^2}\right] \tag{4.6}$$

lub (4.7)

$$G^* = \frac{1}{4\pi\varkappa R} \exp\left\{-\frac{R\omega}{2\varkappa}\left[1 + i\left(\beta^2\omega\varkappa + \sqrt{1 + \varkappa^2\beta^4\omega^2}\right)\right] \frac{1}{\sqrt{\frac{\beta^2\omega^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\beta^4\omega^4 + \omega^2/\varkappa^2}}}\right\}$$

Równanie (4.5) stanowi analogon do całki Helmholtza dla klasycznego równania falowego. Zauważmy, że przy przesunięciu członu dyfuzyjnego w równaniu (2.1), otrzymamy w (4.6) $G^* = \frac{1}{4\pi R\varkappa} \exp(-R\beta i\omega)$

§ 5. Druga postać twierdzenia o wzajemności

Rozpatrzmy równanie (2.7) przy założeniu jednorodnych warunków początkowych. Jako drugi układ przyczyn i skutków przyjmiemy zjawisko falowe opisane równaniem:

$$(\nabla^2 - \beta^2\partial_t^2)\,\Theta'(\vec{x},t) = -\frac{Q'(\vec{x},t)}{\varkappa} \tag{5.1}$$

Wykonajmy na (5.1) transformację całkową Laplace'a i załóżmy jednorodność warunków początkowych. Otrzymamy:

$$(\nabla^2 - p^2 \beta^2) \overline{\Theta})' (\vec{x}, p) = - \frac{\overline{Q}' (\vec{x}, p)}{\varkappa} \tag{5.2}$$

Pomnóżmy równanie (2.7) przez $\overline{\Theta}'$, równanie (5.2) przez $\overline{\Theta}$, odejmijmy od siebie tak przemnożone równania i scałkujmy po obszarze ciała. Stosując przekształcenie Greena, mamy:

$$\int_A \left(\overline{\Theta}' \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial n} - \overline{\Theta} \frac{\partial \overline{\Theta}'}{\partial n} \right) dA - \frac{p}{\varkappa} \int_V \overline{\Theta}\, \overline{\Theta}' \, dV = - \frac{1}{\varkappa} \int_V (\overline{Q}\, \overline{\Theta}' - \overline{Q}' \overline{\Theta})\, dV \tag{5.3}$$

Przyjmujmy teraz, że $\Theta' = F(\vec{x}, \vec{\xi}, t)$, gdzie funkcja F spełnia równanie:

$$(\nabla^2 - \beta^2 \partial_t^2) F(\vec{x}, \vec{\xi}, t) = - \frac{\delta (\vec{x} - \vec{\xi}) \delta(t)}{\varkappa} \tag{5.4}$$

z jednorodnymi warukami początkowymi oraz z warunkami brzegowymi:

$$F(\vec{x}, \vec{\xi}, t) = 0 \quad \text{na } A_u, \quad \frac{\partial F(\vec{x}, \vec{\xi}, t)}{\partial n} = 0 \quad \text{na } A_\sigma, \quad A = A_u + A_\sigma \tag{5.5}$$

Równanie (4.3) przyjmie postać:

$$\int_{A_\sigma} \overline{F} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial n} dA - \int_{A_u} \overline{\Theta} \frac{\partial \overline{F}}{\partial n} dA - \frac{p}{\varkappa} \int_V \overline{\Theta}\, \overline{F}\, dV = - \frac{1}{\varkappa} \int_V \overline{Q}\, \overline{F}\, dV + \frac{1}{\varkappa} \overline{\Theta}\, \vec{\xi}, p)$$

Wykonując odwrotną transformację Laplace'a, otrzymamy:

$$\Theta(\vec{\xi}, t) = M(\vec{\xi}, t) - \int_0^t d\tau \int_V \Theta(\vec{x}, \tau) \frac{\partial F(\vec{x}, \vec{\xi}, t - \tau)}{\partial \tau} dV(\vec{x}) \tag{5.6}$$

gdzie:

$$M(\vec{\xi}, t) = \varkappa \int_0^t d\tau \int_A F(\vec{x}, \vec{\xi}, t - \tau) \frac{\partial \Theta(\vec{x}, \tau)}{\partial n} dA(\vec{x}) - \varkappa \int_0^t d\tau \int_{A_u} \Theta(\vec{x}, \tau) \frac{\partial F(\vec{x}, \vec{\xi}, t - \tau)}{\partial n} dA(\vec{x}) +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_V Q(\vec{x}, \tau) F(\vec{x}, \vec{\xi}, t - \tau)\, dA(\vec{x})$$

Otrzymaliśmy równanie całkowe dla wyznaczenia funkcji $\Theta(\vec{\xi}, t)$. W przypadku ciała nieskończonego odpadną występujące w wyrażeniu $M(\vec{\xi}, t)$ całki powierzchniowe, a funkcja F przyjmie postać:

$$F(\vec{x}, \vec{\xi}, t) = \frac{1}{4 \pi R \varkappa} \delta (t - R \beta) \tag{5.7}$$

Dla przypadku harmonicznie w czasie zmieniającego się pola temperatury, mamy:

$$\Theta^*(\vec{\xi}) = M^*(\vec{\xi}) + i\omega \int\limits_V \Theta^*(\vec{x})\, F^*(\vec{x}, \vec{\xi})\, dV(\vec{x}) \tag{5.8}$$

gdzie:

$$M^*(\vec{\xi}) = \int\limits_V \Theta^* F^* dV + \varkappa \left\{ \int\limits_{A_\sigma} F^* \frac{\partial \Theta^*}{\partial n} dA - \int\limits_{A_u} \Theta^* \frac{\partial F^*}{\partial n} dA \right\}$$

Otrzymaliśmy tu równanie całkowe Fredholma dla wyznaczenia amplitudy temperatury: Θ^*. Dla ciała nieskończonego w wyrażeniu $M^*(\vec{\xi})$ znikają całki powierzchniowe, a $F^* = \frac{1}{4\pi R \varkappa} \exp(-R\beta i\omega)$

Przedstawiony wyżej zespół twierdzeń całkowych stanowi uogólnienie klasycznych twierdzeń równania falowego i równania parabolicznego przewodnictwa cieplnego na przypadek uogólnionego, falowego równania przewodnictwa cieplnego.

LITERATURA

[1] S. Kaliski — *Falowe równanie przewodnictwa cieplnego*, Biul. WAT 2, **14**, 1965.

— *Wave equation of heat conduction* — Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn. 4, **13**, 1965.

[2] S. Kaliski — *Czerenkowska generacja fal termicznych za pomocą spowolnionych fal elektromagnetycznych.* — Biul. WAT, 5, **15**, 1966.

— *Čerenkov generation of thermal waves by means of slowed down electromagnetic waves* — Arch. Mech. Stos. 6, **18**, *1966; Irreversible aspects of continuum mechanics* — IUTAM Symp. Vienna 1966—1968.

[3] W. Nowacki — *Thermoelastic waves motion* — Proc. Vibr. Probl. 4, **9**, 1968.

[4] В. А. Диткин, П. И. Кузнецов — *Справочник по операционному исчислению* — Москва, 1951.

[5] G. Kirchhoff — Berliner Sitzungsberichte (1822). str. 641, Annalen der Physik Vol. 18 (1883) str. 663.

Краткое содержание

В работе даются основные теоремы о взаимности и интегральные теоремы для обобщенного, волнового уравнения теплопроводности [1].

Эти теоремы в классических случаях переходят в известные интегральные теоремы для волнового уравнения и для параболического уравнения теплопроводности.

Synopsis

The fundamental theorems on reciprocity and integral theorems for the generalized wave equation of heat conduction were presented in this paper. These theorems in classical cases pass into the known integral theorems for the wave and parabolic equations of the heat conduction.