BIULETYN WOJSKOWEJ AKADEMII TECHNICZNEJ

im. Jarosława Dąbrowskiego

ROK XIV LISTOPAD 11 (159)
WARSZAWA 1965

SYLWESTER KALISKI,
WITOLD NOWACKI

TWIERDZENIE O WZAJEMNOŚCI DLA RZECZYWISTYCH, ANIZOTROPOWYCH PRZEWODNIKÓW W TERMO-MAGNETO-SPRĘŻYSTOŚCI

STRESZCZENIE

W pracy podano wywód twierdzenia o wzajemności w magneto-termo-sprężystości dla rzeczywistych, anizotropowych przewodników przy uwzględnieniu efektów termoelektrycznych. Praca stanowi rozszerzenie prac [1] i [2], gdzie analogiczne twierdzenia zostały uzyskane dla izotropowych przewodników idealnych i rzeczywistych. Twierdzenie może być wykorzystane do szeregu zagadnień praktycznych, jak konstrukcja równań całkowych problemów brzegowych itp.

* * *

Wstęp

W pracy [1] wyprowadzone zostało twierdzenie o wzajemności w termo-magnetosprężystości ciał izotropowych w przypadku doskonałej przewodności elektrycznej ośrodka. W pracy [2] uzyskano analogiczne twierdzenie dla przewodników izotropowych o skończonej przewodności elektrycznej. W niniejszej pracy podamy rozszerzenie twierdzenia uzyskanego w [2] na przypadek ciał anizotropowych.

§ 1. Równania wyjściowe

Wyjdziemy z układu równań liniowej teorii termo-magneto-sprężystości dla ośrodków wolno poruszających się przy uwzględnieniu efektów termoelektrycznych [3]. Relacje symetrii i dyskusja termodynamiczna dla równań wyjściowych [3] podane są w [4]. Będziemy tutaj korzystać z gotowych wniosków pracy [4]. Podobnie jak w [2] wyjdziemy z pełnego zlinearyzowanego układu równań termo-magneto-sprężystości, odrzucając jedynie człony o charakterze drugorzędnym, co jest dopuszczalne, jeżeli przyjąć, że μ_{ik} i ε_{ik} nie różnią się znacznie od jedności.

Równania termo-magneto-sprężystości mają dla jednorodnego ośrodka anizotropowego postać następującą:

1. Równania elektrodynamiki

$$\operatorname{rot}\vec{h}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\dot{\vec{D}}\,;\quad \operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{1}{c}\dot{\vec{b}}$$

$$b_i = \mu_{ik} h_k; \quad D_i = \varepsilon_{ik}\left[E_k + \frac{1}{c}\left(\vec{u}\times\vec{B}_0\right)_k\right] - \frac{1}{c}\left(\vec{u}\times\vec{H}_0\right) \approx \varepsilon_{ik} E_k$$

$$\operatorname{div}\vec{b} = 0; \quad \operatorname{div}\vec{D} = -4\pi\rho_e \approx (\varepsilon_{ik} E_k)_{,i}; \quad \operatorname{div}\vec{j}_c = -\frac{\partial\rho_e}{\partial t}; \tag{1.1}$$

$$j_i = \eta_{ik} E_k - \varkappa_{ik} T_{,k} + \frac{\eta_{ik}}{c}\left(\dot{\vec{u}}\times\vec{B}_0\right)_k + \rho_e \dot{u}_i; \quad j_{ci} = j_i + j_{iz}$$

gdzie zgodnie z założeniem, że μ_{ik}, ε_{ik} są bliskie jedności posługiwać się będziemy przybliżonym wyrażeniem dla D_i.

2. Równania sprężystości

$$-\rho\ddot{u}_i + \sigma_{ik,k} + \frac{1}{c}\left(\vec{j}\times\vec{B}_0\right) + \rho_e E_i - X_i = 0$$

$$\sigma_{ik} = E_{ikmn}\, e_{mn} - \alpha_{ik} T \tag{1.2}$$

3. Równanie przewodnictwa cieplnego

$$\beta\dot{T} + \lambda_{ij}\dot{e}_{ij} - (k_{ij} T_{,j})_{,i} + (\pi_{ik} j_{ck})_{,i} = f \tag{1.3}$$

Oznaczenia przyjęto konwencjonalnie, analogicznie jak w [2], mianowicie: $\vec{E}$, $\vec{h}$ są zaburzonymi polami elektrycznymi i magnetycznymi; $\vec{j}$ jest wektorem gęstości prądu; $\vec{j}_z$ — wektorem gęstości prądu zewnętrznego; ε_{ik}, μ_{ik} — tensorami przenikalności elektrycznej i magnetycznej; η_{ik} — tensorem przewodności elektrycznej; T — temperaturą zaburzoną ϱ — gęstością ośrodka; E_{ikmn} — tensorem modułów sprężystości; α_{ik} — tensorem współczynników liniowej rozszerzalności cieplnej; λ_{ik} — tensorem określającym wpływ deformacji na pole temperatur; π_{ik} — tensorem określającym wpływ gęstości wektora prądu na gęstość strumienia ciepła; k_{ik} — tensorem współczynników przewodności cieplnej; $\varkappa_{ik}$ — tensorem wiążącym gradient pola temperatury z prądem elektrycznym; X jest wektorem zewnętrznego pola sił masowych; f — funkcją zewnętrznych źródeł ciepła.

W równaniach (1.1) — (1.3) współczynniki λ_{ik} oraz α_{ik} są zależne i związane znanymi relacjami, wynikającymi z klasycznych związków termodynamicznych ($T_0\,\alpha_{ik} = \lambda_{ik}$). Związki symetrii dla współczynników η_{ik}, $\varkappa_{ik}$, π_{ik}, k_{ik} itd. oraz relacje pomiędzy nimi wynikają z dyskusji drugiej zasady termodynamiki i związków Onsagera (podane zostały w [4]).

Do równań powyższych, zapisanych dla rozważanego ośrodka, dochodzą jeszcze, w przypadku ośrodka ograniczonego, umieszczonego w próżni, równania pola w próżni:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\vec{h}^0, \vec{E}^0\right) = 0 \tag{1.4}$$

W przypadku ośrodka ograniczonego zespół równań winien być uzupełniony dodatkowo warunkami brzegowymi na powierzchni ograniczającej A, gdzie zadane mają być naprężenia lub przemieszczenia (względnie warunki mieszane), temperatura, bądź jej pochodne normalne oraz warunki ciągłości pola. W dalszym ciągu poddamy układ równań (1.1) — (1.5) transformacji całkowej Laplace'a:

$$\bar{u}(x_i,p) = \mathcal{L}\{u(x_i,t)\} = \int_0^\infty u(x_i,t)\, e^{-pt}\, dt \quad \text{itd.} \tag{1.5}$$

Przyjmować będziemy przy tym jednorodne warunki początkowe oraz założymy, że wszelkie źródła wzbudzające ruch rozpoczynają się dla $t = 0_+$. Twierdzenie o wzajemności dyskutować będziemy dla transformat całkowych.

§ 2. Twierdzenie o wzajemności

Rozpatrzymy dwa układy przyczyn i skutków. Jeden z układów będziemy oznaczać „primami", drugi bez „primów". Wyjdziemy najpierw z tożsamości (1.2) po poddaniu jej uprzednio transformacji Laplace'a. Łatwo znajdziemy związek:

$$(\bar{\sigma}_{ij} + \alpha_{ij}\bar{T})\,\bar{e}'_{ij} = (\bar{\sigma}'_{ij} + \alpha_{ij}\bar{T}')\,\bar{e}_{ij} \tag{2.1}$$

Całkując (2.1) po obszarze B znajdujemy:

$$\int_B (\bar{\sigma}_{ij}\bar{e}'_{ij} - \bar{\sigma}'_{ij}\bar{e}_{ij})\, dV + \int_B \alpha_{ij}(\bar{T}\bar{e}'_{ij} - \bar{T}'\bar{e}_{ij})\, dV \tag{2.2}$$

Mając na uwadze, że $\bar{\sigma}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij}\bar{u}_{i,j}$ oraz wykorzystując twierdzenie o diwergencji, jak również równanie (1.2) zapisane w postaci:

$$\sigma_{ij,j} + T_{ij,j} - \varrho\ddot{u}_i + X_i = 0, \tag{2.3}$$

gdzie:

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi}[b_i H_j + H_i b_j - \delta_{ij} H_k b_k] \tag{2.4}$$

jest tensorem Maxwella, znajdujemy:

$$\int_B (\bar{X}_i\bar{u}'_i - \bar{X}'\bar{u}_i)\, dV + \int_A (\bar{p}^*_i\bar{u}'_i - \bar{p}^{*\prime}_i\bar{u}_i)\, dA + \tag{2.5}$$

$$+ \int_B \alpha_{ij}(\bar{T}\bar{e}'_{ij} - \bar{T}'\bar{e}_{ij})\, dV = \int_B (\bar{T}_{ij}\bar{e}'_{ij} - \bar{T}'_{ij}\bar{e}_{ij})\, dV, \tag{2.6}$$

gdzie:

$$\bar{p}^*_i = (\bar{\sigma}_{ij} + \bar{T}_{ij})\, n_j$$

Równanie (2.5) można przekształcić do postaci:

$$\int_B (\bar{X}_i\bar{u}'_i - \bar{X}'_i\bar{u}_i)\, dV + \int_A (\bar{p}_i\bar{u}'_i - \bar{p}'_i\bar{u}_i)\, dA + \int_B \alpha_{ij}(\bar{T}\bar{e}'_{ij} - \bar{T}'\bar{e}_{ij})\, dV = \tag{2.7}$$

$$= -\int_B \left(\bar{T}_{ij,j}\,\bar{u}_i' - \bar{T}'_{ij,j}\,\bar{u}_i\right) dV = -\frac{1}{c}\int_B \left[\left(\vec{\bar{j}}_c \times \vec{B}_0\right)_i \bar{u}_i' - \left(\vec{\bar{j}}_c' \times \vec{B}_0\right)_i \bar{u}_i\right] dV,$$

gdzie:

$$\bar{p}_i = \bar{\sigma}_{ij}\, n_j$$

Z równania przewodnictwa cieplnego z kolei znajdujemy:

$$\int_B \left[k_{ij}\,\bar{T}_{,ji}\,\bar{T}' - k_{ij}\,\bar{T}'_{,ji}\,\bar{T}\right] dV =$$

$$= p\int_B \lambda_{ij}\left(\bar{e}_{ij}\,\bar{T}' - \bar{e}'_{ij}\,\bar{T}\right) dV + \tag{2.8}$$

$$+ \int_B \left[\pi_{ik}\,\bar{j}_{ck,i}\,\bar{T}' - \pi_{ij}\,\bar{j}'_{ck,i}\,\bar{T}\right] dV - \int_B \left(\bar{f}\,\bar{T}' - \bar{f}'\,\bar{T}\right) dV$$

Korzystając z tożsamości Greena oraz relacji (1.1) przekształcimy równanie (2.8) do postaci:

$$\int_B \lambda_{ij}\left(\bar{e}'_{ij}\,\bar{T} - \bar{e}_{ij}\,\bar{T}'\right) dV = \frac{1}{p}\int_B \left(\bar{f}'\,\bar{T} - \bar{f}\,\bar{T}'\right) dV + \frac{1}{p}\int_A \left(\bar{T}\,k_{ij}\,\bar{T}'_{,j} + \right.$$

$$\left. - \bar{T}'\,k_{ij}\,\bar{T}_{,j}\right) n_i\, dA + \frac{\pi_{ik}}{p}\int_B \left(\bar{j}_{ck,i}\,\bar{T}' - \bar{j}'_{ck,i}\,\bar{T}\right) dV \tag{2.9}$$

Podstawiając dalej (2.9) do (2.7) obliczamy:

$$T_0 p\left[\int_B \left(\bar{X}_i\,\bar{u}_i' - \bar{X}_i'\,\bar{u}_i\right) dV + \int_A \left(\bar{p}_i\,\bar{u}_i' - \bar{p}_i'\,\bar{u}_i\right) dA\right] + \tag{2.10}$$

$$- \int_B \left(\bar{f}\,\bar{T}' - \bar{f}'\,\bar{T}\right) dV - \int_A \left(\bar{T}'\,\bar{T}_{,j} - \bar{T}\,\bar{T}'_{,j}\right) k_{ij}\, n_i\, dA +$$

$$- \pi_{ik}\int_B \left(\bar{T}\,\bar{j}'_{ck,i} - \bar{T}'\,\bar{j}_{ck,i}\right) dV = -\frac{T_0 p}{c}\int_B \left[\left(\vec{\bar{j}}_c \times \vec{B}_0\right)_i \bar{u}_i' - \left(\vec{\bar{j}}_c' \times \vec{B}_0\right)_i \bar{u}_i\right] dV,$$

przy czym skorzystaliśmy ze znanej relacji termodynamicznej [4] $T_0\,\alpha_{ij} = \lambda_{ij}$. Rozważmy obecnie układ równań (1.1). Zapiszemy odpowiednio układy „primowane" i „nieprimowane" następująco:

$$\varepsilon_{ikl}\,\bar{h}_{l,k} = \frac{4\pi}{c}\,\bar{j}_{ci} + \frac{p}{c}\,\varepsilon_{ik}\,\bar{E}_k = \frac{4\pi}{c}\,\bar{j}_{zi} + \frac{1}{c}\left(4\pi\gamma_{ik} + p\varepsilon_{ik}\right)\bar{E}_k + \tag{2.11.1}$$

$$+ \frac{4\pi p\gamma_{ik}}{c^2}\left(\vec{\bar{u}} \times \vec{B}_0\right)_k - \frac{4\pi}{c}\,\varkappa_{ik}\,\bar{T}_{,k}$$

$$\varepsilon_{ikl}\,\bar{E}_{l,k} = -\frac{p}{c}\,\mu_{ik}\,\bar{h}_k$$

$$\varepsilon_{ikl}\,\bar{h}'_{l,k} = \frac{4\pi}{c}\,\bar{j}'_{zi} + \frac{1}{c}\left(4\pi\eta_{ik} + p\varepsilon_{ik}\right)\bar{E}'_k + \frac{4\pi p}{c^2}\,\eta_{ik}\left(\vec{\bar{u}}'\times\vec{B}_0\right)_k - \frac{4\pi}{c}\,\varkappa_{ik}\,\bar{T}'_{,k} \quad (2.11.2)$$

$$\varepsilon_{ikl}\,\bar{E}'_{l,k} = -\frac{p}{c}\,\mu_{ik}\,\bar{h}'_k,$$

gdzie ε_{ikl} — pseudotensor jednostkowy.

W wyrażeniach (2.11) opuszczono zgodnie z założeniem o linearyzacji człon $\dot{u}_i\varrho_e$. Mnożąc pierwsze z równań (2.11.1) skalarnie przez $\vec{\bar{E}}'$, zaś drugie z równań (2.11.2) skalarnie przez $\vec{\bar{h}}$ i odejmując stronami oraz mając na uwadze znany wzór:

$$\operatorname{div}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A}\operatorname{rot}\vec{B} \quad (2.12)$$

otrzymujemy w rezultacie wyrażenie na $\operatorname{div}(\vec{\bar{E}}\times\vec{\bar{h}})$.
Postępując analogicznie z pozostałą parą równań (2.11) otrzymamy wyrażenie na $\operatorname{div}(\vec{\bar{E}}\times\vec{\bar{h}}')$.
Odejmując stronami oba te wyrażenia znajdujemy po przekształceniach:

$$\frac{c}{4\pi}\left[\operatorname{div}\left(\vec{\bar{E}}'\times\vec{\bar{h}}\right) - \operatorname{div}\left(\vec{\bar{E}}\times\vec{\bar{h}}'\right)\right] = \left(\vec{\bar{j}}'_c\,\vec{\bar{E}} - \vec{\bar{j}}_c\,\vec{\bar{E}}'\right) \quad (2.13)$$

przy czym skorzystaliśmy z relacji symetrii dla tensora przenikalności elektrycznej i magnetycznej $\varepsilon_{ik}(B) = \varepsilon_{ki}(-B)$; $\mu_{ik}(B) = \mu_{ki}(-B)$, które wynikają bezpośrednio z dyskusji termodynamicznej (por. [4]). Mając na uwadze, że zachodzą relacje:

$$\bar{j}_{ci} = \eta_{ik}\left[\bar{E}_k + \frac{p}{c}\left(\vec{\bar{u}}\times\vec{B}_0\right)_k\right] - \varkappa_{ik}\,\bar{T}_{,k} + \bar{j}_{zi} \quad (2.14)$$

oraz:

$$\bar{j}'_{ci}\,\bar{E}_i - \bar{j}_{ci}\,\bar{E}'_i = \frac{p}{c}\,\eta_{ik}\left[\left(\vec{\bar{u}}'\times\bar{B}_0\right)_k\bar{E}_i - \left(\vec{\bar{u}}\times\vec{B}_0\right)_k\bar{E}'_i\right] +$$

$$+\,\varkappa_{ik}\left(\bar{T}_{,k}\,\bar{E}'_i - \bar{T}'_{,k}\,\bar{E}_i\right) + \bar{j}'_{zi}\,\bar{E}_i - \bar{j}_{zi}\,\bar{E}'_i, \quad (2.15)$$

jak również:

$$\left(\vec{\bar{j}}_c\times\vec{B}_0\right)_i\vec{\bar{u}}'_i - \left(\vec{\bar{j}}'_c\times\vec{B}_0\right)_i\vec{\bar{u}}_i = \left(\vec{\bar{u}}\times\vec{B}_0\right)_i\vec{\bar{j}}'_{ci} - \left(\vec{\bar{u}}'\times\vec{B}_0\right)_i\vec{\bar{j}}_{ci} =$$

$$= \left(\vec{\bar{j}}_z\times\vec{B}_0\right)_i\vec{\bar{u}}'_i - \left(\vec{\bar{j}}'_z\times\vec{B}_0\right)\vec{\bar{u}}_i + \quad (2.16)$$

$$+\,\eta_{ik}\left[\left(\vec{\bar{u}}\times\vec{B}_0\right)_i\bar{E}'_k - \left(\vec{\bar{u}}'\times\vec{B}_0\right)_i\bar{E}_k\right] + \varkappa_{ik}\left[\left(\vec{\bar{u}}'\times\vec{B}_0\right)_i\bar{T}_{,k} - \left(\vec{\bar{u}}\times\vec{B}_0\right)_i\bar{T}'_{,k}\right]$$

możemy przystąpić do sformułowania łącznego relacji wzajemności. Zauważmy jeszcze, że w związkach (2.15) skorzystaliśmy z relacji symetrii $\eta_{ik}(B) = \eta_{ki}(-B)$ (por. [4]).

Łącząc w dalszym ciągu (2.10) i (2.13) przy jednoczesnym uwzględnieniu (2.15) i (2.16) otrzymamy:

$$T_0 p \int_B (\overline{X}_i \overline{u}_i' - \overline{X}_i' \overline{u}_i)\, dV - \int_B (\overline{f}\,\overline{T}' - \overline{f}'\,\overline{T})\, dV - \pi_{ik} \int_B (\overline{T}\,\overline{j}_{ck,i}' + \tag{2.17}$$

$$- \overline{T}'\,\overline{j}_{ck,i})\, dV + \frac{T_0 p}{c} \int_B \left[\left(\vec{\overline{j}}_z \times \vec{B}_0\right)_i \overline{u}_i' - \left(\vec{\overline{j}}_z' \times \vec{B}_0\right)_i \overline{u}_i \right] dV +$$

$$+ \frac{T_0 p}{c} \varkappa_{ik} \int_V \left[\left(\vec{\overline{u}}' \times \vec{B}_0\right)_i \overline{T}_{,k} - \left(\vec{\overline{u}} \times \vec{B}_0\right)_i \overline{T}_{,k}' \right] dV + T_0 \varkappa_{ik} \int_B (\overline{T}_{,k} \overline{E}_i' + \overline{T}_{,k}' \overline{E}_i)\, dV +$$

$$+ T_0 \int_V (\overline{j}_{zi}' \overline{E}_i - \overline{j}_{zi} \overline{E}_i')\, dV = - T_0 p \int_A (\overline{p}_i \overline{u}_i' - \overline{p}_i' \overline{u}_i)\, dA +$$

$$+ \int_A (\overline{T}'\,\overline{T}_{,j} - \overline{T}\,\overline{T}_{,j}')\, k_{ij}\, n_i\, dA + \frac{c}{4\pi} T_0 \int_A \left[\left(\vec{\overline{E}}' \times \vec{\overline{h}}\right) - \left(\vec{\overline{E}} \times \vec{\overline{h}}'\right) \right]_i n_i\, dA$$

Wzór (2.17) można w dalszym ciągu przekształcić następująco:

$$T_0 p \int_B (\overline{X}_i \overline{u}_i' - \overline{X}_i' \overline{u}_i)\, dV - \int_B (\overline{f}\,\overline{T}' - \overline{f}'\,\overline{T})\, dV + T_0 \varkappa_{ik} \int_B (\overline{T}_{,k} \overline{E}_{0i}' + \tag{2.18}$$

$$- \overline{T}_{,k}' \overline{E}_{0i})\, dV + T_0 \int_B (\overline{j}_{zi}' \overline{E}_{0i} - \overline{j}_{zi} \overline{E}_{0i}')\, dV - \pi_{ik} \int_B (\overline{T}\,\overline{j}_{ck,i}' - \overline{T}'\,\overline{j}_{ck,i})\, dV =$$

$$- T_0 p \int_A (\overline{p}_i \overline{u}_i' - \overline{p}_i' \overline{u}_i)\, dA + k_{ij} \int_A (\overline{T}'\,\overline{T}_{,j} - \overline{T}\,\overline{T}_{,j}')\, n_i\, dA +$$

$$+ \frac{c T_0}{4\pi} \int_A \left[\left(\vec{\overline{E}}' \times \vec{\overline{h}}\right) - \left(\vec{\overline{E}} \times \vec{\overline{h}}'\right) \right]_i n_i\, dA,$$

gdzie:

$$\overline{E}_{0i} = \overline{E}_i + \frac{p}{c} \left(\vec{\overline{u}} \times \vec{B}_0\right)_i \tag{2.19}$$

oznacza pole w układzie spoczynkowym.

Rozpisując w dalszym ciągu ostatni człon lewej strony równania (2.19) otrzymamy ostatecznie, wykorzystując (2.14):

$$T_0 p \int_B (\overline{X}_i \overline{u}_i' - \overline{X}_i' \overline{u}_i)\, dV - \int_B (\overline{f}\,\overline{T}' - \overline{f}'\,\overline{T})\, dV + T_0 \varkappa_{ik} \int_B (\overline{T}_{,k} \overline{E}_{0i}' + \tag{2.20}$$

$$- \overline{T}_{,k}' \overline{E}_{0i})\, dV + T_0 \int_B (\overline{j}_{zi}' \overline{E}_{0i} - \overline{j}_{zi} \overline{E}_{0i}')\, dV - \pi_{ik} \int_B (\overline{T}\,\overline{j}_{zk,i}' - \overline{T}'\,\overline{j}_{zk,i})\, dV +$$

$$-\pi_{ik}\eta_{kl}\int_V \left(\bar{T}\bar{E}'_{0l,i}-\bar{T}'\bar{E}_{0l,i}\right)dV-\pi_{ik}\varkappa_{kl}\int_V \left(\bar{T}\bar{T}'_{,li}-\bar{T}'\bar{T}_{,li}\right)dV=$$

$$=-T_0 p\int_A \left(\bar{p}_i\bar{u}'_i-\bar{p}'_i\bar{u}_i\right)dA+k_{ij}\int_A \left(\bar{T}'\bar{T}_{,j}-\bar{T}\bar{T}'_{,j}\right)n_i\,dA+$$

$$+\frac{cT_0}{4\pi}\int_A \left[\left(\vec{\bar{E}}'\times\vec{\bar{h}}\right)-\left(\vec{\bar{E}}\times\vec{\bar{h}}'\right)\right]_i n_i\,dA$$

Wzór (2.20) stanowi ostateczną postać twierdzenia o wzajemności magneto-termo-sprężystości dla ciał anizotropowych o skończonej przewodności elektrycznej. Jego fizyczna dyskusja jest analogiczna jak w [1] i [2]. Wzór (2.20) przechodzi w przypadku ciał izotropowych w odpowiedni wzór (2.16) pracy [2], jeżeli skorzystać dodatkowo z relacji (1.1) $\operatorname{div}\vec{j}_c = = -\dot{\varrho}_e$.

Wzór (2.20) winien być w przypadku ciała ograniczonego B uzupełniony odpowiednim wzorem dla próżni otaczającej ciało B oraz warunkami brzegowymi — relacjami ciągłości pola. Rozważania tutaj pozostają identyczne z przeprowadzonymi w [2], więc pomijamy je odsyłając do [2]. Jeżeli przejść w (2.20) z B do obszaru nieograniczonego, odpadną całki powierzchniowe. Jeżeli abstrahować od pola w próżni i zadać 3 składowe pola na B w postaci jawnej oraz jeżeli z kolei przyjąć warunki brzegowe w odpowiedni sposób jednorodne, wówczas można również doprowadzić do znikania całek powierzchniowych.

Jeżeli położyć w (2.20) $\varkappa_{ik} = \pi_{ik} = 0$, otrzymamy twierdzenie o wzajemności w magneto-termo-sprężystości bez efektów termoelektrycznych. Jeżeli dodatkowo przejść z η_{ik} do nieskończoności i pominąć prądy zewnętrzne, wówczas otrzymamy twierdzenie o wzajemności dla idealnych przewodników, przy czym jeżeli przyjąć dodatkowo izotropię, otrzymamy postać twierdzenia uzyskaną w [1]. Dla uzyskania bezpośredniej — jawnej postaci twierdzenia o wzajemności, należy jeszcze dokonać na równaniu (2.20) odwrotnej transformacji Laplace'a.

Rozpiszemy przykładowo pierwszy człon równania (2.20). Mamy:

$$T_0\int_B dV\int_0^t \left[X_i\left(\vec{x},t-\tau\right)\frac{\partial u'_i\left(\vec{x},\tau\right)}{\partial\tau}-X'_i\left(\vec{x},t-\tau\right)\frac{\partial u_i\left(\vec{x},\tau\right)}{\partial\tau}\right]d\tau+\ldots \quad (2.21)$$

podobnie jak w analogicznym wzorze pracy [2]:

Odnośnie możliwości wykorzystania twierdzenia o wzajemności, w szczególności do konstrukcji równań całkowych problemów brzegowych itp., pozostają w mocy uwagi końcowe poczynione w [2].

LITERATURA

[1] S. Kaliski, W. Nowacki — *Twierdzenie o wzajemności w magneto-termo-sprężystości (idealne przewodniki)* I — Biul. WAT, 11 (1964).

— *The reciprocity theorem in magneto-thermo-elasticity (perfect conductors)* — Bull. Polon. Ac. Sci. Ser. Sci. Techn. XIII, 2 (1965).

[2] S. Kaliski, W. Nowacki — *Twierdzenie o wzajemności w magneto-termo-sprężystości (rzeczywiste przewodniki) II* — Biul. WAT XIV, 6 (1965).

— *The reciprocity theorem in magneto-thermo-elasticity (real conductors).* — Bull. Polon. Ac. Sci. Ser. Sci. Techn. XIII, 7 (1965).

[3] S. Kaliski, J. Petykiewicz — *Dynamiczne równania ruchu sprzężone z polem temperatur i funkcje rozwiązujące dla ciał anizotropowych sprężystych i niesprężystych w polu magnetycznym.* — Biul. WAT XLV (1959).

— *Dynamical equations of motion coupled with the field of temperatures and resolving function for elastic and inelastic anisotropic bodies in the mangetic field.* — Proc. Vibr. Probl. 1, 3 (1960).

[4] S. Kaliski — *Falowe równania termo-elektro-magneto-sprężystości.* — Biul. WAT XIV, 3 (1965).

— *The wave equations of thermo-electro-magneto-elasticity.* — Proc. Vibr. Probl. 3, 6 (1965).

Краткое содержание

В работе дается доказательство теоремы взаимности в магнето-термоупругости для реальных, анизотропных проводников при учете термоэлектрических эффектов. Работа составляет расширение работ [1] и [2], где аналогичные теоремы были получены для изотропных, идеальных и реальных проводников.

Теорема может быть использована для ряда практических проблем, как построение интегральных уравнений краевых задач и т.п.

Summary

In this paper there was presented a prove of the reciprocity theorem in magneto-thermo-elasticity for the real, anisotropic conductors with consideration of the thermoelectric effects. This paper is an extension of works [1] and [2], where similar theorems were obtained for the isotropic conductors, ideal and real ones.

The theorem may be used for a series of the practical problems, such as construction of integral equations of boundary problems etc.