POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ

4
VII

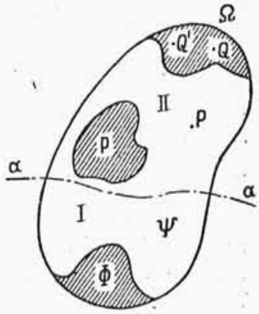
TOM VII WARSZAWA 1955 ZESZYT 4
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

O PEWNYCH ZAGADNIENIACH BRZEGOWYCH TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

W I T O L D   N O W A C K I (WARSZAWA)

Praca przedstawiona na Konferencji Naukowej Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w lipcu 1955 r. w Karpaczu.

1. Rozważmy dowolną bryłę sprężystą znajdującą się w stanie równowagi pod wpływem obciążenia zewnętrznego, sił masowych, wzrostu temperatury oraz samonaprężeń. Załóżmy, że na powierzchniach Φ i Ω stanowiących część powierzchni bryły nałożono warunki brzegowe natury kinematycznej (rys. 1). Zadanie, jakie sobie stawiamy, to wyznaczenie stanów przemieszczenia, odkształcenia oraz naprężenia tego układu sprężystego.



Rys. 1

Pod wpływem założonych obciążeń powstaną na powierzchni Ω siły powierzchniowe $\mathbf{X}(Q)$ o składowych $X_1(Q)$, $X_2(Q)$, $X_3(Q)$ jako funkcje położenia punktu Q na powierzchni Ω. Przyjmiemy je jako funkcje niewiadome, nadliczbowe naszego zadania. Traktujemy zatem bryłę sprężystą, dla której założymy $X_1 = X_2 = X_3 = 0$ jako układ podstawowy, w którym wyznaczyć można przemieszczenia wywołane obciążeniem zewnętrznym, siłami masowymi, wzrostem temperatury, samonaprężeniami, jak również stanami $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $X_3 = 1$ działającymi na powierzchni Ω.

Niech na tak określony układ podstawowy, geometrycznie niezmienny, działa jedynie obciążenie zewnętrzne, siły masowe, wzrost temperatury oraz samonaprężenia. Oznaczmy składowe stanu przemieszczenia w punkcie P, wywołane powyższymi działaniami, przez $u_{i,0}(P)$ $(i = 1, 2, 3)$. Niech składowe te mają kierunek osi x_i $(i = 1, 2, 3)$ przyjętego układu współrzędnych.

Dalej niech na układ podstawowy działa stan $X_1(Q) = 1$. Stan ten rozumiemy jako działanie jednostkowej siły skupionej przyłożonej w punkcie Q powierzchni Ω, a posiadającej kierunek osi x_1 układu współrzędnych. Pod wpływem tego stanu obciążeń ustali się w układzie podstawowym stan przemieszczenia; punkt P dozna przemieszczenia o składowych $u_{i,1}(P, Q)$ $(i=1,2,3)$ mających kierunek osi współrzędnych x_i $(i=1,2,3)$.

Składowe $u_{i,1}(P, Q)$ są funkcjami zarówno położenia punktu w obrębie ciała sprężystego, jak i funkcjami położenia punktu Q na powierzchni Ω. Są one funkcjami G r e e n a dla stanu $X_1(Q) = 1$, spełniającymi w układzie podstawowym warunki równowagi i wszelkie warunki brzegowe.

Analogicznie przez $u_{i,2}(P, Q)$ $(i = 1, 2, 3)$ oznaczmy składowe przemieszczenia punktu P, wywołane działaniem siły skupionej $X_2(Q) = 1$, działającej w punkcie Q powierzchni Ω. Wreszcie przez $u_{i,3}$ $(i = 1, 2, 3)$ oznaczmy składowe przemieszczenia punktu P, wywołane stanem $X_3(Q) = 1$ działającym w punkcie Q powierzchni Ω.

Zakładamy, że funkcje $u_{k,0}(P)$, $u_{k,i}(P, Q)$ $(k, i = 1, 2, 3)$ można wyznaczyć w układzie podstawowym z równań różniczkowych teorii sprężystości. Wróćmy do bryły sprężystej przedstawionej na rys. 1, posiadającej określone warunki brzegowe kinematyczne na powierzchniach Φ i Ω. Składowe przemieszczenia $u_i(P)$ $(i = 1, 2, 3)$ punktu P tej bryły sprężystej wyrazić możemy w następującej postaci całkowej:

$$u_k(P) = u_{k,0}(P) + \iint_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{i=3} X_i(Q)\, u_{i,k}(P, Q) \right] d\Omega \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{1.1}$$

Związki te są słuszne dla ciał sprężystych jednorodnych i niejednorodnych oraz ciał anizotropowych w ramach liniowej «klasycznej» teorii sprężystości. Nieznane funkcje $X_i(Q)$ występujące w wyrażeniu całkowym (1.1) wyznaczymy z warunków brzegowych określonych na powierzchni Ω.

Rozpatrzmy przypadek najprostszy, mianowicie przypadek niepodatnej powierzchni podporowej Ω. Żądamy, aby na powierzchni Ω składowe przemieszczenia u_k $(k = 1, 2, 3)$ były równe zeru. Warunek ten realizujemy przenosząc punkt P na powierzchnię Ω do punktu Q'. Z układu równań (1.1) otrzymamy

$$u_k(Q') = u_{k,0}(Q') + \iint_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{i=3} X_i(Q)\, u_{i,k}(Q', Q) \right] d\Omega = 0 \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{1.2.1}$$

Otrzymaliśmy układ trzech równań całkowych F r e d h o l m a pierwszego rodzaju. Rozwiązanie tego układu równań daje nieznane funkcje $X_i(Q)$. Po wstawieniu tych funkcji do wyrażenia całkowego (1.1) otrzymamy składowe stanu przemieszczenia bryły sprężystej według rys. 1.

Zauważmy jeszcze, że jądra równań całkowych (1.2.1) są symetryczne, co wynika z twierdzenia o wzajemności przemieszczeń J. C. M a x w e l l a.

Rozpatrzyliśmy tu jedynie przypadek niepodatnej powierzchni podporowej Ω. Bez trudu jednak rozszerzyć możemy nasze rozważania na przypadki, w których składowe stanu przemieszczenia określone są w sposób funkcyjny na powierzchni. Wtedy

$$u_k(Q') = u_{k,0}(Q') + \iint_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{i=3} X_i(Q)\, u_{i,k}(Q', Q) \right] d\Omega \qquad (k = 1, 2, 3), \tag{1.2.2}$$

gdzie $u_k(Q')$ są funkcjami położenia punktu Q'.

Zdarzyć się może, że podpora powierzchniowa Ω posiada taki kształt, że powstać może jedynie reakcja powierzchniowa mająca kierunek normalnej. Wystąpią wtedy dodatkowe związki liniowe między składowymi X_i $(i = 1, 2, 3)$. Pozwoli to na zredukowanie ilości funkcji niewiadomych X_i w układzie równań (1.1.4) i ograniczy układ równań (1.2.1) do jednego równania całkowego.

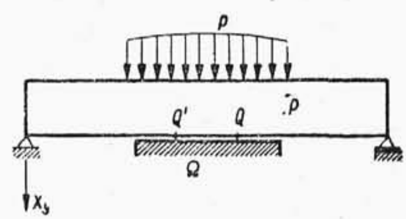
Tak na przykład w przypadku płyty kolistej grubościennej dodatkowo podpartej na powierzchni Ω otrzymamy (przy założeniu braku sił tarcia między płytą a podporą) następujące wyrażenie dla składowych stanu przemieszczenia:

$$u_k(P) = u_{k,0}(P) + \iint_{\Omega} X_3(Q)\, u_{3,k}(P, Q)\, d\Omega \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{1.3}$$

Jedyną niewiadomą funkcją jest tu oddziaływanie pionowe $X_3(Q)$, występujące między płytą a podporą w obrębie powierzchni Ω. Funkcję tę wyznaczymy wykorzystując warunek $u_3(Q') = 0$.

Uzyskamy w ten sposób równanie całkowe

$$u_3(Q') = 0 = u_{3,0}(Q') + \iint_{\Omega} X_3(Q)\, u_{3,3}(Q', Q)\, d\Omega. \tag{1.4}$$



Rys. 2

Wróćmy do naszego ogólnego przypadku bryły sprężystej podpartej na powierzchniach Φ i Ω. Zauważmy, że w przypadku granicznym możemy zawęzić powierzchnię Ω do przestrzennej linii podporowej. Traktując X_i jako składowe sił odporowych działających na linii przestrzennej s otrzymamy dla składowych przemieszczenia punktu P następujące związki:

$$u_k(P) = u_{k,0}(P) + \int_s \left[\sum_{i=1}^{i=3} X_i(Q)\, u_{i,k}(P, Q) \right] ds \qquad (k = 1, 2, 3), \tag{1.5}$$

gdzie całkowanie odbywa się wzdłuż linii s. Niewiadome funkcje $X_i(Q)$ otrzymamy z rozwiązania układu równań całkowych

$$u_k(Q') = u_{k,0}(Q') + \int_s \left[\sum_{i=1}^{i=3} X_i(Q)\, u_{i,k}(Q', Q) \right] ds \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{1.6}$$

przy założeniu, że $u_k(Q')$ są danymi funkcjami położenia punktu Q' na linii przestrzennej s.

Przedstawiony sposób postępowania można rozszerzyć na bryłę sprężystą opartą na dowolnej ilości podpór powierzchniowych: Φ, Ω, Ω_1, $\Omega_2, \ldots, \Omega_n$. Operować tutaj będziemy układem podstawowym, w którym bryła jest podparta jedynie na powierzchni Φ. Oznaczmy tak jak poprzednio przez $u_{k,0}(P)$ $(k = 1, 2, 3)$ składowe przemieszczenia dowolnego punktu P bryły sprężystej wywołane obciążeniem zewnętrznym, siłami masowymi, wzrostem temperatury i samonaprężeniami w układzie podstawowym. Oznaczmy dalej przez $X_1^{(j)}$, $X_2^{(j)}$, $X_3^{(j)}$ składowe nieznanych sił powierzchniowych, występujących na powierzchni Ω_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, a przez $u_{k,1}^{(j)}(P,Q_j)$, $u_{k,2}^{(j)}(P,Q_j)$, $u_{k,3}^{(j)}(P,Q_j)$ składowe stanu przemieszczenia punktu P, wywołane stanem $X_k^{(j)} = 1$ $(k = 1, 2, 3)$, działającym w punkcie Q_j na powierzchni Ω_j. Wtedy składowe stanu przemieszczenia punktu P w układzie n-krotnie niewyznaczalnym określić możemy następującym związkiem całkowym:

$$(1.7) \qquad u_k(P) = u_{k,0}(P) + \sum_{j=1}^{j=n} \iint\limits_{\Omega_j} \left[\sum_{i=1}^{i=3} X_i^{(j)}(Q_j)\, u_{i,k}^{(j)}(P, Q_j) \right] d\Omega_j \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Żądamy teraz, aby na powierzchniach Ω_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ spełnione zostały wymagane warunki przemieszczeniowe. Otrzymamy układ $3n$ równań całkowych F r e d h o l m a pierwszego rodzaju

$$(1.8) \qquad u_k(Q_r') = u_{k,0}(Q_r') + \sum_{j=1}^{j=n} \iint\limits_{\Omega_j} \left| \sum_{i=1}^{i=3} X_i^{(j)}(Q_j)\, u_{i,k}^{(j)}(Q_r', Q_j) \right| d\Omega_j$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n), \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Z rozwiązania tego układu równań otrzymamy $3n$ funkcji $X_i^{(j)}$, które po wstawieniu do związków (1.7) określą stan przemieszczenia punktu P.

Analogiczne rozważania przeprowadzić możemy dla bryły sprężystej podpartej na dodatkowych podporach liniowych, jak również w przypadku, kiedy część podpór jest powierzchniowa, część w postaci linii podporowych na powierzchni bryły sprężystej.

Kilka uwag należy wreszcie poświęcić wyborowi układu podstawowego. W rozważaniach przyjęliśmy jako układ podstawowy bryłę sprężystą podpartą na powierzchni Φ. Oczywiście nic nie stoi na przeszkodzie, aby jako układ podstawowy przyjąć bryłę sprężystą podpartą na dowolnej powierzchni Ω_j. Wybrać należy taki układ jako podstawowy, w którym wyznaczenie funkcji $u_{k,0}$, i $u_{i,k}$ natrafia na najmniejsze trudności matematyczne. Czasem będzie wygodnie przyjąć jako układ podstawowy bryłę podpartą na r powierzchniach, gdzie $1 < r < n$.

W rozważaniach przyjmowaliśmy jako wielkości nadliczbowe siły powierzchniowe działające na powierzchniach Ω_j. Można jednak przyjąć jako funkcje nadliczbowe siły wewnętrzne występujące w pewnych przekrojach bryły sprężystej. I tak wracając do układu przedstawionego na rys. 1 możemy jako funkcje nadliczbowe przyjąć składowe X_i sił wewnętrznych występujących na powierzchni aa, którą podzielono bryłę na dwie części. Układem podstawowym będzie tu układ brył I i II, z których jedna podparta jest na powierzchni Φ, druga na powierzchni Ω. W mocy pozostają tu równania (1.1), które wypisać należy oddzielnie dla brył I i II w zależności od położenia punktu P. Słuszne są również równania (1.2.1) stwierdzające, że względne przemieszczenia brył I i II na powierzchni aa są równe zeru.

Oczywiście, rozważania powyższe rozszerzyć można na bryłę sprężystą podpartą na wielu podporach powierzchniowych i liniowych przyjmując, że siły powierzchniowe i siły wewnętrzne są funkcjami niewiadomymi. Mamy tu pełną analogię do statyki układów prętowych «wewnętrznie» i «zewnętrznie» statycznie niewyznaczalnych. Łatwo też podać przejście z układów o przestrzennym stanie naprężeń do liniowych układów prętowych mechaniki budowli. Funkcje sił powierzchniowych i wewnętrznych sprowadzą się do sił skupionych (reakcje podporowe) oraz do składowych wypadkowej stanu naprężenia w poszczególnych przekrojach prętów. Układ równań (1.8) przechodzi w tzw. układ równań kanonicznych statyki układów prętowych

$$\delta_{r,0} + \sum_{j=1}^{j=n} X^{(j)}\delta_{r,j} = \delta_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.9}$$

Przedstawiony tu sposób rozwiązywania przestrzennych zagadnień teorii sprężystości okaże się przydatny przy rozwiązywaniu takich układów, w których w układzie podstawowym w sposób łatwy dają się wyznaczyć przemieszczenia wywołane obciążeniem zewnętrznym oraz funkcje Greena wywołane stanami $X^{(j)} = 1$. Szczególnie prosto przedstawiać się będą rozwiązania dla układów, w których układem podstawowym jest półprzestrzeń sprężysta lub nieskończenie długi walec, gdzie mamy do czynienia z jedną podporą powierzchniową lub też z układem podpór rozmieszczonych w sposób okresowy. Zwróćmy uwagę, że szczególnym przypadkiem przedstawionego sposobu rozwiązywania jest znane i rozwiązane od dawna zagadnienie sztywnego stempla lub płyty sprężystej spoczywającej na półprzestrzeni sprężystej.

Przedstawionemu powyżej sposobowi rozwiązania zagadnień brzegowych przeciwstawić można drugi, stanowiący analogię do «metody odkształceń» mechaniki budowli.

Rozważmy ponownie układ przedstawiony na rys. 1. Tak jak poprzednio zakładamy znajomość przemieszczeń na powierzchniach Φ i Ω oraz znajomość obciążeń zewnętrznych na pozostałej powierzchni Ψ bryły sprężystej.

Przyjmijmy teraz za niewiadome funkcje naszego zagadnienia — funkcje przemieszczeń na powierzchni Ψ. Oznaczmy je przez $u_i(S)$ $(i = 1, 2, 3)$. Przy takim wyborze niewiadomych funkcji układem podstawowym będzie bryła sprężysta o przemieszczeniowych warunkach brzegowych na powierzchniach Φ i Ω oraz zerowych wartościach przemieszczeń na powierzchni Ψ.

Taki układ podstawowy nazwiemy układem podstawowym «geometrycznie wyznaczalnym»; w układzie tym znane są wszelkie przemieszczenia na powierzchni bryły sprężystej.

Wyznaczmy teraz w naszym układzie podstawowym naprężenia wywołane w punkcie P wzrostem temperatury i samonaprężeniami. Oznaczmy je przez $\tau_{ij,0}(P)$ $(i, j = 1, 2, 3)$. Niech teraz w dowolnym punkcie S powierzchni Ψ powstanie w układzie podstawowym stan $u_k(S) = 1$ $(k = 1, 2, 3)$. Stan ten wywoła w punkcie P naprężenia $\tau_{ij,k}(P, S)$ $(i, j = 1, 2, 3)$. Zakładamy, że zarówno wielkości $\tau_{ij,0}$, jak i $\tau_{ij,k}$ dadzą się wyznaczyć w układzie podstawowym. Dowolną składową stanu naprężeń w punkcie P ciała sprężystego przedstawionego na rys. 1 możemy wyrazić związkiem superpozycyjnym

$$\tau_{ij}(P) = \tau_{ij,0}(P) + \iint_{\Psi} \left[\sum_{k=1}^{k=3} u_k(S)\, \tau_{ij,k}(P, S) \right] d\Psi \qquad (i, j = 1, 2, 3). \tag{1.10}$$

Na powierzchni Ψ powinny być spełnione następujące warunki brzegowe natury statycznej:

$$p_i(S) = \sum_{j=1}^{j=3} \alpha_j \tau_{ij}(S') \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{1.11}$$

gdzie p_i są składowymi obciążenia zewnętrznego, a α_j cosinusami kierunkowymi elementu powierzchniowego. Przesuwając teraz punkt P do punktu S' na powierzchni Ψ otrzymamy ze wzoru (1.10) sześć składowych tensora naprężeń $\tau_{ij}(S')$. Wstawiając funkcje $\tau_{ij}(S')$ do równań (1.11) otrzymamy następujący układ trzech równań całkowych F r e d h o l m a pierwszego rodzaju [w którym występują trzy nieznane funkcje u_i (S) $(i = 1, 2, 3)$]:

$$p_i(S') = a_{i,0}(S') + \iint_{\Psi} \left[\sum_{k=1}^{k=3} u_k(S)\, a_{i,k}(S', S) \right] d\Psi, \tag{1.12}$$

gdzie

$$a_{i,0}(S') = \sum_{j=1}^{j=3} \tau_{ij,0}(S')\, a_j, \qquad a_{i,k}(S', S) = \sum_{j=1}^{j=3} \tau_{ij,k}(S', S)\, a_j.$$

Rozwiązanie tego układu równań da funkcje u_k (S), które podstawione do równań (1.10) pozwolą wyznaczyć stan naprężenia w dowolnym punkcie ciała sprężystego.

Układ podstawowy przyjąć można w odmienny sposób, mianowicie tak, aby przemieszczenia bryły sprężystej były równe zeru jedynie na części Ψ_1 powierzchni Ψ. Wszelkie rozwiązania pozostają tu bez zmian z tym jednak zastrzeżeniem, że całkowanie we wzorach (1.10) i (1.12) odnosi się do powierzchni Ψ_1. Zakładamy przy tym oczywiście, że w tym układzie podstawowym dadzą się wyznaczyć funkcje $\tau_{ij,0}$ i $\tau_{ij,k}$.

Również jako funkcje nadliczbowe przyjąć możemy funkcje przemieszczeń występujące wewnątrz ciała sprężystego. Podzielmy w myśli bryłę sprężystą według rys. 1 na dwie części I i II za pomocą przekroju aa. Występujące na tej powierzchni składowe przemieszczenia przyjmiemy jako funkcje nieznane. Układem podstawowym będzie tu bryła z danymi przemieszczeniami na powierzchni Φ i Ω oraz z zerowymi wartościami przemieszczeń na powierzchni aa. W mocy pozostaną tu związki (1.10), które wypisać należy oddzielnie dla części I i II bryły sprężystej. Z warunku ciągłości naprężeń w przekroju aa, tj. z warunku $p_i^{(I)} + p_i^{(II)} = 0$, otrzymamy analogiczny do układu (1.12) układ trzech równań całkowych, z których wyznaczymy nadliczbowe funkcje u_k $(k = 1, 2, 3)$.

W układach podstawowych metody odkształceń natrafiamy na znacznie większe trudności przy wyznaczaniu funkcji $\tau_{ij,0}$ i funkcji G r e e n a $\tau_{ij,k}$, niż to ma miejsce w układach podstawowych metody sił. Dlatego też zakres zastosowania metody odkształceń w odniesieniu do przestrzennych zagadnień teorii sprężystości będzie nader skromny. Znajdzie on jednak obszerne zastosowanie w zagadnieniach płaskich teorii sprężystości, zwłaszcza w odniesieniu do płyt i powłok.

2. Przejdźmy teraz do zagadnień płaskich, do tarcz i płyt. Niech dana będzie tarcza znajdująca się w płaskim stanie naprężenia, obciążona w sposób dowolny na swym brzegu i z warunkami brzegowymi $u_1 = u_2 = 0$ na dwu odcinkach brzegu l i s.

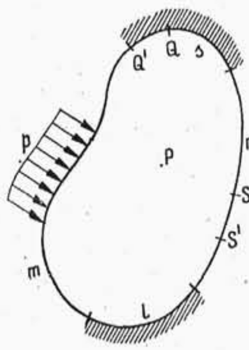
Składowe stanu przemieszczenia dowolnego punktu P tarczy otrzymamy korzystając ze wzoru (1.1) i przechodząc od zagadnienia przestrzennego do płaskiego:

$$u_k(P) = u_{k,0}(P) + \int_s \left[\sum_{i=1}^{i=2} X_i(Q)\, u_{i,k}(P, Q) \right] ds \qquad (k = 1, 2). \tag{2.1}$$

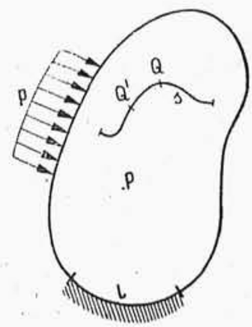
Z warunku zerowej wartości przemieszczeń na odcinku s otrzymamy układ dwu równań całkowych

$$(2.2)\qquad u_k(Q') = u_{k,0}(Q') + \int_s \left[\sum_{i=1}^{i=2} X_i(Q)\, u_{i,k}(Q', Q)\right] ds = 0 \qquad (k = 1, 2).$$

Jest rzeczą jasną, że układ równań (2.2) odnosi się również do tarczy przedstawionej na rys. 4, a więc do tarczy, w której odcinek s mieści się w obrębie tarczy i na którego długości znikają przemieszczenia. Do zagadnienia tarczy stosują się wszelkie uwagi dotyczące przestrzennego zagadnienia teorii sprężystości, które odnoszą się do wyboru układu podstawowego, wyboru nadliczbowych funkcji oraz sił zewnętrznych i wewnętrznych. Bez trudu również rozszerzymy nasze zagadnienie na większą od dwóch ilość podpór liniowych tarczy.



Rys. 3



Rys. 4

W metodzie odkształceń przyjmiemy jako nadliczbowe funkcje składowych stanu przemieszczenia na obwodzie m tarczy. Układem podstawowym będzie tarcza na obwodzie utwierdzona zupełnie, a na brzegach s i l posiadająca dane funkcje przemieszczeń. Naprężenia w punkcie P tarczy określą wzory

$$(2.3)\qquad \tau_{ij}(P) = \tau_{ij,0}(P) + \int_m \left[\sum_{k=1}^{k=2} u_k(S)\, \tau_{ij,k}(P, S)\right] ds \qquad (i, j = 1, 2).$$

Na brzegu m mamy następujące warunki:

$$p_i(S') = \sum_{j=1}^{j=2} a_j\, \tau_{ij}(S') \qquad (i = 1, 2)$$

Tak więc układ równań całkowych, z którego wyznaczyć należy funkcje u_k $(k = 1, 2)$, przyjmie postać

$$p_i(S') = a_{i,0}(S') + \int_m \left[\sum_{k=1}^{k=2} u_k(S)\, a_{i,k}(S', S) \right] ds \qquad (i = 1, 2), \tag{2.4}$$

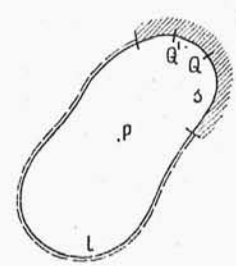
gdzie

$$a_{i,0}(S') = \sum_{j=1}^{j=2} \tau_{ij,0}(S')\, a_j, \qquad a_{i,k}(S', S) = \sum_{j=1}^{j=2} \tau_{ij,k}(S', S)\, a_j.$$

Bardziej złożone jest drugie zagadnienie, mianowicie zginanie płyty cienkiej, [1]. Rozważmy najpierw zagadnienie najprostsze — płytę na swym obwodzie swobodnie podpartą na odcinku l oraz zupełnie utwierdzoną na odcinku s. Pod wpływem obciążenia zewnętrznego powstaną na odcinku s momenty utwierdzenia $X_a(Q)$. Płytę można zatem traktować jako płytę na całym swym obwodzie swobodnie podpartą i obciążoną momentami zginającymi $X_a(Q)$ na odcinku s, z tym jednak zastrzeżeniem, że na tym odcinku winien być spełniony dodatkowy warunek kinematyczny, a mianowicie $\partial u_3(Q')/\partial n = 0$.

Ugięcie punktu P, wywołane działaniem momentów $X_a(Q)$ jako siłami zewnętrznymi oraz obciążeniem zewnętrznym, wyrazimy wzorem

$$u_3(P) = u_{3,0}(P) + \int_s X_a(Q)\, u_{3,a}(P, Q)\, ds. \tag{2.5}$$



Rys. 5

Tutaj $u_{3,0}(P)$ oznacza ugięcie punktu P płaszczyzny środkowej płyty, a $u_{3,a}(P, Q)$ ugięcie płyty w punkcie P wywołane działaniem momentu skupionego $X_a(Q) = 1$, przyłożonego do punktu Q brzegu s. Nieznaną funkcję momentu utwierdzenia $X_a(Q)$ wyznaczamy z warunku $\partial u_3/\partial n = 0$ na odcinku s. Zatem

$$\frac{\partial u_3(Q')}{\partial n} = \frac{\partial u_{3,0}(Q')}{\partial n} + \int_s X_a(Q) \frac{\partial u_{3,a}(Q', Q)}{\partial n}\, ds = 0. \tag{2.6}$$

Niech teraz płyta będzie utwierdzona na n odcinkach s_r ($r = 1, 2, \ldots, n$), a między tymi odcinkami swobodnie podparta. Jako układ podstawowy przyjmiemy i tu płytę na całym swym obwodzie swobodnie podpartą. Wtedy ugięcie punktu P płyty wyraża wzór

$$u_3(P) = u_{3,0}(P) + \sum_{i=1}^{i=n} \left[\int_{s_i} X_i(Q_i)\, u_{3,i}(P, Q_i)\, ds_i \right]. \tag{2.7}$$

Z warunku utwierdzenia zupełnego płyty na brzegach s_r $(r = 1, 2, \ldots, n)$ otrzymamy układ równań całkowych

$$\frac{\partial u_3(Q'_r)}{\partial n} = \frac{\partial u_{3,0}(Q'_r)}{\partial n} + \sum_{i=1}^{i=n} \left[\int_{s_i} X_i(Q_i) \frac{\partial u_{3,i}(Q'_r, Q_i)}{\partial n} ds_i \right] = 0 \tag{2.8}$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n).$$

Wyznaczenie momentów utwierdzenia $X_i(Q_i)$ z tego układu równań pozwoli na wyznaczenie ugięcia płyty z równania (2.7). Tym samym możemy wyznaczyć stan naprężenia płyty, naprężenia bowiem wyrażają się za pośrednictwem pochodnych ugięcia płyty.

Rozważmy drugi typ podparcia płyty. Mianowicie niech płyta o jednakowym typie warunków brzegowych na swym obwodzie będzie ponadto podparta na dodatkowej podporze wzdłuż linii s znajdującej się w obrębie płyty (rys. 6). Wtedy jako funkcję nadliczbową przyjąć można reakcję podporową działającą wzdłuż linii s.

Ugięcie punktu P płyty złożymy tu z ugięcia wywołanego obciążeniem zewnętrznym i z ugięcia wywołanego działaniem reakcji podporowej $X_b(Q)$. Otrzymamy

$$u_3(P) = u_{3,0}(P) + \int_s X_b(Q) u_{3,b}(P, Q) ds. \tag{2.9}$$

Z warunku zerowej wartości ugięcia płyty wzdłuż podpory znajdujemy

$$u_3(Q') = u_{3,0}(Q') + \int_s X_b(Q) u_{3,b}(Q', Q) ds = 0. \tag{2.10}$$

Z tego równania całkowego wyznaczymy nieznaną funkcję $X_b(Q)$. W przypadku n podpór na odcinkach s_r $(r = 1, 2, \ldots, n)$ uzyskamy dla ugięcia płyty następujący wzór:

$$u_3(P) = u_{3,0}(P) + \sum_{j=1}^{j=n} \left[\int_{s_j} X_j(Q) u_{3,j}(P, Q_j) ds \right], \tag{2.11}$$

a dla wyznaczenia nadliczbowych reakcji podporowych — układ równań całkowych

$$u_3(Q'_r) = u_{3,0}(Q'_r) + \sum_{j=1}^{j=n} \left[\int_{s_j} X_j(Q) u_{3,j}(Q'_r, Q_j) ds_j \right] = 0 \tag{2.12}$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n).$$

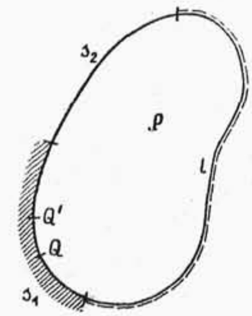
Nie trudno rozszerzyć nasze rozważania na przypadek płyty, w której część obwodu jest utwierdzona zupełnie, część jest swobodnie podparta, a ponadto w obrębie jej istnieją podpory liniowe.

Rozważmy teraz płytę, na obwodzie której występują trzy typy warunków brzegowych: swobodne podparcie na części obwodu, utwierdzenie zupełne na dalszej części oraz brzeg swobodny na pozostałej części obwodu (rys 7), [2]. Mamy tu następujące możliwości wyboru układu podstawowego:

(a) płyta jest na odcinku $l + s_1$ swobodnie podparta, na odcinku s_2 swobodna,

(b) płyta jest na odcinku $s_1 + s_2$ swobodna, na odcinku l swobodnie podparta.

Rys. 6



Rys. 7

W pierwszym sposobie wyboru układu podstawowego jedyną funkcją nadliczbową będzie funkcja określająca moment podporowy $X_c(Q)$ na odcinku s_1. Ugięcie punktu P płyty wyrazi się wzorem

$$u_3(P) = u_{3,0}(P) + \int_{s_1} X_c\, u_{3,c}(P, Q)\, ds_1, \tag{2.13}$$

a dla wyznaczenia funkcji $X_c(Q)$ skorzystamy z równania całkowego

$$\frac{\partial u_3(Q')}{\partial n} = \frac{\partial u_{3,0}(Q')}{\partial n} + \int_{s_1} X_c(Q) \frac{\partial u_{3,c}(Q', Q)}{\partial n} ds_1 = 0. \tag{2.14}$$

Przy drugim sposobie przyjęcia układu podstawowego mamy do czynienia z dwiema funkcjami, $X_a(Q)$ i $X_b(Q)$, z których pierwsza reprezentuje moment utwierdzenia, druga reakcję podporową na odcinku s_1.

Oznaczmy ugięcie płyty wywołane obciążeniem zewnętrznym przez $\bar{u}_{3,0}(P)$, a ugięcie płyty wywołane stanami $X_a(Q) = 1$, $X_b(Q) = 1$ przez

$u_{3,a}(P, Q)$, $u_{3,b}(P, Q)$. Ugięcie płyty wywołane obciążeniem zewnętrznym oraz momentami i reakcją podporową określa wzór

$$(2.15) \quad u_3(P) = \bar{u}_{3,0}(P) + \int_{s_1} [X_a(Q)\, u_{3,a}(P, Q) + X_b(Q)\, u_{3,b}(P, Q)]\, ds_1 .$$

Z warunków zerowej wartości ugięcia oraz pochodnej $\partial u_3/\partial n$ na odcinku s_1 otrzymamy układ dwu równań

$$(2.16.1) \quad u_3(Q') = \bar{u}_{3,0}(Q') + \int_{s_1} [X_a(Q)\, u_{3,a}(Q', Q) + X_b(Q)\, u_{3,b}(Q', Q)]\, ds_1 = 0,$$

$$(2.16.2) \quad \frac{\partial u_3(Q')}{\partial n} = \frac{\partial \bar{u}_{3,0}(Q')}{\partial n} + \int_{s_1} \left[X_a(Q) \frac{\partial u_{3,a}(Q', Q)}{\partial n} + X_b(Q) \frac{\partial u_{3,b}(Q', Q)}{\partial n} \right] ds_1 = 0 .$$

Wybór układu podstawowego zależy od typu zadania. Tak np. dla płyty przedstawionej na rys. 8 przyjmiemy drugi układ jako podstawowy, bowiem dla takiego układu łatwo wyznaczyć można funkcje Greena dla stanów $X_a = 1$, $X_b = 1$ i to przy użyciu pojedynczych szeregów trygonometrycznych, [2]. W przypadku kiedy płyta składa się z układu prostokątów, można przyjąć jako funkcje nadliczbowe momenty i siły tnące w przekrojach dzielących układ na oddzielne płyty prostokątne, [2]. Układ równań całkowych zawierających nasze nieznane nadliczbowe funkcje wyznaczymy z ciągłości powierzchni ugięcia w przyjętych przekrojach.

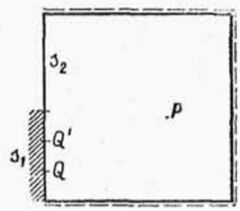
Wszelkie przedstawione tu rozważania są słuszne nie tylko dla zagadnień zginania płyt, słuszne są również dla zagadnienia drgań wymuszonych płyt oraz dla zagadnień drgań własnych i wyboczenia płyt. W tych dwu zagadnieniach znikają w równaniach całkowych (2.6), (2.8), (2.10), (2.12), (2.14), (2.16.1) oraz (2.16.2) wyrazy uwzględniające wpływ obciążenia zewnętrznego, działającego prostopadle do powierzchni środkowej płyty, [3].

W szeregu przypadków korzystnie będzie zastosować metodę odkształceń do rozwiązania zagadnień płytowych. Zajmijmy się płytą przedstawioną na rys. 9. Płyta ta jest na brzegu s_1 swobodna, a na brzegu s_2 utwierdzona zupełnie. Jako układ podstawowy przyjmiemy płytę na całym swym obwodzie zupełnie utwierdzoną. Niewiadomymi funkcjami będzie tutaj pionowe przemieszczenie u_3 oraz kąt $\partial u_3/\partial n$ na brzegu s_1. Wyznaczamy w układzie podstawowym naprężenia wywołane obciążeniem zewnętrznym oraz stanami $u_3(S) = 1$, $\partial u_3(S)/\partial n = 1$.

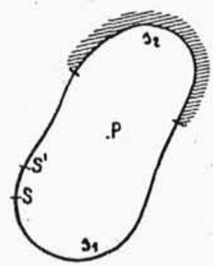
W punkcie P otrzymamy

$$\tau_{ij}(P) = \tau_{ij,0}(P) + \int_{s_1} \left[u_3(S)\, \tau_{ij,3}(P,S) + \frac{\partial u_3(S)}{\partial n} \tau_{ij,\bar{3}}(P,S) \right] ds_1 \quad (i,j=1,2). \tag{2.17}$$

Tutaj $\tau_{ij,3}(P,S)$ oznacza składową stanu naprężenia w punkcie P, wywołaną stanem $u_3(S) = 1$, a $\tau_{ij,\bar{3}}(P,S)$ składową stanu naprężenia wywołaną stanem $\partial u_3(S)/\partial n = 1$. Od naprężeń (2.17) przejść można do momentów zginających, skręcających oraz sił poprzecznych. Przechodząc z punktem P do punktu S' na brzegu s_1 otrzymamy z warunku zerowej wartości momentu zginającego i reakcji podporowej układ dwu równań całkowych, w którym występują nieznane funkcje u_3 i $\partial u_3/\partial n$. Znajomość tych funkcji pozwoli na wyznaczenie naprężeń ze wzorów (2.17).



Rys. 8



Rys. 9

Jeśli brzeg s_2 jest swobodnie podparty, a brzeg s_1 swobodny, to jako układ podstawowy przyjąć można płytę na brzegach s_1 i s_2 swobodnie podpartą. W układzie podstawowym znikają zatem momenty zginające na obwodzie płyty. Jako jedyną nadliczbową funkcję zadania przyjmiemy funkcję ugięcia $u_3(S)$ na odcinku s_1. Naprężenia w punkcie P przyjmą postać

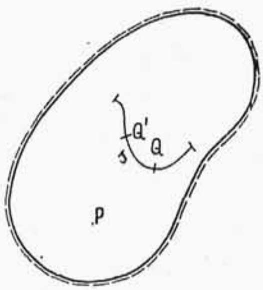
$$\tau_{ij}(P) = \tau_{ij,0}(P) + \int_{s} u_3(S)\, \tau_{ij,3}(P,S)\, ds_1 \qquad (i,j=1,2), \tag{2.18}$$

gdzie $\tau_{ij,0}(P)$ jest naprężeniem wywołanym obciążeniem zewnętrznym, a $\tau_{ij,3}(P,S)$ naprężeniem wywołanym stanem $u_3(S) = 1$, działającym w układzie podstawowym. Z dodatkowego warunku, mianowicie z zerowej wartości reakcji podporowej wzdłuż brzegu s_1, otrzymamy równanie całkowe, w którym jako funkcja niewiadoma występuje przemieszczenie na brzegu $u_3(S)$.

Jest rzeczą widoczną, że omówione tu zastosowanie metody sił i metody odkształceń do płyt rozszerzyć można na bardziej złożone układy, na zagadnienia statyki, dynamiki i stateczności powłok.

Szczególnym przypadkiem przeprowadzonych tu rozważań nad zginaniem i drganiem płyt jest przypadek zginania i drgania membran.

Niech dana będzie błona napięta na dowolnym konturze. Niech błona ta będzie ponadto podparta wzdłuż linii s w obrębie błony (rys. 11).



Rys. 10

Rys. 11

Jako funkcję nadliczbową przyjmiemy tu reakcję podporową $X_a(Q)$ wzdłuż linii s. Ugięcie membrany wyrazi wzór

$$u_3(P) = u_{3,0}(P) + \int_s X_a(Q)\, u_{3,a}(P,Q)\, ds\,, \tag{2.19}$$

a nieznaną funkcję $X_a(Q)$ znajdziemy z warunku zerowej wartości ugięcia wzdłuż linii s:

$$u_3(Q') = 0 = u_{3,0}(Q') + \int_s X_a(Q)\, u_{3,a}(Q',Q)\, ds\,. \tag{2.20}$$

Zagadnienia tego typu oraz bardziej złożone, w których jako nadliczbowe przyjmowano funkcje sił wewnętrznych, rozpatrywane były w jednej z prac autora, [4]. Dzięki analogii Prandtl'a przenieść można wyniki uzyskane w teorii membran na zagadnienie skręcania prętów pryzmatycznych uzyskując na tej drodze nowe wyniki.

3. W naszych rozważaniach dążyliśmy do zbudowania nowej metody rozwiązywania złożonych zagadnień teorii sprężystości i do uogólnienia uprzednio uzyskanych wyników w dziedzinie płyt i błon. Przedstawiony tu sposób daje jednolitą metodę traktowania zagadnień przestrzennych płaskich i liniowych. Idea tego sposobu tkwi w elementarnych rozważaniach mechaniki budowli, opiera się zatem na wyobrażeniach dobrze znanych inżynierom statykom i posiada cechy poglądowości. Mimo zalety

dużej ogólności, przedstawiony sposób prowadzić będzie jedynie do celu przy znajomości stanu naprężenia wywołanego stanami $X_j(Q) = 1$ w układzie podstawowym. To wymaganie spełnione jest, jak dotąd, dla szeregu typów płyt i membran, a w znacznie mniejszym stopniu dla tarcz oraz dla przestrzennego stanu naprężenia.

Drugą poważną trudność stanowi rozwiązanie układu równań Fredholma pierwszego rodzaju. Zadanie to nie jest już łatwe przy najprostszych układach płaskich (płyty, membrany) i zmusza do uciekania się przy jego rozwiązaniu do metod przybliżonych. Trudności te oczywiście wzrosną w przypadku tarcz i zagadnień przestrzennych.

Literatura cytowana w tekście

[1] W. Nowacki, *Płyty prostokątne o mieszanych warunkach brzegowych*, Arch. Mech. Stos., t. 3, 1951.

[2] W. Nowacki, *Płyty prostokątne o mieszanych warunkach brzegowych (II)* Arch. Mech. Stos., t. 5, 1953.

[3] W. Nowacki, *Zagadnienia dynamiki i stateczności płyty prostokątnej o nieciągłych warunkach brzegowych*, Arch. Mech. Stos., t. 7, 1955.

[4] W. Nowacki, *O pewnych przypadkach skręcania prętów*, Arch. Mech. Stos., t. 5, 1953.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Дано упругое тело, произвольно нагруженное и подпертое на поверхностях Φ и Ω (рис 1). Поверхностные силы, выступающие на поверхности Ω, принимаем как неизвестные функции проблемы. В качестве основной системы — вспомогательной системы — принимается тело, подпертое лишь на поверхности Φ. Полагаем, что в этой системе можно определить перемещения, вызванные внешней нагрузкой, ростом температуры и собственными напряжениями $u_{i,0}(P)$ $(i = 1, 2, 3)$, а также перемещения, вызванные единичными внешними нагрузками $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ и $X_3 = 1$, действующими на поверхности Φ. Через $X_1(Q)$, $X_2(Q)$ и $X_3(Q)$ обозначаются здесь составляющие неизвестных поверхностных сил на Ω, а через $u_{i,k}$ (P, Q) $(k = 1, 2, 3)$ — перемещения точки P, вызванные состоянием $X_i(Q) = 1$, действующим в точке Q поверхности Ω. Следовательно, перемещения точки P упругого тела, согласно рис. 1, можно выразить интегральной формулой (1.1). В этой формуле функции $u_{i,k}(P, Q)$ являются функциями Грина. Неизвестные функции $X_i(Q)$, выступающие в формуле (1.1), можно определить по граничным условиям проблемы. Требуется, чтобы на по-

верхности Ω составляющие перемещений равнялись заданным на этой поверхности перемещениям. Это условие осуществляется перенесением точки P изнутри тела на поверхность Ω в точку Q'. Таким образом получается система трех интегральных уравнений Фредгольма первого ряда [формула (1.2.2)].

В предельном случае можно сузить поверхность Ω до пространственной опорной линии и рассматривать как $X_i(Q)$ составляющие опорных сил вдоль этой линии.

В качестве неизвестных функций $X_i(Q)$ можно также принять составляющие внутренних сил, выступающих в некоторых сечениях упругого тела. Так, например, в качестве неизвестных функций $X_i(Q)$ можно принять напряжения, действующие на поверхности aa, разделяющей тело (рис. 1) на две части. Основной системой будут здесь два тела I и II, разделенные сечением aa. Справедливым остается уравнение (1.1), которое следует составить отдельно для тела I и отдельно тела II, в зависимости от положения точки P.

Справедливы также уравнения (1.2.1), устанавливающие, что относительные перемещения тел I и II на поверхности aa равны нулю.

Предложенный здесь способ можно расширить на упругое тело, опирающееся на произвольном числе поверхностей $\Phi, \Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$. Пользуясь основной системой, т. е. упругим телом, опертым только на поверхности Φ, можно выразить перемещения точки P тремя зависимостями (1.7). Требуя, чтобы на поверхностях Ω_j $(j = 1, 2, ..., n)$ удовлетворялись заданные граничные условия, получаем систему $3n$ интегральных уравнений Фредгольма первого рода [формула (1.8)], из которых следует определить $3n$ неизвестных функций X_i^j $(i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, ..., n)$.

Описанному способу решения можно противопоставить второй, в котором в качестве неизвестных функций проблемы выступают составляющие состояния перемещений.

Рассмотрим вторично систему по рис. 1. В качестве неизвестных функций задачи принимаем составляющие перемещений, действующие на поверхности Ψ. Обозначим их через $u_i(S)$ $(i = 1, 2, 3)$. В качестве основной системы принимаем тело с заданными условиями для перемещений на поверхности Ψ. Эту систему назовем основной геометрически определимой системой. Определим в такой основной системе составляющие напряженного состояния в точке P, вызванные ростом температуры и собственными напряжениями. Обозначим их через $\tau_{ij,0}(P)$ $(i, j = 1, 2, 3)$. Положим теперь, что в основной системе, в произвольной точке S поверхности Ψ, существует состояние $u_k(S) = 1$; $(k = 1, 2, 3)$. Это состояние вызвет в точке P напряжения $\tau_{ij,k}(P, S)$. Полагаем, что функции $\tau_{ij,0}$ и $\tau_{ij,k}$ можно определить в основной системе. Любая составляющая напряженного состояния в точке P

упругого тела, согласно рис. 1, может быть, следовательно, представлена интегральной формулой (1.10).

В этих зависимостях выступают три неизвестные функции $u_k(S)$, являющиеся составляющими перемещений на поверхности Ψ. Определим их, используя граничные условия на поверхности Ψ [формула (1.11)]; здесь p_i $(i = 1, 2, 3)$ — составляющая внешней нагрузки, а $a_i (i = 1, 2, 3)$ — направляющий косинус элемента поверхности $d\Psi$.

Переходя с точкой P к точке S на поверхности Ψ, получим по формуле (1.10) шесть составляющих напряженного состояния $\tau_{ij}(S)$. Подставляя последние функции в уравнения (1.11), получаем систему трех интегральных уравнений Ф р е д г о л ь м а первого рода [формула (1.12)].

Решая эту систему уравнений, получаем функции $u_k(S)$; последние же, подставленные в формуле (1.10), позволят определить напряженное состояние в любой точке рассматриваемого упругого тела.

Однако, можно в качестве неизвестных функций принять составляющие перемещений, действующие на поверхности aa. В качестве основной системы выступают здесь тела I и II, с заданными граничными условиями на поверхностях Φ и Ω и с нулевыми условиями на поверхности aa.

Справедливыми останутся здесь зависимости (1.10), которые следует написать отдельно для частей I и II упругого тела. Из условия непрерывности напряжений в сечении aa, т.е. из условия $p^{\mathrm{I}} + p^{\mathrm{II}} = 0$, получается аналогичная (1.12) система интегральных уравнений, из которых определяются функции $u_k(S)$.

Описанные здесь два способа решения граничных задач теории упругости базируются на элементарных рассуждениях механики сооружений (метод «сил» и метод «деформаций») и представляют собой попытку обобщения методов механики сооружений на проблемы теории упругости.

Несмотря на высокие преимущества наглядности, представленные способы ведут к цели лишь при условии знания напряженного состояния и перемещения в основных системах. Реализация этого желания в пространственных проблемах теории упругости весьма затруднительна. Предложенные способы могут получить широкое применение в теории пластинок и дисков, для систем с так наз. прерывными граничными условиями. Этим проблемам посвящена вторая часть настоящей работы. Проблемы прерывных граничных условий пластинок и мембран, предварительно решенные автором, обсуждаются как частные случаи более общего способа решения граничных условий теории упругости.

Summary

SOME BOUNDARY PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY

Let us consider an elastic body loaded in an arbitrary manner and supported on the surfaces Φ and Ω (Fig. 1). The surface forces on the surface Ω are assumed to be unknown functions of the problem. As a basic (auxiliary) system we take the body, supported on the surface Φ only. We assume that it is possible to determine in this system the displacements caused by external load, temperature increase and initial stresses $[u_{i,0}\,(P)$ $(i = 1, 2, 3)]$ and the displacements due to unit external loads $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ and $X_3 = 1$ acting on the surface Ω. Denote $X_1\,(Q)$, $X_2\,(Q)$ and $X_3\,(Q)$ the components of the unknown surface forces on the surface Ω and $u_{1,k}\,(P, Q)$ $(k = 1, 2, 3)$ the displacements of the point P due to the system $X_1\,(Q) = 1$ at the point Q of the surface Ω. Then, the displacements of the point P of the elastic body, Fig. 1, can be expressed by the integral formula (1.1). In this formula $u_{i,k}\,(P, Q)$ are Green's functions. The unknown functions $X_1\,(Q)$ in Eq. (1.1) can be found from the boundary conditions of the problem. The components of displacement on the surface Ω should be equal to the given values. This condition is realized by moving the point P from the interior of the body to the point Q' of the surface Ω. Thus we obtain a system of three Fredholm integral equations of the first kind [Eq. (1.2.2)].

In a limit case we can reduce the surface Ω to a spatial support curve and consider $X_i(Q)$ as components of supporting forces along this curve.

The components of internal forces in certain cross-sections of the elastic body can be also assumed as unknown functions $X_i\,(Q)$. Thus, the stresses appearing on the surface aa dividing the body (Fig. 1) into two parts can be assumed as unknown functions $X_i(Q)$. The basic system consists here of two bodies I and II separated by the cross-section aa. Eq. (1.1) remains valid and it should be taken separately for each of the bodies I and II, depending on the position of the point P.

Eqs. (1.2.1) are also valid and express the fact that the relative displacements of the bodies I and II are, on the surface aa, equal to zero.

This procedure can be generalized to an elastic body supported on any number of surfaces $\Phi, \Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$. Using the basic system consisting of the elastic body supported on the surface Φ only, the displacement components of the point P can be expressed by three relations (1.7). From the condition that the given boundary conditions be satisfied on the surfaces Ω_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, we obtain a system of $3n$ Fredholm integral equations of the first kind, Eq. (1.8), from which $3n$ unknown functions X_i^j $(i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ can be found.

An alternative method can be proposed, in which the displacement components are unknown functions.

Let us reconsider the system of Fig. 1. Let the displacement components on the surface Ψ be taken as unknown functions of the problem. They are denoted $u_i(S)$ $(i = 1, 2, 3)$. As a basic system we assume the body with the given displacement conditions on the surfaces Φ and Ω and with zero displacements on the surface Ψ. This system will be called a geometrically determinate basic system. In this basic system let us determine the stress components at the point P, provoked by an increase of temperature and the initial stresses. They are denoted $\tau_{ij,0}(P)$ $(i, j = 1, 2, 3)$. Now, let us suppose that the state of displacement $u_k(S) = 1$ $(k = 1, 2, 3)$ exists at an arbitrarily chosen point S of the surface Ψ of the basic system. This state will provoke the appearance of the stresses $\tau_{ij,k}$ (P, S) at the point P. We assume that it is possible to determine the functions $\tau_{ij,0}$ and $\tau_{ij,k}$ in our basic system. Then, any stress component at the point P of the elastic body, according to Fig. 1, can be represented by the integral formula (1.10). Three unknown functions $u_k(S)$ representing the displacement components on the surface Ψ appear in these relations. Let us determine these functions using the boundary conditions for the surface Ψ, Eq. (1.1). Here p_i $(i = 1, 2, 3)$ is the component of external load and a_i $(i = 1, 2, 3)$ the direction cosine of the surface element $d\Psi$. Moving the point P to the point S of the surface Ψ we obtain from Eq. (1.10) the six stress components $\tau_{ij}(S)$. Substituting these functions in Eqs. (1.11), we obtain a system of three Fredholm integral equations of the first kind, Eq. (1.12). The solution of this system yields the functions $u_k(S)$ which, substituted in Eqs. (1.10), permit to determine the state of stress at any point of the considered elastic body. The displacement components on the surface aa can be assumed as unknown functions. The basic system will be constituted here by the bodies I and II with the given boundary conditions for the surfaces Φ and Ω and zero conditions for the surface aa.

Eqs. (1.10) remain valid and should be taken for the parts I and II of the elastic body separately. From the condition of continuity of stress in the cross-section aa, i.e. from the condition $p^{I} + p^{II} = 0$, we obtain a system of integral equations, analogous to (1.12), from which the additional functions $u_k(S)$ can be found.

The two solution methods of boundary problems of the theory of elasticity, represented here, are based on some elementary considerations of structural analysis (the method of «forces» and the method of «deformations») and are an effort to generalize the methods of structural analysis to the problems of the theory of elasticity.

The methods described have the great advantage of clearness. However, they can be used if the states of stress and deformation in the basic systems are known.

This condition is difficult to satisfy in three-dimensional problems of the theory of elasticity. The methods presented here will find wide application in the theory of plates, for systems with discontinuous boundary conditions. The second part of the paper is devoted to those problems. The problems of discontinuous boundary conditions of plates and membranes, previously solved by the author, are considered as particular cases of a more general method of solution of boundary problems of the theory of elasticity.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN