POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ

TOM VI WARSZAWA 1954 ZESZYT 3
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

NAPRĘŻENIA CIEPLNE W CIAŁACH ANIZOTROPOWYCH (I)

WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)

Część I pracy referowanej na Kursie Naukowym Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w Międzyzdrojach w sierpniu 1954 r.

W niniejszej pracy podany został sposób wyznaczania naprężeń w ciałach anizotropowych jednorodnych i niejednorodnych w oparciu o twierdzenie E. Bettiego o wzajemności przemieszczeń, uogólnione na zagadnienia cieplne izotermiczne. Zakładamy, że mamy do czynienia z nieodwracalnym procesem związanym z ruchem cieplnym i z ustalonym przepływem ciepła. Zakładamy dalej, że własności sprężyste materiałów nie ulegają zmianie przy wzroście temperatury; ograniczamy się zatem do niezbyt wielkich różnic temperatur w stosunku do stanu naturalnego ciała sprężystego.

1. Rozpatrzmy ciało sprężyste, znajdujące się w równowadze pod działaniem sił zewnętrznych i masowych oraz wzrostu temperatury o $T°C$ (w stosunku do naturalnego stanu ciała). Pod wpływem tych przyczyn ustalą się w ciele przemieszczenia u_i $(i = 1, 2, 3)$, odkształcenia osiowe i postaciowe e_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ oraz naprężenia τ_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ jako funkcje ciągłe i różniczkowalne zmiennych niezależnych x_i $(i = 1, 2, 3)$ [1].

Nadajmy ciału dowolne przygotowane przemieszczenie, ciągłe i różniczkowalne, nieskończenie małe oraz zgodne z warunkami ograniczającymi ciało. Składowe tego przemieszczenia wirtualnego oznaczamy przez $\delta u_i = \bar{u}_i$ $(i = 1, 2, 3)$; odkształcenia odpowiadające tym przemieszczeniom oznaczymy przez $\delta e_i = \bar{e}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$.

Praca przygotowana sił zewnętrznych i masowych przyjmie tu postać

$$\delta L_e = \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{i=3} p_i \bar{u}_i \, d\Omega + \int\limits_{V} \sum_{i=1}^{i=3} F_i \bar{u}_i \, dV \tag{1.1}$$

[1]) Dla wygody zapisu przyjęto tu następujące oznaczenia:

$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ u_1 = u,\ u_2 = v,\ u_3 = w,\ e_1 = \varepsilon_x,\ e_2 = \varepsilon_y,\ e_3 = \varepsilon_z,\ e_4 = \gamma_{yz},$

$e_5 = \gamma_{zx},\ e_6 = \gamma_{xy},\ \tau_1 = \sigma_x,\ \tau_2 = \sigma_y,\ \tau_3 = \sigma_z,\ \tau_4 = \tau_{yz},\ \tau_5 = \tau_{zx},\ \tau_6 = \tau_{xy}.$

i równa się pracy przygotowanej naprężeń na odpowiednich przyrostach odkształceń:

(1.2) $$\delta L_e = \int_V \sum_{i=1}^{i=6} \tau_i \bar{e}_i \, dV.$$

We wzorach tych p_i oznaczają składowe obciążenia zewnętrznego na powierzchni ciała, a F_i składowe sił masowych na kierunki przyjętych osi współrzędnych x_i.

Związek (1.1) - (1.2) jest słuszny dla ciał o dowolnej strukturze dla wszelkich zależności między stanem naprężenia i odkształcenia. Rozważmy rozpatrywane ciało sprężyste zachowując wszelkie jego własności sprężyste, kształt, sposób podparcia oraz obciążenie. Do stanu obciążenia dodajmy teraz obciążenie dodatkowe, przygotowane, objawiające się wzrostem sił zewnętrznych o $\delta p_i = \bar{p}_i$, sił masowych o $\delta F_i = \bar{F}_i$ oraz temperatury o $\delta T = \bar{T}$.

Składowe stanu naprężenia wzrosną o $\delta \tau_i = \bar{\tau}_i$. Zakładamy, że naprężenia są ciągłymi i różniczkowalnymi funkcjami współrzędnych i są tak dobrane, że spełniają równanie równowagi w każdym elemencie ciała oraz warunki brzegowe na powierzchni ciała.

Równanie pracy wirtualnej (przy wariacji stanu naprężenia) przyjmuje postać

(1.3) $$\delta L_\tau = \int_\Omega \sum_{i=1}^{i=3} \bar{p}_i u_i \, d\Omega + \int_V \sum_{i=1}^{i=3} \bar{F}_i u_i \, dV = \int_V \sum_{i=1}^{i=6} \bar{\tau}_i e_i \, dV.$$

Rozważmy teraz dwa stany. Pierwszy z nich, który charakteryzować będziemy znaczkiem ν, składa się z obciążeń zewnętrznych $p_i^{(\nu)}$, sił masowych $F_i^{(\nu)}$ i wzrostu temperatury o $T^{(\nu)}$. Temu stanowi przyporządkowane są składowe stanu naprężenia $\tau_i^{(\nu)}$, składowe stanu odkształcenia $e_i^{(\nu)}$ oraz składowe stanu przemieszczenia $u_i^{(\nu)}$. Będzie to stan rzeczywistych obciążeń.

Drugi stan, który charakteryzować będziemy znaczkiem ϱ, jest wirtualnym stanem obciążenia. W skład jego wchodzą obciążenia wirtualne $\bar{p}_i^{(\varrho)}$ i $\bar{F}_i^{(\varrho)}$ oraz temperatura $\bar{T}^{(\varrho)}$. Temu stanowi przyporządkowane są naprężenia $\tau_i^{(\varrho)}$, odkształcenia $\bar{e}_i^{(\varrho)}$ oraz przemieszczenia $\bar{u}_i^{(\varrho)}$.

Ustawimy równanie pracy wirtualnej (1.1) - (1.2) traktując stan (ν) jako stan obciążeń rzeczywistych; występujące w tym równaniu składowe przemieszczeń i odkształceń niech przynależą do drugiego stanu obciążenia, czyli stanu wirtualnego (ϱ).

Równanie (1.1) - (1.2) przyjmie zatem postać

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{i=3} p_i^{(\nu)} \bar{u}_i^{(\rho)} d\Omega + \int_{V} \sum_{i=1}^{i=3} F_i^{(\nu)} \bar{u}_i^{(\rho)} dV = \int_{V} \sum_{i=1}^{i=6} \tau_i^{(\nu)} \bar{e}_i^{(\rho)} dV. \tag{1.4}$$

Ustawmy teraz równanie pracy wirtualnej (1.3) przyjmując występujące tam obciążenie wirtualne według stanu (ϱ); rzeczywiste przemieszczenia i odkształcenia niech przynależą do stanu obciążenia (ν).

Wtedy

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{i=3} \bar{p}_i^{(\rho)} u_i^{(\nu)} d\Omega + \int \sum_{i=1}^{i=3} \bar{F}_i^{(\rho)} u_i^{(\nu)} dV = \int_{V} \sum_{i=1}^{i=6} \bar{\tau}_i^{(\rho)} e_i^{(\nu)} dV. \tag{1.5}$$

Dalsze rozważania przeprowadzać można w oparciu o związki zachodzące między stanami odkształcenia i naprężenia. Przy założeniu ciał anizotropowych niejednorodnych, o najogólniejszej anizotropowej strukturze, mamy

$$e_i = \sum_{k=1}^{k=6} \tau_k c_{ik} + a_i T \qquad (i = 1, 2, ..., 6). \tag{1.6}$$

Tutaj c_{ik} oznaczają współczynniki sprężystości, których przy uwzględnieniu związków $c_{ik} = c_{ki}$ jest dwadzieścia jeden. W przypadku jednorodnej anizotropii są one wartościami stałymi, dla niejednorodnej zaś anizotropii ciągłymi funkcjami miejsca. Współczynniki a_i są współczynnikami rozszerzalności, posiadającymi stałe wartości w przypadku anizotropii jednorodnej. Dla szczególnych struktur otrzymamy w równaniach (1.6) znaczne uproszczenia. I tak dla najbardziej interesującej techników struktury ortotropowej jest $c_{14} = c_{15} = c_{16} = c_{24} = c_{25} = c_{26} = c_{34} = c_{35} = c_{36} = c_{45} = c_{46} = c_{56} = 0$; $a_4 = a_5 = a_6 = 0$.

Wracając do rozważań nad pracą przygotowaną stwierdzamy, że dla stanu obciążenia (ν) jest

$$e_i^{(\nu)} = \sum_{k=1}^{k=6} \tau_k^{(\nu)} c_{ik} + a_i T^{(\nu)} \qquad (i = 1, 2, ..., 6), \tag{1.7}$$

a dla stanu obciążeń wirtualnych

$$\bar{e}_i^{(\rho)} = \sum_{k=1}^{k=6} \bar{\tau}_k^{(\rho)} c_{ik} + a_i \bar{T}^{(\rho)} \qquad (i = 1, 2, ..., 6). \tag{1.8}$$

Wstawiając związki (1.8) do prawej strony równania (1.4) otrzymujemy

$$(1.9)\quad \int_\Omega \sum p_i^{(\nu)} \bar{u}_i^{(\rho)} d\Omega + \int_V \sum F_i^{(\nu)} \bar{u}_i^{(\rho)} dV = \int_V \sum \bar{\tau}_i^{(\rho)} e_i^{(\nu)} dV + \\ + \int_V \bar{T}^{(\rho)} \sum a_i \tau_i^{(\nu)} dV - \int_V T^{(\nu)} \sum a_i \bar{\tau}_i^{(\rho)} dV.$$

Zważywszy, że pierwszy człon prawej strony równania (1.9) jest równy prawej stronie równania (1.5), otrzymamy następującą zależność:

$$(1.10)\quad \int_\Omega \sum p_i^{(\nu)} \bar{u}_i^{(\rho)} d\Omega + \int_V \sum F_i^{(\nu)} \bar{u}_i^{(\rho)} dV + \int_V T^{(\nu)} \sum a_i \bar{\tau}_i^{(\rho)} dV = \\ = \int_\Omega \sum \bar{p}_i^{(\rho)} u_i^{(\nu)} d\Omega + \int_V \sum \bar{F}_i^{(\rho)} u_i^{(\nu)} dV + \int_V \bar{T}^{(\rho)} \sum a_i \tau_i^{(\nu)} dV.$$

Jest to uogólnione twierdzenie o wzajemności przesunięć E. Bettiego na zagadnienia naprężeń cieplnych.

Ze związku tego wynika szereg wniosków szczególnych, ważnych dla dalszych rozważań.

(a) Niech stan obciążeń wirtualnych (ϱ) składa się jedynie z siły skupionej $\bar{1}^{(\rho)}$, działającej na powierzchni lub wewnątrz ciała w punkcie o współrzędnych (ξ_1, ξ_2, ξ_3).

Oznaczmy rzut przemieszczenia tego punktu, wywołany stanem obciążeń (ν), na kierunek działania siły $\bar{1}^{(\rho)}$ przez $\delta^{(\nu)}$.

Równanie (1.10) przyjmie postać

$$(1.11)\quad \bar{1}^{(\rho)} \delta^{(\nu)} = \int_\Omega \sum p_i^{(\nu)} \bar{u}_i^{(\rho)} d\Omega + \int_V \sum F_i^{(\nu)} \bar{u}_i^{(\rho)} dV + \int_V T^{(\nu)} \sum a_i \bar{\tau}_i^{(\rho)} dV.$$

Zauważmy, że pierwsze dwie całki przedstawiają przemieszczenie rozpatrywanego punktu w kierunku działania siły $\bar{1}^{(\rho)}$, wywołane działaniem obciążenia zewnętrznego i sił masowych, w założeniu, że $T^{(\nu)} = 0$, a więc w ciele znajdującym się w stanie naturalnym. Oznaczając tę składową przemieszczenia przez $\delta_0^{(\nu)}$ otrzymamy związek superpozycyjny

$$(1.12)\quad \bar{1}^{(\rho)} \delta^{(\nu)} = \bar{1}^{(\rho)} \delta_0^{(\nu)} + \int_V T^{(\nu)} \sum a_i \bar{\tau}_i^{(\rho)} dV.$$

Jeżeli ograniczymy się do wyznaczania przemieszczeń ciała wolnego od obciążeń zewnętrznych i sił masowych, a poddanego jedynie działaniu temperatury, to z równania (1.11) otrzymamy [2])

$$\overline{1}^{(\varrho)}\delta^{(\nu)} = \int_V T^{(\nu)} \sum_{i=1}^{i=6} a_i \overline{\tau}_i^{(\varrho)} dV. \tag{1.13}$$

Zauważmy, że funkcje $\overline{\tau}_i^{(\varrho)}$, wywołane stanem obciążeń wirtualnych w ciele znajdującym się w stanie naturalnym, są funkcjami zmiennych niezależnych x_i oraz współrzędnych punktu zaczepienia siły. Są zatem funkcjami Greena, symetrycznymi względem x_i, ξ_i. Otrzymamy je przez rozwiązanie odpowiednich równań różniczkowych i spełnienie warunków brzegowych teorii sprężystości ośrodków anizotropowych, przy $T^{(\nu)} = 0$. Dla wielu podstawowych zagadnień teorii sprężystości ciał jednorodnych i izotropowych funkcje te są znane.

Znając funkcję $\Sigma a_i \overline{\tau}_i^{(\varrho)}$ i pole temperatur otrzymamy drogą całkowania żądaną składową przemieszczenia.

Jeżeli teraz siła jednostkowa $\overline{1}^{(\varrho)}$ działać będzie w punkcie o współrzędnych (ξ_1, ξ_2, ξ_3) kolejno w kierunku osi ξ_1, ξ_2 i ξ_3, to z równania (1.13) otrzymamy trzy składowe przemieszczenia tego punktu. Oznaczmy je przez u_{ξ_i}:

$$1_{\xi_k} u_{\xi_k} = \int_V T \sum a_i \tau_{i,\xi_k} dV. \tag{1.14}$$

Opuściliśmy tutaj znaczki ν i ϱ; czynić tak będziemy również w dalszych rozważaniach.

Oznaczamy przez $\tau_{i,}\ \xi_i$ składowe stanu naprężenia, wywołanego w ciele, znajdującym się w stanie naturalnym, stanem 1_{ξ_i} $(i = 1, 2, 3)$.

Znając składowe stanu przemieszczenia u_{ξ_i} znajdziemy odkształcenia ze wzorów

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\partial u_{\xi_1}}{\partial \xi_1}, & e_2 &= \frac{\partial u_{\xi_2}}{\partial \xi_2}, & e_3 &= \frac{\partial u_{\xi_3}}{\partial \xi_3}, \\ e_4 &= \frac{\partial u_{\xi_2}}{\partial \xi_3} + \frac{\partial u_{\xi_3}}{\partial u_{\xi_2}}, & e_5 &= \frac{\partial u_{\xi_3}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u_{\xi_1}}{\partial \xi_3}, & e_6 &= \frac{\partial u_{\xi_1}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_{\xi_2}}{\partial \xi_1}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

---

[2]) Powyższy związek otrzymał na innej drodze H. Müller--Breslau [1], str. 373, jednak w założeniu, że ciało jest jednorodne izotropowe. Zastosowanie tego twierdzenia ograniczył wyłącznie do zagadnień statyki kratownic i ram.

Wielkości e_i otrzymać można bezpośrednio ze wzoru (1.14) wykonując przepisane różniczkowanie. Znając wielkości e_i znajdziemy ze wzorów (1.7) układ równań liniowych, w których nieznanymi wielkościami są składowe stanu naprężenia τ_i. Otrzymamy je z rozwiązania układu równań:

$$\tau_i = \sum_{k=1}^{k=6} e_k a_{ik} + q_i T \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6). \tag{1.16}$$

Równanie (1.13) traktować można również jako równanie całkowe. Przy znanej (np. uzyskanej na drodze eksperymentalnej) funkcji $\delta^{(\nu)}$ oraz funkcji Greena $\Sigma a_i \bar{\tau}_i^{(\rho)}$ znaleźć można temperaturę jako funkcję miejsca.

(b) Niech na ciało anizotropowe niejednorodne, swobodne i znajdujące się w stanie naturalnym, działa obciążenie jednostajnie rozłożone na jego powierzchni, skierowane wzdłuż normalnej i o intensywności równej jedności.

W tym przypadku jest

$$\bar{\tau}_1 = \bar{\tau}_2 = \bar{\tau}_3 = \bar{1}, \qquad \bar{\tau}_3 = \bar{\tau}_4 = \bar{\tau}_5 = 0,$$

a na powierzchni ciała

$$\bar{p}_1 = \bar{1} \cos(n, 1), \qquad \bar{p}_2 = \bar{1} \cos(n, 2), \qquad \bar{p}_3 = \bar{1} \cos(n, 3).$$

Niech teraz ciało poddane będzie działaniu temperatury. W stanie obciążeń rzeczywistych przyjąć należy $F = 0$ oraz $p = 0$.

Z równania (1.10) otrzymamy

$$\int_{\Omega} \sum \bar{p}_i u_i \, d\Omega = \int_V T \sum a_i \bar{\tau}_i \, dV. \tag{1.16}$$

Zważywszy, że

$$\sum \bar{p} u_i = \bar{1}\left(u_1 \cos(n, 1) + u_2 \cos(n, 2) + u_3 \cos(n, 3)\right)$$

jest przesunięciem powierzchni ciała w kierunku normalnej, a całka

$$\int_{\Omega} \sum \bar{p}_i u_i \, d\Omega$$

przedstawia przyrost ΔV objętości ciała, otrzymamy z (1.16)

$$\Delta V = \int_V T (a_1 + a_2 + a_3) \, dV. \tag{1.17}$$

Otrzymaliśmy wzór na przyrost objętości ciała anizotropowego niejednorodnego swobodnego, wywołany wzrostem temperatury w stosunku do stanu beznaprężeniowego, czyli do stanu naturalnego.

Znamienny jest w tym wzorze brak współczynników rozszerzalności postaciowej a_4, a_5, a_6.

W przypadku szczególnym ciała izotropowego niejednorodnego jest

$$\Delta V = 3 \int_V a T dV,$$

a dla ciała izotropowego jednorodnego

$$\Delta V = 3 a \int T dV.$$

(c) Z twierdzenia o wzajemności przesunięć wyznaczyć można również średnie wartości odkształceń e_i, wywołane naprężeniami cieplnymi w ciele swobodnym.

Korzystamy tu z równania o wzajemności przesunięć w jego pierwszej postaci [wzór (1.9)].

Dla wyznaczenia, na przykład, średniej wartości $e_1 = \partial u_1/\partial \xi_1$ przyjmiemy jako jedyne obciążenie wirtualne $\overline{p}_1 = \overline{1} \cos(n, 1)$. Temu stanowi odpowiada wewnątrz ciała naprężenie $\overline{\tau}_1 = \overline{1}$. Pozostałe składowe stanu naprężenia są równe zeru. W stanie obciążenia (ν) uwzględniamy jedynie wpływ temperatury. Z równania (1.9) mamy

$$\int_V e_1 \overline{\tau}_1 dV = \int_V T a_1 \overline{\tau}_1 dV,$$

a przy $\overline{\tau}_1 = \overline{1}$

$$\int_V \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} dV = \int_V T a_1 dV. \tag{1.18}$$

Przedstawione tu równanie uogólnić można na dowolne odkształcenie osiowe

$$\int_V e_i dV = \int_V T a_i dV \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{1.19}$$

Średnią wartość rozszerzalności $\Theta = e_1 + e_2 + e_3$ otrzymamy ze wzoru

$$\int_V \Theta dV = \int_V (a_1 + a_2 + a_3) T dV = \Delta V. \tag{1.20}$$

2. Powstaje pytanie, przy jakiej postaci funkcji temperatury nie powstaną w ciele anizotropowym niejednorodnym swobodnym naprężenia cieplne.

Z równania (1.7) odczytamy, że nastąpi to, gdy

$$e_i = \alpha_i T \qquad (i = 1, 2, ..., 6). \tag{2.1}$$

Odkształcenia nie mogą być jednak dowolne, lecz powinny spełniać równania nierozdzielności Saint-Venanta. Łatwo sprawdzić, że warunki nierozdzielności będą spełnione, gdy

$$\alpha_i T = a_i + b_i x_1 + c_i x_2 + d_i x_3 \qquad (i = 1, 2, ..., 6), \tag{2.2}$$

to znaczy, gdy iloczyny $\alpha_i T_i$ będą funkcjami liniowymi.

Dla ciała anizotropowego jednorodnego, w którym współczynniki rozszerzalności są wartościami stałymi, temperatura T powinna być funkcją liniową. Dodatkowo założyć tu należy, że współczynniki $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ powinny być różne od zera, co wynika z analizy równań zwartości, których wyznacznik powinien być różny od zera [3]).

W przypadku niejednorodnej struktury ortotropowej spełnione powinny być warunki

$$\alpha_i T = a_i + b_i x_1 + c_i x_2 + d_i x_3 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{2.3}$$

Wreszcie dla ciała izotropowego niejednorodnego jest

$$\alpha T = a_0 + b_0 x_1 + c_0 x_2 + d_0 x_3. \tag{2.4}$$

Otrzymane tu funkcje temperatur powinny ponadto spełniać równania przewodnictwa cieplnego. Dla ciał anizotropowych niejednorodnych równanie to ma nader złożoną postać [4])

$$\sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{k=1}^{k=3} \lambda_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) = 0, \tag{2.5}$$

gdzie λ_{ik} jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego. Dla ciał anizotropowych jednorodnych λ_{ik} jest wartością stałą.

---

[3]) W. Olszak przedyskutował szczegółowo to zagadnienie dla ośrodków ortotropowych jednorodnych w pracy [2].

[4]) W. Voigt, [3], str. 551 i nast. Wpływ anizotropii cieplnej może być w ciałach anizotropowych znaczny; dla przybliżonego modelu ciała ortotropowego, jakim jest np. płyta krzyżowo zbrojona, trzeba fakt ten mieć na uwadze. Współczynniki rozszerzalności liniowej stali i betonu są prawie jednakowe, podczas gdy odpowiednie współczynniki przewodnictwa cieplnego tych materiałów wykazują znaczną różnicę.

Dla przypadku struktury ortotropowej znikają te współczynniki, dla których $i \neq k$.

Równanie (2.5) przyjmie tu postać

$$\sum_{i=1}^{i=3} \left(\lambda_{ii} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} + \frac{\partial \lambda_{ii}}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = 0. \tag{2.6}$$

Dla ciała ortotropowego jednorodnego mamy równanie

$$\sum_{i=1}^{i=3} \lambda_{ii} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i} = 0, \tag{2.7}$$

a dla ciała izotropowego jednorodnego równanie harmoniczne

$$\nabla^2 T = 0. \tag{2.8}$$

Łatwo stwierdzić, że dla ciał anizotropowych i izotropowych jednorodnych liniowy przebieg temperatury nie wywoła naprężeń cieplnych.

Dla ciał niejednorodnych stan beznaprężeniowy jest możliwy jedynie w nader szczególnych przypadkach zależności między współczynnikami przewodnictwa cieplnego i rozszerzalności liniowej. I tak dla ciała izotropowego niejednorodnego stan beznaprężeniowy daje się zrealizować w przypadku proporcjonalności funkcji a i λ (tj. $\lambda = a \cdot \alpha$, gdzie a jest wartością stałą) oraz przy spełnieniu warunków $\nabla^2 \alpha = 0$ w obrębie ciała. Przyjęta tu zależność funkcji α i λ jest, oczywiście, teoretyczna, nie oparta na doświadczeniach; te bowiem dla ciał niejednorodnych do tej pory, jak się wydaje, nie były przeprowadzone.

3. Rozważania dotychczasowe dają się uogólnić na bardziej złożone stany naprężenia niż naprężenia cieplne, mianowicie na stany samonaprężeń.

Załóżmy, że w ciele sprężystym anizotropowym i niejednorodnym powstają (wskutek przekroczenia granicy plastyczności i pojawienia się trwałych odkształceń, przez zmiany występujące w obróbce cieplnej itp.) odkształcenia $e_{i,0}$. Załóżmy, że są one ciągłymi i różniczkowalnymi funkcjami współrzędnych. Załóżmy dalej, że naprężenia są w danym miejscu ciała funkcjami liniowymi naprężeń.

Odkształcenia układu przyjmą tu dla stanów (ν) i (ϱ) następującą postać:

$$e_i^{(\nu)} = \sum_{k=1}^{k=6} \tau_k^{(\nu)} c_{ik} + e_{i,0}^{(\nu)}, \tag{3.1}$$

$$\bar{e}_i^{(\rho)} = \sum_{k=1}^{k=6} \bar{\tau}_k^{(\rho)} c_{ik} + \bar{e}_{i,0}^{(\rho)}. \tag{3.2}$$

Wstawiając powyższe zależności do związków (1.4) otrzymamy

$$\int_\Omega \sum p_i^{(\nu)} \bar{u}_i^{(\rho)} d\Omega + \int_V \sum F_i^{(\nu)} \bar{u}_i^{(\rho)} dV = \int_V \sum \bar{\tau}_i^{(\rho)} e_i^{(\nu)} dV + \tag{3.3}$$

$$+ \int_V \sum \tau_i^{(\nu)} \bar{e}_{i,0}^{(\rho)} dV - \int_V \sum \bar{\tau}_i^{(\rho)} e_{i,0}^{(\nu)} dV.$$

Zważywszy, że pierwszy człon prawej strony ostatniego równania jest równy prawej stronie równania (1.5), mamy

$$\int_\Omega \sum p_i^{(\nu)} \bar{u}_i^{(\rho)} d\Omega + \int_V \sum F_i^{(\nu)} \bar{u}_i^{(\rho)} dV + \int_V \sum \bar{\tau}_i^{(\rho)} e_{i,0}^{(\nu)} dV = \tag{3.4}$$

$$= \int_\Omega \sum \bar{p}_i^{(\rho)} u_i^{(\nu)} d\Omega + \int_V \sum \bar{F}_i^{(\rho)} u_i^{(\nu)} dV + \int_V \sum \tau_i^{(\nu)} \bar{e}_{i,0}^{(\rho)} dV.$$

Niech stan obciążeń wirtualnych (ϱ) składa się jedynie z siły skupionej $\overline{1}^{(\rho)}$, działającej na powierzchni ciała lub wewnątrz ciała. Oznaczmy rzut przemieszczenia tego punktu, wywołany stanem obciążeń (ν) na kierunek działania siły $\overline{1}^{(\rho)}$, przez $\delta^{(\nu)}$. Z równania (3.4) mamy

$$\overline{1}^{(\rho)} \delta^{(\nu)} = \int_\Omega \sum p_i^{(\nu)} \bar{u}_i^{(\rho)} d\Omega + \int_V \sum F^{(\nu)} \bar{u}_i^{(\rho)} dV + \int_V \sum \bar{\tau}_i^{(\rho)} e_{i,0}^{(\nu)} dV \tag{3.5.1}$$

albo

$$\overline{1}^{(\rho)} \delta^{(\nu)} = \overline{1}^{(\rho)} \delta_0^{(\nu)} + \int_V \sum \bar{\tau}_i^{(\rho)} e_{i,0}^{(\nu)} dV. \tag{3.5.2}$$

W braku obciążenia zewnętrznego i sił masowych ($p_i^{(\nu)} = 0$, $F_i^{(\nu)} = 0$) jest

$$\overline{1}^{(\rho)} \delta^{(\nu)} = \int_V \sum \bar{\tau}_i^{(\rho)} e_{i,0}^{(\nu)} dV. \tag{3.6}$$

Tutaj $\bar{\tau}_i^{(\rho)}$ jest funkcją G r e e n a, jądrem równania całkowego (3.6). Funkcja $\bar{\tau}_i^{(\rho)}$ jest naprężeniem wywołanym w ciele sprężystym, znajdującym się w stanie naturalnym, działaniem siły jednostkowej $\overline{1}^{(\rho)}$; $e_{i,0}^{(\nu)}$ są danymi, a więc znanymi funkcjami miejsca.

W szczególnym przypadku naprężeń cieplnych jest $e_{i,0}^{(\nu)} = a_i T_i$; równanie (3.6) przechodzi wówczas w równanie (1.13).

Literatura cytowana w tekście

[1] H. Müller - Breslau, *Bedingungsgleichungen für statisch unbestimmte Körper*, Wochenblatt f. Arch. u. Ing. 6 (1884).

[2] W. Olszak, *Autocontraintes des milieux anisotropes*, Kraków 1951.

[3] W. Voigt, *Kompendium der technischen Mechanik*, Lipsk 1895.

[4] W. Voigt, *Lehrbuch der Kristallphysik*, Lipsk 1928.

[5] C. H. Müller, A. Timpe, *Die Grundgleichungen der mathematischen Elastizitätstheorie*, Enc. d. math. Wissensch., Lipsk 1907-1914.

[6] M. T. Huber, *Teoria sprężystości*, Kraków 1948.

[7] L. S. Lejbienzon, *Kurs tieorji uprugosti*, Moskwa 1947.

Резюме

ТЕРМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛАХ (I)

В настоящей работе автор выводит, исходя из начала возможных перемещений, теорему взаимности Е. Бетти для анизотропных неоднородных тел, учитывая неравномерное нагревание тела [формула (1.10)]. Из этой зависимости, в особом случае ограничения виртуального состояния нагрузок к одной сосредоточенной силы $\overline{1}^{(\rho)}$— действующей в любой точке тела, находящегося в натуральном состоянии — получается из формулы (1.13) составляющие перемещения $\delta^{(\nu)}$ этой точки, вызванные неравномерным нагреванием тела.

Формула (1.13) представляет собой интегральное уравнение, ядро которого

$$\sum_{i=1}^{i=6} a_i \,\overline{\tau}_i^{(\rho)}$$

является функцией Грина; эту функцию можно получить путем решения соответствующих дифференциальных уравнений Ляме или Мичелла для упругого тела, находящегося в натуральном состоянии. Использовывая теорему взаимности, выведено также формулы для средних значений деформаций неравномерно нагретого тела.

В последнем абзаце работы обобщается теорема взаимности Е. Бетти для напряженных состояний, выступающих в анизотропных неоднородных телах.

Summary

THERMAL STRESSES IN ANISOTROPIC BODIES (I)

In this paper the author, taking into consideration the principle of virtual work, expands Betti's reciprocal theorem [Eq. (1.10)] for non-homogeneous anisotropic bodies, unevenly heated.

From this relation we obtain — in the particular case of virtual load limited to a single concentrated force $\overline{1}^{(p)}$ at any given point of the body in its normal state — the component of displacement $\delta^{(v)}$ of that point, caused by an unevenly heating of the body, in the form of Eq. (1.13). This is an integral equation whose nucleus

$$\sum_{i=1}^{i=6} \alpha_i \, \overline{\tau}_i^{(p)},$$

is constituted by Green's function, obtained by solving the corresponding differential equations (of Lamé or Michell) for an elastic body in the normal state. Using the reciprocal theorem, the formulae for the average deformation of an unevenly heated body are obtained. The last section of the paper brings a generalization of Betti's reciprocal theorem to states of stress in non-homogeneous anisotropic bodies.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN