ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ
ARCHIVES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

W. NOWACKI

Pasmo płytowe ortotropowe

Plaque en bande orthotrope

Prace ofiarowane przez autora

Odbitka z „Archiwum Mechaniki Stosowanej"
Tom III zeszyt 3—4

WYDAWNICTWO
ZAKŁADU MECHANIKI BUDOWLI POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ
GDAŃSK 1951

Pasmo płytowe ortotropowe

Plaque en bande orthotrope

W. Nowacki, Gdańsk

Weźmy pod uwagę pasmo płytowe ortotropowe, nieskończenie długie, swobodnie podparte wzdłuż krawędzi $x=0$; $x=a$. Niech pasmo to będzie obciążone siłą skupioną P, działającą na osi x w odległości ζ od osi y.

Rozwiązanie tego zagadnienia przy użyciu pojedynczych szeregów trygonometrycznych podał M. T. Huber*). Szeregi te są jednak zwłaszcza dla wielkości statycznych płyty (momenty zginające i skręcające, siły tnące) bardzo wolnozbieżne w otoczeniu punktu przyłożenia siły.

Okażemy, że wielkości statyczne można przedstawić przy pomocy wzorów zamkniętych.

Rozwiązanie nastąpi przez rozwiązanie układu dwóch równań cząstkowych. Stwarza to analogię do dwustopniowego sposobu rozwiązania podanego przez H. Marcusa dla płyt izotropowych.

Wychodzimy ze znanego równania różniczkowego odkształcenia płyty ortotropowej:

$$D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \tag{1}$$

gdzie

$$D_x = \frac{m_x m_y}{m_x m_y - 1} E_x \frac{h^3}{12}, \quad D_y = \frac{m_x m_y}{m_x m_y - 1} E_y \frac{h^3}{12},$$

$$2H = \frac{D_x}{m_y} + \frac{D_y}{m_x} + 4C, \qquad C = \frac{h^3}{12} G_0 .$$

Tu:

E_x, E_y — są modułami sprężystości w kierunku osi x i y,
m_x, m_y — są liczbami Poissona dla tych kierunków,

*) M. T. Huber. Teoria płyt prostokątnie - różnokierunkowych. Lwów 1921.

G_0 — jest stałą materiału — odpowiednikiem modułu odkształcenia postaciowego ciała izotropowego.

h — jest grubością płyty, a w — ugięciem płyty.

Stałe materiału E i m związane są ponadto równaniem

$$E_x m_x = E_y m_y .$$

Wielkości statyczne, momenty zginające M_x, M_y, moment skręcający M_{xy} oraz siły tnące T_{xz}, T_{yz} wyrażone są następującymi wzorami

$$
\begin{aligned}
M_x &= -D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
M_y &= -D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
M_{xy} &= -2\,C \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} \\
T_{xz} &= -D_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (D_x \mu_y + 2\,C) \frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2} \\
T_{yz} &= -D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - (D_y \mu_x + 2\,C) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y} .
\end{aligned}
\tag{a}
$$

Przy oznaczeniach $\varepsilon^4 = \dfrac{D_x}{D_y}$, $\quad \varrho = \dfrac{H}{\sqrt{D_x D_y}}$ równanie (1) przyjmie postać

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\,\varrho\,\varepsilon^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \varepsilon^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \qquad \varrho, \varepsilon > 0 \tag{2}$$

Wielkość ϱ posiada zasadnicze znaczenie dla rozwiązania równania (2): w zależności bowiem od tego, czy $\varrho \gtreqless 1$ otrzymujemy trzy odmienne rozwiązania.

Wprowadzamy funkcję $\varphi(x, y)$ spełniającą równanie

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \qquad \beta = \text{const.} \tag{3a}$$

Niech funkcja $\varphi(x, y)$ będzie związana z funkcją ugięcia $w(x, y)$ zależnością:

$$\varphi = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad \lambda = \text{const.} \tag{3b}$$

Wstawiając φ do równania (3a) otrzymamy

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) w = 0. \tag{4}$$

Ostatnie równanie będzie identyczne z równaniem różniczkowym (2), jeśli

$$\lambda^2 + \beta^2 = 2\varrho\,\varepsilon^2, \qquad \varepsilon^4 = \beta^2\lambda^2. \tag{5}$$

Powyższe związki prowadzą do zależności

$$\beta_{1,2} = \pm\varepsilon\sqrt{\varrho + \sqrt{\varrho^2 - 1}}, \qquad \lambda_{1,2} = \pm\varepsilon\sqrt{\varrho - \sqrt{\varrho^2 - 1}} \qquad \text{gdy } \varrho > 1.$$

$$\beta_{1,2} = \pm\varepsilon\left[\sqrt{\frac{1+\varrho}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\varrho}{2}}\right], \qquad \lambda_{1,2} = \pm\varepsilon\left[\sqrt{\frac{1+\varrho}{2}} - i\sqrt{\frac{1-\varrho}{2}}\right]$$

$$\text{gdy } \varrho < 1. \tag{5a}$$

$$\beta_{1,2} = \pm\varepsilon, \qquad \lambda_{1,2} = \pm\varepsilon \qquad \text{gdy } \varrho = 1.$$

Rozważmy wypadek $\varrho > 1$ i wyznaczmy funkcje φ z równania (3a). Warunki brzegowe dla φ kształtują się następująco.

Na brzegach swobodnie podpartych $x=0$ i $x=a$ ugięcie w i pochodne: $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ są równe zeru. Z równania (3b) wynika zatem, że na brzegach tych również φ jest równe zeru.

Zakładamy więc

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty} \varphi_n(y) \sin \alpha_n x \qquad \alpha_n = \frac{n\pi}{a},$$

i doprowadzamy równanie (3a) do równania różniczkowego zwyczajnego

$$\frac{d^2\varphi_n}{dy^2} - \alpha_n^2\beta^2\varphi_n = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania będzie

$$\varphi_n = A_n e^{-\alpha_n\beta y} + B_n e^{\alpha_n\beta y}, \tag{6}$$

Ponieważ dla $y \to \infty$: $w(x, y) \to 0$ zatem i $\varphi(x, y) \to 0$. Temu warunkowi odpowiada $B_n = 0$.

Stałą całkowania A_n otrzymamy z warunków zrównoważenia siły tnącej T_{yz} na prawo i lewo od przekroju $y=0$ z siłą skupioną P.

$$T_{yz}\big|_{y=0} + \frac{P}{2} = 0 \quad \text{albo} \quad -\left[D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left(\frac{D_y}{m_x} + 2C\right)\frac{\partial^3 w}{\partial y\, \partial x^2}\right]_{y=0} + \frac{P}{2} = 0. \tag{7}$$

Ze względu na symetryczną względem osi x postać wygięcia płyty znika drugi człon w nawiasach graniastych równania (7) i ostatecznie

$$-D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\bigg|_{y=0} + \frac{P}{2} = -D_y \frac{\partial \varphi}{\partial y}\bigg|_{y=0} + \frac{P}{2} = 0. \tag{8}$$

Rozwijając $P(x)$ w szereg Fouriera

$$P(x) = \frac{2P}{a} \sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty} \sin \alpha_n \zeta \sin \alpha_n x$$

otrzymamy z równania (8)

$$A_n = -\frac{P}{n \pi \beta D_y} \sin \alpha_n \zeta. \tag{9}$$

Zatem

$$\varphi(x, y) = -\frac{P}{\pi \beta D_y} \sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n \beta y}}{n} \sin \alpha_n \zeta \sin \alpha_n x. \tag{10}$$

Powierzchnię odkształcenia $w(x, y)$ wyznaczymy z równania (3b)

Przy przyjęciu

$$w(x, y) = \sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty} w_n(y) \sin \alpha_n x, \tag{11}$$

spełniającym warunki brzegowe $w(0, y) = 0$, $\ddot{w}(a, y) = 0$ należy znaleść rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego

$$\frac{d^2 w_n}{dy^2} - \alpha_n^2 \lambda^2 w_n = -\frac{P}{\pi \beta n D_y} e^{-\alpha_n \beta y} \sin \alpha_n \zeta. \tag{12}$$

Rozwiązanie tego równania przy warunkach brzegowych

$$w(x,\infty)=0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0}=0$$

prowadzi do podanego już przez M. T. Hubera rozwiązania, uzyskanego na drodze bezpośredniego całkowania równania (2):

$$w(x, y)=\frac{Pa^2}{\pi^3\beta\lambda(\beta^2-\lambda^2)D_y}\sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left(\beta e^{-\lambda\alpha_n y}-\lambda e^{-\beta\alpha_n y}\right)\sin\alpha_n\zeta\sin\alpha_n x \quad (13)$$

Wprowadzamy drugą funkcję pomocniczą $\psi(x,y)$ spełniającą równanie

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\lambda^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0, \quad (14a)$$

i związaną z ugięciem $w(x, y)$ równaniem

$$\psi=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\beta^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (14b)$$

Eliminując z tych równań funkcję ψ, dochodzimy do równania (4). Funkcję ψ wyznaczamy w ten sam sposób co i funkcję φ. Otrzymamy

$$\psi(x, y)=-\frac{P}{\pi\lambda D_y}\sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_n\lambda y}}{n}\sin\alpha_n\zeta\sin\alpha_n x. \quad (15)$$

Całkując równanie (14b) otrzymamy dla $w(x,y)$ wzór (13).

Z określenia funkcji pomocniczych φ i ψ łatwo już wyznaczyć drugie pochodne cząstkowe powierzchni ugięcia płyty:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\psi-\varphi}{\beta^2-\lambda^2}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{\beta^2\varphi-\lambda^2\psi}{\beta^2-\lambda^2}; \quad \varrho>1. \quad (16)$$

Wracając do funkcji φ i ψ, rozwiązań osobliwych równań różniczkowych (3) i (14) zauważymy, że funkcje te, wyrażone wzorami (10) i (15) możemy przedstawić przy pomocy wzorów zamkniętych. Mianowicie, jeśli w tych wzorach zastąpimy funkcje trygonometryczne wykładniczymi i skorzystamy ze znanego związku

$$\ln(1-z) = -\sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{z^n}{n} \qquad |z| < 1$$

to otrzymamy

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{P}{4\pi\beta D_y} \ln \frac{\cosh\frac{\pi\beta}{a}y - \cos\frac{\pi}{a}(x-\zeta)}{\cosh\frac{\pi\beta}{a}y - \cos\frac{\pi}{a}(x+\zeta)}, \\ \psi &= \frac{P}{4\pi\lambda D_y} \ln \frac{\cosh\frac{\pi\lambda}{a}y - \cos\frac{\pi}{a}(x-\zeta)}{\cosh\frac{\pi\lambda}{a}y - \cos\frac{\pi}{a}(x+\zeta)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Łatwo stwierdzimy, że $\psi > \varphi$. Dla $y=0$ oraz $x=\zeta$ funkcje φ i ψ stają się nieciągłymi jak logarytm.

Korzystając z tych związków możemy momenty zginające i siły poprzeczne wyrazić przy pomocy wzorów zamkniętych.

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{D_x}{2\varepsilon^2\sqrt{\varrho^2-1}}[\psi - \varphi + \mu_y(\beta^2\varphi - \lambda^2\psi)] \\ M_y &= -\frac{D_y}{2\varepsilon^2\sqrt{\varrho^2-1}}[\beta^2\varphi - \lambda^2\psi + \mu_x(\psi-\varphi)] \end{aligned} \tag{18}$$

Funkcje φ i ψ występujące w równaniach (18) wyrazimy przy pomocy równań (17).

Podobnie

$$\begin{aligned} T_{xz} &= -\frac{D_x}{2\varepsilon^2\sqrt{\varrho^2-1}}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\psi-\varphi) + \left(\mu_y + \frac{2C}{D_x}\right)\left(\beta^2\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \lambda^2\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right] \\ T_{yz} &= -\frac{D_y}{2\varepsilon^2\sqrt{\varrho^2-1}}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\beta^2 - \frac{\partial\psi}{\partial y}\lambda^2 + \left(\mu_x + \frac{2C}{D_y}\right)\frac{\partial}{\partial y}(\psi-\varphi)\right]. \end{aligned} \tag{19}$$

Ze wzorów (18) dla $y=0$ uzyskamy po prostych przekształceniach

$$M_x = \varepsilon^4 \frac{1+\varepsilon^2\mu_y}{\mu_x+\varepsilon^2} M_y. \tag{20}$$

Widzimy, że stosunek ten jest niezależny od parametru ϱ. Łatwo też stwierdzić, że związek ten jest słuszny dla $\varrho \gtreqless 1$.

W wypadku szczególnym $\varrho=1$ otrzymamy z równania (13) przez przejście do granicy:

$$w(x, y)=\frac{Pa^2}{2\pi^3\varepsilon^3 D_y}\sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_n\varepsilon y}}{n^3}(1+\alpha_n\varepsilon\, y)\sin\alpha_n\zeta\sin\alpha_n x. \tag{21}$$

W wypadku tym łatwo zauważyć, że równanie (2) przy wprowadzeniu nowej zmiennej $\eta=\varepsilon y$ staje się równaniem biharmonicznym

$$\nabla^2\nabla^2 w(x,\eta)=0,$$

a całką osobliwą tego równania będzie

$$\Phi=\varphi\,|_{\beta=\varepsilon}=\psi\,|_{\lambda=\varepsilon}=\frac{P}{4D_y\pi\varepsilon}\ln\frac{\cosh\frac{\pi\varepsilon}{a}y-\cos\frac{\pi}{a}(x-\zeta)}{\cosh\frac{\pi\varepsilon}{a}y-\cos\frac{\pi}{a}(x+\zeta)}. \tag{22}$$

Korzystając ze związków (16) otrzymamy dla tego wypadku

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{1}{2\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\bigg|_{\beta=\varepsilon}=\frac{1}{2\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=\varepsilon}, \tag{23}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\varphi-\frac{\beta}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\bigg|_{\beta=\varepsilon}=\psi-\frac{\lambda}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=\varepsilon}$$

względnie

$$\begin{aligned}2\varepsilon^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}&=\Phi-y\frac{\partial\Phi}{\partial y}\\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}&=\Phi+y\frac{\partial\Phi}{\partial y}.\end{aligned} \tag{24}$$

Przy pomocy tych związków wyrazimy momenty zginające i siły tnące w postaci wzorów zamkniętych.

$$\begin{aligned}M_x&=-\frac{D_x}{2}\left[\left(\frac{1}{\varepsilon^2}+\mu_y\right)\Phi-\left(\frac{1}{\varepsilon^2}-\mu_y\right)y\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right]\\ M_y&=-\frac{D_y}{2}\left[\left(1+\frac{\mu_x}{\varepsilon^2}\right)\Phi+\left(1-\frac{\mu_x}{\varepsilon^2}\right)y\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right]\end{aligned} \tag{25}$$

$$T_{xz} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{D_x}{\varepsilon^2}\left(\Phi - y\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + (\mu_y D_x + 2C)\left(\Phi + y\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\right]$$

$$T_{yz} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left[D_y\left(\Phi + y\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \frac{1}{\varepsilon^2}(\mu_x D_y + 2C)\left(\Phi - y\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\right]. \tag{26}$$

W wypadku szczególnym $\varepsilon = 1$; $\varrho = 1$, a więc w wypadku płyty izotropowej otrzymamy znane rozwiązanie A. Nadaiego *).

Przechodzimy wreszcie do wypadku $\varrho < 1$. Jeśli do równania (13) wstawić

$$\beta = \nu_1 + i\nu_2 \qquad \lambda = \nu_1 - i\nu_2 \qquad \nu_{1,2} = \varepsilon\sqrt{\frac{1 \pm \varrho}{2}}, \tag{27}$$

to po prostych przekształceniach uzyskamy

$$w(x, y) = \frac{Pa^2}{2\pi^3 \nu_1 \nu_2 (\nu_1^2 + \nu_2^2) D_y}\sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty}\frac{e^{-\nu_1 \alpha_n y}}{n^3}(\nu_1 \sin \nu_2 \alpha_n y + \nu_2 \cos \nu_2 \alpha_n y) \times$$
$$\times \sin \alpha_n \zeta \cdot \sin \alpha_n x. \tag{28}$$

Funkcje φ i ψ przyjmują tu postać funkcji zespolonych sprzężonych

$$\varphi = -\frac{P}{\pi \varepsilon^2 D_y}(\Phi_1 - i\Phi_2), \quad \psi = -\frac{P}{\pi \varepsilon^2 D_y}(\Phi_1 + i\Phi_2) \tag{29}$$

gdzie

$$\Phi_1 = \sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_n \nu_1 y}}{n}(\nu_1 \cos \nu_2 \alpha_n y - \nu_2 \sin \nu_2 \alpha_n y)\sin \alpha_n \zeta \sin \alpha_n x$$

$$\Phi_2 = \sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_n \nu_1 y}}{n}(\nu_2 \cos \nu_2 \alpha_n y + \nu_1 \sin \nu_2 \alpha_n y)\sin \alpha_n \zeta \sin \alpha_n x. \tag{30}$$

Ze wzorów (16) przy użyciu związków (29) otrzymamy

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{P}{2\pi \varepsilon^2 D_y}\cdot\frac{\Phi_2}{\nu_1 \nu_2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{P}{2\pi D_y \varepsilon^2}\left(\Phi_1 - \Phi_2\frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{2\nu_1 \nu_2}\right). \tag{31}$$

*) A. Nadai: Elastische Platten 1925 str. 95.

Po prostych przekształceniach wzory powyższe przyjmują szczególnie prostą postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -\frac{P}{2\pi\varepsilon^2 D_y}\left(\frac{J}{\nu_2}+\frac{H}{\nu_1}\right) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{P}{2\pi D_y}\left(-\frac{J}{\nu_2}+\frac{H}{\nu_1}\right), \end{aligned} \tag{32}$$

gdzie

$$J=\sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty}\frac{e^{-\frac{n\pi\nu_1 y}{a}}}{n}\sin\frac{n\pi\nu_2 y}{a}\sin\frac{n\pi\zeta}{a}\sin\frac{n\pi x}{a} \tag{33}$$

$$H=\sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty}\frac{e^{-\frac{n\pi\nu_1 y}{a}}}{n}\cos\frac{n\pi\nu_2 y}{a}\sin\frac{n\pi\zeta}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}. \tag{34}$$

Ostatnie związki można przedstawić przy pomocy wzorów zamkniętych.

Iloczyn sinusów w szeregu (33) daje się przedstawić w postaci sumy sinusów o argumentach $\alpha_n \eta_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$, gdzie

$$\eta_1=-\nu_2 y-x+\zeta, \quad \eta_2=\nu_2 y-x-\zeta,$$

$$\eta_3=x-\zeta-\nu_2 y, \quad \eta_4=\nu_2 y+x+\zeta.$$

Korzystając ze wzorów

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin\vartheta}{1-r\cos\vartheta}=-\sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty}\frac{r^n}{n}\sin n\vartheta \tag{35}$$

przekształcimy szereg (33) na

$$J=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{i=4}\operatorname{arc\,tg}\frac{e^{-\alpha\nu_1 y}\sin\alpha\eta_i}{1-e^{-\alpha\nu_1 y}\cos\alpha\eta_i}. \tag{36}$$

$$\alpha=\pi/a$$

W szeregu (34) można iloczyn sinusów wyrazić przez sumę dwóch iloczynów zawierających sinusy.

Szereg (34) będzie sumą dwóch szeregów typu (10), które dadzą się wyrazić przy pomocy wzorów zamkniętych.

Otrzymamy tu

$$H=\frac{1}{8}\ln\left[\frac{(\cosh\alpha\nu_1 y-\cos\alpha\eta_4)\,(\cosh\alpha\nu_1 y-\cos\alpha\eta_2)}{(\cosh\alpha\nu_1 y-\cos\alpha\eta_1)\,(\cosh\alpha\nu_1 y-\cos\alpha\eta_3)}\right]. \tag{37}$$

Powyższe wyniki pozwalają na wyznaczenie momentów zginających i sił tnących ze wzorów zamkniętych.

Również i momenty skręcające dadzą wyrazić się przy pomocy wzorów zamkniętych. Jak wiadomo wyznacza się je ze wzoru

$$m_{xy}=-2C\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}. \tag{38}$$

Dla $\varrho>1$ mamy:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}=\frac{P}{\pi(\beta^2-\lambda^2)D_y}\sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n}\left(e^{-\alpha_n\beta y}-e^{-\alpha_n\lambda y}\right)\sin\alpha_n\zeta\cdot\cos\alpha_n x. \tag{39}$$

Korzystając ze związku (35) otrzymamy po prostych przekształceniach

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}=\frac{P}{2\pi(\beta^2-\lambda^2)D_y}\left\{\operatorname{arc}tg\frac{e^{-\alpha\lambda y}\sin\alpha(\xi+x)}{1-e^{-\alpha\lambda y}\sin\alpha(\xi+x)}+\right.$$

$$+\operatorname{arc}tg\frac{e^{-\alpha\lambda y}\sin\alpha(\xi-x)}{1-e^{-\alpha\lambda y}\sin\alpha(\xi-x)}-\operatorname{arc}tg\frac{e^{-\alpha\beta y}\sin\alpha(\xi+x)}{1-e^{-\alpha\beta y}\sin\alpha(\xi+x)}- \tag{40}$$

$$\left.-\operatorname{arc}tg\frac{e^{-\alpha\beta y}\sin\alpha(\xi-x)}{1-e^{-\alpha\beta y}\sin\alpha(\xi-x)}\right\}$$

gdzie $\alpha=\frac{\pi}{a}$.

Dla $\varrho<1$ znajdziemy

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}=-\frac{P}{2\pi\nu_1\nu_2 D_y}\sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty}\frac{e^{-\nu_1\alpha_n y}}{n}\sin\alpha_n\nu_2 y\sin\alpha_n\xi\cdot\cos\alpha_n x \tag{41}$$

Powyższe wyrażenie przekształcimy podobnie jak wyrażenie (34). Otrzymamy tu

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{P}{16 \pi \nu_1 \nu_2 D_y} \times$$

$$\times \ln \frac{\left[\cosh \frac{\pi \nu_1 y}{a} - \cos \frac{\pi}{a}(\nu_2 y - \xi - x)\right]\left[\cosh \frac{\pi \nu_1 y}{a} - \cos \frac{\pi}{a}(\nu_2 y - \xi + x)\right]}{\left[\cosh \frac{\pi \nu_1 y}{a} - \cos \frac{\pi}{a}(\nu_2 y + \xi + x)\right]\left[\cosh \frac{\pi \nu_1 y}{a} - \cos \frac{\pi}{a}(\nu_2 y + \xi - x)\right]} \tag{42}$$

Wreszcie dla $\varrho = 1$ mamy:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{P \cdot y}{2 \varepsilon a D_y} \sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty} e^{-\alpha_n \varepsilon y} \cdot \sin \alpha_n \xi \cdot \cos \alpha_n x . \tag{43}$$

Zważywszy, że według wzoru (22)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{P \cdot y}{\varepsilon \cdot a \cdot D_y} \sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty} e^{-\alpha_n \varepsilon y} \cdot \sin \alpha_n \xi \cdot \cos \alpha_n x \tag{44}$$

zatem

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} y \frac{\partial \Phi}{\partial x} . \tag{45}$$

Zauważmy jeszcze, że na prostej $x=0$ momenty skręcające będą równe zeru bez względu na wartość ϱ.

Dla obciążenia $P=1$, działającego w punkcie (ζ, η) można w myśl twierdzenia o wzajemności przesunięć Maxwell'a — Bettiego traktować powierzchnię momentów M_x, M_y, M_{xy} i sił tnących T_{xz}, T_{yz} wywołaną tym obciążeniem jako powierzchnię wpływową dla siły $P=1$ posuwającej się w obrębie płyty.

Oznaczmy powierzchnie wpływową dowolnej wielkości statycznej przez $K(x, y; \zeta, \eta)$. Przy zadanym obciążeniu $p(x, y)$ rozłożonym na obszarze A płyty otrzymamy wartość tej wielkości ze wzoru

$$K(\zeta, \eta) = \int_A K(x, y; \zeta, \eta)\, dx\, dy . \tag{46}$$

Plaque en bande orthrotrope

Résumé

Ce mémoire traite d'un cas de plaque en bande orthrotrope, sollicitée par une poids concentrée. L'équation différentielle de la surface de flexion de ladite plaque, équation quasi-biharmonique y a été remplacée par un système de deux équations quasiharmoniques. Ces dernières équations peuvent prendre la forme d'expressions fermées; quant à leurs solutions, celles-ci peuvent être utilisées pour déterminer les moments fléchissants en expressions également fermées.

(Praca wpłynęła do Redakcji dnia 2. IV. 1951 r.).