POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET BUDOWY MASZYN

ARCHIWUM BUDOWY MASZYN

KWARTALNIK

TOM IV · ZESZYT 4

WARSZAWA 1957
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

A R C H I W U M   B U D O W Y   M A S Z Y N

TOM IV   1957   ZESZYT 4

WITOLD NOWACKI

Warszawa

STAN NAPRĘŻEŃ WYWOŁANY W PÓŁPRZESTRZENI SPRĘŻYSTEJ DZIAŁANIEM CHWILOWEGO ŹRÓDŁA CIEPŁA*)

Rozpatrzono stan naprężenia występujący w półprzestrzeni sprężystej wywołany działaniem chwilowego źródła ciepła umieszczonego w płaszczyźnie ograniczającej tę półprzestrzeń. Zagadnienie rozpatrzono jako quasi-statyczne. Wzięto pod uwagę stan naprężenia w półprzestrzeni sprężystej izolowanej termicznie w płaszczyźnie ograniczającej ($z = 0$) oraz w przypadku, gdy w tej płaszczyźnie panuje stała temperatura $T = 0$. W końcu rozpatrzono stan naprężenia wywołany działaniem ciągłego w czasie źródła ciepła.

1. Ogólne ujęcie zagadnienia

Niech dana będzie izotropowa i jednorodna półprzestrzeń ograniczona płaszczyzną $z = 0$. Niech w płaszczyźnie tej w początku układu współrzędnych działa skupione chwilowe źródło ciepła. Wywoła ono w półprzestrzeni sprężystej pole temperatury T i stan naprężenia σ_{ij} jako funkcje miejsca i czasu. Rozwiązanie traktować należy jako wyznaczenie funkcji Greena dla zagadnienia ogólniejszego, a mianowicie dla działania rozmieszczonych w obszarze Γ płaszczyzny $z = 0$ źródeł ciągłych w czasie. W przypadku źródeł ciągłych nie zmieniających się w sposób nagły w czasie można traktować stan naprężenia jako quasi-statyczny. Założymy więc, że w równaniach podstawowych teorii sprężystości pominąć można człony inercyjne. Przyjmiemy dalej, że płaszczyzna $z = 0$ jest wolna od naprężeń oraz że w nieskończoności powinny znikać składowe stanu naprężenia w dowolnej chwili t.

Rozpatrzymy dwa warunki brzegowe natury termicznej. Przyjmiemy raz, że płaszczyzna $z = 0$ jest izolowana termicznie ($\partial T/\partial z = 0$), a drugi raz, że w płaszczyźnie $z = 0$ temperatura $T = 0$ (z wyłączeniem punktu przyłożenia źródła cieplnego).

*) Praca przedstawiona na zebraniu naukowym Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych I.P.P.T. PAN w dniu 28 stycznia 1957 r.

2. Półprzestrzeń sprężysta w płaszczyźnie termicznie izolowana

Jeśli w nieograniczonej przestrzeni sprężystej umieścić źródło chwilowe ciepła, to pole temperatur opisane będzie związkiem[1])

$$T = \frac{W}{(\pi\vartheta)^{3/2}} e^{-R^2/\vartheta}, \tag{1}$$

gdzie

$$R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \qquad \vartheta = 4kt,$$

$$W = \frac{Q}{\varrho c}, \qquad k = \frac{\lambda}{\varrho c},$$

Q — ilość ciepła wydzielonego przez źródło ciepła na jednostkę czasu,
ϱ — gęstość,
c — ciepło właściwe,
λ — przewodnictwo cieplne.

Łatwo zauważyć, że dla $z = 0$ pochodna $\partial T/\partial z = 0$. Tak więc wzór (1) określa zarazem pole temperatury dla półprzestrzeni sprężystej w płaszczyźnie $z = 0$ termicznie izolowanej. W celu wyznaczenia składowych stanu naprężenia $\bar{\sigma}_{ij}$ w przestrzeni sprężystej nieograniczonej posłużymy się potencjałem termosprężystego przemieszczenia Φ. Funkcja ta związana jest ze składowymi stanu przemieszczenia związkami

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial\Phi}{\partial z}, \tag{2}$$

a z polem temperatury [2]) równaniem

$$\nabla^2\Phi = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t T, \tag{3}$$

gdzie

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

ν — liczba Poissona,
α_t — współczynnik termicznej rozszerzalności liniowej.

Znajomość funkcji Φ daje możność wyznaczenia składowych stanu naprężenia $\bar{\sigma}_{ij}$ z wzorów

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2G\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial i\,\partial j} - \nabla^2\Phi\,\delta_{ij}\right), \quad i,j = x,y,z, \tag{4}$$

gdzie: σ_{ij} — symbol Kronneckera,
G — moduł odkształcenia postaciowego.

Zauważmy, że pole temperatury T można przedstawić za pomocą współrzędnych walcowych całką Fourier—Hankela

$$T(r,z,t) = \frac{W}{2\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r)\exp[-kt(\alpha^2+\beta^2)]\cos\beta z\, d\alpha\, d\gamma, \tag{5}$$

gdzie $$r = (x^2+y^2)^{1/2}.$$

Stosując do tego związku transformację Laplace'a otrzymamy

$$L(T) = T^* = \int_0^\infty e^{-pt}\, T(r,z,t)\, dt = \tag{6}$$
$$= \frac{W}{2\pi^2 k}\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r)\left(\alpha^2+\beta^2+\frac{p}{k}\right)^{-1}\cos\beta z\, d\alpha\, d\beta.$$

Stosując do równania (3) transformację Laplace'a i wyznaczając funkcję Φ^* za pomocą całki Fourier—Hankela znajdujemy, że

$$\Phi^* = -\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t\frac{W}{2\pi^2 k}\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r)\left[\left(\alpha^2+\beta^2+\right.\right. \tag{7}$$
$$\left.\left.+\frac{p}{k}\right)(\alpha^2+\beta^2)\right]^{-1}\cos\beta z\, d\alpha\, d\beta$$

albo, po wykonaniu całkowań,

$$\Phi^* = -\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\alpha_t W}{4\pi R}\left\{1-\exp\left[-\left(\frac{p}{k}\right)^{1/2}R\right]\right\}p^{-1}. \tag{8a}$$

Wykonując odwrotną transformację Laplace'a otrzymamy

$$\Phi = -\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\alpha_t W}{4\pi R}\operatorname{Erf}\frac{R}{\sqrt{\vartheta}}, \tag{8b}$$

gdzie $$\operatorname{Erf}\frac{R}{\sqrt{\vartheta}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{R/\sqrt{\vartheta}} e^{-\eta^2}\, d\eta.$$

Korzystając ze związków (4) znajdziemy, że [3])

$$\bar{\sigma}_{rr} = -2G\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) = -K\frac{1}{R^3}\left\{\left(2-\frac{3z^2}{R^2}\right)\operatorname{Erf}\frac{R}{\sqrt{\vartheta}}+\right.$$
$$\left.-\frac{2Re^{-R^2/\vartheta}}{\sqrt{\pi\vartheta}}\left[2-\frac{3z^2}{R^2}\left(1+\frac{2}{3}\frac{R^2}{\vartheta}\right)\right]\right\},$$

$$
(9)\quad
\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{\varphi\varphi} &= -2G\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}\right)=\frac{K}{R^3}\left[\operatorname{Erf}\frac{R}{\sqrt{\vartheta}}-\frac{2Re^{-R^2/\vartheta}}{\sqrt{\pi\vartheta}}\left(1+\frac{2R^2}{\vartheta}\right)\right],\\
\bar{\sigma}_{zz} &= -2G\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)=-\frac{K}{R^3}\left\{\left(2-\frac{3r^2}{R^2}\right)\operatorname{Erf}\frac{R}{\sqrt{\vartheta}}+\right.\\
&\qquad\left.-\frac{2Re^{-R^2/\vartheta}}{\sqrt{\pi\vartheta}}\left[2-\frac{3r^2}{R^2}\left(1+\frac{2}{3}\frac{R^2}{\vartheta}\right)\right]\right\},\\
\bar{\sigma}_{rz} &= 2G\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r\,\partial z}=\frac{3Krz}{R^5}\left[\operatorname{Erf}\frac{R}{\sqrt{\vartheta}}-\frac{2Re^{-R^2/\vartheta}}{\sqrt{\pi\vartheta}}\left(1+\frac{2}{3}\frac{R^2}{\vartheta}\right)\right],
\end{aligned}
$$

gdzie

$$K=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t\frac{WG}{2\pi}.$$

Zauważmy, że w płaszczyźnie $z=0$ znika naprężenie $\bar{\sigma}_{rz}$, natomiast różnym od zera jest naprężenie $\bar{\sigma}_{zz}$. W celu zniesienia występującego w płaszczyźnie $z=0$ naprężenia $\bar{\sigma}_{zz}$ należy do składowych stanu naprężenia $\bar{\sigma}_{ij}$ dodać składowe stanu $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$. Te ostatnie otrzymamy rozwiązując zadanie przestrzenne, w którym należy wyznaczyć w półprzestrzeni sprężystej stan naprężenia $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$ wywołany działaniem naprężenia $-\bar{\sigma}_{zz}|_{z=0}$, działającego w płaszczyźnie $z=0$, ograniczającej rozpatrywaną półprzestrzeń sprężystą. Do wyznaczenia stanu naprężenia $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$ posłuży funkcja Love'a φ, która powinna spełniać równanie biharmoniczne[4)]

$$(10)\qquad \nabla^2\nabla^2\varphi=0$$

z warunkami brzegowymi

$$(11)\qquad \bar{\sigma}_{zz}+\bar{\bar{\sigma}}_{zz}\big|_{z=0}=0,\qquad \bar{\bar{\sigma}}_{rz}\big|_{z=0}=0\quad\text{oraz}$$

$$\varphi=0 \text{ w nieskończoności.}$$

Po określeniu funkcji φ wyznaczymy składowe stanu naprężenia $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$ z wzorów

$$
(12)\quad
\begin{aligned}
\bar{\bar{\sigma}}_{rr} &= \frac{2G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right),\\
\bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi} &= \frac{2G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2\varphi-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right),\\
\bar{\bar{\sigma}}_{zz} &= \frac{2G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\nu)\nabla^2\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right],\\
\bar{\bar{\sigma}}_{rz} &= \frac{2G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\nu)\nabla^2\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right].
\end{aligned}
$$

Jeżeli funkcję φ przyjmiemy w postaci

$$\varphi = \int_0^\infty Z(\alpha, z, t) J_0(\alpha r)\, d\alpha, \tag{13}$$

gdzie

$$Z = (C + D\alpha z)\, e^{-\alpha z},$$

przy czym z warunku brzegowego $\bar{\bar{\sigma}}_{rz}\big|_{z=0} = 0$ wynika, że $C = 2\nu D$, to składowe naprężenia $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$ możemy przedstawić wzorami o postaci całkowej

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{\sigma}}_{rr} &= \frac{2G}{1-2\nu} \int_0^\infty D(\alpha, t)\, \alpha^3 e^{-\alpha z} \Big[(1 - \alpha z) J_0(\alpha r) + \\
&\quad + (2\nu - 1 + \alpha z) \frac{J_1(\alpha r)}{\alpha r}\Big] d\alpha, \\
\bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi} &= \frac{2G}{1-2\nu} \int_0^\infty D(\alpha, t)\, \alpha^3 e^{-\alpha z} \Big[2\nu J_0(\alpha r) + \\
&\quad - (2\nu - 1 + \alpha z) \frac{J_1(\alpha r)}{\alpha r}\Big] d\alpha, \\
\bar{\bar{\sigma}}_{zz} &= \frac{2G}{1-2\nu} \int_0^\infty D(\alpha, t)\, \alpha^3 e^{-\alpha z} (1 + \alpha z) J_0(\alpha r)\, d\alpha, \\
\bar{\bar{\sigma}}_{rz} &= \frac{2G}{1-2\nu} \int_0^\infty D(\alpha, t)\, \alpha^4 e^{-\alpha z} J_1(\alpha r)\, d\alpha.
\end{aligned} \tag{14}$$

Wielkość $D(\alpha, t)$, jako funkcję parametru α i czasu t, wyznaczymy z pierwszego warunku brzegowego grupy (11). Wykonując transformację odwrotną Laplace'a na funkcji Φ^* [wzór (7)] otrzymamy

$$\begin{aligned}
\Phi &= -\frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_t \frac{W}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r)(\alpha^2 + \\
&\quad + \beta^2)^{-1} \exp[-kt(\alpha^2 + \beta^2)] \cos \beta z\, d\alpha\, d\beta.
\end{aligned} \tag{15}$$

Po wykonaniu całkowania względem parametru β otrzymamy

$$\Phi = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_t \frac{W}{8\pi} \int_0^\infty J_0(\alpha r) \Big[e^{-\alpha z} \operatorname{Erfc}\Big(\frac{\alpha \sqrt{\vartheta}}{2} +$$

(16)

$$- \frac{z}{\sqrt{\vartheta}}\Big) + e^{\alpha^2} \operatorname{Erfc}\left(\frac{\alpha\sqrt{\vartheta}}{2} + \frac{z}{e\sqrt{\vartheta}}\right)\Bigg] \cdot d\alpha .$$

Z pierwszego warunku brzegowego grupy (11), który można przedstawić w postaci

$$-2G\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\Bigg|_{z=0} + \frac{2G}{1-2\nu}\int\limits_0^\infty D(\alpha, t)\alpha^3 J_0(\alpha r)\, d\alpha = 0, \tag{17}$$

uzyskamy

$$D(\alpha, t) = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t \frac{W}{4\pi}(1-2\nu)\alpha^{-1}\operatorname{Erfc}\frac{\alpha\sqrt{\vartheta}}{2}. \tag{18}$$

Tym samym określone są składowe stanu naprężenia $\overset{=}{\sigma}_{ij}$ na podstawie wzorów (14). Ostateczny stan naprężenia σ_{ij} wyznaczymy przez superpozycję stanów $\bar{\sigma}_{ij}$ oraz $\overset{=}{\sigma}_{ij}$. Niestety, składowe stanu $\overset{=}{\sigma}_{ij}$ nie dadzą się przedstawić w postaci zamkniętej za pomocą znanych i stabularyzowanych funkcji.

Rozważmy przypadek źródła ciągłego w czasie. Niech w czasie od $t = 0$ do $t = t$ będzie wyzwolona ilość ciepła $W(t)\varrho c$ na jednostkę czasu. Funkcje temperatury oraz składowych stanu naprężenia przyjmą postać

$$\begin{aligned} T(r, z, t) &= (\pi k)^{-3/2}\int\limits_0^t W(t')\, e^{-R^2/4k(t-t')}(t-t')^{-3/2}\, dt', \\ \sigma_{ij}(r, z, t) &= \int\limits_0^t W(t')\, \sigma_{ij}^*(r, z, t-t')\, dt', \end{aligned} \tag{19}$$

gdzie σ_{ij}^* oznacza naprężenie wywołane jednostkowym chwilowym źródłem ciepła.

Rozpatrzmy przypadek szczególny, gdy $W(t) = \text{const}$. Wtedy pole temperatury wyrazi się wzorem

$$T(r, z, t) = \frac{W}{4\pi kR}\left(1 - \operatorname{Erf}\frac{R}{\sqrt{\vartheta}}\right). \tag{20}$$

Funkcję Φ możemy przedstawić w postaci całkowej

$$\begin{aligned} \Phi = -\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t \frac{W}{2\pi^2 k}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \alpha J_0(\alpha r)\, [1 + \\ - e^{-kt(\alpha^2+\beta^2)}]\, (\alpha^2+\beta^2)^{-2}\cos\beta z\, d\alpha\, d\beta \end{aligned} \tag{21}$$

albo

$$\Phi = \frac{1+\nu}{1-\nu} a_t \frac{WR}{8\pi k}\left[1 - \left(1 + \frac{\vartheta}{2R^2}\right)\operatorname{Erf}\frac{R}{\sqrt{\vartheta}} + \right. \tag{22}$$
$$\left. - \frac{1}{R}\sqrt{\frac{\vartheta}{\pi}}\exp\left(-\frac{R^2}{\vartheta}\right)\right].$$

Naprężenia $\bar{\sigma}_{ij}$ można wyznaczyć z wzorów (4), wielkość zaś $D(\alpha, t)$ z pierwszego warunku brzegowego grupy (11) w postaci

$$D(\alpha, t) = \frac{1+\nu}{1-\nu} a_t \frac{W}{8\pi k} \frac{1-2\nu}{\alpha^3}[1 - F(\alpha, t)], \tag{23}$$

gdzie

$$F(\alpha, t) = \frac{4\alpha^3 e^{-kt\alpha^2}}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-kt\beta^2}\, d\beta}{(\alpha^2+\beta^2)^2} =$$
$$= 2\alpha e^{-kt\alpha^2}\sqrt{\frac{kt}{\pi}} + (1 - 2\alpha^2 kt)\operatorname{Erfc}(\alpha\sqrt{kt}).$$

W przypadku granicznym, gdy $t \to \infty$, mamy do czynienia ze źródłem ustalonym. Przechodząc do granicy otrzymamy stąd

$$T_\infty(r,z) = \frac{W}{4\pi kR}, \quad \Phi_\infty(r,z) = \frac{1+\nu}{1-\nu} a_t \frac{WR}{8\pi k}, \tag{24}$$
$$D_\infty(\alpha) = \frac{1+\nu}{1-\nu} a_t \frac{W}{4\pi k}\frac{1-2\nu}{\alpha^3}.$$

Korzystając ze związków (4) otrzymujemy składowe stanu naprężenia

$$\bar{\sigma}_{rr}^{(\infty)} = -\frac{K}{2R}\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right), \quad \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(\infty)} = -\frac{K}{2R}, \tag{25}$$
$$\bar{\sigma}_{zz}^{(\infty)} = -\frac{K}{2R}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right), \quad \bar{\sigma}_{rz}^{(\infty)} = -\frac{Krz}{2R^3}.$$

Składowe stanu naprężenia $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$ uzyskamy z wzorów (14), przy czym dają się one wyrazić w sposób zamknięty wzorami

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rr}^{(\infty)} = -\frac{K}{2}\left[\frac{z^2}{R^3} - \frac{2}{R} + 2(1-\nu)\frac{1}{R+z}\right],$$
$$\bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi}^{(\infty)} = \frac{K}{2}\left[\frac{1}{R} + 2(1-\nu)\left(\frac{1}{R+z} - \frac{1}{R}\right)\right], \tag{26}$$
$$\bar{\bar{\sigma}}_{zz}^{(\infty)} = \frac{K}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{z^2}{R^3}\right), \quad \bar{\bar{\sigma}}_{rz}^{(\infty)} = \frac{K}{2}\frac{rz}{R^3}.$$

Dodając do siebie składowe stanów naprężenia $\bar{\sigma}_{ij}$ i $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$ otrzymamy naprężenia ostateczne

$$(27)\qquad \begin{gathered} \sigma_{rr}^{(\infty)} = -(1-\nu)K(R+z)^{-1}, \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{(\infty)} = K(1-\nu)\left(\frac{1}{R+z} - \frac{1}{R}\right), \\ \sigma_{zz}^{(\infty)} = 0, \quad \sigma_{rz}^{(\infty)} = 0. \end{gathered}$$

Przypadek ustalonego źródła ciepła prowadzi do nader interesującego wyniku. Składowe stanu naprężenia $\sigma_{zz}^{(\infty)}$ i $\sigma_{rz}^{(\infty)}$ są mianowice równe zeru dla dowolnego punktu półprzestrzeni sprężystej. To stwierdzenie jest słuszne również dla źródeł dowolnie rozłożonych w płaszczyźnie. Wynik taki uzyskali wcześniej E. Melana i H. Parcus[2] innym sposobem.

Zauważmy, wracając do ciągłego źródła ciepła o stałej intensywności W, że funkcje T, Φ oraz σ_{ij} tam występujące możemy przedstawić w postaci

$$(28)\qquad \begin{gathered} T = T_\infty - T_1, \qquad \Phi = \Phi_\infty - \Phi_1, \qquad D = D_\infty - D_1, \\ \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(\infty)} - \sigma_{ij}^{(1)}, \end{gathered}$$

gdzie funkcje T_1, Φ_1, D_1 i $\sigma_{ij}^{(1)}$ zależą od czasu i miejsca, podczas gdy wielkości T_∞, Φ_∞, D_∞ i $\sigma_{ij}^{(\infty)}$ są niezależne od czasu. Dla naprężeń σ_{rz} i σ_{zz} otrzymamy

$$(29)\qquad \sigma_{rz} = -\sigma_{rz}^{(1)}, \qquad \sigma_{zz} = -\sigma_{zz}^{(1)}.$$

Naprężenia te znikają dla $t = \infty$ przyjmując dla określonej chwili t_0 wartości maksymalne.

3. Półprzestrzeń sprężysta, której płaszczyzna ograniczająca $z = 0$ utrzymana jest w stałej temperaturze $T = 0$

Rozwiązanie tego przypadku uzyskać można bezpośrednio z rozpatrywanego poprzednio. Niech w przestrzeni nieograniczonej działa w początku układu współrzędnych chwilowe dipolowe źródło ciepła o wydajności W. Wtedy korzystając z wzorów (1) otrzymamy

$$(30)\qquad T(r,z,t) = -\frac{W}{(\pi\vartheta)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{-R^2/\vartheta}\right) = \frac{2Wz}{(\pi\vartheta)^{3/2}}e^{-R^2/\vartheta}.$$

Widoczne jest, że w płaszczyźnie $z = 0$ spełniony jest warunek $T = 0$.

Korzystając z wzoru (8b) uzyskamy

$$
\begin{aligned}
\Phi(r,z,t) &= -\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t \frac{W}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left(R^{-1}\operatorname{Erf}\frac{R}{\sqrt{\vartheta}}\right) = \\
&= \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t \frac{W}{4\pi}\frac{z}{R^3}\left(\operatorname{Erf}\frac{R}{\sqrt{\vartheta}} - \frac{2Re^{-R^2/\vartheta}}{\sqrt{\pi\vartheta}}\right).
\end{aligned} \tag{31}
$$

Znajomość funkcji Φ daje już możność wyznaczenia składowych stanu naprężenia $\bar{\sigma}_{ij}$ na podstawie wzorów (4). Składowe te otrzymamy również bezpośrednio z wzorów (9) wykonując na nich operację $\partial/\partial z$. Uzyskamy w ten sposób kolejno

$$
\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{rr} &= -\frac{2Kz}{R^5}\left\{3\left(4-\frac{5z^2}{R^2}\right)\left(\operatorname{Erf}\frac{R}{\sqrt{\vartheta}} - \frac{2R}{\sqrt{\pi\vartheta}}e^{-R^2/\vartheta}\right) + \right. \\
&\quad \left. - \frac{4R^3}{\vartheta\sqrt{\pi\vartheta}}e^{-R^2/\vartheta}\left[4-\frac{z^2}{R^2}\left(5+\frac{2R^2}{\vartheta}\right)\right]\right\}, \\
\bar{\sigma}_{\varphi\varphi} &= \frac{2Kz}{R^5}\left[3\left(\operatorname{Erf}\frac{R}{\sqrt{\vartheta}} - \frac{2Re^{-R^2/\vartheta}}{\sqrt{\pi\vartheta}}\right) - \frac{4R^3e^{-R^2/\vartheta}}{\vartheta\sqrt{\pi\vartheta}}\left(1+\frac{2}{\vartheta}R^2\right)\right], \\
\bar{\sigma}_{zz} &= -\frac{6Kz}{R^5}\left\{\left(2-\frac{5z^2}{R^2}\right)\operatorname{Erf}\frac{R}{\sqrt{\vartheta}} + \frac{3e^{-R^2/\vartheta}}{\sqrt{\pi\vartheta}}\left(\frac{5r^2}{R^2}-2\right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{4R^3e^{-R^2/\vartheta}}{3\vartheta\sqrt{\pi\vartheta}}\left[\frac{r^2}{R^2}\left(5+\frac{2}{\vartheta}R^2\right)-2\right]\right\}, \\
\bar{\sigma}_{rz} &= \frac{6Kr}{R^5}\left\{\left(1-\frac{5z^2}{R^2}\right)\left(\operatorname{Erf}\frac{R}{\sqrt{\vartheta}} - \frac{2Re^{-R^2/\vartheta}}{\sqrt{\pi\vartheta}}\right) + \right. \\
&\quad \left. - \frac{4Re^{-R^2/\vartheta}}{3\vartheta\sqrt{\pi\vartheta}}\left[1-\frac{z^2}{R^2}\left(5+\frac{2}{\vartheta}R^2\right)\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{32}
$$

Dla $z=0$ znika naprężenie $\bar{\sigma}_{zz}$, nie znika jednak składowa $\bar{\sigma}_{rz}$. Dodatkowe składowe stanu naprężenia $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$ otrzymamy z rozwiązania równania Love'a (10) z warunkami brzegowymi

$$
\bar{\bar{\sigma}}_{zz}\Big|_{z=0} = 0, \qquad \bar{\sigma}_{rz} + \bar{\bar{\sigma}}_{rz}\Big|_{z=0} = 0 \quad \text{oraz} \tag{33}
$$

$$
\varphi = 0 \text{ w nieskończoności.}
$$

Przyjmując funkcję φ w postaci (13), przy czym ze względu na pierwszy warunek brzegowy grupy (33) wstawiamy $C = -D\ (1-2\nu)$, możemy składowe stanu naprężenia $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$ opisać całkami

$$
(34)\quad
\begin{aligned}
\bar{\bar{\sigma}}_{rr} &= \frac{2G}{1-2\nu}\int_0^\infty D(\alpha,t)\,\alpha^3 e^{-\alpha z}\Big[(2-\alpha z)\,J_0(\alpha r) + \\
&\qquad + (2\nu-2+\alpha z)\frac{J_1(\alpha r)}{\alpha r}\Big]\,d\alpha\,,\\
\bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi} &= \frac{2G}{1-2\nu}\int_0^\infty D(\alpha,t)\,\alpha^3 e^{-\alpha z}\Big[2\nu J_0(\alpha r) + \\
&\qquad - (2\nu-2+\alpha z)\frac{J_1(\alpha r)}{\alpha r}\Big]\,d\alpha\,,\\
\bar{\bar{\sigma}}_{zz} &= \frac{2G}{1-2\nu}\,z\int_0^\infty D(\alpha,t)\,\alpha^4 e^{-\alpha z}\,J_0(\alpha r)\,d\alpha\,,\\
\bar{\bar{\sigma}}_{rz} &= -\frac{2G}{1-2\nu}\int_0^\infty D(\alpha,t)\,\alpha^3 e^{-\alpha z}(1-\alpha z)\,J_1(\alpha r)\,d\alpha\,.
\end{aligned}
$$

W celu wyznaczenia wielkości $D(\alpha, t)$ wygodnie będzie przedstawić funkcję Φ w postaci całkowej

$$
(35)\quad
\begin{aligned}
\Phi = &-\frac{1+\nu}{1-\nu}\,\alpha_t\,\frac{W}{2\pi^2 k}\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha\beta J_0(\alpha r)\,(\alpha^2 + \\
&+\beta^2)^{-1}\exp[-kt(\alpha^2+\beta^2)]\sin\beta z\,d\alpha\,d\beta\,.
\end{aligned}
$$

Postać tę otrzymamy, jeśli do funkcji Φ^* wyrażonej wzorem (7) zastosujemy odwrotną transformację Laplace'a, a następnie wykonamy operacje $\partial/\partial z$.

Funkcję Φ możemy wyrazić również związkiem

$$
(36)\quad
\begin{aligned}
\Phi = &-\frac{1+\nu}{1-\nu}\,\alpha_t\,\frac{W}{8\pi k}\int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r)\Big[e^{-\alpha z}\operatorname{Erfc}\Big(\frac{\alpha\sqrt{\vartheta}}{2}-\frac{z}{\sqrt{\vartheta}}\Big) + \\
&- e^{\alpha z}\operatorname{Erfc}\Big(\frac{\alpha\sqrt{\vartheta}}{2}+\frac{z}{\sqrt{\vartheta}}\Big)\Big]\,d\alpha\,.
\end{aligned}
$$

Z drugiego warunku brzegowego grupy (33), który przedstawimy związkiem

$$2G\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z}\bigg|_{z=0} - \frac{2G}{1-2\nu}\int_0^\infty D(\alpha,t)\,\alpha^3 J_1(\alpha r)\,d\alpha = 0\,, \tag{37}$$

uzyskamy

$$D(\alpha,t) = \frac{1+\nu}{1-\nu}(1-2\nu)\,a_t\frac{W}{4\pi}\operatorname{Erfc}\frac{\alpha\sqrt{\vartheta}}{2}\,.$$

Tym samym określone są składowe stanu naprężenia $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$. Niestety nie dają się one przedstawić w postaci zamkniętej. Ostateczne naprężenia otrzymamy przez dodanie naprężeń $\bar{\sigma}_{ij}$ i $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$.

Rozpatrzmy jeszcze przypadek działania ciągłego źródła ciepła o stałej wydajności W.

W tych warunkach otrzymamy

$$T(r,z,t) = \frac{W}{4\pi k}\,\frac{z}{R^3}\left[1 - \operatorname{Erf}\frac{R}{\sqrt{\vartheta}} + \frac{4R^2}{\sqrt{\pi\vartheta}}\,e^{-R^2/\vartheta}\right] \tag{38}$$

oraz

$$\Phi(r,z,t) = -\frac{1+\nu}{1-\nu}a_t\frac{W}{8\pi k}\,\frac{z}{R}\left[1-\left(1-\frac{\vartheta}{2R^2}\right)\operatorname{Erfc}\frac{R}{\sqrt{\vartheta}} + \right. \tag{39}$$

$$\left. -\frac{1}{R}\sqrt{\frac{\vartheta}{\pi}}\,e^{-R^2/\vartheta}\right].$$

Przyjmując funkcję Φ w postaci

$$\Phi = -\frac{1+\nu}{1-\nu}a_t\frac{W}{2\pi^2 k}\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha\beta J_0(\alpha r)\,[1 + \tag{40}$$

$$-e^{-kt(\alpha^2+\beta^2)}]\,(\alpha^2+\beta^2)^{-2}\sin\beta z\,d\alpha\,d\beta\,,$$

możemy wyrazić wielkość $D(\alpha,t)$ z drugiego warunku brzegowego (33) wzorem

$$D(\alpha,t) = \frac{1+\nu}{1-\nu}(1-2\nu)\,a_t\frac{W}{8\pi k}\,\alpha^{-2}[1-F(\alpha,t)]\,, \tag{41}$$

gdzie

$$F(\alpha,t) = \frac{4\alpha}{\pi}\,e^{-kt\alpha^2}\int_0^\infty\frac{\beta^2 e^{-kt\beta^2}}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\,d\beta = \tag{42}$$

$$= (1+2\alpha^2 kt)\operatorname{Erfc}(\alpha\sqrt{kt}) - 2\alpha e^{-kt\alpha^2}\sqrt{\frac{kt}{\pi}}\,.$$

Tym samym określone są składowe stanu naprężenia $\overline{\overline{\sigma}}_{ij}$, które wyznaczymy z wzorów (34).

Wstawiając do wzorów (38) i (39) $t = \infty$ otrzymamy funkcję dla przypadku ustalonego źródła ciepła

$$(43) \qquad T_{\infty}(r,z) = \frac{W}{4\pi k}\frac{z}{R^3}, \quad \Phi_{\infty}(r,z) = -\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t \frac{W}{8\pi k}\frac{z}{R}.$$

W tym szczególnym przypadku ustalonego źródła ciepła można wyznaczyć w postaci zamkniętej wszelkie składowe stanu naprężenia. Również i w tym przypadku, jak to wykazał E. Sternberg[5)], znikają naprężenia σ_{zz} i σ_{rz}.

Praca wpłynęła do redakcji 15.III.1957.

LITERATURA

1. H. S. Carslaw i J. C. Jaeger: Conduction of Heat in Solids. Oxford 1947.
2. E. Melan i H. Parcus: Waermespannungen stationaerer Temperaturfelder. Wien 1953.
3. W. Nowacki: Stan naprężenia wywołany w przestrzeni i półprzestrzeni sprężystej działaniem chwilowego źródła ciepła. Bull. Acad. Polon. Sci., 1957.
4. A. E. H. Love: A Treatise of Mathematical Theory of Elasticity. London 1927.
5. E. Sternberg i E. L. Mc Dowell: On the Steady-State Thermoelastic Problem for the Half-Space (I). II Intern. Congress of Applied Mechanics. Brussels 1956, Book of Abstracts.

Состояние напряжений в упругом полупространстве, вызванное действием мгновенного источника тепла

Краткое содержание

В работе рассмотрено состояние возникающего в упругом полупространстве напряжения, вызванного дейсвием, мгновенного тепла, источника расположенного в плоскости ограничивающей упругое полупространство.

Вопрос рассмотрен, как *quasi* статический. Принято во внимание состояние напряжения в упругом полупространстве, изолированном термически в ограничивающей плоскости ($z = 0$), а также и в том случае, когда в этой плоскости существует постоянная температура $T = 0$.

Пользуясь потенциалом термоупругой деформации Φ, связанным с полем температуры (уравнением (3), определены согласно формулам (4) составляющие состояния напряжения $\bar{\sigma}_{ij}$, возникающие в упругом неограниченном пространстве.

Прибавляя к состоянию $\bar{\sigma}_{ij}$ соответственно подобранное состояние $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$, получено при использовании функции *Love'a* результирующие составляющие состояния напряжения σ_{ij}, которые выполняют всякие граничные условия в плоскости $z = 0$.

В заключение рассмотрено состояние напряжения, вызванного действием, непрерывного по времени, источника тепла.

Stress Distribution in an Elastic Half-Space by the Action of an Instantaneous Source of Heat

Summary

The paper considers the stress distribution occuring in an elastic half-space as a result of the action of an instantaneous source of heat, placed in the plane bounding the elastic half-space. The problem is considered as a quasi-statical one. The author takes into account the stress distribution in an elastic half-space thermally insulated in the bounding plane ($z = 0$) and in the case of a constant temperature $T = 0$ obtaining in that plane. Using the potential of the thermoelastic displacement Φ connected with the field of temperature by equation (3), the author determines from formulae (4) the components of the stress distribution $\bar{\sigma}_{ij}$ occurring in an unbounded elastic space. By adding a suitably chosen distribution $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$ to the distribution $\bar{\sigma}_{ij}$ he obtains by means of the Love function the final components of the stress distribution σ_{ij} which satisfy any boundary conditions in the plane $z = 0$. Finally the stress distribution resulting from the action of a source of heat continuous in time is considered.