ROZDZIAŁ IX.

Rozwiązywanie troykątów kulistych jeodezycznych.

---

97. Maiąc zastosowane wszystkie kąty położeń do środka stanowisk, do środka znaków obserwowanych i do poziomu, i przywiodłszy podstawę do powierzchni morza, zatrudniymy się rozwiązywaniem troykątów. Podstawa może bydź uważana za łuk koła wielkiego na kuli ziemskiey, a troykąty mogą bydź wzięte za troykąty kuliste, których kąty dane są przez wartość kątów położeń. Pokazał bowiem rachunkiem *Delambre*, w tomie drugim swoiego dzieła *Base du S. m. d.*, że lubo ziemia iest rzeczywiście sferoidą powstałą z obrotu ellipsy około osi mnieyszey, a nie kulą; dla małey iednak krzywości boków, można brać bez żadney omyłki podstawę wynoszącą nawet 100000 sążni za łuk koła wielkiego, a zamiast troykątów sferoidycznych rozwiązywać troykąty kuliste. Z tego wypada, że przystępuiąc do obrachowania takowych troykątów, powinniśmy dobrze poznać naukę o powierzchni troykąta kulistego, i rozważyć sposoby rozwiązywania troykątów jeodezycznych.

98. Przeciąwszy kulę dwóma kołami wielkiemi ACBE i ADBF (*fig.* 33), utworzą się cztery taśmy spiczaste; z których weźmy dwie pod uwagę, ACDB i AFEB. Taśmy te oczywiście przystaią do siebie. Jeżeli przetniemy kulę trzeciém kołem wielkiém CDEFC, to rozdzieli taśmy na cztery troykąty kuliste: $ACD = x$, $CDB = y$, $AFE = y'$, i $FEB = x'$.

Ponieważ łuki $AE + AC = 180°$, i $AC + CB = 180°$, przeto: $AE = CB$.

Podobnież: $AF + AD = 180°$, $AD + BD = 180°$, przeto: $AF = DB$.

Stąd dwa troykąty kuliste y i y', maiące po dwa boki równe i po kącie między niemi zawartym równym, przystaną do siebie i równe będą co do powierzchni. Tymże samym sposobem dowiedlibyśmy, że troykąt kulisty $x = x'$.

A że: $x + y = x' + y' = ACDB = AFEB$; przeto i

$$x + y' = y + x' = ACDB = AFEB \ldots\ldots (1).$$

Nazwiymy promień kuli przez r, stosunek półokręgu koła do promienia przez π. Będzie powierzchnia kuli $PK = 4r^2\pi$.

Jeżeli kąty w spiczastości czterech taśm uważanych na *fig.* 33 są sobie równe, czyli ważą po $90°$, wtenczas i powierzchnie tych taśm będą sobie równe. Nazwawszy ie w szczególności taśmami kąta prostego, będzie: $Pow: T.\, 90° = r^2\pi$.

Powierzchnie taśm maią się do siebie oczywiście iak kąty ich spiczastości; przeto powierzchnia taśmy którey kąt spiczastości iest A ν.

$Pow: T. A : Pow: T.\, 90° = A : 90°$. Stąd: $Pow: T. A = \frac{A r^2 \pi}{90°} \ldots\ldots (2).$

99. Uważmy teraz na powierzchni kuli iakikolwiek troykąt kulisty ABC (*fig.* 34); przetniymy kulę kołem wielkiém, któreby nie dotykało troykąta ABC; i poprzeciągaymy boki troykąta kulistego aż do zbieżenia się z okręgiem tego koła. Będzie: $ZBAG = EBCH = FACI = 180°$.

Na mocy wzoru (1) mamy:

$$Pow: T. A = ZAI + FAG; \quad Pow: T. B = GBH + EBZ.$$
$$Pow: T. C = FCE + HCI.$$

Przeto: $Pow: T. A + Pow: T. B + Pow: T. C = 2r^2\pi + 2. ABC.$

Stąd: $Pow:$ troykąta $ABC = -r^2\pi + \frac{1}{2}\left\{Pow: T. A + Pow: TB + Pow: T. C\right\}$.

Kładąc za powierzchnie taśm ich wartości, ułożone stosownie do wzoru (2) §. 98, otrzymamy: $Pow:$ troykąta $ABC = -r^2\pi + \frac{r^2\pi}{2.\, 90°}(A + B + C).$

Albo:- Pow: troykąta $ABC = \frac{r^2 \pi}{180^0} (A + B + C - 180^0)$.

A że: - $\frac{\pi}{180^0} = \frac{\frac{180^0}{\text{promień}}}{180^0} = \frac{1}{\text{promień}} = \text{wst } 1''$;

zatém: Pow: troykąta $ABC = r^2 \text{wst } 1'' (A + B + C - 180^0)$..... (3).

$A + B + C - 180^0$ nazywa się *przepełnieniem* (excès sphèrique), to iest: przewyżką trzech kątów troykąta kulistego nad dwa kąty proste.

Wzór (3) daie wartość na powierzchnią iakiegokolwiek troykąta kulistego przez funkcyą przepełnienia. Uczy on razem, że powierzchnie troykątów kulistych maią się do siebie w stosunku prostym ich przepełnień.

100. W troykątach wypadaiących na kuli ziemskiey z rozmiarów jeodezycznych, przepełnienie wynosi kilka a naywięcey kilkanaście sekund.

Naywiększy troykąt jeodezyczny obserwowali PP. *Biot* i *Arago*, pomiędzy stanowiskami Campvey (Iviza), Mongo i Desierto. Przepełnienie wyniosło . . . . $39'',03$.

Bok $ID = 82555,44$ sążni.

$MD = 72959^s,8$;

$MI = 56559^s,0$. *)

Mnożąc wartość przepełnienia przez wst $1''$ i przez kwadrat z promienia ziemi w mieyscu obserwacyi danego *np.* w metrach, otrzymamy wartość na powierzchnią troykąta kulistego w tychże samych miarach kwadratowych.

---

*) Mongo pusta wyniosła góra nad morzem, leżąca koło miasta Denia w Walencyi. Campvey góra naga na brzegu północnym wyspy Ivizi. Desierto de las palmas góra w Walencyi nad morzem, tak nazwana od małych palm *(chamoerops humilis)* na niey rosnących.

101. Mówiliśmy w poprzedzaiącym §, że w troykątach jeodezycznych przepełnienie wynosi pospolicie kilka sekund, a naywięcey pół minuty. Z tey przyczyny wzór (3) §. 99, uczy nas: że w rachunku powierzchni troykątów jeodezycznych powinniśmy znać nayściśley wartość przepełnienia. W obserwacyi kątów położeń, używaiąc nayzręczniey dobrego kątomierza, nie możemy ręczyć za dziesiętne sekund. Przeto, do rachunku powierzchni troykątów jeodezycznych, nie godzi się stosować przepełnienia wziętego z obserwacyi kątów.

Leżandr i *Delambre* podali wzory na przepełnienie, przez funkcyą boków danych przez przybliżenie i obserwowanych kątów. Na tak wyrachowaney wartości przepełnienia można polegać co do dziesiętney, a nawet setney części sekundy. Tym sposobem wyciągnione przepełnienie używa się do rachunku powierzchni troykątów jeodezycznych i poprawy wartości obserwowanych kątów. Tu wyłożymy wzory podane przez obu jeometrów.

Załóżmy przepełnienie $= A + B + C - 180^\circ = x$. Będzie:

$$B + C = 180^\circ - (A - x). \quad \tfrac{1}{2}(B + C) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(A - x).$$

$$\text{sty}\tfrac{1}{2}(B + C) = \text{dosty}\tfrac{1}{2}(A - x) = \frac{1 + \text{sty}\tfrac{1}{2}A \,.\, \text{sty}\tfrac{1}{2}x}{\text{sty}\tfrac{1}{2}A - \text{sty}\tfrac{1}{2}x}.$$

A że z analogii Nepera mamy:

$$\text{sty}\tfrac{1}{2}(B + C) = \text{dosty}\tfrac{1}{2}A \, \frac{\text{dost}\tfrac{1}{2}(b - c)}{\text{dost}\tfrac{1}{2}(b + c)}, \text{ przeto:}$$

$$\frac{\text{dosty}\tfrac{1}{2}A \,.\, \text{dost}\tfrac{1}{2}(b - c)}{\text{dost}\tfrac{1}{2}(b + c)} = \frac{1 + \text{sty}\tfrac{1}{2}A \,.\, \text{sty}\tfrac{1}{2}x}{\text{sty}\tfrac{1}{2}A - \text{sty}\tfrac{1}{2}x}.$$

Rozwiązuiąc to zrównanie co do sty $\tfrac{1}{2}$ x, otrzymamy:

$$\text{sty}\tfrac{1}{2}x = \frac{2 \,.\, \text{wst}\tfrac{1}{2}b \,.\, \text{wst}\tfrac{1}{2}c}{\text{dost}\tfrac{1}{2}(b + c)\,\text{sty}\tfrac{1}{2}A + \text{dost}\tfrac{1}{2}(b - c)\,\text{dosty}\tfrac{1}{2}A}.$$

$$\text{sty}\tfrac{1}{2}x = \frac{2\,\text{wst}\tfrac{1}{2}b \,.\, \text{wst}\tfrac{1}{2}c \,.\, \text{wst}\tfrac{1}{2}A \,.\, \text{dost}\tfrac{1}{2}A}{\text{dost}\tfrac{1}{2}(b + c)\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}A + \text{dost}\tfrac{1}{2}(b - c)\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}A}.$$

$$\text{sty}\tfrac{1}{2}x = \frac{\text{wst}\tfrac{1}{2}b.\,\text{wst}\tfrac{1}{2}c.\,\text{wst}\,A}{(\text{dost}\tfrac{1}{2}b.\text{dost}\tfrac{1}{2}c - \text{wst}\tfrac{1}{2}b.\text{wst}\tfrac{1}{2}c)\text{wst}^2\tfrac{1}{2}A + (\text{dost}\tfrac{1}{2}b.\text{dost}\tfrac{1}{2}c + \text{wst}\tfrac{1}{2}b\,\text{wst}\tfrac{1}{2}c)\text{dost}^2\tfrac{1}{2}A}.$$

$$\text{sty}\tfrac{1}{2}x = \frac{\text{wst}\tfrac{1}{2}b.\,\text{wst}\tfrac{1}{2}c.\text{wst}\,A}{\text{dost}\tfrac{1}{2}b.\,\text{dost}\tfrac{1}{2}c + \text{wst}\tfrac{1}{2}b\,\text{wst}\tfrac{1}{2}c\,(\text{dost}^2\tfrac{1}{2}A - \text{wst}^2\tfrac{1}{2}A}.$$

A że: $\text{dost}^2\tfrac{1}{2}A - \text{wst}^2\tfrac{1}{2}A = 2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}A, -(\text{wst}^2\tfrac{1}{2}A + \text{dost}^2\tfrac{1}{2}A =$

$$= 2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}A - 1 = \text{dost}\,A;$$

Przeto: $$\text{sty}\tfrac{1}{2}x = \frac{\text{sty}\tfrac{1}{2}b.\,\text{sty}\tfrac{1}{2}c.\,\text{wst}\,A}{1 + \text{sty}\tfrac{1}{2}b.\,\text{sty}\tfrac{1}{2}c.\,\text{dost}\,A}\ldots\ldots \quad (4).$$

Oto iest wzór ścisły na przepełnienie, wyrażone przez funkcyą dwóch boków i kąta między niemi zawartego. Podał go naprzód *Leżandr*.

Delambre wyraża wartość na $\tfrac{1}{2}x$ przez następuiący szereg.

$$\tfrac{1}{2}x = \frac{\text{sty}\tfrac{1}{2}b\,\text{sty}\tfrac{1}{2}c.\,\text{wst}\,A}{\text{wst}\,1''} - \frac{\text{sty}^2\tfrac{1}{2}b.\,\text{sty}^2\tfrac{1}{2}c.\,\text{wst}\,2\,A}{\text{wst}\,1''} + \frac{\text{sty}^3\tfrac{1}{2}b.\,\text{sty}^3\tfrac{1}{2}c\,\text{wst}3A}{\text{wst}\,3''} - \text{i t. d.}\ ^{*)}$$

$$x = \frac{2.\,\text{sty}\tfrac{1}{2}b.\,\text{sty}\tfrac{1}{2}c\,\text{wst}\,A}{\text{wst}\,1''}\ldots\ldots\ldots \quad (4')$$

---

*) Rozwinienie wzoru (4) na szereg przywodzi się do następuiącego zagadnienia: maiąc $\text{sty}\,x = \frac{m.\,\text{wst}\,y}{1 + m\,\text{dost}\,y}$, znaleźć wyrażenie na x przez szereg, któryby były funkcyą m i y. Na ten koniec zróżniczkuymy dane zrównanie. Będzie:

$$\frac{dx}{\text{dost}^2 x} = \frac{(1 + m\,\text{dost}\,y)\,m\,\text{dost}\,y\,.\,dy + m^2\,\text{wst}^2 y\,.\,dy}{(1 + m\,\text{dost}\,y)^2}.$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{m^2 + m\,\text{dost}\,y}{(1 + m\,\text{dost}\,y)^2\,\text{sie}^2 x}.$$

A że: $\text{sie}^2 x = 1 + \text{sty}^2 x = \frac{(1 + m\,\text{dost}\,y)^2 + m^2.\,\text{wst}^2 y}{(1 + m\,\text{dost}\,y)^2} = \frac{1 + 2\,m\,\text{dost}\,y + m^2}{(1 + m\,\text{dost}\,y)^2}$;

Przeto: $\frac{dx}{dy} = \frac{m.\,\text{dost}\,y + m^2}{1 + 2\,m\,\text{dost}\,y + m^2} = Am + Bm^2 + Cm^3 + Dm^4 + \text{i t. d.}$

Przyprowadzaiąc to zrównanie do iednego mianownika, i układaiąc wszystko według potęg m, otrzymamy:

102. *Delambre* podał ieszcze inny wzór na rachowanie przepełnienia, wyrażaiąc ie przez funkcyą dwóch boków i dwóch kątów im przeciwległych. Wzór ten ułożył w tablicę. Wyprowadza zaś iego następnym sposobem.

W troykącie kulistym ABC, spuściwszy łuk prostopadły BD na bok AC, mamy: $\text{dosty ABD} = \text{dost AB}.\text{sty A}$. Stąd:

$$\text{sty A} - \text{dosty ABD} = \text{sty A}(1 - \text{dost AB}) = 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}\text{AB}.\text{sty A}.$$

$$2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}\text{AB sty A} = \frac{-\text{dost}(A+\text{ABD})}{\text{dost A}.\text{wst ABD}} = \frac{\text{wst}(A+\text{ABD}-90^\circ)}{\text{dost A}.\text{wst ABD}}.$$

$$\left.\begin{array}{cccc} \text{Am}+ & \text{Bm}^2+ & \text{C}.\text{m}^3+ & \text{Dm}^4+ \\ -\text{dosty}.\text{m}+2\text{A dosty}.\text{m}^2 & +2\text{B dosty}.\text{m}^3 & +2\text{C}.\text{ dosty}.\text{m}^4 & +\text{i t. d.} \\ & -\text{m}^2+ & \text{A}.\text{m}^3+ & \text{B}.\text{m}^4+ \end{array}\right\} = 0.$$

W tém zrównaniu tosamém zakładaiąc spółczynniki ilości m równe zeru, znaydziemy: $A = \text{dost y}$.

$$B = 1 - 2\text{A dost y} = 1 - 2\,\text{dost}^2\text{y};\ B = -\text{dost 2y}.$$
$$C = -A - 2\text{B dost y} = -\text{dost y} + 2\,\text{dost 2y}.\text{dost y};\ C = \text{dost 3y}.$$
$$D = -2\text{C}.\text{dost y} - B = -2\,\text{dost 3y}.\text{dost y} - \text{dost 2y};\ D = -\text{dost 4y}.$$

Zatém: $\frac{dx}{dy} = \text{m}.\text{dost y} - \text{m}^2\text{dost 2y} + \text{m}^3\text{ dost 3y} - \text{m}^4\text{ dost 4y} + \text{i t. d.}$

Całkuiąc mamy: $x = \text{m}.\text{wst y} - \frac{1}{2}\text{m}^2.\text{wst 2y} + \frac{1}{3}\text{m}^3\text{wst 3y} - \frac{1}{4}\text{m}^4.\text{wst 4y} + \text{i t. d.}$

Podobnym zupełnie sposobem postępuiąc ze wzorem $\text{sty x} = \frac{\text{m}.\text{wst y}}{1 - \text{m}.\text{dost y}}$, otrzymalibyśmy: $x = \text{m}.\text{wst y} + \frac{1}{2}\text{m}^2.\text{wst 2y} + \frac{1}{3}\text{m}^3.\text{wst 3y} + \frac{1}{4}\text{m}^4\text{ wst 4y} + \text{i t. d.}$

Zrównanie $\text{sty x} = \frac{\text{m}.\text{ dost u}}{1 + \text{m}.\text{ wst u}}$, dałoby:

$$x = \text{m}.\text{dost u} + \tfrac{1}{2}\text{m}^2.\text{wst 2u} - \tfrac{1}{3}\text{m}^3.\text{dost 3u} + \tfrac{1}{4}\text{m}^4.\text{wst 4u} - \text{i t. d.}$$

Zrównanie $\text{sty x} = \frac{\text{m}.\text{dost u}}{1 - \text{m}.\text{wst u}}$, dałoby:

$$x = \text{m}.\text{dost u} + \tfrac{1}{2}\text{m}^2.\text{wst 2u} - \tfrac{1}{3}\text{m}^3.\text{dost 3u} + \tfrac{1}{4}\text{m}^4\text{ wst 4u} + \text{i t. d.}$$

Chcąc otrzymać wartość na x w sekundach, potrzeba wszystkie wyrazy szeregu dzielić przez wst 1″. Zamiast 2 wst 1″, można położyć wst 2″; za 3 wst 1″, można napisać wst 3″, i t. p.

W troykącie prostokątnym ABD załóżmy przepełnienie $A+ABD+D-180^\circ=x$. Będzie: $A+ABD-90^\circ=x$, $ABD=90^\circ-(A-x)$. Zatém:

$$2\,\mathrm{wst}^2\tfrac{1}{2}AB.\,\mathrm{sty}\,A=\frac{\mathrm{wst}\,x}{\mathrm{dost}\,A.\,\mathrm{dost}\,(A-x)}=\frac{\mathrm{wst}\,x}{\mathrm{dost}^2A\,\mathrm{dost}\,x+\mathrm{wst}\,A\,\mathrm{dost}\,A.\,\mathrm{wst}\,x}=$$

$$=\frac{\mathrm{sty}\,x}{\mathrm{dost}^2A+\mathrm{wst}\,A.\,\mathrm{dost}\,A.\,\mathrm{sty}\,x}.$$

Rozwiązuiąc to zrównanie co do sty x, znaydziemy:

$$\mathrm{sty}\,x=\frac{2\,\mathrm{wst}^2\tfrac{1}{2}AB.\,\mathrm{wst}\,A.\,\mathrm{dost}\,A}{1-2\,\mathrm{wst}^2\tfrac{1}{2}AB.\,\mathrm{wst}^2A}.$$

$$\mathrm{sty}\,x=\frac{\mathrm{sty}^2\tfrac{1}{2}AB.\,\mathrm{wst}\,2A}{\dfrac{1}{\mathrm{dost}^2\tfrac{1}{2}AB}-2\,\mathrm{sty}^2\tfrac{1}{2}AB.\,\mathrm{wst}^2A}.$$

Mianownik $=\mathrm{siecz}^2\tfrac{1}{2}AB-2\,\mathrm{sty}^2\tfrac{1}{2}AB\,\mathrm{wst}^2A=1+\mathrm{sty}^2\tfrac{1}{2}AB-2\,\mathrm{sty}^2\tfrac{1}{2}AB.\,\mathrm{wst}^2A=$

$$=1+\mathrm{sty}^2\tfrac{1}{2}AB\,(1-2\,\mathrm{wst}^2A)=1+\mathrm{dost}\,2A.\,\mathrm{sty}^2\tfrac{1}{2}AB.$$

Przeto:
$$\mathrm{sty}\,x=\frac{\mathrm{sty}^2\tfrac{1}{2}AB.\,\mathrm{wst}\,2A}{1+\mathrm{dost}\,2A.\,\mathrm{sty}^2\tfrac{1}{2}AB}.$$

$$x=\frac{\mathrm{sty}^2\tfrac{1}{2}AB.\,\mathrm{wst}\,2A}{\mathrm{wst}\,1''}.$$

Pierwszy wyraz szeregu zupełnie wystarcza do znalezienia wartości przepełnienia; inne wyrazy nic nie znaczą.

Podobnym sposobem znaleźlibyśmy przepełnienie troykąta prostokątnego DBC

$$y=\frac{\mathrm{sty}^2\tfrac{1}{2}BC.\,\mathrm{wst}\,2C}{\mathrm{wst}\,1''}.$$

A że: $x+y=A+C+B+ADB+BDC-2.\,180^\circ=A+B+C-180^\circ=X$;

przeto przepełnienie troykąta kulistego ABC będzie:

$$X=\frac{\mathrm{sty}^2\tfrac{1}{2}AB.\,\mathrm{wst}\,2A}{\mathrm{wst}\,1''}+\frac{\mathrm{sty}^2\tfrac{1}{2}BC.\,\mathrm{wst}\,2C}{\mathrm{wst}\,1''}\ldots\ldots\ (5)$$

Delambre, układaiąc wzór (5) w tablicę, przerobił go pod następnym kształtem. Ponieważ:

$$\frac{\text{sty}^2 \tfrac{1}{2}\,\text{AB}}{\text{wst } 1''} = \text{sty } 1'' \left(\frac{\text{AB}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\text{AB}}{2}\right)^2 \text{wst } 1'' = \left(\frac{1800''.\,\text{AB}}{57020}\right)^2 \text{wst } 1'' =$$

$$= 0'',000048311\,(\text{AB})^2; \qquad \text{przeto:}$$

$$\text{X} = 0'',000048311\,(\text{AB})^2\,\text{wst}\,2\,\text{A} + 0'',000048311\,(\text{BC})^2\,\text{wst}\,2\,\text{C} \ldots\ldots\ldots \quad (5')$$

Według tego wzoru ułożył tablicę na Francyą, gdzie średni stopień południka zawiera 57020 sążni *(toises)*. Spółczynniki liczbowe wst 2 A i wst 2 C rozmnożył oczywiście przez 10000, a otrzymany wypadek znowu dzielił przez 10000; przez co wypadły mu sekundy. Użył tego wybiegu, dla uniknienia bardzo długiego szeregu liczb w pisaniu tak małego ułomku.

W praktyce chcąc użyć tablicy *Delambra*, wypada znać w troykącie kulistym dwa boki i dwa kąty im przeciwległe. Potrzeba raz weyść do tablicy z iednym kątem i z bokiem mu przyległym, to da pierwszą część poprawki. Następnie wszedłszy z drugim kątem i z drugim bokiem mu przyległym, znaydę drugą część poprawki; która dorzucona do pierwszey, da wartość przepełnienia X.

Przykład. Weźmy AB=25690^s, BC=28740^s; A=32°. 30′, C=31°. 45′; i szukaymy w tablicy IV. wartości przepełnienia.

Znaydziemy	A i AB	2″,873
	C i BC	3,563
	Stąd:	X=6,436.

103. Boki troykątów jeodezycznych nie wiele różnią się od liniy prostych; można ie rozwiązywać tak iak troykąty prostokreślne, według następuiącego sposobu, dowiedzionego naprzód przez *Leżandra.*

Zmnieyszywszy trzecią częścią przepełnienia każdy kąt troykąta kulistego, złożonego z bardzo małych boków względem promienia kuli, otrzymamy troykąt prostokreślny, równy mu co do powierzchni; i w tym stanie *rozwiązywać go możemy za pomocą wzorów stosuiących się do troykąta prostokreślnego.*

Dowód tego twierdzenia podany naprzód przez *Leżandra* i objaśniony stosownemi uwagami iest następuiący.

W troykącie danym kulistym ABC mamy: $\text{wst}\,A : \text{wst}\,B = \text{wst}\,a : \text{wst}\,b$.

Wiemy że: $\text{wst}\,a = a - \frac{a^3}{6} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5} -$ i t. d.; $\text{wst}\,b = b - \frac{b^3}{6} + \frac{b^5}{1.2.3.4.5} -$ i t. d.

W naszym przypadku, dla małości łuków a i b, można brać śmiało:

$$\text{wst}\,a = a - \frac{a^3}{6}; \quad \text{wst}\,b = b - \frac{b^3}{6}.$$

Będzie tedy w troykącie kulistym jeodezycznym ABC

$$\text{wst}\,A : \text{wst}\,B = a\left(1 - \tfrac{1}{6}a^2\right) : b\left(1 - \tfrac{1}{6}b^2\right).$$

Stąd:
$$\frac{a}{b} = \frac{\text{wst}\,A\left(1 - \frac{1}{6}b^2\right)}{\text{wst}\,B\left(1 - \frac{1}{6}a^2\right)} \ldots\ldots (6).$$

Zamieńmy troykąt kulisty ABC na inny prostokreślny A′B′C′, którego boki byłyby równe odpowiednym bokom troykąta kulistego. W tym razie potrzeba zmnieyszyć kąty A, B, C, o pewną ilość x.

Troykąt prostokreślny A′B′C′ iest równy co do powierzchni troykątowi kulistemu ABC. Bo biorąc promień kuli za iedność, mamy powierzchnią troykąta ABC, stosownie do wzoru (4′) §. 101. równą przepełnieniu χ wst 1″ = $= 2\,\text{sty}\tfrac{1}{2}b.\,\text{sty}\tfrac{1}{2}c.\,\text{wst}A = \tfrac{1}{2}bc.\,\text{wst}A =$ powierzchni troykąta prostokreślnego A′B′C′.

Poszukaymy wartości na ilość x.

W troykącie prostokreślnym A′B′C′ mamy:

$$a : b = \text{wst}\,(A - x) : \text{wst}\,(B - x) = \left(\text{wst}A - \frac{\text{wst}\,x}{\text{dost}\,x}\,\text{dost}A\right) : \left(\text{wst}\,B - \frac{\text{wst}\,x}{\text{dost}\,x}\,\text{dost}\,B\right).$$

$$a.\,\text{wst}\,B - a.\,\text{sty}\,x\,\text{dost}\,B = b.\,\text{wst}\,A - b.\,\text{sty}\,x.\text{dost}\,A.$$

$$\text{sty}\,x\,(a.\,\text{dost}\,B - b.\,\text{dost}\,A) = a.\,\text{wst}\,B - b.\,\text{wst}\,A.$$

$$\text{sty}\, x = \frac{a.\,\text{wst}\, B - b.\,\text{wst}\, A}{a.\,\text{dost}\, B - b\,\text{dost}\, A} \ldots\ldots (6').$$

Ze zrównania (6) mamy: $\frac{a}{b} = \frac{\text{wst}\, A\,(1 - \frac{1}{6} b^2)}{\text{wst}\, B\,(1 - \frac{1}{6} a^2)}$.

Przeto: $$\text{sty}\, x = \frac{\frac{a}{b}\,\text{wst}\, B - \text{wst}\, A}{\frac{a}{b}\,\text{dost}\, B - \text{dost}\, A} = \frac{\frac{\text{wst}\, A}{\text{wst}\, B}\left(\frac{1 - \frac{1}{6} b^2}{1 - \frac{1}{6} a^2}\right)\text{wst}\, B - \text{wst}\, A}{\frac{\text{wst}\, A}{\text{wst}\, B}\left(\frac{1 - \frac{1}{6} b^2}{1 - \frac{1}{6} a^2}\right)\text{dost}\, B - \text{dost}\, A}.$$

$$\text{sty}\, x = \frac{(1 - \frac{1}{6} b^2)\,\text{wst}\, A.\,\text{wst}\, B - (1 - \frac{1}{6} a^2)\,\text{wst}\, A.\,\text{wst}\, B}{(1 - \frac{1}{6} b^2)\,\text{wst}\, A.\,\text{dost} B - (1 - \frac{1}{6} a^2)\,\text{wst}\, B.\,\text{dost} A}.$$

W mianowniku zaniedbawszy ilość $-\text{wst}\, A\,\text{dost}\, B \frac{1}{6} b^2 + \frac{1}{6} a^2\,\text{wst}\, B\,\text{dost}\, A$ prawie równą iedności, otrzymamy: $\text{sty}\, x = \frac{1}{6}(a^2 - b^2)\frac{\text{wst}\, A.\,\text{wst}\, B}{\text{wst}\,(A - B)}$.

$$x = \frac{\frac{1}{6}(a^2 - b^2)\,\text{wst}\, A.\,\text{wst}\, B}{\text{wst}(A - B)\,\text{wst}\, 1''} \ldots\ldots (7).$$

A że *) $\frac{1}{2}$ bc. wst $A = 3x \times \text{wst}\, 1''$; a ze wzoru (4') §. 101. przepełnienie troykąta kulistego ABC $\times$ wst $1'' = 2.\,\text{sty}\frac{1}{2} b.\,\text{sty}\frac{1}{2} c.\,\text{wst}\, A = \frac{1}{2}$ bc. wst A;

przeto: $$x = \frac{1}{6} bc \frac{\text{wst}\, A}{\text{wst}\, 1''} = \frac{1}{3}(A + B + C - 180^\circ) \ldots\ldots (8).$$

---

*) Powierzchnia troykąta prostokreślnego ABC $= \frac{1}{2}$ ac. wst $B = \frac{1}{2}$ bc. wst $A =$ $= \frac{1}{2}$ab. wst C. Nadto: $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,\text{bc.}\,\text{dost}\, A$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2\,\text{ac.}\,\text{dost}\, B$;
$a^2 - b^2 = b^2 - a^2 - 2c\,(b.\,\text{dost}\, A - a.\,\text{dost}\, B)$;

$a^2 - b^2 = c\,(a.\,\text{dost}\, B - b.\,\text{dost}\, A)$. A że: $b = \frac{a.\,\text{wst}\, B}{\text{wst}\, A}$;

przeto: $$a^2 - b^2 = c\left\{a.\,\text{dost}\, B - \frac{a.\,\text{wst}\, B.\,\text{dost}\, A}{\text{wst}\, A}\right\}.$$

$$a^2 - b^2 = \text{ac.}\frac{\text{wst}\,(A - B)}{\text{wst}\, A}. \qquad \text{ac} = \frac{(a^2 - b^2)\,\text{wst}\, A}{\text{wst}\,(A - B)}.$$

Ztąd: $\frac{1}{2}$ ac wst $B = \frac{1}{2}$ bc. wst $A = \frac{\frac{1}{2}(a^2 - b^2)\,\text{wst}\, A.\,\text{wst}\, B}{\text{wst}\,(A - B.)} =$ powierzchni troykąta prostokreślnego ABC.

Taż sama wartość na x wypadłaby biorąc dwa kąty A, C, lub B, C, i porównywaiąc ich wstawy. Przeto twierdzenie *Leżandra* iest prawdziwe.

Delambre przekonał się praktycznym rachunkiem, że twierdzenie *Leżandra* stosuie się do troykątów kulistych ziemskich, któreby miały boki nawet od 100000 sążni, co się nigdy w rozmiarach praktycznych nie przytrafia; a P. *Puissant* dowiódł na karcie 241 drugiego tomu Jeodezyi, że troykąty małe sferoidyczne mogą bydź rozwiązywane według sposobu *Leżandra*.

Starożytni rachuiąc troykąty duże ziemskie, brali ie za płaskie; i przewyżkę nad 180°, wypadaiącą z summy trzech kątów troykąta, przypisywali błędom obserwacyi. Każdy zaś kąt obserwowanego troykąta zmnieyszali trzecią częścią przepełnienia (A+B+C—180°); przez co wpadali na dobre rozwiązanie troykątów jeodezycznych, nieznaiąc bynaymniey prawdziwey tego przyczyny.

Uwaga. Wiemy z §. 99, że powierzchnia troykąta kulistego ABC$=r^2$wst1″. P. W tym zaś §. dowiedlismy: że powierzchnia troykąta kulistego wypadaiącego z rozmiarów jeodezycznych, równa iest powierzchni troykąta prostokreślnego maiącego teyże samey długości boki, a którego kąty równaią się odpowiednym kątom troykąta kulistego zmnieyszonym $\frac{1}{3}$P. Nazwawszy podstawę tego troykąta prostokreślnego przez b, a wysokość przez h, będzie: $P=\frac{1}{2}\frac{bh}{r^2.\text{wst}1''}$.

P$=0'',0000000009666.$hb kiedy r wyrażamy w sążniach; a zaś: P$=0'',0000000007854.$bh, kiedy r wezmiemy w metrach, i uważamy koło podzielone na 400^{gr}.

Według pierwszego wzoru ułożone są tablice na Francyą przez *Delambra;* a ze wzoru drugiego ułożył tablicę *Puissant* na rachowanie przepełnienia.

Przykład. Założmy b$=23650^s$, h$=12695^s$. Znaydziemy z tablicy V. przepełnienie$=2'',891$.

104. *Delambre*, a za nim idąc inni jeometrowie, rozwiązuią zamiast troykątów kulistych jeodezycznych, troykąty płaskie zawarte między cięciwami podpieraiącemi ich boki. Na ten koniec maiąc podstawę przywiedzioną do powierzchni morza, należy wyrachować iey cięciwę, i przywieść wszystkie kąty kuliste do kątów cięciw. Wzór na tę poprawkę wyprowadza się następuiącym sposobem.

Niech będzie ZS liniią wierzchołkową mieysca S (*fig.* 35). Kąt położenia ASB przywiedziony do poziomu będzie równy kątowi między stycznemi TST′=C. Kąt między cięciwami iest ASB.

Uważam zamiast kąta kulistego kąt między stycznemi TST′. Kąt ZST=90°, kąt ZST′=90°; kąt TSA ma za miarę $\frac{1}{2}$ łuku SA, albo $\frac{1}{2}$ boku a. Bo w kole kąt zawarty między styczną i cięciwą, ma za miarę połowę łuku cięciwą podpartego. Podobnież kąt T′SB=$\frac{1}{2}$ łuku SB=$\frac{1}{2}$b. Przeto (stosownie do wzoru (a) *Delambra* otrzymanego w odsyłaczu w §. 43. rozdz. IV) będzie:

$$x = ASB - TST' = -\mathrm{wst}^2\tfrac{1}{4}(a+b).\frac{\mathrm{sty}\,\frac{1}{2}C}{\mathrm{wst}\,1''} + \mathrm{wst}^2\tfrac{1}{4}(a-b).\frac{\mathrm{dosty}\,\frac{1}{2}C}{\mathrm{wst}\,1''} \dots \quad (9)$$

Poprawka ta x dodana ze właściwym iey znakiem do kąta kulistego C, daie wartość na kąt cięciw ASB.

Chcąc ułożyć wzór (9) w tablice, można użyć tablicy II. na rachowanie $\left(\frac{0'',0001}{\mathrm{wst}\,1''}\right)\mathrm{sty}\,\frac{1}{2}C$ i $\left(\frac{0'',0001}{\mathrm{wst}\,1''}\right)\mathrm{dosty}\,\frac{1}{2}C$. Ale na rachowanie $10000.\,\mathrm{wst}^2\frac{1}{4}(a\pm b)$ trudno iest użyć tablicy I; bo trzeba byłoby zamieniać a i b na sekundy. Z tey przyczyny *Delambre* ułożył nową tablicę III. na ten wyraz, odmieniaiąc go pod następnym kształtem.

Stosownie do przerabiania odbytego w §. 102. mamy: $10000.\,\mathrm{wst}^2\frac{1}{4}(a\pm b) =$

$$= 10000.\,\mathrm{wst}^2\left\{\left(\frac{3600''}{57020}\right)\left(\frac{a\pm b}{4}\right)\right\} = 10000.\ \mathrm{wst}^2 1''\left\{\left(\frac{3600}{57020}\right)\left(\frac{a\pm b}{4}\right)\right\} =$$

$$= 0,00000000005855_7\,(a\pm b)^2.$$

Przykład. Załóżmy $a=30000^s$, $b=20000^s$, $C=60°.\ 30'$.

Mamy z tablicy II......sty$\frac{1}{2}$ C......$+12'',03$; dosty$\frac{1}{2}$ C......$-35'',37$;

z tablicy III.....a + b......$-0,146$; a — b.........$-0,006$.

Stąd: $x=-12'',03\times0,146+35'',37\times0,006$.

$x=-1'',54$.

105. Chcąc rachować poprawkę (9), potrzeba mieć choć przybliżoną wartość *np.* w sążniach na boki a i b, rozwiązuiąc troykąt kulisty tak iak prostokreślny. Tym sposobem trzy kąty troykąta kulistego przywiedzione do kątów cięciw, powinny razem wzięte ważyć 180°. Różnica zachodząca zależeć iedynie będzie od błędu obserwacyi, i równo pomiędzy trzy kąty powinna bydź rozdzielona.

106. Rachuiąc troykąty kuliste sposobem *Leżandra*, otrzymuiemy wprost łuki kół wielkich; używaiąc zaś sposobu *Delambra*, mamy do czynienia z cięciwami, które łatwo na łuki mogą bydź zamienione.

Można ieszcze rozwiązywać troykąty jeodezyczne tak iak kuliste. *Delambre* używał i tego sposobu. Daie on zupełnie też same wartości na boki i kąty troykątów co i sposoby poprzedzaiące; ale dla znacznie dłuższych rachunków słusznie zaniedbany bydź powinien.

Jakkolwiek postępuiąc, kiedy w rachunku troykątów oddalimy się iuż znacznie od podstawy, powinniśmy boki wyciągać z kilku troykątów, i brać na nie średni wypadek.

Dla pewności można zamiast iedney wymierzyć dwie lub więcey podstaw, i uskuteczniać rachunek troykątów raz od iedney, drugi raz od drugiey podstawy zaczynaiąc.

Tak właśnie postępował *Delambre* w mierzeniu swego południka; część iego północną odnosił do podstawy mierzoney przy Melun, a część południową rachował z podstawy oznaczoney przy Perpignan.

Sposób *Delambra* przez długi czas używany był w głównéin biórze woiennéın francuzkiém do rozwiązywania trygonometrycznych sieci; teraz iednak powszechnie się trzymaią sposobu dowiedzionego naprzód przez Leżandra.

107. Pozostało nam przytoczyć wzór, wystawiaiący elementa dane z obserwacyi i porządek rachunku odbywanego w troykącie jeodezycznym pierwszego rzędu.

Nazwiska stanowisk.	Kąty obserwowane i poprawione.	Kąty kuliste.	Kąty średnie.	Logarytmy wstaw.	Rachunek boków.	Wartość boków w sążniach.
Desierto.	42°. 5′. 36″,99.	42°. 5′. 36″,38.	42°. 5′. 23″,37.	9,8262659.	bok dany=	sążni 56559,00.
Iviza....	59°. 50′. 53″,79.	59°. 50′. 53″,18.	59°. 50′. 40″,16.	9,9368479.	9,9368479.	72959,80.
					0,1737341	
				log: MI =	4,7525017	
				log: DM =	4,8630837.	
					9.9905099	
Mongo...	78°. 4′. 10″,08.	78°. 4′. 9″,47.	78°. 3′. 56″,47.	9,9905099.	0,0631521	82555,44.
Summa =	180°. 0′. 40″,86.			log: DI =	4,9167457.	
Przepełnienie =	39″,03.					
Omyłka obserwacyi =	+ 1″,83.					

Wzięliśmy za przykład naywiększy troykąt jeodezyczny obserwowany przez PP. *Biota i Arago*. Pierwsza kolumna tablicy oznacza nazwiska stanowisk;

druga wyraża kąty położeń obserwowane i przywiedzione do środków znaków i do poziomu. Summa ich dała przepełnienie 40″,86. Rachuiąc przepełnienie według podanych wyżey wzorów, wypadło 39″,03. Poprawiwszy każdy kąt obserwowany trzecią częścią omyłki przepełnienia, utworzymy kolumnę trzecią *), która wyraża prawdziwe kąty kuliste. Zmnieyszywszy każdy kąt kulisty trzecią częścią przepełnienia 39″,03, otrzymuiemy kąty kuliste średnie. W kolumnie szóstey odbywa się rachunek boków sposobem *Leżandra;* a w kolumnie siódmey wypisano wartość boków w sążniach.

Chcąc rozwiązywać troykąty jeodezyczne sposobem *Delambra*, potrzeba umieścić ieszcze kolumnę wyrażaiącą kąty kuliste przywiedzione do kątów cięciw.

Uwaga 1. W troykącie DIM, szukaiąc boku DI ze wzoru na troykąt kulisty, przekonamy się naocznie: że sposób *Leżandra* stosuie się w jeodezyi do rozwiązania troykątów pierwszego rzędu. Mamy:

$$\text{wst}\,D : \text{wst}\,M = \text{wst}\,IM : \text{wst}\,DI.$$

Wiemy że: $$\text{wst}\,x = x\left(1 - \frac{x^2}{6R^2} + \frac{x^4}{120\,R^4} - \text{etc.}\right).$$

W naszym przykładzie można wziąść $\text{wst}\,x = x\left(1 - \frac{x^2}{6R^2}\right)$

$$\log \text{wst}\,x = \log x - \frac{Mx^2}{6R^2}.$$

M znaczy zamiennik 0,434294, R promień ziemi.

---

*) Kiedy nie iednostaynie iesteśmy przekonani o dobroci obserwacyi wszystkich kątów, wtenczas, stosownie do okoliczności, rozdzielamy nierówno omyłkę przepełnienia pomiędzy obserwowane trzy kąty troykąta jeodezycznego.

$$\log M = 9{,}63778.$$
$$\log MI = 4{,}75250.$$
$$\ldots\ldots = 4{,}75250.$$
$$\text{dop: } \log 6 = 9{,}22185.$$
$$\text{2dop: } \log R = 6{,}97188.$$

$$5{,}33651 \ldots ; 0{,}0000217.$$
$$\log MI = 4{,}7525017.$$

$$\log \text{wst } MI = 4{,}7524800.$$
$$\text{dop: } \log \text{wst } D = 0{,}1737038.$$
$$\log \text{wst } M = 9{,}9905155.$$

$$\log \text{wst } DI = 4{,}9166993.$$

$$\log DI = \log \text{wst } DI + \frac{M. \text{wst}^2 DI}{6R^2};$$

$$\frac{M. \text{wst}^2 DI}{6R^2} = 0{,}0000462.$$
$$\log \text{wst } DI = 4{,}9166993.$$

$$\log DI = 4{,}9167455.$$
$$DI = 82555^s{,}4.$$

Tak więc rozwiązuiąc troykąt DIM iak kulisty, i sposobem *Leżandra*, znaleźliśmy tylko $0^s{,}04$ różnicy na bok DI, którego długość wynosi około 27 mil niemieckich. Śmiało więc, i z wielką oszczędnością czasu, użyiemy sposobu *Leżandra*, do rozwiązywania troykątów sieci pierwszego rzędu.

Uwaga 2. Troykąty jeodezyczne drugiego rzędu nayczęściey rozwiązuiemy iak prostokreślne; a troykąty trzeciego rzędu zawsze uważamy za prostokreślne.