Zakładaiąc w tych wzorach pewną wartość na α i szereg wartości na L, można ułożyć tablicę na węgielną n', tak iąk to zrobił *Delambre*. Pierwszy wzór dogodnieyszy iest do rozwiązywania szczególnych przykładów, drugi zaś do układania tablicy.

143. Podobnež rozwinienia można otrzymać na inne liniie sferoidy ziemskiey, wyrazić ie przez funkcye wstaw i dostaw i ułożyć w tablicę. Obszernie wyłożył te rachunki *Puissant* w pierwszym tomie swoiey Jeodezyi i *Delambre* w tomie trzecim, *Base du S. m. décimal.* My staraliśmy się podać tu wzory ważnieysze używane w Jeodezyi, a niektóre rozwinęliśmy na szeregi mogące się ułożyć w tablice.

Zresztą co do rozwiiania innych wzorów pod rozmaitemi postaciami, odsyłamy do dzieł *La Plasa*, *Delambra*, *Puissana* i innych sławnych Jeometrów.

ROZDZIAŁ XII.

Rachunek długości i szerokości jeograficznych, oraz poziomołuków znaków obserwowanych.

144. Po rozwiązaniu troykątów pierwszego, drugiego i trzeciego rzędu, oraz po wynalezieniu współprzystaw prostokątnych, maiąc ułożone tablice na rozmaite liniie sferoidy ziemskiey w przypuszczeniu średniego spłaszczenia, potrzeba wyrachować położenia jeograficzne znaków pierwszego rzędu, z obser-

wowaney długości, szerokości i poziomołuku iednego stanowiska. Otrzymane wpółprzystawy tych mieysc na kuli ziemskiey posłużą za elementa do wykreślania kárt według pewney metody rzutów *(méthode de projections)*.

145. *Sposób Leżandra.*

Zagadnienie. Maiąc obserwowaną długość i szerokość jeograficzną mieysca A (*fig.* 39), znaleźć długość, szerokość i poziomołuk PBA mieysca B, umieszczonego na łuku BA prostopadłym do południka PEA, i którego odległość BA od punktu A iest iuż wyrachowana.

Z punktów A i B poprowadźmy dwie linie wierzchołkowe AM i BN. Uczyńmy łuk $AB = y$; $AM = r$, $BN = r'$.

Łuk mały y może bydź wzięty za łuk koła, którego promieniem iest r; wziąwszy łuk φ iemu podobny, na kuli którey promień $= 1$, będzie $\varphi = \frac{y}{r}$.

Z punktu M promieniem $Mb = 1$ zakreślmy trzy łuki ab, pb, ap; utworzy się przez to troykąt kulisty apb, w którym znamy bok $ap = 90° -$ szerokość jeograficzna obserwowana punktu $A = 90° - L$, bok $ab = \varphi = \frac{y}{r}$, i kąt prosty pab. Mamy w tym troykącie: $\text{dost}\, pb = \text{wst}\, L . \text{dost}\, \varphi$.

$$\text{sty}\, P = \frac{\text{sty}\, \varphi}{\text{dost}\, L}. \quad \text{sty}\, b = \frac{\text{dosty}\, L}{\text{wst}\, \varphi}. \qquad \text{Przeto: *)}$$

---

*) Chcąc dowieść wskazane w tym §. wzory, postąpmy następuiącym sposobem. Weźmy zamiast troykąta abp (*fig.* 40) inny troykąt zupełnie do niego przystaiący ABC. Gdzie $B = p = P$. $C = b$. $a = pb$. $b = \varphi = ab$. $c = pa = 90° - L$.

W tym troykącie ABC prostokątnym w A mamy następne zrównania:

$$\text{dost}\, a = \text{dost}\, b . \text{dost}\, c. \quad \text{sty}\, B = \frac{\text{sty}\, b}{\text{wst}\, c}. \quad \text{sty}\, C = \frac{\text{sty}\, c}{\text{wst}\, b} \ldots\ldots (a).$$

Widzimy, że z tych zrównań (a) wypadaią pierwsze wzory §. 145. Poszukaymy wartości na B. C. a.

$$(1)\ldots\ldots\begin{cases} pb = 90^\circ - L + \tfrac{1}{2}\varphi^2.\,\mathrm{sty}\,L. \quad P = \dfrac{\varphi}{\mathrm{dost}\,L} - \tfrac{1}{3}\varphi^3.\dfrac{\mathrm{wst}^2 L}{\mathrm{dost}^3 L}. \\ b = 90^\circ - \varphi.\,\mathrm{sty}\,L + \tfrac{1}{3}\varphi^3.\,\mathrm{sty}\,L\,(\tfrac{1}{2} + \mathrm{sty}^2 L). \end{cases}$$

$90^\circ - pb = L - \frac{1}{2}\varphi^2.\,\mathrm{sty}\,L$ daie przybliżoną wartość na szerokość jeograficzną mieysca B; P iest różnicą długości jeograficznych, a $b = pba$ iest poziomołukiem mieysca B rachowanym od północy na wschód.

Z natury naszego zadania wypada, że boki a i c nie wiele się różnią od siebie. Niech będzie *np.* $a = c + x$. Stąd wyniknie:

$$\mathrm{dost}\,(c+x) = \mathrm{dost}\,b.\,\mathrm{dost}\,c = \mathrm{dost}\,c.\,\mathrm{dost}\,x - \mathrm{wst}\,c.\,\mathrm{wst}\,x.$$

Dla małości x można wziąść $\mathrm{dost}\,x = 1$, a $\mathrm{wst}\,x = x$; przez co:

$$\mathrm{dost}\,b.\,\mathrm{dost}\,c = \mathrm{dost}\,c - x.\,\mathrm{wst}\,c.$$

Podobnież dla małości łuku b można wziąść $\mathrm{dost}\,b = 1 - \frac{b^2}{2}$.

Stąd: $\mathrm{dost}\,c - x.\,\mathrm{wst}\,c = \mathrm{dost}\,c\left(1 - \frac{b^2}{2}\right)$; $x = \frac{1}{2}b^2.\,\mathrm{dosty}\,c.$

$$a = c + \tfrac{1}{2}b^2.\,\mathrm{dosty}\,c \ldots\ldots \text{(b)}.$$

To zrównanie (b) zastosowane do troykąta abc daie: $pb = 90^\circ - L + \frac{1}{2}\varphi^2.\,\mathrm{sty}\,L$.

Powtóre: Dla małości kąta B i boku b, chcąc wyrazić styczne przez łuki, można wziąść dwa tylko wyrazy z rozwinienia na styczną. Stąd zrównanie (a) da: $B + \frac{B^3}{3} = \frac{b}{\mathrm{wst}\,c}\left(1 + \frac{b^2}{3}\right)$.

Podobnież można wziąść $B = \frac{b}{\mathrm{wst}\,c}$, $B^3 = \frac{b^3}{\mathrm{wst}^3\,c}$. Przeto:

$$B = \frac{b}{\mathrm{wst}\,c}\left\{1 + \frac{b^2\,(\mathrm{wst}^2 c - 1)}{3.\,\mathrm{wst}^2 c}\right\}. \quad B = \frac{b}{\mathrm{wst}\,c} - \frac{b^3.\,\mathrm{dost}^2 c}{3\,\mathrm{wst}^3 c} \ldots\text{ (c)}.$$

Wzór (c) zastosowany do troykąta pab daie: $P = \frac{\varphi}{\mathrm{dost}L} - \frac{1}{3}\varphi^3.\frac{\mathrm{wst}^2 L}{\mathrm{dost}^3 L}$.

Potrzecie. Idzie ieszcze o rozwinienie na szereg wartości kąta C. Na ten koniec załóżmy $C = 90^\circ - y$. Będzie: $\mathrm{sty}\,C = \mathrm{dosty}\,y$.

$\mathrm{dosty}\,y = \frac{\mathrm{sty}\,c}{\mathrm{wst}\,b}$; $\mathrm{sty}\,y = \mathrm{wst}\,b.\,\mathrm{dosty}\,c.$ Biorąc $\mathrm{sty}\,y = y + \frac{y^3}{3}$.

$\mathrm{wst}b = b - \frac{b^3}{6}$; wypada: $y + \frac{y^3}{3} = b.\,\mathrm{dosty}\,c - \frac{b^3}{6}\,\mathrm{dosty}\,c.$

146. Ponieważ $90^\circ - pb = L - \frac{1}{2}\varphi^2 . \text{sty } L$ daie tylko przybliżoną wartość na szerokość jeograficzną mieysca B, przeto postaraymy się znaleźć różnicę pomiędzy szerokością prawdziwą punktu B i $(L - \frac{1}{2}\varphi^2 . \text{sty } L)$, przez co i samę szerokość jeograficzną mieysca B ocenimy.

Odległość od bieguna mieysca B, którą znaleźliśmy z rachunku, iest $= pb = PMB$. Odległość zaś biegunowa mieysca B odniesiona do iego linii wierzchołkowey BN iest $= PNB$. $PNB = PMB + MBN$. Nazwawszy szerokość prawdziwą mieysca B przez L', będzie: $L' = L - \frac{1}{2}\varphi^2 . \text{sty } L - MBN$. Zamiast kąta MBN możemy wziąść kąt iemu równy MAN, i tego ostatniego szukać wartości. W troykącie NAM..... $NM : AM = \text{wst } NAM : \text{dost } L$. Albo: $NM : r = NBM : \text{dost } L$.

Stąd: $$NBM = \frac{NM . \text{dost} L}{r} = \psi.$$

We wzorze (5) §. 119. R. XII. czyniąc $n = r$ otrzymuiemy: $CM = e^2 r . \text{wst } L$. Podobnież na punkt B, którego szerokość jeograficzna iest L', mamy: $CN = e^2 r . \text{wst } L'$. Stąd: $MN = e^2 r (\text{wst } L - \text{wst } L') = 2 e^2 r . \text{wst} \frac{(L - L')}{2} . \text{dost} \frac{(L + L')}{2}$.

Ilość $L - L'$ iest bardzo małą, przeto zamiast $\text{wst} \frac{(L - L')}{2}$ można wziąść łuk, a zamiast $\text{dost} \frac{(L + L')}{2}$ można napisać dostL. Te skrócenia wprowadzone do naszego zrównania dadzą: $MN = e^2 r (L - L') \text{dost} L$. A że $L' = L - \frac{1}{2}\varphi^2 . \text{sty} L - MBN$;

Z tego zrównania otrzymamy przez przybliżenie: $y = b . \text{dosty} . c$; $y^3 = b^3 \text{dosty}^3 c$.

Przeto: $y = b . \text{dosty} . c - \frac{b^3}{3} \text{dosty } c (\frac{1}{2} + \text{dosty}^2 c)$.

(d).... $C = 90^\circ - b . \text{dosty } c + \frac{b^3}{3} . \text{dosty } c (\frac{1}{2} + \text{dosty}^2 c)$.

A w troykącie apb: $b = 90^\circ - \varphi . \text{sty } L + \frac{1}{3}\varphi^3 . \text{sty } L (\frac{1}{2} + \text{sty}^2 L)$.

opuszczaiąc przeto kąt MBN i kładąc tylko w wartość otrzymaną na MN, $L' = L - \frac{1}{2}\varphi^2 . \mathrm{sty}\, L$, znaydziemy:

$MN = \frac{1}{2} e^2 r \varphi^2 . \mathrm{sty}\, L . \mathrm{dost}\, L = \frac{1}{2} e^2 r \varphi^2 \,\mathrm{wst}\, L$; $NBM = \frac{1}{2} e^2 \varphi^2 . \mathrm{wst}\, L . \mathrm{dost}\, L$.

$L' = L - \frac{1}{2}\varphi^2 . \mathrm{sty}\, L - \frac{1}{2} e^2 \varphi^2 . \mathrm{wst}\, L . \mathrm{dost}\, L$.

Oto iest wzór na szerokość jeograficzną mieysca B poprawną dlą elliptyczności ziemi. Poprawka ta nayczęściey zaniedbaną bydź może.

Uwaga. Chcąc mieć wartość ściśleyszą na kąt $NBM = \psi$, która nam będzie poźniey potrzebna, weźmy: $MN = 2 e^2 r . \mathrm{wst}\, \frac{1}{2}(L - L') \,\mathrm{dost}\, \frac{1}{2}(L + L') =$
$= 2 e^2 r \,\mathrm{wst} \frac{1}{2} dL . \mathrm{dost}\, (L - \frac{1}{2} d L) = 2 e^2 r \,\mathrm{wst} \frac{1}{2} dL . \mathrm{dost}\, L + 2 e^2 r \,\mathrm{wst}^2 \frac{1}{2} dL . \mathrm{wst}\, L$.

A że z troykąta NBM.... $\mathrm{wst}\, \psi = \mathrm{wst}\, NBM = \frac{MN . \mathrm{dost}\, L'}{r}$; przeto:

$\mathrm{wst}\, \psi = e^2 . \mathrm{wst}\, d L . \mathrm{dost}\, L . \mathrm{dost}\, L' + \frac{1}{2} e^2 . \mathrm{wst}^2\, d L . \mathrm{wst}\, L . \mathrm{dost}\, L'$.

Lecz: $\mathrm{dost}\, L' = \mathrm{dost}\, L + \mathrm{wst}\, L . \mathrm{wst}\, d L$.

Zatém: $\psi = e^2 . d L . \mathrm{dost}^2\, L + \frac{3}{2} e^2\, d L . \mathrm{wst}\, L . \mathrm{wst}\, dL . \mathrm{dost}\, L$.

147. Kąt $apb = p$ zupełnie iest równy kątowi P, różnicy długości jeograficznych mieysc A i B. Bo kąt zawarty w biegunie pomiędzy południkami nic zależy od wypukłości ziemi przy równiku.

Poziomołuk znaleziony pba niczém się podobnież nie różni od poziomołuku PBA; iak to, wykładaiąc z kolei sposób *Delambra*, postrzeżemy.

Łącząc te wszystkie uwagi możemy wypisać na szerokość, długość i poziomołuk mieysca B następuiące wzory.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Poziomołuk } PBA = z = 90^\circ - \frac{R''y}{r} \mathrm{sty}\, L + \frac{1}{3} R'' . \frac{y^3}{r^3} . \mathrm{sty}\, L\, (\frac{1}{2} + \mathrm{sty}^2 L). \\ \text{Różnica długości jeograficzney } P = \frac{R''y}{r . \mathrm{dost}\, L} (1 - \frac{1}{3} \frac{y^2}{r^2} . \mathrm{sty}^2 L). \\ \text{Szerokość jeogr. } L' = L - \frac{1}{2} R'' . \frac{y^2}{r^2} \mathrm{sty}\, L - \frac{1}{2} R'' e^2 . \frac{y^2}{r^2} . \mathrm{wst}\, L . \mathrm{dost}\, L. \\ \text{I wzaiemnie: } \quad L = L' + \frac{1}{2} R'' . \frac{y^2}{r^2} . \mathrm{sty}\, L' + \frac{1}{2} R'' e^2 . \frac{y^2}{r^2} . \mathrm{wst}\, L' . \mathrm{dost}\, L'. \end{array}\right\} \ldots\ldots (\alpha).$$

Chcąc otrzymać wartości na z, P, L′ w sekundach rozmnożyliśmy niektóre wyrazy przez promień R w sekundach i równy $\frac{1}{\text{wst } 1''}$.

Tu ieszcze widzimy, że z, P, L′, są funkcyami (L i y); y = AB, iest to łuk spuszczony z punktu B, prostopadły do południka PAE. Przeto używaiąc w praktyce wzorów (α), potrzeba iuż mieć wyrachowane współprzystawy prostokątne stanowisk.

148. Nayczęściey bywa, że nieznamy szerokości jeograficzney mieysca A, ale tylko wiemy iego odległość x od osi prostopadłey do linii południowey. Potrzeba więc x dane w metrach lub w sążniach zamienić na sekundy, i ze stosownym znakiem dodać do szerokości jeograficzney osi prostopadłey do linii południowey, przez co szerokość jeograficzną punktu A oznaczymy.

Wzór na zamianę długości łuku x na sekundy wyprowadza się następuiącym sposobem. Wiemy, że x″ iest to: L—l, różnica szerokości jeograficzney punktu A i początka współprzystaw. Oznaczmy przez R promień krzywizny łuku południka w początku współprzystaw, a n niech będzie węgielną do tegoż punktu zakończoną na osi mnieyszey $= \frac{a}{(1-e^2 \text{wst}^2 l)^{\frac{1}{2}}}$.

Rozwiiaiąc x″ według potęg x, stosownie do wzoru *Makloryna*, będzie:

$$x'' = (x'') + \left(\frac{dx''}{dx}\right)\frac{x}{1} + \left(\frac{d^2 x''}{dx^2}\right)\frac{x^2}{1.2} + \text{etc.}$$

W tém rozwinieniu $(x'') = 0$; a zaś $\left(\frac{dx''}{dx}\right) = \frac{1}{R}$. Bo wiemy z §. 127, że:

$$R = \frac{dS}{dL}. \qquad \left(\frac{d^2 x''}{dx^2}\right) = \frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{dx}.$$

A że z §. 126. $R = a(1-e^2)(1-e^2 \text{wst}^2 l)^{-\frac{3}{2}}$. Przeto: $\left(\frac{d^2 x''}{dx^2}\right) = d.\frac{(1-e^2 \text{wst}^2 l)^{\frac{3}{2}}}{a(1-e^2)} =$

$$= -\tfrac{3}{2}\,\frac{(1-e^2 \text{wst}^2 l)^{\frac{1}{2}}}{a(1-e^2)}\, e^2 . \text{wst}\, 2l . \frac{dl}{dx} = -\tfrac{3}{2}\,\frac{e^2}{(1-e^2)} . \frac{\text{wst}\, 2l}{R n}.$$

Zatém: $$x'' = \frac{x}{R \text{ wst } 1''} \left\{ 1 - \tfrac{3}{4} \left(\frac{e^2}{1-e^2} \right) \frac{\text{wst } 2l}{n} x \right\} \ldots\ldots (1)$$

Dwa te wyrazy wystarczaią na wszystkie przypadki trafiaiące się w zamianie x na x″. Nayczęściey iednak pierwszy wyraz dostatecznym iest; zwłaszcza gdy x″ nie przechodzi 1°.

Często się zdarza potrzeba zamiany długości łuku y na sekundy. Wzór w tym celu podobnym co i wyżey wyprowadza się sposobem.

Według wzoru *Makloryna:* $y'' = (y'') + \left(\frac{dy''}{dx}\right) x + \text{etc.}$ Pod szerokością l,

$$(y'') = \frac{y}{n} = y \, \frac{(1 - e^2 . \text{wst}^2 l)^{\frac{1}{2}}}{a}; \text{ stąd: } \left(\frac{dy''}{dx}\right) = -\tfrac{1}{2} \frac{y}{a} (1 - e^2 \text{wst}^2 l)^{-\frac{1}{2}} e^2 \text{wst} 2l . \frac{dl}{dx} =$$

$$= -\tfrac{1}{2} \frac{y}{a} \frac{(1 - e^2 \text{wst}^2 l)^{-\frac{1}{2}}}{R} e^2 \text{wst } 2l = -\tfrac{1}{2} \frac{y}{a^2} . \frac{e^2 n . \text{wst } 2l}{R}.$$

$$y'' = \frac{y}{n . \text{wst } 1''} \left(1 - \tfrac{1}{2} \frac{n^2}{a^2} e^2 \text{wst } 2l \frac{x}{R}\right) \ldots\ldots (2).$$

Dwa te wyrazy zawsze wystarczą na zamianę długości łuku y na sekundy.

Często iednak bierze się $y'' = \frac{y}{n . \text{wst} 1''} = y \, \frac{(1 - e^2 \text{wst}^2 l)^{\frac{1}{2}}}{a . \text{wst } 1''} \ldots\ldots (3).$

Wzory (1) i (2) podane przez *Puissana* bardzo są łatwe do praktycznego rachunku. W nich spółczynniki stałe ilości x i y służą na wszystkie punkta karty kraiu. Inżynier *Plessis* podał w tymże samym celu wzory złożone z większey liczby wyrazów, które umieszczonym tu sposobem łatwo się wyprowadzić daią. I dla tego przytaczam ie bez dowodu.

$$(4) \ldots x'' = \frac{x}{R . \text{wst } 1''} \left\{ 1 - \tfrac{3}{4} \frac{x}{R} . \frac{e^2 . \text{wst} 2l}{1 - e^2 \text{wst}^2 l} - \tfrac{1}{2} \frac{x^2}{R^2} . \frac{e^2 . \text{dost } 2l}{1 - e^2 \text{wst}^2 l} + \tfrac{1}{4} \frac{x^3}{R^3} . \frac{e^2 . \text{wst } 2l}{1 - e^2 . \text{wst}^2 l} \right\}.$$

$$(5) \ldots y'' = \frac{y}{n . \text{wst} 1''} \left\{ 1 - \tfrac{1}{2} \frac{x}{R} . \frac{e^2 . \text{wst } 2l}{1 - e^2 . \text{wst}^2 l} - \tfrac{1}{2} . \frac{x^2}{R^2} . \frac{e^2 \text{dost } 2l}{1 - e^2 . \text{wst}^2 l} + \tfrac{1}{3} \frac{x^3}{R^3} . \frac{e^2 \text{wst } 2l}{1 - e^2 \text{wst}^2 l} \right\}.$$

149. *Sposób Delambra.*

W wyłożonym sposobie *Leżandra* do wyrażeń na z, P i L′ wchodził łuk prostopadły spuszczony z punktu B na południk PAE; w sposobie zaś *Delambra* kąt A może bydź iakikolwiek; potrzeba tylko znać długość i szerokość jeograficzną mieysca A, poziomołuk punktu B uważanego z A czyli kąt PAB, i bok troykąta mierzonego AB, albo też iego cięciwę.

Użyiemy notowań przyiętych w wyższych paragrafach; tylko wprowadzony tu poziomołuk PAB przez $(180^\circ - Z)$ wyrazimy. Przeto $Z = EAB$ iest poziomołukiem liczonym od południa na zachód. Zamiast szukania wprost szerokości L', będziemy szukać $L - L' = dL$, to iest poprawki szerokości, która zaledwo kilku minut dochodzi. Uważaiąc naprzód ziemię za kulę, mamy w troykącie kulistym.

PAB: $\text{dost}\,PB = \text{dost}\,A.\,\text{wst}\,PA.\,\text{wst}\,AB + \text{dost}\,PA.\,\text{dost}\,AB.$

czyli: $\text{wst}\,L' = \text{dost}\,A.\,\text{dost}\,L.\,\text{wst}\,\varphi + \text{wst}\,L.\,\text{dost}\,\varphi.$

$$\text{wst}\,L - \text{wst}\,L' = (1 - \text{dost}\,\varphi)\,\text{wst}\,L - \text{wst}\,\varphi.\,\text{dost}\,A.\,\text{dost}\,L =$$
$$= 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\,\text{wst}\,L - \text{wst}\,\varphi.\,\text{dost}\,A.\,\text{dost}\,L.$$

Podstawiwszy za A $180^\circ - Z$ będzie:

$$2\,\text{wst}\tfrac{1}{2}(L - L') = \frac{\text{wst}\,\varphi.\,\text{dost}\,Z.\,\text{dost}\,L + 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\,\text{wst}\,L}{\text{dost}\tfrac{1}{2}(L + L')} = 2\,\text{wst}\tfrac{1}{2}\,dL.$$

$$2\,\text{wst}\tfrac{1}{2}\,dL = \frac{\text{wst}\varphi.\,\text{dost}Z.\text{dost}L + 2\text{wst}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\,\text{wst}L}{\text{dost}(L - \tfrac{1}{2}\,dL)} = \frac{\text{wst}\varphi.\text{dost}Z.\text{dost}L + 2\text{wst}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\,\text{wst}L}{\text{dost}\tfrac{1}{2}\,dL\,(\text{dost}\,L + \text{wst}\,L.\,\text{sty}\tfrac{1}{2}\,dL)}.$$

A że można brać bez żadney omyłki $2\,\text{wst}\tfrac{1}{2}\,dL = \text{wst}\,dL$, a $\text{dost}\tfrac{1}{2}\,dL = 1$; przeto podstawiwszy te wartości w otrzymaném zrównaniu, znaydziemy:

$$\text{wst}\,dL = \frac{\text{wst}\,\varphi.\,\text{dost}\,Z + 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\,\text{sty}\,L}{1 + \text{sty}\,L.\,\text{sty}\tfrac{1}{2}\,dL}.$$

$$\text{wst}\,dL = (\text{wst}\,\varphi.\,\text{dost}\,Z + 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\,\text{sty}\,L)\,(1 - \text{sty}\,L.\,\text{sty}\tfrac{1}{2}\,dL + \text{sty}^2\tfrac{1}{2}\,dL.\,\text{sty}^2L + \text{etc}).$$

Dla małości dL można wziąść: $\text{sty}\tfrac{1}{2}\,dL = \text{wst}\tfrac{1}{2}\,dL = \tfrac{1}{2}\,\text{wst}\,dL.$

Stąd: $\text{sty}\tfrac{1}{2}\,dL = (\tfrac{1}{2}\,\text{wst}\,\varphi.\,\text{dost}\,Z + \text{wst}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\,\text{sty}\,L)\,(1 - \text{sty}L.\,\text{sty}\tfrac{1}{2}\,d\,L)\ldots\ (1)$:

$$= (\tfrac{1}{2}\,\text{wst}\,\varphi.\,\text{dost}\,Z + \text{wst}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\,\text{sty}\,L - \tfrac{1}{2}\,\text{wst}\,\varphi.\,\text{dost}\,Z.\,\text{sty}\,L.\,\text{sty}\tfrac{1}{2}\,dL.$$

Podstawiwszy za $\text{sty}\tfrac{1}{2}\,dL$ iey wartość przybliżoną $\tfrac{1}{2}\,\text{wst}\,\varphi.\,\text{dost}\,Z$, będzie:

$$\text{sty}\tfrac{1}{2}\,dL = \tfrac{1}{2}\,\text{wst}\,\varphi.\,\text{dost}\,Z + \text{wst}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\,\text{sty}\,L - \tfrac{1}{4}\,\text{wst}^2\varphi.\,\text{dost}^2\,Z.\,\text{sty}\,L.$$

A że $\frac{1}{4}\,\text{wst}^2\varphi$ prawie iest równa $\text{wst}^2\frac{1}{2}\varphi$, przeto:

$$\text{sty}\tfrac{1}{2}\,dL = \tfrac{1}{2}\,\text{wst}\,\varphi.\,\text{dost}\,Z + \tfrac{1}{4}\,\text{wst}^2\varphi.\,\text{wst}^2\,Z.\,\text{sty}\,L \ldots (2).$$

Szerokość jeograficzna mieysca B poprawna dla elliptyczności ziemi $=$

$$= L'' = L' - NBM = L' - \psi. \quad \text{A że } L - L' = dL. \quad L' = L - dL.$$

Przeto: $L'' = L - dL - \psi$. W uwadze dołączoney do §. 146. znaleźliśmy:

$$\psi = c^2.\,\text{dost}^2\,L.\,dL + \tfrac{3}{2}c^2.\,\text{wst}\,L.\,\text{wst}\,dL.\,\text{dost}\,L.\,dL.$$

Stąd: $L'' = L - dL\,(1 + c^2\,\text{dost}^2\,L + \frac{3}{2}\,c^2.\,\text{wst}\,L.\,\text{wst}\,dL.\,\text{dost}\,L)$.

(3)... $L'' = L - (\varphi.\,\text{dost}Z + \frac{1}{2}\varphi.\,\text{wst}\varphi.\,\text{wst}^2Z.\,\text{sty}L)\,(1 + c^2\,\text{dost}^2L + \frac{3}{2}c^2\,\text{wst}L.\,\text{wst}dL.\,\text{dost}L)$.

Oto iest wzór na szerokość jeograficzną mieysca B poprawną dla elliptyczności ziemi i wyrażoną przez $f(L.\varphi.c.Z)$. W drugim iego wyrazie można opuścić w drugim czynniku ilość nieznmiernie małą $\frac{3}{2}\,c^2.\,\text{wst}\,L.\,\text{wst}\,dL.\,\text{dost}\,L$.

150. Poziomołuk $PBA = B$ otrzymamy z troykąta kulistego PBA, używając analogii *Nepera*. Będzie:

$$\text{sty}\tfrac{1}{2}\,(B+A) = \text{dosty}\tfrac{1}{2}\,P\,\frac{\text{dost}\frac{1}{2}\,(PB-PA)}{\text{dost}\frac{1}{2}\,(PB+PA)} = \text{dosty}\tfrac{1}{2}\,P.\,\frac{\text{dost}\frac{1}{2}\,(L-L')}{\text{dost}\frac{1}{2}\,(180^\circ-(L+L'))}.$$

$$\text{sty}\tfrac{1}{2}\,(B+A) = \text{dosty}\tfrac{1}{2}P.\,\frac{\text{dost}\frac{1}{2}\,(L-L')}{\text{wst}\,\frac{1}{2}\,(L+L')};$$

$$\text{dosty}\tfrac{1}{2}\,(B+A) = \text{stycz}\left\{90^\circ - \tfrac{1}{2}\,(B+A)\right\} = \text{sty}\tfrac{1}{2}\,P\,\frac{\text{wst}\frac{1}{2}\,(L+L')}{\text{dost}\frac{1}{2}(L-L')}.$$

Dla małości łuków $\left\{90^\circ - \frac{1}{2}\,(B+A)\right\}$ i $\frac{1}{2}\,P$ można wziąść:

$$90^\circ - \tfrac{1}{2}\,(B+A) = \tfrac{1}{2}\,P.\,\frac{\text{wst}\frac{1}{2}\,(L+L')}{\text{dost}\frac{1}{2}(L-L')}; \qquad B = 180^\circ - A - \frac{P.\,\text{wst}\frac{1}{2}\,(L+L')}{\text{dost}\frac{1}{2}\,(L-L')}.$$

$$B = Z - \frac{P.\,\text{wst}\frac{1}{2}\,(L+L')}{\text{dost}\frac{1}{2}\,(L-L')}.$$

Chcąc otrzymać poziomołuk punktu B rachowany od południa na zachod, potrzeba wziąść:

$$180^\circ + B = Z' = 180^\circ + Z - \frac{P.\ \text{wst}\,\tfrac{1}{2}(L+L')}{\text{dost}\,\tfrac{1}{2}(L-L')}.$$

W troykącie APB mamy: $\text{wst}\,P = P = \frac{\text{wst}\,\varphi.\ \text{wst}\,Z}{\text{dost}\,L'}$.

Przeto: $$Z' = 180^\circ + Z - \frac{\varphi.\ \text{wst}\,Z.\ \text{wst}\,\tfrac{1}{2}(L+L')}{\text{dost}\,\tfrac{1}{2}(L-L')\ \text{dost}\,L'}.$$

$$Z' = 180^\circ + Z - \frac{\varphi.\ \text{wst}\,Z.\ \text{wst}\,\tfrac{1}{2}(2L' + dL)}{\text{dost}\,L'.\ \text{dost}\,\tfrac{1}{2}\,dL} =$$

$$= 180^\circ + Z - \frac{\varphi.\ \text{wst}\,Z}{\text{dost}\,\tfrac{1}{2}\,dL}\left(\frac{\text{wst}\,L'.\ \text{dost}\,\tfrac{1}{2}\,dL + \text{wst}\,\tfrac{1}{2}\,dL.\ \text{dost}\,L'}{\text{dost}\,L'}\right).$$

$$Z' = 180^\circ + Z - \varphi.\ \text{wst}\,Z.\ \text{sty}\,L' - \varphi.\ \text{wst}\,Z.\ \text{sty}\,\tfrac{1}{2}\,dL.$$

Kładąc wartość za sty$\tfrac{1}{2}$dL i opuszczaiąc wyrazy trzeciego porządku iako nic nieznaczące, otrzymamy:

$$Z' = 180^\circ + Z - \varphi.\ \text{wst}\,Z.\ \text{sty}\,L' - \tfrac{1}{4}\varphi.\ \text{wst}\,\varphi.\ \text{wst}\,2Z \ldots\ldots (4).$$

Wzór (4) daie dokładną wartość na poziomołuk mieysca B. Wpływ elliptyczności ziemi na odmianę tego kąta śmiało zaniedbany bydź może. *)

---

*) Poziomołuk prawdziwy mieysca B iest to kąt zawarty pomiędzy płaszczyzną PBN i ABN. Różnica iego od kąta ABP uważanego za kulisty, alboli też od kąta abp, zupełnie iest nieznaczna. Uważmy bowiem punkt B iako środek kuli, iey powierzchnia będzie przecięta trzema płaszczyznami ABM, NBM i ABN. Z tych przecięć utworzy się troykąt kulisty a′Mn. W tym troykącie mamy kąt a′Mn = z, poziomołuk punktu A uważanego z B liczony od północy na wschód i wzięty na kuli, którey środek przypada w M; bok nM = NBM = ψ = poprawce szerokości. Nadto troykąt ABM może bydź uważany za równoramienny, bo MB prawie iest równe AM. Przeto: A=B. Czyli: $180^\circ = 2B + AMB = 2B + \varphi$; $2B = 180^\circ - \varphi$. $B = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi = a'M$. Stąd w troykącie a′MN znamy trzy rzeczy to iest: a′M, a′Mn i nM, a chcemy szukać kąta a′nM = $180^\circ - z'$: z′ iest to poziomołuk prawdziwy punktu A uważanego z B liczony od północy na wschód. Wiemy z trygonometryi

151. Dowiedliśmy w §. 150, że $P = \frac{\varphi \,\mathrm{wst}\, Z}{\mathrm{dost}\, L'} = M' - M$ różnicy długości mieysc B i A. Stąd: $M' = M + \frac{\varphi \,\mathrm{wst}\, Z}{\mathrm{dost}\, L'}$.

Kładąc za L' wartość przybliżoną $L - \varphi.\ \mathrm{dost}\ Z$, będzie:

$$M' = M + \frac{\varphi.\ \mathrm{wst}\ Z}{\mathrm{dost}\,(L - \varphi.\ \mathrm{dost}\ Z)} = M + \frac{\varphi.\ \mathrm{wst}\ Z}{\mathrm{dost}\ L.\ \mathrm{dost}\ \varphi.\ \mathrm{dost}\ Z + \mathrm{wst}\ L.\ \mathrm{wst}\ \varphi.\ \mathrm{dost}\ Z}.$$

---

kulistey, że w troykącie kulistym ABC.. $\mathrm{dosty}\ A = \frac{\mathrm{dosty}\ a.\ \mathrm{wst}\ b - \mathrm{dost}\ C.\ \mathrm{dost}\ b}{\mathrm{wst}\ C}$.

Czyniąc $C = z' - \alpha = z = a'Mn$; $b = \psi = NBM$; $a = 90^\circ - \frac{\varphi}{2} = a'M$.

$A = 180^\circ - z'$. Będzie: $-\mathrm{sty}\ z' = \frac{\mathrm{wst}\,(z' - \alpha)}{\mathrm{sty}\frac{\varphi}{2}.\ \mathrm{wst}\,\psi - \mathrm{dost}\,(z' - \alpha)\ \mathrm{dost}\,\psi}$.

$$-\frac{\mathrm{sty}\ \frac{\varphi}{2}.\ \mathrm{wst}\,\psi\ \mathrm{sty}\ z'}{\mathrm{dost}\,(z' - \alpha)} + \mathrm{dost}\,\psi\ \mathrm{sty}\ z' = \frac{\mathrm{wst}\,(z' - \alpha)}{\mathrm{dost}\,(z' - \alpha)}.$$

$$\rho.\quad \mathrm{sty}\,(z' - \alpha) = \mathrm{sty}\ z'.\ \mathrm{dost}\,\psi - \frac{\mathrm{sty}\ z'.\ \mathrm{sty}\ \frac{\varphi}{2}.\ \mathrm{wst}\,\psi}{\mathrm{dost}\,(z' - \alpha)}.$$

$$\mathrm{sty}\ z' - \mathrm{sty}\,(z' - \alpha) = \mathrm{sty}\ z'\,(1 - \mathrm{dost}\,\psi) + \frac{\mathrm{sty}\ z'.\ \mathrm{sty}\ \frac{\varphi}{2}.\ \mathrm{wst}\,\psi}{\mathrm{dost}\,(z' - \alpha)}.$$

A że: $\mathrm{sty}\ z' - \mathrm{sty}\,(z' - \alpha) = \frac{\mathrm{wst}\,\alpha}{\mathrm{dost}\ z'.\ \mathrm{dost}\ (z' - \alpha)}$;

Przeto: $\mathrm{wst}\,\alpha = \mathrm{wst}^2\,\tfrac{1}{2}\psi.\ \mathrm{wst}\ 2z' + \mathrm{wst}\ z'.\ \mathrm{wst}\,\psi.\ \mathrm{sty}\,\tfrac{1}{2}\varphi =$

$= \tfrac{1}{4}\,\mathrm{wst}^2\,\psi.\ \mathrm{wst}\ 2z' + \mathrm{wst}\ z'.\ \mathrm{wst}\,\psi.\ \mathrm{sty}\ \tfrac{1}{2}\varphi.$

A że: $\mathrm{wst}\,\psi = e^2.\ \mathrm{wst}\ dL.\ \mathrm{dost}^2\ L$;

przeto: $\mathrm{wst}\,\alpha = \tfrac{1}{4}\,e^4\ \mathrm{wst}^2 dL.\ \mathrm{dost}^4 L.\ \mathrm{wst}\ 2z' + e^2.\ \mathrm{wst}\ dL.\ \mathrm{dost}^2 L\ \mathrm{sty}\ \frac{\varphi}{2}\ \mathrm{wst}\ z'$.

Zamiast $\mathrm{wst}\ dL$ (§. 149) można wziąść $\mathrm{wst}\,\varphi.\ \mathrm{dost}\ Z$.

$\mathrm{wst}\,\alpha = \tfrac{1}{4}\,e^4.\mathrm{wst}^2\,\varphi.\ \mathrm{dost}^2 Z.\ \mathrm{dost}^4 L.\ \mathrm{wst}\,2Z + e^2.\ \mathrm{wst}\,\varphi.\ \mathrm{dost}\ Z.\ \mathrm{dost}^2 L\ \mathrm{sty}\,\tfrac{1}{2}\varphi.\ \mathrm{wst}Z.$

$\alpha = \tfrac{1}{4}\,e^4\,\psi^2\ \mathrm{dost}^2 Z.\ \mathrm{wst}\ 2Z.\ \mathrm{dost}^4\ L + \tfrac{1}{4}\,e^2\,\varphi^2.\ \mathrm{wst}\ 2Z.\ \mathrm{dost}^2 L.$

Poprawka ta poziomołuku śmiało może bydź zaniedbaną.

$M' = M + \frac{\varphi.\,\text{wst}\,Z}{\text{dost}\,L\,(1+\varphi.\,\text{dost}\,Z.\,\text{sty}\,L)}$. Bo φ. dost Z iest łukiem bardzo małym. Nareszcie mamy: $M' = M + \frac{\varphi.\,\text{wst}\,Z}{\text{dost}\,L} - \frac{1}{2}\varphi^2\,\text{wst}\,2\,Z.\,\frac{\text{sty}\,L}{\text{dost}\,L}$ ......(5).

To iest wzór podany przez *Delambra* na długość jeograficzną mieysca B.

Wypiszmy nakoniec porządkiem wszystkie wzory *Delambra:*

$$(\beta)\ldots\left\{\begin{aligned}
&\varphi'' = \frac{x}{a.\,\text{wst}\,1''}(1 - \tfrac{1}{2}e^2.\,\text{wst}^2\,L)^*).\\
&L'' = L - (\varphi\,\text{dost}\,Z + \tfrac{1}{2}\varphi^2.\,\text{wst}\,1''.\,\text{wst}^2\,Z.\,\text{sty}\,L)\,(1 + e^2\,\text{dost}^2\,L).\\
&Z' = 180^\circ + Z - \varphi.\,\text{wst}\,Z.\,\text{sty}\,L' - \tfrac{1}{4}\varphi^2.\,\text{wst}\,1''.\,\text{wst}\,2\,Z =\\
&\qquad = 180^\circ + Z - (M' - M)\,\frac{\text{wst}\tfrac{1}{2}\,(L+L')}{\text{dost}\tfrac{1}{2}\,(L-L')}.\\
&M' = M + \varphi\frac{\text{wst}\,Z}{\text{dost}\,L'} = M + \frac{\varphi.\,\text{wst}\,Z}{\text{dost}\,L} - \tfrac{1}{2}\varphi^2.\,\text{wst}\,1''.\,\text{wst}\,2\,Z\,\frac{\text{sty}\,L}{\text{dost}\,L}.
\end{aligned}\right.$$

Uwaga. Rozwiązuiąc arytmetycznie wzory (β) postrzeglibyśmy: że lubo wzór na długość M′ teorycznie tenże sam iest uważaiąc ziemię za kulę i za sferoidę, w praktyce iednak odmiana spłaszczenia wpłynie cokolwiek na odmianę wartości M; a to z przyczyny zamiany łuku AB na sekundy, dla wyrachowania φ. Toż samo postrzeżenie stosuie się do poziomołuku.

152. W rozdziale X. wyłożyliśmy sposób *Leżandra* służący na rachowa-

---

*) *Delambre*, na karcie 672 tomu 2go *B. du S. m. d.* i na karcie 33 tomu 3go tegoż dzieła, pokazał rachunkiem: że chcąc zamienić na sekundy łuk x dochodzący do iednego stopnia i więcey, dość iest dzielić iego wartość daną w metrach lub w sążniach przez węgielną zakończoną na osi mnieyszey. To iest: że $\varphi'' = \frac{x\,(1 - e^2\,\text{wst}^2 L)^{\frac{1}{2}}}{a\,\text{wst}\,1''}$. Oprócz tego dowiódł tenże sam autor, że śmiało można wziąść tylko dwa wyrazy z rozwinienia $(1-e^2\,\text{wst}^2 L)^{\frac{1}{2}}$, i uważać $\varphi'' = \frac{x(1 - \frac{1}{2}e^2\text{wst}^2 L)}{a\,\text{wst}\,1''}$.

nie współprzysław prostopadłych znaków i długości linii południowey. Sposób tên daie dobre wypadki, kiedy powstaiące z wykreślenia troykąty prostokątne nie są nazbyt wielkie, *np.* gdy nie maią boków większych od $1^\circ \frac{1}{2}$. Inaczey zaś wypadki będą błędne; bo twierdzenie *Ležandra* §. 103. nie stosuie się do bardzo wielkich troykątów.

Delambre, rachuiąc łuk południka francuzkiego leżącego między Dunkierką i Barcelloną, pierwszy zwrócił na to uwagę; i rozwiązywał troykąty kuliste oparte na łuku południka, maiące za wierzchołek znak obserwowany. Rachunek ten iest nazbyt długi, a troykąty często maią kąty bardzo ostre i rozwarte. Dla tego to podał ieszcze dwa wzory na rachowanie długości łuku południka ziemskiego otoczonego obserwowaną siecią troykątów; gdzie potrzeba znać odległość znaków i długości, szerokości oraz poziomołuki stanowisk. Wzory te służą do zamiany każdego boku sieci troykątów, na odpowiedną mu cząstkę łuku południka, powstałą ze spuszczenia dwóch łuków prostopadłych ze znaków na południk. Tym sposobem boki sieci troykątów, leżący około południka z iedney i drugiey strony, zamieniaią się na iego długość; a otrzymane dwa wypadki długości łuku południka daią sprawdzenie roboty.

Wyłożymy tu z kolei oba wzory *Delambra*. Na ten koniec weźmy z §. 149 wartość na wst dL tuż umieszczoną przed wzorem (1). Będziemy mieli:

$$\text{wst}\, dL = (\text{wst}\,\varphi.\,\text{dost}\,Z + 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\,\text{sty}\,L)(1 - \text{sty}\,L.\,\text{sty}\tfrac{1}{2}dL + \text{sty}^2\tfrac{1}{2}dL.\,\text{sty}^2 L).$$

Kładąc ze wzoru (2) §. 149. $\text{sty}\,\frac{1}{2}dL = \frac{1}{2}\text{wst}\,\varphi.\,\text{dost}\,Z + \frac{1}{4}\text{wst}^2\varphi.\,\text{wst}^2 Z.\,\text{sty}\,L.$ a $\text{sty}^2\frac{1}{2}dL = \frac{1}{4}\text{wst}^2\varphi.\,\text{dost}^2 Z.$ Będzie:

$$\text{wst}\, dL = (\text{wst}\,\varphi.\,\text{dost}\,Z + 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\,\text{sty}\,L)(1 - \tfrac{1}{2}\text{wst}\,\varphi.\,\text{dost}\,Z\,\text{sty}\,L -$$

$$- \tfrac{1}{4}\text{wst}^2\varphi.\,\text{wst}^2 Z.\,\text{sty}^2 L + \tfrac{1}{4}\text{wst}^2\varphi.\,\text{dost}^2 Z.\,\text{sty}^2 L).$$

$$= \text{wst}\,\varphi.\,\text{dost}Z + 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\text{sty}L - \tfrac{1}{2}\text{wst}^2\varphi.\text{dost}^2 Z.\text{sty}L - \text{wst}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\text{wst}\varphi.\text{dost}Z.\text{sty}^2 L -$$

$$- \tfrac{1}{4}\text{wst}^3\varphi.\,\text{dost}\,Z.\,\text{wst}^2 Z.\,\text{sty}^2 L + \tfrac{1}{4}\text{wst}^3\varphi.\,\text{dost}^3 Z.\,\text{sty}^2 L.$$

$$= \mathrm{wst}\,\varphi.\,\mathrm{dost}\,Z + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{wst}^2\,\varphi.\,\mathrm{sty}\,L - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{wst}^2\,\varphi.\,\mathrm{dost}^2 Z.\,\mathrm{sty}\,L - \tfrac{1}{4}\,\mathrm{wst}^3\varphi.\,\mathrm{dost}\,Z.\,\mathrm{sty}^2 L +$$
$$+ \tfrac{1}{4}\,\mathrm{wst}^3\,\varphi.\,\mathrm{dost}^3\,Z.\,\mathrm{sty}^2 L - \tfrac{1}{4}\,\mathrm{wst}^3\,\psi.\,\mathrm{dost}\,Z.\,\mathrm{wst}^2 Z.\,\mathrm{sty}^2 L.$$

$$\mathrm{wst}\,dL = \mathrm{wst}\,\varphi.\,\mathrm{dost}\,Z + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{wst}^2\varphi.\,\mathrm{wst}^2\,Z.\,\mathrm{sty}\,L - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{wst}^3\,\varphi.\,\mathrm{dost}\,Z.\,\mathrm{wst}^2 Z.\,\mathrm{sty}^2\,L \ldots (9).$$

Chcąc otrzymać ze wstawy dL wartość łuku dL, potrzeba do wst dL dorzucić $\frac{1}{6}\,\frac{\mathrm{wst}^3\,dL}{n^2} = \frac{1}{6}.\frac{\varphi^3.\,\mathrm{dost}^3\,Z}{n^3}$; n oznacza węgielną do powierzchni obrótowey ellipsoidy ziemskiey, daną w metrach lub w sążniach. Stosownie do wyłożonych tu uwag:

$$dL = \varphi\,\mathrm{dost}\,Z + \tfrac{1}{2}\,\frac{\varphi^2}{n}\,\mathrm{wst}^2\,Z.\,\mathrm{sty}\,L - \tfrac{1}{6}\,\frac{\psi^3}{n^2}\,\mathrm{wst}^2\,Z.\,\mathrm{dost}\,Z\,(1 + 3\,\mathrm{sty}^2\,L) \ldots\ldots\ldots (\gamma).$$

Delambre i *Puissant* postępuiąc całe inną drogą otrzymali wzór (γ), który tu wyprowadziłem daleko krótszym sposobem.

Wzór ten podany naprzód przez *Delambra* bardzo iest dogodny do rachowania w metrach lub w sążniach łuku południka ziemskiego zawartego między równoleżnikami znaków obserwowanych. Dla dokładnego iego rozwiązania dość mieć przybliżone wartości na Z i na L.

Poziomołuk Z liczy się tu od południa na zachod.

Wielkość łuku φ dana iest w metrach lub w sążniach z rozwiązania sieci troykątów; na węgielną n=AM, znaleźliśmy w §. 119. Roz. XI. wzór $\frac{a}{(1-e^2\mathrm{wst}^2 L)^{\frac{1}{2}}}$. Można na nią znaleźć gotowe iuż tablice ułożone w dziełach *Puissana* i *Delambra.*

153. Jeżeli z rozwiązania sieci troykątów znamy cięciwę K łuku φ, wtenczas ze zrównania ($\mathring{q}$) można wyprowadzić wzór na dL przez funkcyą K następnym sposobem.

$$\mathrm{wst}\,dL = 2\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}\varphi.\,\mathrm{dost}\tfrac{1}{2}\,\varphi.\,\mathrm{dost}\,Z + 2\,\mathrm{wst}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\,\mathrm{wst}^2 Z.\,\mathrm{sty}\,L -$$
$$- 4\,\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}\,\varphi.\,\mathrm{wst}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\,\mathrm{dost}\,Z.\,\mathrm{wst}^2 Z.\,\mathrm{sty}^2 L.$$