ROZDZIAŁ XIII.

Sposoby poprawiania rachowanych położeń jeograficznych głównych punktów karty za pomocą wzorów trygonometrycznych różniczkowych.

---

158. Często się zdarza zrobić omyłkę w rachowaniu współprzysław stanowisk odniesionych do linii połudnowey i drugiey osi do niey prostopadłey; wpływie ona oczywiście na niedokładność rachowanych długości, szerokości i poziomołuków głównych punktów karty kraiu. Oprócz tego, czasem popełnimy mały błąd w obserwacyi poziomołuku, szerokości lub długości stanowiska, z którego rachuiemy położenia jeograficzne innych punktów. Może się trafić, że sprawdzaiąc wymiar podstawy odkryliśmy omyłkę, wpływaiącą na niedokładność rachowanych boków troykątów. W takich przypadkach można się obeyść bez powtarzania na nowo całego rachunku; dość mieć wzory trygonometryczne różniczkowe, daiące poprawkę rachowanych elementów.

Puissant w rozdz. 17 pierwszego tomu swoiey Jeodezyi zebrał i wyłożył zręcznie kilka w tym celu zagadnień, które tu z porządku przytoczymy.

159. *Zagadnienie* 1. Znaleźć błąd popełniony w wyrachowaney szerokości jeograficzney, długości i poziomołuku stanowisk, z odkrytey małey omyłki we współprzysławach odniesionych do linii południowey i drugiey osi do niey prostopadłey.

W tym razie rezonowanie nasze zastosuie się do wzorów (α) podanych w §. 147. rozdz. XII. Liniia południowa niech będzie osią odcinków x, a druga oś do niey prostopadła niech wyraża oś przystaw y.

Jeżeli odcinek x iest błędny o dx, wtenczas szerokość jeograficzna L będzie błędna o $dL = dx''$. Nazwawszy promień krzywizny odcinka x przez R, mamy:

$$dL = \frac{dx}{R.\,wst\,1''} \ldots\ldots (1).$$

Co do odmiany y. Zróżniczkowawszy we wzorze (α) §. 147. rozdz. XII. wartości na L', P i z co do y, biorąc wyrazy pierwsze wystarczaiące do rachowania dL', dP i dz, znaydziemy:

$$\left.\begin{array}{l} dL' = -\frac{R''.\,y\,dy}{r^2}\,sty\,L;\quad dP = \frac{R''.\,dy}{r.\,dost\,L} \\ dz = -R''\frac{dy}{r}\,sty\,L. \end{array}\right\} \ldots\ldots (2).$$

Gdybyśmy ieszcze odkryli błąd w szerokości L, wtenczas lepiey byłoby na nowo rozwiązać wzory (α), aniżeli udawać się do wzórów różniczkowych.

160. *Zagadnienie* 2. Dostrzegłszy omyłkę w obserwowanym lub w wyrachowanym poziomołuku, który wraz z innemi elementami służył do oznaczenia położeń jeograficznych stanowisk, znaleźć wzory na błędy stąd wynikłe w rachowanych długościach i szerokościach głównych punktów karty kraiu.

Dla rozwiązania tego zagadnienia udaię się do wzorów (β) podanych w §. 151. rozdz. XII. Mamy tam L'' i P' wyrażone przez funkcyą Z. Różniczkuiąc wartość na L'' co do Z, i biorąc tylko pierwszy wyraz wystarczaiący do znalezienia wartości na dL'', będzie: $dL'' = \varphi\,wst\,Z.\,dZ = wst\,\varphi\,wst\,Z.\,dZ$.

A że w troykącie kulistym BPA (*fig.* 39), mamy: $\frac{wst\,P}{wst\,\varphi} = \frac{wst\,Z}{dost\,L'}$; przeto:

$$wst\,\varphi.\,wst\,Z = wst\,P.\,dost\,L', \quad i: \quad dL'' = wst\,P.\,dost\,L'.\,dZ.$$

Podobnież różniczkuiąc wartość na P, mamy: $dP = \frac{\varphi.\,\text{dost}Z}{\text{dost}L'}.dZ.$

$$\left.\begin{array}{l} dP = \text{wst}\,P.\,\text{dosty}\,Z.\,dZ. \\ dL'' = \text{wst}\,P.\,\text{dost}\,L'.\,dZ. \end{array}\right\}\ldots\ldots(3).$$

Pamiętać potrzeba, że wzrost poziomołuku uważa się tu od południa na zachod.

Wzory (3) bardzo są dogodne do rozwiązania podanego zagadnienia. P. *Puissant* wyprowadził ie wcale inną i daleko dłuższą drogą. U niego wzór na dP składa się ze dwóch wyrazów, przeto iest trudnieyszym do rozwiązania od wzoru przez nas podanego. Wartość zaś na dL'' zupełnie iest taż sama.

Chcąc ze wzoru dP = wst P. dosty Z. dZ wyprowadzić wzór *Puissana*, należy podstawić za dosty Z wartość z troykąta pBa (*fig.* 39), ułożoną stosownie do (4) zrównania głównego trygonometryi kulistey. Mamy bowiem:

$$\text{dosty}\,pB.\,\text{wst}\,pa = \text{dost}\,pa.\,\text{dost}\,P + \text{wst}\,P.\,\text{dosty}\,paB.$$

Czyli: $$\text{sty}\,L'.\,\text{dost}\,L = \text{wst}\,L.\,\text{dost}\,P - \text{wst}\,P.\,\text{dosty}\,Z.$$

Stąd: $$\text{dosty}\,Z = \text{wst}\,L.\,\text{dosty}\,P - \text{sty}\,L'.\,\frac{\text{dost}\,L}{\text{wst}\,P}.$$

Zatém: $$dP = (\text{wst}\,L.\,\text{dost}\,P - \frac{\text{wst}L'}{\text{dost}\,L'}\,\text{dost}\,L)\,dZ = -2\,\text{wst}\,L.\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}\,P.\,dZ.$$

U *Puissana* wypadło: $dP = \text{wst}L(\text{r} - \text{sty}L'.\,\text{dosty}L.\,\text{dost}P)\,dZ = 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}P.\,\text{wst}L.\,dZ.$

Różnica znaków nic tu nie stanowi; bo tylko wzór dP = wst P. dosty Z. dZ, znakiem dosty Z, z pewnością pokazuie, kiedy za powiększeniem dZ rośnie dP i wzaiemnie.

Również należy pamiętać, że i we wzorze dL'' = wst P. dost L. dZ, powstałym z przemiany wzoru dL'' = wst φ. wst Z, kiedy Z iest w pierwszey i drugiey ćwiartce koła, to +dZ daie +dL''; w trzeciey zaś i czwartey +dZ odpowiada —dL'' i wzaiemnie. Tey ważney uwagi nie zrobił *Puissant*.

W troykącie PBA (*fig.* 39), znaleźć odmianę poziomołuku z = ABP, przez funkcyą odmiany poziomołuku Z = PAB.

W tym troykącie mam: $\text{wst}\,L = \text{dost}\,z.\ \text{wst}\,\varphi.\ \text{dost}\,L' + \text{dost}\,\varphi.\text{wst}\,L'$.

W tém zrównaniu za odmianą poziomołuku Z odmienia się z i L'; zróżniczkuymy więc to zrównanie co do z i L'. Będzie:

$$o = -\text{wst}\,\varphi.\ \text{dost}\,L'.\ \text{wst}\,z.\,dz - \text{wst}\,\varphi.\ \text{dost}\,z.\,\text{wst}\,L'.\ dL' + \text{dost}\,\varphi.\ \text{dost}\,L'.\ dL'.$$

Kładąc w tém zrównaniu za wst φ. dost z wartość ze zrównania pierwszego, to iest:

$$\text{wst}\,\varphi\,\text{dost}\,z = \frac{\text{wst}\,L - \text{dost}\,\varphi.\ \text{wst}\,L'}{\text{dost}\,L'},\ \text{otrzymamy:}$$

$$-\frac{(\text{wst}L - \text{dost}\varphi.\ \text{wst}L')}{\text{dost}\,L'}\,\text{wst}\,L'\,dL' + \text{dost}\,\varphi.\ \text{dost}\,L'.\,dL' = \text{wst}\,\varphi.\ \text{dost}\,L'.\ \text{wst}\,z.\ dz.$$

Albo: $$\frac{(\text{dost}\,\varphi.\ \text{wst}^2 L' + \text{dost}\,\varphi.\ \text{dost}^2 L' - \text{wst}L.\text{wst}L')\,dL'}{\text{dost}\,L'} = \text{wst}\,\varphi.\,\text{dost}\,L'.\text{wst}\,z.\ dz.$$

$$\left(\frac{\text{dost}\,\varphi - \text{wst}\,L.\,\text{wst}L'}{\text{dost}\,L'}\right) dL' = \text{wst}\,\varphi.\ \text{dost}\,L'.\ \text{wst}\,z.\ dz.$$

W troykącie APB mamy: $\text{dost}\,P = \dfrac{\text{dost}\,\varphi - \text{wst}L.\ \text{wst}\,L'}{\text{dost}\,L.\ \text{dost}\,L'}$, przeto:

$\text{dost}\,P.\ \text{dost}\,L.\ dL' = \text{wst}\,\varphi.\ \text{dost}\,L'.\ \text{wst}\,z.\ dz$; $\quad dL' = \dfrac{\text{dost}\,L'}{\text{dost}\,L}.\ \dfrac{\text{wst}\,\varphi\,\text{wst}\,z}{\text{dost}P}\,dz.$

A że w troykącie APB...... $\dfrac{\text{wst}\,P}{\text{wst}\,\varphi} = \dfrac{\text{wst}\,z}{\text{dost}\,L}$, $\quad \text{wst}\,P = \dfrac{\text{wst}\,\varphi.\ \text{wst}\,z}{\text{dost}L}$;

zatém: $\quad dL' = \text{dost}\,L'.\ \text{sty}\,P.\ dz.$

W §. 160. zagadnieniu drugiém znaleźliśmy: $dL' = \text{wst}\,P.\ \text{dost}\,L'.\,dZ.$

Stąd: $\text{wst}\,P.\ \text{dost}\,L'.\,dZ = \text{dost}\,L'.\ \text{sty}\,P.\,dz.\ldots.\ dz = \text{dost}\,P.\,dZ.\ldots..\ (4).$

We wszystkich czterech ćwiartkach $+dZ$ daie $+dz$, a $-dZ$ daie $-dz$.

161. *Zagadnienie* 3. Zdarzyć się może, żeśmy popełnili mały błąd w długości i szerokości jeograficzney głównego stanowiska sieci troykątów, potrzeba więc znaleźć wzory różniczkowe na poprawę długości, szerokości i poziomołuków mieysc innych rachowanych z położenia mieysca pierwszego.

Jeżeli długość punktu głównego karty powiększa się o α'', oczywista iest rzecz, że i długości rachowane wszystkich innych stanowisk, leżących w kierunku liczenia długości jeograficznych, trzeba także powiększyć o α''.

Co do szerokości. Pozwólmy, że szerokość jeograficzna L głównego punktu mappy była błędną o dL; przeto we wzorach (β) §. 151, rozdz. XII. szukaymy różniczek na dL'', dP i dz, co do dL. Będzie:

$dL'' = dL - \frac{1}{2}\,\frac{wst^2\varphi.\,wst^2 Z.\,dL}{dost^2 L}$; a że dowiedliśmy w §. 160, że:

$wst\,\varphi.\,wst\,Z = wst\,P.\,dost\,L'$; przeto: $dL'' = dL - \frac{1}{2}\,wst^2 P.\,dL$.

$$dL'' = (1 - \tfrac{1}{2}\,wst^2 P)\,dL = (1 - 2\,wst^2 \tfrac{1}{2} P)\,dL = dost\,P.\,dL.$$

Ponieważ różnica długości P iest zawsze bardzo mała, przeto dL prawie niczém się nie różni od dL''.

Różniczkuiąc wartość na P' mamy: $dP = \frac{wst\,\varphi.\,wst\,Z.\,wst\,L'}{dost^2 L'}\,dL$.

$$dP = wst\,P.\,sty\,L'.\,dL.$$

Nakoniec: $dz = -\frac{wst\,\varphi.\,wst\,Z.\,dL'}{dost^2 L'} = -\frac{wst\,P}{dost\,L'}.\,dL' = -\frac{wst\,P}{dost\,L'}\,dL'.$

$$(5)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{ll} dL'' = dost\,P.\,dL. & dP = wst\,P.\,sty\,L'.\,dL. \\ & dz = -\frac{wst\,P}{dost\,L'}\,dL' = -\frac{wst\,P\;dost\,P}{dost\,L'}\,dL. \end{array}\right.$$

Puissant rozwiązuiąc toż samo zagadnienie wcale innym sposobem, otrzymał wzory niczém się nie różniące od wzorów tu dowiedzionych.

Kiedy dL iest dodatne, to i dP i dL'' są dodatne i wzaiemnie. Co zaś do poziomołuku, dL dodatne daie dz odjemne, kiedy Z iest w pierwszey lub drugiey ćwiartce; kiedy zaś Z iest w trzeciey lub czwartey ćwiartce, wtenczas dL dodatne daie dz dodatne, a dL odjemne uczyni dz odjemném.

162. *Zagadnienie* 4. Sprawdzaiąc wymiar podstawy, ieżeli w podaney na

nią długości odkryiemy małą omyłkę, iak poprawić długość boków sieci troykątów z niey rachowanych?

Nazwiymy długość początkową podstawy przez B, a znalezioną poprawkę przez $+dB$; długość wyrachowaną któregokolwiek boku z sieci troykątów oznaczmy przez X, będzie:

$$B : B+dB = X : X+dX = X\frac{(B+dB)}{B} = X\left(1+\frac{dB}{B}\right).$$

$$\log(X+dX) = \log X + \log\left(1+\frac{dB}{B}\right) = \log X + M\frac{dB}{B} - \frac{M(dB)^2}{2B^2} + \text{etc.}..(6).$$

Nayczęściey poprawka podstawy tak iest małą, że pierwszy wyraz szeregu $M\frac{dB}{B}$ wystarcza do znalezienia wartości na log $(X+dX)$.

163. W rachunku długości i szerokości jeograficzney stanowisk odbywanym za pomocą wzorów (β) *Delambra*. podanych w §. 151. rozdz. XII, naznacza się z początku pewna wartość spłaszczenia α. Zwyczaynie zakłada się średnia wartość α, to iest $\frac{1}{309}$. Kiedy wyrachowane długości i szerokości stanowisk, obieranych do sprawdzenia robot jeodezycznych, nie zgadzaią się z obserwowanemi, wtenczas wnieść należy: że inne spłaszczenie iest w mieyscach obserwacyy, a nie $\frac{1}{309}$. Tu się otwiera obszerne pole robot praktycznych i sprawdzeń, biorąc rozmaite spłaszczenia, podstawuiąc ie we wzorach (β), i uważaiąc zgodność długości i szerokości stanowisk rachowanych i obserwowanych.

Oprócz tego, po wynalezieniu spłaszczenia pewnego służącego rozmierzanemu krajowi, za pomocą sposobów podanych w rozdziale XI. koniecznie trzeba ie podstawić we wzorach (β), i nanowo szukać położeń jeograficznych stanowisk.

Te obie okoliczności przedstawuią następne zagadnienie. Dla ułatwienia roboty i uniknienia powtarzań nanowo długiego rachuku długości i szerokości, znaleźć wzory trygonometryczne różniczkowe, które służyłyby do poprawienia rachowanych wprzódy położeń jeograficznych stanowisk w pewném przypuszczeniu spłaszczenia, na spłaszczenie odmienne.

Mamy z §. 151. $dL = L'' - L = -(\varphi.\text{dost}Z + \frac{1}{2}\varphi^2.\text{wst}1''.\text{wst}^2Z.\text{sty}L)(1 + 2\alpha.\text{dost}^2L)$.

$$dP = M' - M = \frac{\varphi.\text{wst}Z}{\text{dost}L} - \tfrac{1}{2}\varphi^2.\text{wst}1''.\text{wst}2Z.\frac{\text{sty}L}{\text{dost}L}.$$

Poszukaymy poprawki na dL i dP dla odmiany α.

Pierwszą poprawkę nazwiymy ogólnie przez dL', a drugą oznaczmy przez dP'

Ilość $\varphi'' = \frac{x}{a.\text{wst}1''}.(1 - \alpha.\text{wst}^2L)$; $a = \frac{20000000}{\pi}\left(1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{3\alpha^2}{16} + \frac{\alpha^3}{32} + \text{etc.}\right)$.

A z §. 137. $\log a = \frac{\log: 20000000}{\pi} + M\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{16} - \frac{\alpha^3}{48}\right)$.

$$(1)\ldots\ldots\ldots d.a = \frac{a.d\alpha}{2}.$$

Ta różniczka koniecznie iest potrzebną do znalezienia wzoru na $d\varphi''$.

$$d\varphi'' = -\frac{x}{a.\text{wst}1''}.\text{wst}^2L.d\alpha - \frac{x.da}{a^2.\text{wst}1''}.$$

Zamiast $\frac{x}{a.\text{wst}1''}$ śmiało można położyć φ''; przeto:

$$(2)\ldots\ldots\ldots d\varphi'' = -\varphi''\text{wst}^2L.d\alpha - \varphi''.\frac{d\alpha}{2}.$$

Dla znalezienia wzoru na $dL' = \frac{dL}{d\alpha}d\alpha$, różniczkuymy wartość dL, uważaiąc φ i α za zmienne. Będzie:

$$dL' = -\text{dost}Z.d\varphi - 2\varphi\text{dost}Z.\text{dost}^2L.d\alpha.$$

Inne wyrazy wypadaiące z różniczkowania naymnieyszego nie maią znaczenia.

$$dL' = \varphi.\text{wst}^2L.\text{dost}Z.d\alpha + \tfrac{1}{2}\varphi.\text{dost}Z.d\alpha - 2\varphi.\text{dost}Z.\text{dost}^2L.d\alpha.$$

Zamiast $\varphi.\text{dost}Z$ można położyć $-dL$, to nie sprawi $0'',001$ omyłki.

Stąd wypadnie: $dL' = -\text{wst}^2L.dL.d\alpha - \tfrac{1}{2}dL.d\alpha + 2\,\text{dost}^2L.dL.d\alpha$.

$$dL' = 3\,\text{dost}^2L.dL.d\alpha - dL.d\alpha - \tfrac{1}{2}dL.d\alpha.$$

Zatém: $(3)\ldots\ldots\ldots dL' = 3.\text{dost}^2L.dL.d\alpha - \tfrac{3}{2}dL.d\alpha$.

Inaczey: $dL' = -\tfrac{3}{2}dL.d\alpha(1 - 2\,\text{dost}^2L)$.

$$(3')\ldots\ldots\ldots \; dL' = \tfrac{3}{2}\,\mathrm{dost}\,2\,L.\,d\alpha.\,dL.$$

Szukaiąc $dP' = \frac{dP}{d\alpha}\,d\alpha$, należy różniczkować wzór na dP, uważaiąc φ za zmienne z przyczyny odmiany α. Smiało można zaniedbać różniczkę drugiego wyrazu, iako $= 0$.

$$dP' = \frac{\mathrm{wst}\,Z}{\mathrm{dost}\,L}\,d\varphi = -\frac{\varphi.\,\mathrm{wst}\,Z}{\mathrm{dost}\,L}.\,\mathrm{wst}^2\,L.\,d\alpha - \frac{\varphi.\,\mathrm{wst}\,Z}{\mathrm{dost}\,L}.\frac{d\alpha}{2}.$$

$$dP' = -dP.\,\mathrm{wst}^2\,L.\,d\alpha - \tfrac{1}{2}\,dP.\,d\alpha = -dP.\,d\alpha + dP.\,\mathrm{dost}^2 L.\,d\alpha - \tfrac{1}{2}\,dP.\,d\alpha.$$

$$(4)\ldots\ldots \; dP' = -\tfrac{3}{2}\,dP.\,d\alpha + \mathrm{dost}^2\,L.\,dP.\,d\alpha.$$

Inaczey: $dP' = -\tfrac{1}{2}\,dP.\,d\alpha\,(3 - 2.\,\mathrm{dost}^2\,L) = -\tfrac{1}{2}\,dP.\,d\alpha\,(2 - \mathrm{dost}\,2\,L).$

$$(4')\ldots\ldots \; dP' = -dP.\,d\alpha + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{dost}\,2\,L.\,dP.\,d\alpha.$$

Wzory (3) i (4) podał bez dowodu pierwszy P. *Puissant*, na karcie 401 drugiego wydania swoiey Topografii. Szukałem ich zaraz dowodu po przeczytaniu tego dzieła; po rozlicznych probach trafiłem na drogę tu wskazaną, która zdaie się bydź naykrótszą i naywłaściwszą. Przekonywałem się, że opuszczane wyrazy żadnego nie maią znaczenia, zastanawiaiąc się nad ich małością i rozwiązuiąc szczególne zagadnienia za pomocą logarytmów. Nowe te nieznane dotąd w Jeodezyi wzory, wielką zrobią przysługę inżynierom jeografom. Skracaią one niezmiernie robotę; która byłaby tym dłuższą, rozwiązuiąc na nowo same wzory (β), że a trzeba uważać za zmienne.

Wzory (1) i (2) także mogą się często przydać w praktyce.

Podałem tu na dL′ i dP″ wzory przezemnie wyprowadzone (3′) i (4′) ieszcze prostsze i prędsze do rozwiązania od wzorów P. *Puissana*. W ważnych tego rodzaiu pracach, gdzie iedna robota daie się pospolicie dwóm osobom do rachowania, dla sprawdzenia wypadków, można użyć obu wzorów.

ROZDZIAŁ XIV.

O rachowaniu powierzchni ziemi lub iakieykolwiek iey części.

164. Wiemy, że powierzchnia kuli $= 4\pi r^2 = K$. Ztąd: $\log K = \log 4\pi + 2 \log r$. Stosuiąc ten wzór do powierzchni kuli ziemskiey, i biorąc średnią wartość na r wypadaiącą z półsummy promienia uważanego przy biegunach i przy równiku, na który wyprowadziliśmy wartość w §. 137, rozdz. XI. znaydziemy:

$$\log K = \log 4\pi + 2.\log 6{,}8038792654 = 14{,}7069683948.$$

Ztąd powierzchnia kuli ziemskiey $K = 50929380650$ hektarom. Jeden hektar zawiera 10000 metrów kwadratowych.

165. Na kuli troykąt równoboczny i równokątny, którego każdy kąt iest prosty, iest połową taśmy kąta prostego; iego powierzchnia iest ósmą częścią powierzchni kuli. Powierzchnia iakiegokolwiek troykąta kulistego ABC równa się $r^2.\text{wst}\, 1''\,(A+B+C-180^\circ)$; przeto powierzchnie troykątów kulistych maią się do siebie iak ich przepełnienia. Będzie się więc miała powierzchnia jakiegokolwiek troykąta kulistego ABC, do powierzchni troykąta równobocznego i równokątnego, którego każdy kąt $= 90^\circ$, czyli do $\frac{1}{8}K = (A+B+C-180^\circ) : 90^\circ$.

Ztąd:
$$\text{pow}: \triangle ABC = \frac{K}{8.90^\circ}(A+B+C-180^\circ).$$

A ponieważ
$$\log \frac{K}{8.90^\circ} = 11{,}8496358984;$$

zatém do logarytmu przepełnienia troykąta kulistego wyrażonego w częściach stopnia, dodawszy 11,8496358984, znaydziemy logarytm powierzchni troykąta kulistego wyrażoncy w metrach kwadratowych.

Używaiąc tego prawidła, łatwo znaleźć powierzchnią iakiegokolwiek wielokąta kulistego, podzieliwszy go na troykąty.

166. Maiąc kartę odrysowaną sposobem *Kassyniego* wyłożonym w rozdziale X, gdzie wszystkie punkta odnoszą się do linii południowey i drugiey osi do niey prostopadłey, mamy tém samém pewną zdjętą część powierzchni ziemi podzieloną na trapezy ABmm′ (*fig.* 43), w których znamy bok mm′, czyli odległość stanowisk przeniesioną na liniią południową i boki Am i Bm′, czyli y i y′. Chcąc wyrachować powierzchnią ABmm′, przedłużmy boki Am i Bm′ aż do punktu P, który będzie biegunem naszey linii południowey;

$$\text{pow: ABmm}' = \text{pow: Pmm}' - \text{pow: PAB}.$$

A że $\quad \text{pow: Pmm}' = r^2 \text{wst } 1'' (P + m + m' - 180^\circ) = r^2 \text{wst } 1''. P.$

A $\quad \text{pow: PAB} = r^2 \text{wst } 1'' (P + A + B - 180^\circ).$

Przeto: $\quad \text{pow: ABmm}' = r^2 \text{wst } 1'' (180^\circ - (A + B)).$

Nieznamy kątów A i B, potrzeba więc znaleźć wartość na przepełnienie $x = (180^\circ - (A+B))$ przez $f\,(y . y' . mm')$.

Mamy z analogii *Nepera* w troykącie PAB....

$$\text{sty}\tfrac{1}{2}(A+B) = \text{dosty}\tfrac{1}{2}P\,\frac{\text{dost}\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{dost}\tfrac{1}{2}(a+b)} = \text{dosty}\tfrac{1}{2}\,mm' . \frac{\text{dost}\tfrac{1}{2}(y-y')}{\text{wst}\tfrac{1}{2}(y+y')}.$$

Przeto: $\quad \text{sty}\tfrac{1}{2}x = \text{dosty}\tfrac{1}{2}(A+B) = \text{sty}\tfrac{1}{2}\,mm' . \dfrac{\text{wst}\tfrac{1}{2}(y+y')}{\text{dost}\tfrac{1}{2}(y-y')}.$

Do rozwiązania tego wzoru potrzeba y, y′, i mm′ dane w metrach lub sążniach zamienić na części okręgu koła.

167. Powierzchnia pasa kulistego równa się wysokości iego rozmnożoncy przez okrąg koła wielkiego. Niech L i L′ będą szerokości jeograficzne kół koń-

czących pas, a promień średni kuli ziemskiey oznaczmy przez r. Będzie powierzchnia pasa kulistego =

$$= 2\pi r^2 (\text{wst} L' - \text{wst} L) = 4\pi r^2 . \text{wst}\tfrac{1}{2}(L' - L)\,\text{dost}\tfrac{1}{2}(L' + L) \ldots\ldots (a).$$

Wiemy z Jeografii astronomiczney, że kula ziemska dzieli się na pięć pasów. Naprzód na pas gorący *(zône torride)*, zawarty pomiędzy równoleżnikiem raka i koziorożca. Na dwa pasy umiarkowane *(zônes tempérées)*, leżące na swoich półkulach między zwrótnikiem i kołem biegunowém; i na dwa pasy zimne, albo lodowate *(zônes glaciales)*, które leżą pomiędzy biegunem i kołem biegunowém; ieden na półkuli północney, drugi na południowey. Szerokość jeograficzna obu równoleżników bierze się tu przez przybliżenie, i naznacza $= 23^\circ.\ 28'$; a szerokość jeograficzna w szczególności każdego koła biegunowego $= 66^\circ.32'$. Według tego założenia, szukaiąc powierzchni pasów na kuli ziemskiey, znaleźlibyśmy: dwa pasy lodowate. : : $= 4212272206$ hektarom.

dwa pasy umiarkowane $= 26436240880$.

pas gorący . . . . $= 20280867640$.

Ponieważ ziemia iest rzeczywiście bryłą zbliżoną do ellipsoidy obrótowey a nie doskonałą kulą, przeto tak powierzchnia kuli iako też i powierzchnie pasów przez przybliżenie, są tylko wyrachowane. Lubo bowiem troykąty sferoidyczne wypadaiące z jeodezycznych rozmiarów, dla małości swoiey, śmiało mogą bydź brane za kuliste; większe iednakowoż części powierzchni ziemi, ieżeli maią bydź ściśle ocenione, muszą bydź rachowane iako sferoidyczne. Wzory w tym celu podane są przez *Puissana, Delambra, Orianiego* i innych sławnych Jeometrów.