gle do linii południowcy wyrażaią przez przybliżenie południki ziemskie, i dadzą wyobrażenie o różnicach szerokości jeograficzney.

Obszernieyszą wiadomość o rysowaniu kart jeograficznych, chorograficznych i topograficznych poźniey podamy w Topografii, kiedy mówić będziemy o rozmaitych gatunkach rzutów i o ich własnościach.

ROZDZIAŁ XI.

Uważaiąc ziemię za ellipsoidę obrótową, znaleźć wzory na oznaczenie rozmaitych liniy tey bryły przez funkcyą szerokości jeograficzney, i zastosować ie do rozwiązania rozlicznych zadań w Jeodezyi.

---

118. Wymiary jeodezyczne odbywane w wielu mieyscach przez naysławnieyszych jeometrów przekonały, że ziemia nie iest kulą, ale iest nieforemną sferoidą, przystępuiącą w figurze swoiey do ellipsoidy obrótowey, powstałey z obrotu połowy ellipsy około osi mnieyszey. Hypoteza ta wystarcza do rozwiązywania rozmaitych zadań w jeodezyi: my więc w tém przypuszczeniu postaramy się wyciągnąć wzory na różne linie i inne elementa, służące do rozwiązań zagadnień jeodezycznych i do śledzenia prawdziwey figury ziemi.

119. Niech będzie CE promień równika, a P biegun. Jeżeli z punktu A poprowadzimy styczną AT do łuku elliptycznego PAE, liniia AM pionowa do AT

będzie węgielną w punkcie A, a kąt ALT=FAT wyrazi szerokość jeograficzną mieysca A uważanego na ellipsoidzie obrótowey, i odniesioną do linii wierzchołkowey pionowey do powierzchni ziemi.

Zrównanie ellipsy iest $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$. Gdzie x i y będą w naszym przypadku oznaczać współprzystawy punktu A. Będzie więc x=CF. y=AF.

Wiemy że: $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}=\text{sty ATL}=\text{dosty ALT}=\text{dosty L}.$

Stąd: $x=-\frac{\text{dosty L}.a^2y}{b^2}$. $x^2=\frac{a^4y^2\,\text{dosty}^2\text{L}}{b^4}$. $b^2x^2=\frac{a^4y^2.\,\text{dosty}^2\text{L}}{b^2}$.

Podstawuiąc tę wartość na b^2x^2 w zrównanie ellipsy, będzie:

$a^2y^2+\frac{a^4y^2.\text{dosty}^2\text{L}}{b^2}=a^2b^2$. $b^2y^2+a^2y^2.\text{dosty}^2\text{L}=b^4$. $y^2=\frac{b^4}{b^2+a^2\text{dosty}^2\text{L}}$.

$$x^2=\frac{a^4\,\text{dosty}^2\text{L}.y^2}{b^4}=\frac{a^4.\text{dosty}^2\text{L}}{b^2+a^2.\text{dosty}^2\text{L}}=\frac{a^4.\text{dost}^2\text{L}}{b^2.\text{wst}^2\text{L}+a^2\text{dost}^2\text{L}}.$$

Podobnież: $y^2=\frac{b^4.\text{wst}^2\text{L}}{b^2.\text{wst}^2\text{L}+a^2\text{dost}^2\text{L}}$. Stąd:

$$y=\frac{b^2\,\text{wst L}}{\sqrt{b^2.\text{wst}^2\text{L}+a^2\text{dost}^2\text{L}}}.\qquad x=\frac{a^2\,\text{dost L}}{\sqrt{b^2.\text{wst}^2\text{L}+a^2\text{dost}^2\text{L}}}.$$

Albo: $y=\frac{b^2.\text{wst L}}{\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\,\text{wst}^2\text{L}}}$. $x=\frac{a.\,\text{dost L}}{\sqrt{1-\frac{(a^2-b^2)}{a^2}\text{wst}^2\text{L}}}$.

Założmy: $e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$. Wprowadziwszy tę wartość do wyrażeń otrzymanych na x i na y, znaydziemy:

$$x=\frac{a.\,\text{dost L}}{(1-e^2.\,\text{wst}^2\text{L})^{\frac{1}{2}}}\ \ldots\ldots\ (1).\qquad y=\frac{a(1-e^2)\,\text{wst L}}{(1-e^2.\,\text{wst}^2\text{L})^{\frac{1}{2}}}\ \ldots\ldots\ (2).$$

W troykącie prostokątnym ALF.... y=AL.wst L.

W troykącie prostokątnym AxM.... Ax=CF=x=AM.dost L.

Nazwawszy węgielną AL odniesioną do osi większey ellipsy przez n, a węgielną AM odniesioną do osi mnieyszey przez n′, będzie:

$$n = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2.\,\mathrm{wst}^2 L)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots (3). \qquad n' = \frac{a}{(1-e^2.\,\mathrm{wst}^2 L)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots (4).$$

Łatwo iest wypisać wzory na inne liniie. Tak *np.*

$$\left.\begin{aligned}
\text{styczna } AT = S = y.\,\mathrm{siecz}\,L &= \frac{a(1-e^2)\,\mathrm{sty}\,L}{(1-e^2.\,\mathrm{wst}^2 L)^{\frac{1}{2}}} \\
\text{podstyczna } FT = P = S.\,\mathrm{wst}L &= \frac{a(1-e^2)\,\mathrm{sty}\,L.\,\mathrm{wst}L}{(1-e^2.\,\mathrm{wst}^2 L)^{\frac{1}{2}}} \\
\text{styczna } AT' = S' = \frac{x}{\mathrm{wst}\,L} &= \frac{a.\,\mathrm{dosty}\,L}{(1-e^2.\mathrm{wst}^2 L)^{\frac{1}{2}}} \\
\text{podwęgielna } LF = p = n'.\,\mathrm{dost}\,L &= \frac{a(1-e^2)\,\mathrm{dost}\,L.}{(1-e^2.\,\mathrm{wst}^2 L)^{\frac{1}{2}}} \\
CL = x - LF &= \frac{ae^2.\,\mathrm{dost}\,L}{(1-e^2.\,\mathrm{wst}^2 L)^{\frac{1}{2}}} \\
CM = CL.\,\mathrm{sty}\,L &= \frac{ae^2.\,\mathrm{wst}\,L}{(1-e^2.\,\mathrm{wst}^2 L)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (5)$$

120. Ellipsę EPD można uważać iako rzut ortograficzny koła EpD. Tak punkt A iest rzutem punktu a, liniia AT iest rzutem linii aT, i t. p. Jeżeli nachylenie koła do ellipsy czyli kąt PEp nazwiemy przez I, będziemy mieli: CP=Cp. dostI.

Albo $b = a.\,\mathrm{dost}\,I.$ $\qquad \mathrm{dost}\,I = \frac{b}{a}.$ $\qquad \mathrm{wst}\,I = e = \left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

Można więc do wyrażeń przez nas wyprowadzonych włożyć zamiast e wst I, tak iak to uczynił *Delambre.*

Wartość na CM wypisana we wzorze (5) pokazuie, że CM iest funkcyą L. Stąd wynika, że dwie węgielne należące do dwóch punktów na ellipsoidzie maiących rozmaitą szerokość jeograficzną nie przetną się na osi. A ieżeli te dwa punkta maią i długość jeograficzną różną, wtenczas węgielne nigdzie się z sobą nie przetną, bo południki w ellipsoidzie przecinaią się na osi tey bryły. Wszystkie zaś węgielne iednego równoleżnika schodzą się w iednym punkcie na osi mnieyszey ellipsoidy.

121. Poszukaymy wartości na promień ziemi AC.

Mamy: $AC = r = \sqrt{x^2 + y^2} = a \left\{ 1 - \frac{e^2 (1-e^2) \, wst^2 L}{1 - e^2 . \, wst^2 L} \right\}^{\frac{1}{2}}$ ....(6).

Chcąc mieć prostszą wartość na r wyobraźmy sobie ellipsę opisaną kołem, które ma za promień a. Kąt aCE = FaT = λ, będzie szerokością jeograficzną punktu a wziętego na kuli. Punkta a i A maią iedenże odcinek CF. Nazwawszy przystawę AF przez y, a aF przez y′, będziemy mieli ze zrównania koła i ze zrównania ellipsy: $\overline{AF}^2 = y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. $\overline{aF}^2 = y'^2 = a^2 - x^2$.

$$\frac{y}{y'} = \frac{b}{a}. \qquad y'^2 = wst^2 \lambda = \frac{(1-e^2) \, wst^2 L}{1 - e^2 \, wst^2 L}.$$

Zatém: $AC = r = a(1 - e^2 . \, wst^2 \lambda)^{\frac{1}{2}}$ .... (7).

Idzie teraz o znalezienie wartości na λ przez funkcyą L i e.

122. Dzieląc wartość na y przez wartość y′, mamy:

$$\frac{y}{y'} = \frac{b}{a}. \quad \text{A że } \frac{y}{FT} = \frac{1}{sty \, L}, \text{ a } \frac{y'}{FT} = \frac{1}{sty \, \lambda};$$

przeto: $\frac{y}{y'} = \frac{sty \, \lambda}{sty \, L}$. Stąd: $sty \, \lambda = \frac{b}{a} \, sty \, L$.

Puissant bierze za stosunek dwóch oś ellipsy $= \frac{b}{a} = \frac{333}{334}$, (iak się o tém późniey przekonamy).

A że z §. 120 mamy: $\frac{b}{a} = dost \, I$. $\frac{a-b}{a+b} = \frac{1}{a+b} = sty^2 \frac{1}{2} I$.

Więc*): $L-\lambda=(\mathrm{sty}^2\tfrac{1}{2}L.)\dfrac{\mathrm{wst}\,2L}{\mathrm{wst}\,1''}-\tfrac{1}{2}(\mathrm{sty}^2\tfrac{1}{2}L)^2\dfrac{\mathrm{wst}\,4L}{\mathrm{wst}\,1''}+\tfrac{1}{3}(\mathrm{sty}^2\tfrac{1}{2}L)^3\dfrac{\mathrm{wst}\,6L}{\mathrm{wst}\,1''}-\text{etc.}$. (8)

Pierwszy wyraz tego szeregu wystarcza do znalezienia wartości na $L-\lambda$. Znaiąc λ wyrachuiemy łatwo AC, promień ziemi pod szerością L, który tak iest potrzebny w rachunku parallax w Astronomii. Chcąc bowiem zamienić parallaxę poziomą równikową P, na parallaxę poziomą pod szerokością jeograficzną L, potrzeba mnożyć ϖ przez stosunek $\frac{AC}{CE}$.

---

*) Rozwinienie wzoru (8) na szereg iest bardzo ważne; podał ie naprzód *Lagrange* w *Mémoire de l'Académie de Berlin*. 1776. My tu podobnież dowód tego umieszczamy.

Weźmy zrównanie ogólne: $\mathrm{sty}\,c=\mathrm{dost}\,B.\,\mathrm{sty}\,a$. Uczyńmy:

$$\mathrm{sty}\,a=\frac{e^{2a\sqrt{-1}}-1}{e^{2a\sqrt{-1}}+1}.\qquad \mathrm{sty}\,c=\frac{e^{2c\sqrt{-1}}-1}{e^{2c\sqrt{-1}}+1}.$$ Będzie:

$$\frac{e^{2c\sqrt{-1}}-1}{e^{2c\sqrt{-1}}+1}=\mathrm{dost}\,B\,\frac{e^{2a\sqrt{-1}}-1}{e^{2a\sqrt{-1}}+1}.\quad ρ.\quad \frac{m-1}{m+1}=\mathrm{dost}\,B\left(\frac{n-1}{n+1}\right).$$

Przyprowadzaiąc obie strony do iednego mianownika, i rozbieraiąc zrównanie na mnożniki, wypada:

$$m\left\{n(1-\mathrm{dost}\,B)+(1+\mathrm{dost}\,B)\right\}=n\left\{1+\mathrm{dost}\,B\right\}+1-\mathrm{dost}\,B=$$
$$=n\left\{(1+\mathrm{dost}\,B)+n^{-1}(1-\mathrm{dost}\,B)\right\}.$$

$$\frac{n}{m}=\frac{(1+\mathrm{dost}\,B)+n(1-\mathrm{dost}\,B)}{(1+\mathrm{dost}\,B)+n^{-1}(1-\mathrm{dost}\,B)}=\frac{1+n.\,\mathrm{sty}^2\tfrac{1}{2}B}{1+n^{-1}.\,\mathrm{sty}^2\tfrac{1}{2}B}:$$

Kładąc za m i n ich wartości, otrzymamy:

$$e^{2(a-c)\sqrt{-1}}=\frac{1+\mathrm{sty}^2\tfrac{1}{2}B.\,e^{2a\sqrt{-1}}}{1+\mathrm{sty}^2\tfrac{1}{2}B.\,e^{-2a\sqrt{-1}}}.$$

Wziąwszy po obu stronach logarytmy *Neperowskie* i rozwinąwszy drugą

123. Nazwaliśmy szerokość jeograficzną obserwowaną ALF przez L, a szerokość aCF przez λ; nazwiymy zaś szerokość punktu A odniesioną do środka ziemi C czyli ACF przez L'.

Będzie: $\text{sty}\, L' = \text{sty}\, ACF = \frac{AF}{CF} = \frac{y}{CF}$; $\quad \text{sty}\, \lambda = \frac{aF}{CF} = \frac{y'}{CF}$.

Stąd: $\frac{\text{sty}\, L'}{\text{sty}\, \lambda} = \frac{y}{y'} = \frac{b}{a} = \text{dost}\, I. \quad \text{sty}\, L' = \text{dost}\, I.\, \text{sty}\, \lambda.$

A że: $\text{sty}\, \lambda = \frac{b}{a}\, \text{sty}\, L$, $\quad$ przeto: $\quad \text{sty}\, L' = \text{dost}^2\, I.\, \text{sty}\, L.$

Czyniąc $\text{dost}^2\, I = \text{dost}\, \varphi$, będzie:

$$CAL = L - L' = \text{sty}^2 \tfrac{1}{2}\varphi . \frac{\text{wst}\, 2\, L}{\text{wst}\, 1''} - \text{sty}^4 \tfrac{1}{2}\varphi . \frac{\text{wst}\, 4\, L}{\text{wst}\, 2''} + \text{etc.} \ldots\ldots \quad (9).$$

Dwa te wyrazy wystarczaią na przywiedzenie obserwowaney szerokości jeograficzney do środka ziemi C.

124. Poszukaymy wartości na promień krzywizny południków ellipsoidy ziemskiey. Wiemy, że we wszystkich liniiach krzywych drugiego rzędu R iest = sześcianowi z węgielney podzielonemu przez czwartą część kradwatu z parametru. Będzie tedy: $R = \frac{n^3}{\frac{1}{4}p^2} = \frac{a^3(1-e^2)^3\,(1-e^2 \text{wst}^2 L)^{-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4}p^2}.$

---

stronę według wzoru: $\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \text{etc.}$ znaydziemy:

$$2(a-c)\sqrt{-1} = \text{sty}^2 \tfrac{1}{2}B . e^{2a\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{2}\text{sty}^4 \tfrac{1}{2}B . e^{4a\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{3}\text{sty}^6 \tfrac{1}{2}B . e^{6a\sqrt{-1}} - \text{etc.}$$

$$- \text{sty}^2 \tfrac{1}{2}B . e^{-2a\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{2}\text{sty}^4 \tfrac{1}{2}B . e^{-4a\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{3}\text{sty}^6 \tfrac{1}{2}B . e^{-6a\sqrt{-1}} + \text{etc.}$$

Stąd: $a - c = \text{sty}^2 \tfrac{1}{2}B . \frac{\text{wst}\, 2\, a}{\text{wst}\, 1''} - \tfrac{1}{2}\text{sty}^4 \tfrac{1}{2}B . \frac{\text{wst}\, 4\, a}{\text{wst}\, 1''} + \tfrac{1}{3}\text{sty}^6 \tfrac{1}{2}B . \frac{\text{wst}\, 6\, a}{\text{wst}\, 1''} - \text{etc.}$

Bo wiemy, że: $\text{wst}\, m\, C = \frac{e^{mC\sqrt{-1}} - e^{-mC\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$

A że: $p = 2\frac{b^2}{a}$, $\frac{1}{4}p^2 = \frac{b^4}{a^2}$. Przeto:

$$R = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\,\mathrm{wst}^2 L)^{\frac{3}{2}}} \ldots\ldots (10).$$

125. Nazywamy spłaszczeniem albo elliptycznością ziemi wziętey za ellipsoidę obrótową, stosunek pomiędzy różnicą dwóch oś ellipsy do osi większey. To iest bierzemy pospolicie: $\alpha = \frac{a-b}{a}$.

$$1 - \alpha = \frac{b}{a}.$$

$$(1-\alpha)^2 = \frac{b^2}{a^2}.$$

Mamy zaś: $e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$. Przeto: $\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$.

Równaiąc z sobą otrzymane dwie wartości na $\frac{b^2}{a^2}$, będzie: $1 - e^2 = (1-\alpha)^2$.

Stąd: $2\alpha - \alpha^2 = e^2$.

Spłaszczenie α iest bardzo małą ilością, przeto można brać 2α za e^2.

Moglibyśmy wprowadzić do wyciągniętych wzorów zamiast e ilość α, ale przez to wyrażenie ich niepotrzebnieby się zwikłało; dla prostoty możnaby zamiast e^2 wziąść 2α.

Wartość *np.* na R będzie następna: $R = a(1 - 2\alpha + \alpha^2)\left\{1 - (2\alpha - \alpha^2)\,\mathrm{wst}^2 L\right\}^{-\frac{3}{2}}$.

Uskuteczniaiąc rozwinienie i opuszczaiąc drugie i wyższe potęgi α, które dadzą wyrazy równe zeru, będzie: $R = a\left\{1 - \alpha(2 - 3\,\mathrm{wst}^2 L)\right\} \ldots\ldots (10')$.

226. Wzory przez nas wyprowadzone bardzo są wielkiego użycia w Jeodezyi. Wypiszemy ie tu porządkiem, żebyśmy mieli razem przed okiem to wszystko, co nam będzie następnie potrzebném.

Wzór (1) daie wartość na promień równoleżnika pod szerokością jeograficzną $L = x = \frac{a.\,\mathrm{dost}\,L}{(1 - e^2.\,\mathrm{wst}^2 L)^{\frac{1}{2}}}$.

Wzór (4) daie wartość na węgielną zakończoną na małey osi $= AM = n' =$

$$= \frac{a}{(1-e^2 . \text{wst}^2 L)^{\frac{1}{2}}}.$$

Wzór (3) daie wartość na węgielną zakończoną na osi wielkiey $= AL = n =$

$$= \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 . \text{wst}^2 L)^{\frac{1}{2}}}.$$

Wzór (6) daie wartość na promień ziemi przez funkcyą $L = AC = r =$

$$= a \left\{ 1 - \frac{e^2 (1-e^2) \text{wst}^2 L}{1-e^2 . \text{wst}^2 L} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Wzór (7) daie wartość na r przez funkcyą $\lambda = a(1-e^2 \text{wst}^2 \lambda)^{\frac{1}{2}}$.

Pamiętać potrzeba, że ze wzoru (8) mamy: $L - \lambda = \text{sty}^2 \frac{1}{2} I . \text{wst} 2 L$.

Wzór (10) daie wartość na promień krzywizny południków ellipsoidy ziemskiey $= R = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \text{wst}^2 L)^{\frac{3}{2}}}$.

Przeciąwszy zaś ellipsoidę płaszczyzną wierzchołkową czyniącą z południkiem kąt θ, promień krzywizny ϱ tego przecięcia $= \frac{Rn'}{R \text{wst}^2 \theta + n' \text{dost}^2 \theta}$.

Wzór ten wyprowadzony naprzód przez *Eulera* dowiódł *Puissant* na karcie 288 1go tomu swoiey Jeodezyi.

Wzory tu zebrane rozwinięte mogą bydź na szeregi według sposobów podanych przez naypierwszych jeometrów: *Lagranża, Eulera*, *La Plasa* i *Delambra*. Maiąc takie rozwinienia, łatwo można te linie ułożyć w tablice. Takowe rachunki zebrał P. *Puissant* w 13 rozdziale xięgi trzeciey pierwszego tomu swoiey Jeodezyi. Tablice zaś na te linie można znaleźć w tymże dziele *Puissana*, i w dziele *Delambra: Base du système métrique décimal.* Wszystkie te niezmiernie długie rachunki, które każdy umieiący algebrę i rachunek wyższy łatwo zrozumi, a które na lekcyi wykładane zaięłyby wiele czasu, a nieby nas więcey Jeodezyi nie nauczyły, dla skrócenia opuszczamy.

127. Przystąpmy do wyprostowania łuku południka ziemskiego. Nazwiymy część łuku zawartą pomiędzy równikiem i mieyscem którego szerokość jeograficzna iest L przez S. $dS = AA' = \frac{A'u}{\text{wst}\,L} = -\frac{dx}{\text{wst}\,L}$: A że ze wzoru (1), biorąc $a = 1$, mamy: $x = \text{dost}\,L(1 - e^2\,\text{wst}^2L)^{-\frac{1}{2}}$; przeto:

$$dx = -(1 - e^2\,\text{wst}^2L)^{-\frac{1}{2}}\,\text{wst}L.\,dL + \tfrac{1}{2}\,\text{dost}L(1 - e^2\text{wst}^2L)^{-\frac{3}{2}}e^2.2\,\text{wst}L.\,\text{dost}L.\,dL.$$

albo: $-dx = (1 - e^2.\,\text{wst}^2L)^{-\frac{1}{2}}\,\text{wst}L.\,dL - (1 - e^2\,\text{wst}^2L)^{-\frac{3}{2}}e^2\,\text{dost}^2L\,\text{wst}L.\,dL.$

$$-dx = -\left\{\frac{e^2\,\text{dost}^2L}{(1 - e^2\,\text{wst}^2L)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(1 - e^2\,\text{wst}^2L)^{\frac{1}{2}}}\right\}\text{wst}L.\,dL = \frac{(1 - e^2).\,\text{wst}\,L.\,dL}{(1 - e^2\,\text{wst}^2\,L)^{\frac{3}{2}}}.$$

Kładąc tę wartość na dx w otrzymaną wartość na dS, znaydziemy:

$$dS = (1 - e^2)(1 - e^2\,\text{wst}^2L)^{-\frac{3}{2}}\,dL.$$

Porównywaiąc to wyrażenie ze wzorem (10), widzimy, że: $R = \frac{dS}{dL}$.

Rozwinąwszy na szereg $(1 - e^2\,\text{wst}^2\,L)^{-\frac{3}{2}}$ wypadnie:

$$\frac{dS}{1 - e^2} = (1 + \tfrac{3}{2}\,e^2\,\text{wst}^2L + \tfrac{3}{2}.\tfrac{5}{4}\,e^4.\,\text{wst}^4L + \tfrac{3}{2}.\tfrac{5}{4}.\tfrac{7}{6}\,e^6.\,\text{wst}^6L + \text{etc.})\,dL.$$

Zamieniaiąc potęgi wstaw na dostawy łuków wielokrotnych.

$$\frac{dS}{1 - e^2} = (1 + \tfrac{3}{2}.\frac{2}{1.2^2}\,e^2 + \tfrac{3}{2}.\tfrac{5}{4}.\,\frac{4.3}{1.2.2^4}.\,e^4 + \frac{3.5.7}{2.4.6}.\frac{6.5.4}{1.2.3.2^6}.\,e^6 + \text{etc.})\,dL.$$

$$-(\tfrac{3}{2}.\tfrac{1}{2}\,e^2 + \frac{3.5.4}{2.4.2^3}\,e^4 + \frac{3.5.7}{2.4.6}.\frac{6.5}{1.2.2^5}\,e^6 \ldots\ldots)\,\text{dost}\,2\,L.\,dL.$$

$$+\left(\frac{3.5.1}{2.4.2^3}e^4 + \frac{3.5.7}{2.4.6}.\frac{6}{2.2^5}\,e^6\right)\text{dost}\,4\,L.\,dL.$$

$$-\left(\frac{3.5.7}{2.4.6}.\,\frac{1}{2^5}\,e^6 + \ldots\ldots\ldots\right)\text{dost}\,6\,L.\,dL.$$

Całkuiąc ten szereg otrzymamy:

$$\frac{S}{1-e^2} = mL - \tfrac{1}{2} n.\mathrm{wst}\, 2L + \tfrac{1}{4} p.\mathrm{wst}\, 4L - \tfrac{1}{6} q.\mathrm{wst}\, 6L + \mathrm{etc.} \ldots\ldots \quad (11)$$

Łatwo postrzegamy iakie są wartości spółczynników m, n, p, q, położonych dla skrócenia.

Ilość stała iest równa zeru, bo $L = 0$ daie $S = 0$.

128. Wziąwszy inny łuk S' pod szerokością L' będzie:

$$\frac{S'}{1-e^2} = mL' - \tfrac{1}{2} n.\mathrm{wst}\, 2L' + \tfrac{1}{4} p.\mathrm{wst}\, 4L' - \tfrac{1}{6} q.\mathrm{wst}\, 6L + \mathrm{etc.}$$

Stąd: $$\frac{S-S'}{1-e^2} = m(L-L') - \tfrac{1}{2} n(\mathrm{wst}\, 2L - \mathrm{wst}\, 2L') + \tfrac{1}{4} p(\mathrm{wst}\, 4L - \mathrm{wst}\, 4L') - \\ - \tfrac{1}{6} q(\mathrm{wst}\, 6L - \mathrm{wst}\, 6L') + \mathrm{etc.}$$

$$\frac{S-S'}{1-e^2} = m(L-L') - n.\mathrm{wst}(L-L')\,\mathrm{dost}(L+L') + \tfrac{1}{2} p.\mathrm{wst}\, 2(L-L')\,\mathrm{dost}\, 2(L+L') - \\ - \tfrac{1}{3} q.\mathrm{wst}\, 3(L-L')\,\mathrm{dost}\, 3(L+L') \ldots\ldots \quad (12).$$

Niech Q wyraża łuk południka od 90°; czyniąc w zrównaniu (11) $L = 90^\circ$, mamy $\frac{Q}{1-e^2} = m.90^\circ$. Dzieląc to zrównanie przez zrównanie (12) wypada:

$$\frac{Q}{S-S'} = \\ = \frac{90^\circ}{(L-L') - \frac{n}{m}\mathrm{wst}(L-L')\mathrm{dost}(L+L') + \frac{1}{2}.\frac{p}{m}.\mathrm{wst}2(L-L')\mathrm{dost}2(L+L') - \frac{1}{3}.\frac{q}{m}.\mathrm{wst}3(L-L')\mathrm{dost}3(L+L')}.$$

Ograniczaiąc się na potędze czwartey z e, weźmiemy: $m = 1 - \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4$;

$\frac{n}{2} = \frac{3}{8} e^2 + \frac{15}{32} e^4$; $\frac{1}{4} p = \frac{15}{256} e^4$; $\frac{n}{m} = \frac{3}{4} e^2 + \frac{3}{8} e^4$; $\frac{p}{2m} = \frac{15}{128} e^4$.

$$Q = \frac{(S-S')90^\circ}{(L-L')} \left\{ 1 + \left(\tfrac{3}{4} e^2 + \tfrac{3}{8} e^4\right) \frac{\mathrm{wst}\,(L-L')\,\mathrm{dost}\,(L+L')}{(L-L')} + \right. \\ \left. + \tfrac{9}{16} e^4 \frac{\mathrm{wst}^2(L-L')\,\mathrm{dost}^2\,(L+L')}{(L-L')^2} - \tfrac{15}{128} e^4 . \frac{\mathrm{wst}2(L-L').\mathrm{dost}2(L+L')}{(L-L')^3} \right\} \ldots (13).$$

Kiedy mamy $S-S'$ dane w sążniach, oznaczymy i Q w sążniach. Mnożąc tę wartość przez 864, znaydziemy Q w liniiach. Jedna zaś dziesięciomilionowa część Q, daie wartość na iednostkę miar-długości zwaną metrem. Podobnież trzeba (L—L′) wyrazić w częściach promienia, i podstawić za 90°

$\frac{1}{2}\pi = 1{,}5707963267 95.$

129. Stosownie do wyłożonych uwag w §. 128 zrównanie (13) da następną wartość na μ.

$$\mu = \frac{0{,}0000864\,(S-S')\,90^\circ}{(L-L')}\left\{1 + \left(\tfrac{3}{4}e^2 + \tfrac{3}{8}e^4\right)\frac{\text{dost}\,(L+L')\,\text{wst}\,(L-L')}{(L-L')\,\text{wst}\,1''} + \right.$$

$$\left. + \tfrac{9}{16}e^4 \frac{\text{dost}^2\,(L+L)\,\text{wst}^2\,(L-L')}{(L-L')^2\,\text{wst}^2\,1''} - \tfrac{15}{128}e^4\,\frac{\text{wst}\,2\,(L-L')\,\text{dost}\,2\,(L+L')}{(L-L')\,\text{wst}\,1''}\right\}.$$

Podstawuiąc w tém zrównaniu $e^2 = 2\alpha - \alpha^2$, oznaczymy μ przez funkcyą α.

$$\mu = \frac{C\,(S-S')}{L-L'}\left\{1 + \tfrac{3}{2}\alpha\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\text{wst}\,(L-L')\,\text{dost}\,(L+L')}{(L-L')\,\text{wst}\,1''} + \right.$$

$$\left. + \tfrac{9}{4}\alpha^2\,\frac{\text{wst}^2(L-L')\,\text{dost}^2(L+L')}{(L-L')^2\,\text{wst}^2\,1''} - \tfrac{15}{32}\alpha^2\,\frac{\text{wst}2\,(L-L')\,\text{dost}\,2\,(L+L')}{(L-L')\,\text{wst}\,1''}\right\} \ldots (14).$$

Ilość (L—L′) powinna bydź wyrażona w sekundach. A zaś:

$$C = \frac{0{,}0000864\,.\,\frac{1}{2}\pi}{\text{wst}\,1''}; \qquad \log C = 1{,}44705875.$$

Wzór (14) bardzo nam będzie poźniey potrzebny.

130. Zakładaiąc we wzorze (13) L+L′=90°, będzie:

$$Q = \frac{(S-S')\,90^\circ}{L-L'}. \qquad \frac{Q}{90^\circ} = \frac{S-S'}{L-L'} \ldots.. (15).$$

Pierwszy wzór pokazuie, że wartość czwartey części południka nie zależy od spłaszczenia; drugi zaś uczy nas, że stopień południka pod 45° szerokości jeograficzney, dość ściśle iest dziewięćdziesiątą częścią ćwiartki południka.

Przed wzorem (13) dowiedliśmy, że: $Q = m(1-e^2)\frac{1}{2}\pi$.

Wyrzucaiąc m będzie: $Q = \frac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 + \text{etc.}\right) \ldots.. (16).$

131. Nayprościey i iak się zdaie naydogodniey iest mierzyć spłaszczenie

sposobem podanym przez *Delambra* w tomie 3cim *Base du S. m. d.* Razem tu się wynayduie spłaszczenie, długość metra i czwarta część południka ziemskiego przechodzącego przez Paryż. Użył on w tym celu wzoru (14); wymiary zaś praktyczne wziął następuiące.

Naprzód: Stosownie do wymiarów robionych przez *Bugiera* i *Lakondamina* w Peru, łuk południka przy równiku przywiedziony do powierzchni morza zawierał: . . . . : . . . . 176877 sążni.

Szerokość jeograficzna północna tego łuku była $= + 0^{\circ}.\ 2'.\ 31''$.

południowa równała się $- 3^{\circ}.\ 4'\ 32''$.

Powtóre: Łuk południka mierzony we Francyi przez *Delambra* i *Mechain*, przywiedziony do powierzchni morza zawierał: . $551583^{s},6$.

Szerokość jeograficzna Dunkierki była $= 51^{\circ}.\ 2'.\ 9'',2$.

Szerokość drugiego końca łuku w Mont-jouy $= 41^{\circ}.\ 21'.\ 46'',58$.

Podstawuiąc raz pierwsze wartości drugi raz drugie we wzorze (14), otrzymamy dwa wyrażenia długości metra μ.

1ód: $\mu = 441^{l},1853 + 660^{l},5246.\ \alpha + 908^{l},5003.\ \alpha^{2}$.

2re: $\mu = 443,4134 - 27,70669.\ \alpha + 394,2950.\ \alpha^{2}$.

Stąd: $\alpha = \frac{1}{309,6}$. $\mu = 443^{l},328032 = 0^{s},5131114$.

Metr oceniony przez komissyą francuzką

miar i wag zawiera . . . . 0,5130740.

Różnica $= 0,0000374$.

Stąd i czwarta część południka wyrachowana przez *Delambra* iest większą o 371 sążni od wyrachowaney przez komissyą. W użyciu iednak praktycznem metra tak mała różnica żadnego nic sprawi błędu.

W ważnym celu oznaczenia metra i spłaszczenia ziemi, naystosowniey było użyć łuku mierzonego we Francyi i w Peru: tak dla dokładności wymiaru, iako też i dla znaczney różnicy krzywości łuków południka ziemskiego.

132. Podamy tu ieszcze ieden wzór na mierzenie spłaszczenia α, z którego potém wyciągniemy wiele korzystnych uwag. Niech g wyraża długość iednego stopnia południka, a g' niech oznacza długość stopnia drugiego. Szerokość ieograficzną obserwowaną środka łuku g nazwiymy L, a szerokość ieograficzną obserwowaną środka łuku g' oznaczmy przez L'. Niech R i R' będą promieniami krzywizny środków łuków g i g'. Otrzymamy ze wzoru (10′):

$$R = a\{1 - \alpha(2 - 3.\,\mathrm{wst}^2 L)\}. \qquad R' = a\{1 - \alpha(2 - 3\,\mathrm{wst}^2 L')\}.$$

Ponieważ: $\dfrac{g}{g'} = \dfrac{R}{R'}$, przeto:

$$\frac{g'}{g} = \frac{1 - \alpha(2 - 3\,\mathrm{wst}^2 L')}{1 - \alpha(2 - 3\,\mathrm{wst}^2 L)}.$$

Uskuteczniaiąc dzielenie i opuszczaiąc wyrazy mnożone przez α^2, iako nic nieznaczące, będzie:

$$\frac{g'}{g} = 1 - 3\alpha(\mathrm{wst}^2 L - \mathrm{wst}^2 L'). \qquad \alpha = \frac{g - g'}{3g(\mathrm{wst}^2 L - \mathrm{wst}^2 L')} \ldots\ldots\ldots (17).$$

Oto iest wzór na rachowanie spłaszczenia α, wyrażonego przez funkcyą mierzonych dwóch stopni południka i obserwowanych dwóch szerokości ieograficznych.

133. Właśnie w tém mieyscu wypada nam przytoczyć tablicę wymiarów stopni południka pod rozmaitemi szerokościami ieograficznemi, którą ułożył *Delambre*, tak ze swoich obserwacyy, z których brał średnie wypadki, iako też z obserwacyy PP. *Méchain* i *Roy*. Według tey tablicy rachował on rozmaite wartości spłaszczenia α, które my tu ze stosownemi uwagami przytoczymy.