Mierząc kąt położenia między dwóma stanowiskami zawarty, można dwie nogi narzędzia i oś obrotu postawić równolegle do linii łączącey dwa stanowiska; albo nogę trzecią przednią ustawić na linii dzielącey kąt położenia na połowę. *Delambre* podaie w tym celu rozmaite wzory w tomie drugim dzieła: *Base du système métrique décimal.*

ROZDZIAŁ III.

Przywiedzenie kątów położeń do poziomu.

---

41. Po ustawieniu znaków we wszystkich stanowiskach, biorą się na każdém kąty dwoiakiego gatunku. Wystawmy sobie *np.* że ze stanowiska A, w którém umieszczone iest koło powtarzaiące, obserwuiemy stanowiska B i C. (*fig.* 12) Oznaczyć naprzód powinniśmy za pomocą wielokrotnie powtórzonych obserwacyy kąt BAC, zwany kątem położenia (*angle de position*); i kąty ZAB i ZAC, które są odległościami od zenitu Z, dwóch stanowisk B i C.

Kiedy kąty ZAB i ZAC ważą po 90,° czyli kiedy kąt położenia BAC leży na płaszczyźnie poziomey przez punkt A przechodzącey, wtenczas on iest miarą kąta kulistego uważanego na powierzchni ziemi, który ma wierzchołek we środku stanowiska A, a ramionami obeymuie stanowiska B i C. Lecz ieżeli te kąty są większe lub mnieysze od 90,° potrzeba koniecznie obserwowany kąt położenia przywieść do poziomu. Tym sposobem kąty położeń brane między wszystkiemi stanowiskami i przywiedzione do poziomu, posłużą do rozwiązania troykątów i obrachowania ich powierzchni, kiedy w całey sieci choć ieden bok, czyli tak nazwana *podstawa* (*base*), dokładnie będzie wymierzona.

42. Punkta A, B i C wyobrażaią środki znaków. Każdy więc kąt położenia bydź powinien *naprzód:* uważany na płaszczyźnie poziomey przez wierzchołek *np.* znaku A, z którego się obserwuie, przechodzący. *Powtóre:* wierzchołek kąta położenia A ma bydź w samym środku znaku, z którego się robi obserwacya. *Potrzecie:* ramiona kąta położenia AB i AC powinny przechodzić przez środek znaków B i C.

Bardzo iednak rzadko uda się tak umieścić narzędzie, żeby iego środek przypadł na środek znaku A; nayczęściey trzeba narzędzie na boku znaku lub zewnątrz iego ustawiać. W tym razie kąty położeń nie maią swego wierzchołka w A, ale gdzieś około tego punktu.

Nadto w dniu pogodnym, obserwuiąc z punktu A znaki B i C, kiedy słońce ukośnie ie oświeca, strony ich zwrócone do obserwatora nie są iednostaynie oświecone; i tylko części mocniey oświecone dobrze postrzegać się daią. W tém zdarzeniu obserwator umieszczony w A, celuiąc do środka znaków widzianych B i C, oddala się od osi; a ramiona obserwowane AB i AC nie przechodzą przez środek znaków B i C, ale blisko tego punktu padaią.

Z tych wszystkich uwag wynika *naprzód:* że stosownie do wielkości kątów ZAB i ZAC potrzeba obserwowany kąt położenia BAC przywieść do poziomu. *Powtóre:* Kiedy narzędzie nie było ustawione w środku znaku A, trzeba wierzchołek kąta położenia przywieść do środka stanowiska, z którego się powinna była robić obserwacya. *Potrzecie*: Jeżeli ramiona AB i AC nie przechodzą przez środki znaków B i C, potrzeba ie za pomocą rachunku do osi tych znaków skierować.

W tym rozdziale zastanowimy się nad rozwiązaniem pierwszego zagadnienia.

43. Pozwólmy że ze stanowiska C (*fig.* 13) obserwowaliśmy kąt położenia ACB, a odległości zenitalne ZCB i ZCA nie wynoszą po 90°; trzeba sprowadzić kąt BCA do poziomu. Na ten koniec przez liniią wierzchołkową CZ i przez punkt B prowadzę koło wierzchołkowe, które zrobi na poziomie rzut CB′ linii CB. Podobnież prowadząc drugie koło wierzchołkowe przez liniią CZ i CA, przeniosę liniią CA na poziom w kierunku CA′. A zatém kąt położenia BCA przeniesiony na poziom wyraża się przez kąt B′CA′. Zakreśliwszy z punktu C promieniem ZC dwa łuki kół wierzchołkowych Za i Zb, kąt kulisty aZb będzie oznaczał pochyłość dwóch płaszczyzn wierzchołkowych ZCB′ i ZCA,′ a zatém będzie równy kątowi prostokreślnemu B′CA′. Nadto w troykącie kulistym Zba, bok Zb wyraża odległość od zenitu Z znaku B, a Za iest odległością zenitalną znaku A; bok ba iest miarą kąta BCA. Wszystkie te trzy rzeczy są znane z obserwacyi. Możemy przetó kąt bZa=B′CA′ łatwo oznaczyć, za pomocą pierwszego zrównania fundamentalnego trygonometryi kulistey.

Nazwiymy $Za=\alpha$. $Zb=\alpha'$. $Zb+Za+ab=s=\alpha+\alpha'+ba$.

będzie: $$\text{wst}\tfrac{1}{2}\,Z=\frac{\sqrt{\text{wst}\frac{1}{2}(\alpha+ba-\alpha')\ \text{wst}\frac{1}{2}(\alpha'+ba-\alpha)}}{\text{wst}\,\alpha.\ \text{wst}\,\alpha'}=\frac{\sqrt{\text{wst}(\frac{s}{2}-\alpha)\ \text{wst}(\frac{s}{2}-\alpha')}}{\text{wst}\,\alpha.\ \text{wst}\,\alpha'}.$$

Wzór ten użyć się może z pożytkiem do rachowania kąta Z, kiedy α i α' znacznie się różnią od 90°. Pospolicie iednak różnica ta iest bardzo mała; i na rachowanie przywiedzenia obserwowanego kąta położenia do poziomu używa się następny wzór, który łatwo dał się ułożyć w tablice.

Uczyńmy wysokość znaku $A=90°-\alpha=H$; wysokość znaku $B=90°-\alpha'=H'$; $ab=BCA=C$. Różnicę zaś pomiędzy kątem A′CB′ i ACB ρ. A′CB′—ACB nazwiymy x.

Otrzymamy *).... (1)..: $x=\left(\frac{H+H'}{2}\right)^2\frac{\mathrm{sty}\frac{1}{2}C}{R''}-\left(\frac{H-H'}{2}\right)^2\frac{\mathrm{dosty}\frac{1}{2}C}{R''}$.

Jeżeli znak *np.* A leży nad poziomem, wtenczas H nazywa się iego *wysokością* (*hauteur*), i ma znak dodatny. Kiedy zaś A leży pod poziomem, wtedy H nazywa się *zniżeniem* (*dépression*), i ma znak odjemny. Wzór (1) służy na przypadek kiedy H i H′ są ze znakiem dodatnym.

---

*) W troykącie bZa ieżeli boki Za i Zb są prawie równe 90,° wtenczas kąt Z będzie prawie miał za miarę bok ba.

Naznaczmy $Z=C+x$. Kąt C albo BCA ma za miarę bok ab.

W troykącie Zba $\mathrm{wst}^2\frac{1}{2}Z=\frac{\mathrm{wst}\frac{1}{3}(\alpha+C-\alpha')\,\mathrm{wst}\frac{1}{2}(\alpha'+C-\alpha)}{\mathrm{wst}\,\alpha.\ \mathrm{wst}\,\alpha'}$.

Mamy zaś $\mathrm{wst}\frac{1}{2}Z=\mathrm{wst}\frac{1}{2}(C+x)=\mathrm{wst}\frac{1}{2}C.\mathrm{dost}\frac{1}{2}x+\mathrm{wst}\frac{1}{2}x.\mathrm{dost}\frac{1}{2}C=$
$=\mathrm{wst}\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}x.\mathrm{dost}\frac{1}{2}C$; bo kąt x bardzo iest mały.

Podobnież $\mathrm{wst}^2\frac{1}{2}Z=\mathrm{wst}^2\frac{1}{2}C+x\,\mathrm{dost}\frac{1}{2}C.\ \mathrm{wst}\frac{1}{2}C+\frac{1}{4}x^2.\ \mathrm{dost}^2\frac{1}{2}C.$
$\frac{1}{4}x^2.\ \mathrm{dost}^2\frac{1}{2}C$ iako ilość niezmiernie małą opuszczamy.

Porównywaiąc obie wartości na $\mathrm{wst}^2\frac{1}{2}Z$, będzie:

$$\mathrm{wst}^2\tfrac{1}{2}C+x\,\mathrm{dost}\tfrac{1}{2}C.\ \mathrm{wst}\tfrac{1}{2}C=\frac{\mathrm{wst}\frac{1}{2}(\alpha+C-\alpha').\ \mathrm{wst}\frac{1}{2}(\alpha'+C-\alpha)}{\mathrm{wst}\,\alpha.\ \mathrm{wst}\,\alpha'}$$

Kładąc za α.... $90^\circ-H$, za α'.... $90^\circ-H'$, będzie:

$$\mathrm{wst}^2\tfrac{1}{2}C+x.\ \mathrm{wst}\tfrac{1}{2}C.\ \mathrm{dost}\tfrac{1}{2}C=$$

$$=\frac{\mathrm{wst}\frac{1}{2}\left\{90^\circ-H+C-90^\circ+H'\right\}\mathrm{wst}\frac{1}{2}\left\{90^\circ-H'+C-90^\circ+H\right\}}{\mathrm{dost}\,H.\ \mathrm{dost}\,H'}=$$

$$=-\frac{\mathrm{wst}\frac{1}{2}\left\{(H-H')+C\right\}\mathrm{wst}\frac{1}{2}\left\{(H-H')-C\right\}}{\mathrm{dost}\,H.\ \mathrm{dost}\,H'}=$$

$$=-\frac{\left\{\mathrm{wst}\frac{1}{2}(H-H')\mathrm{dost}\frac{1}{2}C+\mathrm{wst}\frac{1}{2}C.\mathrm{dost}\frac{1}{2}(H-H')\right\}\left\{\mathrm{wst}\frac{1}{2}(H-H')\mathrm{dost}\frac{1}{2}C-\mathrm{wst}\frac{1}{2}C.\mathrm{dost}\frac{1}{2}(H-H')\right\}}{\mathrm{dost}\,H.\ \mathrm{dost}\,H'.}=$$

$$=\frac{\mathrm{wst}^2\frac{1}{2}C.\ \mathrm{dost}^2\frac{1}{2}(H-H')-(1-\mathrm{wst}^2\frac{1}{2}C)\mathrm{wst}^2\frac{1}{2}(H-H')}{\mathrm{dost}\,H.\mathrm{dost}\,H'}=$$

$$=\frac{\mathrm{wst}^2\frac{1}{2}C\left\{\mathrm{dost}^2\frac{1}{2}(H-H')+\mathrm{wst}^2\frac{1}{2}(H-H')\right\}-\mathrm{wst}^2\frac{1}{2}(H-H')}{\mathrm{dost}\,H.\ \mathrm{dost}\,H'}.$$

Stąd: $x.\ \mathrm{wst}\frac{1}{2}C.\ \mathrm{dost}\frac{1}{2}C=\frac{(1-\mathrm{dost}\,H.\ \mathrm{dost}\,H')\,\mathrm{wst}^2\frac{1}{2}C-\mathrm{wst}^2\frac{1}{2}(H-H')}{\mathrm{dost}\,H.\ \mathrm{dost}\,H'}$.

Kiedy H i H′ są zniżeniami, czyli są ze znakiem odjemnym, wtenczas:

$$x = \left(\frac{-H-H'}{2}\right)^2 \frac{\text{sty}\tfrac{1}{2}C}{R''} - \left(\frac{-H+H'}{2}\right)^2 \frac{\text{dosty}\tfrac{1}{2}C}{R''}.$$

A że wiemy z trygonometryi, że: $1-\text{dost}\,H.\ \text{dost}\,H' = \text{wst}^2\tfrac{1}{2}(H+H') + \text{wst}^2\tfrac{1}{2}(H-H')$.

Bo: $\text{dost}\,H.\ \text{dost}\,H' = \tfrac{1}{2}\text{dost}\,(H+H') + \tfrac{1}{2}\text{dost}\,(H-H')$.

$\tfrac{1}{2}\text{dost}\,(H+H') = \tfrac{1}{2} - \text{wst}^2\tfrac{1}{2}(H+H')$;

$\tfrac{1}{2}\text{dost}\,(H-H') = \tfrac{1}{2} - \text{wst}^2\tfrac{1}{2}(H-H')$.

$\tfrac{1}{2}\text{dost}\,(H+H') + \tfrac{1}{2}\text{dost}\,(H-H') = \text{dost}\,H.\ \text{dost}\,H' =$

$= 1 - \text{wst}^2\tfrac{1}{2}(H+H') - \text{wst}^2\tfrac{1}{2}(H-H')$.

Stąd: $1-\text{dost}\,H.\ \text{dost}\,H' = \text{wst}^2\tfrac{1}{2}(H+H') + \text{wst}^2\tfrac{1}{2}(H-H')$.

Przeto:

$$x = \frac{\left\{\text{wst}^2\tfrac{1}{2}(H+H') + \text{wst}^2\tfrac{1}{2}(H-H')\right\}\dfrac{\text{wst}^2\tfrac{1}{2}C}{\text{wst}\tfrac{1}{2}C.\ \text{dost}\tfrac{1}{2}C} - \dfrac{\text{wst}^2\tfrac{1}{2}(H-H')}{\text{wst}\tfrac{1}{2}C.\ \text{dost}\tfrac{1}{2}C}}{\text{dost}\,H.\ \text{dost}\,H'}.$$

$$x = \frac{\text{wst}^2\tfrac{1}{2}(H-H')\left\{\dfrac{\text{wst}^2\tfrac{1}{2}C - 1}{\text{wst}\tfrac{1}{2}C.\ \text{dost}\tfrac{1}{2}C}\right\} + \text{sty}\tfrac{1}{2}C.\ \text{wst}^2\tfrac{1}{2}(H+H')}{\text{dost}\,H.\ \text{dost}\,H'}.$$

$$x = \frac{\text{wst}^2\tfrac{1}{2}(H+H')\,\text{sty}\tfrac{1}{2}C - \text{wst}^2\tfrac{1}{2}(H-H')\,\text{dosty}\tfrac{1}{2}C}{\text{dost}\,H.\ \text{dost}\,H'\ \text{wst}\,1''}. \quad \ldots\ldots\ldots(a).$$

Oto iest wzór *Delambra*, z którego łatwo otrzymamy wzór podany przez *Leżandra*, zaniedbuiąc mianownik dost H. dost H′ prawie równy iedności i biorąc zamiast wstaw małych łuków sameż łuki. Będzie bowiem:

$$x = \tfrac{1}{4}(H+H')^2\frac{\text{sty}\tfrac{1}{2}C}{R''} - \tfrac{1}{4}(H-H')^2\frac{\text{dosty}\tfrac{1}{2}C}{R''}. \quad \ldots\ldots(1).$$

Na rachowanie wzoru *Leżandra* podane są tablice w dziele Jeodezyi P. *Puissana*. *Delambre* zaś w tomie 1szym swoiego dzieła *Base du syst. métr. déc.* umieścił tablice na rachowanie kąta x według wzoru przez siebie podanego. Tablica I. *Delambra* daie na każdą wartość ilości (H ± H′) odmienianey po minucie, ilość $10000.\ \text{wst}^2\tfrac{1}{2}(H \pm H')$.

W tablicy zaś II. na rozmaite wartości kąta C odmienianego po 10,′ znayduią się odpowiedne ilości $\left(\dfrac{0'',0001}{\text{wst}\,1''}\right)\text{sty}\tfrac{1}{2}C$; i $\left(\dfrac{0'',0001}{\text{wst}\,1''}\right)\text{dosty}\tfrac{1}{2}C$.

Dla tego umieściliśmy tu tablice *Delambra*, bo one rachowane są na dawnieyszy podział koła na 360,° pospolicie u nas używany. P. *Puissant* zaś rachował swoie tablice na podział koła na 400gr.

Wzór ten odpowiada zupełnie wzorowi (1); bo kwadraty z tychże samych ilości dodatnych i odjemnych są zawsze też same i dodatne.

Lecz ieżeli H iest dodatne a H′ odjemne, wtenczas:

$$(2)\ldots\ldots x=\left(\frac{H-H'}{2}\right)^2\frac{\text{sty}\frac{1}{2}\,C}{R''}-\left(\frac{H+H'}{2}\right)^2\frac{\text{dosty}\frac{1}{2}\,C}{R''}.$$

Jeżeli H=H′, wzór (1) daie: $x=\left(\frac{H+H'}{2}\right)^2\frac{\text{sty}\frac{1}{2}\,C}{R''}$.

Wzór (2) daie: $x=-\left(\frac{H+H'}{2}\right)^2\frac{\text{dosty}\frac{1}{2}\,C}{R''}$.

Oprócz tego widzimy: że poprawka x staie się = o we trzech przypadkach.

1ód: Kiedy H = H′ = o.

2re: Kiedy $\left(\frac{H+H'}{2}\right)^2$ sty$\frac{1}{2}$C $=\left(\frac{H-H'}{2}\right)^2$ dosty$\frac{1}{2}$C; czyli sty$\frac{1}{2}$C $=\frac{H-H'}{H+H'}$.

3cie: gdy H=o, albo H′=o; i sty$\frac{1}{2}$C = dosty$\frac{1}{2}$C; czyli kiedy $\frac{1}{2}$C = 45°, a C = 90°.

Przykład. Założmy sobie przywieść do poziomu obserwowany kąt położenia

C = 51°. 9′. 29″,744; gdzie
H = 1°. 32′. 45″,0, a zaś;
H′ = 1°. 7′. 10″,0.
H + H′ = 2°. 39′. 55″.
H − H′ = 25′. 35″.

Używaiąc tablic *Delambra*, mam z tablicy I.

H + H′. . : : : + 5″,408.
H − H′. : : . . : + 0″,139.

A z tablicy II. znaydę sty$\frac{1}{2}$C . . . . + 9″,87.
dosty$\frac{1}{2}$C . . . . — 43″,09.

Stąd: x = 5″,408 × 9″,87 — 0″,139 × 43″,09.
x = 47″,387.
C + x = 51°. 10′. 17″,131.

wyraża kąt położenia obserwowany przywiedziony do poziomu.

Można toż samo zagadnienie rozwiązać za pomocą logarytmów, używaiąc wzoru (1); ale robota byłaby dłuższą.

44. Sprowadzaiąc kąty położeń do poziomu, powinniśmy odległości zenitalne brać z samych wierzchołków tychże kątów. Nie zawsze iednak można postawić koło powtarzaiące w tak korzystném położeniu; nayczęściey niżey wierzchołka kąto, albo też w pewney od niego odległości ustawia się narzędzie. Stąd potrzeba obserwowane odległości zenitalne przywieść za pomocą rachunku do wierzchołka kąta położenia.

I tak niech będzie wierzchołek kąta C, (*fig.* 14), iego liniia wierzchołkowa ZCO. Pozwólmy że narzędzie do brania kątów ustawione było niżey wierzchołka C w punkcie *np.* O. Wymierzyliśmy odległość zenitalną $ZOA = d$, a potrzeba wynaleźć $ZCA = d'$.

Kąt $ZCA = d' = d + A$. Przeto kąt A iest poprawką, która dorzucona do d, da kąt ZCA.

W troykącie OCA nazwawszy OC przez r, CA przez D. Będzie:

$$OC : CA = r : D = \text{wst}\,A : \text{wst}\,d.$$

$$\text{Stąd: } \text{wst}\,A = \frac{OC}{CA}\,\text{wst}\,d = \frac{r}{D}.\,\text{wst}\,d. \quad A = \frac{r}{D}\,\frac{\text{wst}\,d}{\text{wst}\,1''}.$$

$$d' = ZCA = d + \frac{r}{D}.\;\frac{\text{wst}\,d}{\text{wst}\,1''}\;.\;.\;.\;.\;.\;(3).$$

Jeżelibyśmy chcieli odległość obserwowaną ZOA *v.* d przywieść do spodu znaku, wtenczas OC będzie odjemne.

$$\text{I}\ldots\; d'' = d - \frac{r}{D}.\;\frac{\text{wst}\,d}{\text{wst}\,1''}\;.\;.\;.\;.\;.\;(3').$$

45. Mieysce w którém iest ustawione narzędzie nie koniecznie może się znaydować na linii wierzchołkowey z wierzchołkiem C obserwowanego kąta położenia; może ono bydź z boku na iedneyże płaszczyźnie poziomey, *np.* może bydź

w punkcie B (*fig.* 15). W tym przypadku obserwuiemy odległość zenitalną ZOA, potrzeba zaś znaleźć Z′BA.

Na ten koniec poprowadźmy płaszczyznę wierzchołkową przez linie ZO i OA, ta przetnie poziom przechodzący przez punkt O w kierunku linii CH. Z punktu B spuśćmy prostopadłą BC na liniią CH, i złączmy punkt B z punktem O. Nazwiymy kąt ZOA przez d, CAO przez A, liniią BO przez r, liniią AB przez D, kąt BOC przez y. Zamiast kąta Z′BA, możemy rachować iemu równy kąt Z″CA. Kąt zaś $Z''CA = 90^\circ - ACO$. Kąt $ZOA = 90^\circ - AOH$.
Przeto: $Z''CA - ZOA = AOH - ACO = A$.

Dorzucaiąc więc do obserwowaney odległości zenitalney ZOA poprawkę A, znaydziemy wartość na kąt Z″CA *v.* Z′BA.
W troykącie ACO.... $AC : OC = \text{wst}\, AOC : \text{wst}\, A$.... $\text{wst}\, A = \frac{CO}{AC}\, \text{dost}\, d$.
A że w troykącie CBO prostokątnym w C.... $CO = BO.\, \text{dost}\, COB = r.\, \text{dost}\, y$.
Zatém: $\text{wst}\, A = \frac{r.\, \text{dost}\, y.\, \text{dost}\, d}{D}$; $\text{poprawka} = A = \frac{r.\, \text{dost}\, y.\, \text{dost}\, d}{D.\, \text{wst}\, 1''}$ . . . . . (4).

Wzór ten iest ogólny, dawać tylko w nim potrzeba baczność na znaki obu dostaw.

Jeżeliby zaś narzędzie nie było ustawione ani na iedney linii wierzchołkowey, ani też na iedney płaszczyźnie poziomey z wierzchołkiem obserwowanego kąta położenia, wtenczas za pomocą wzoru (4) przywiodę kąt obserwowany do linii wierzchołkowey, a za pomocą wzoru (3 *v.* 3′) zastosuię go do wierzchołka kąta położenia. Tak ocenione odległości zenitalne posłużą do przywiedzenia kątów położeń do poziomu, używaiąc do tego wzoru (1) podanego w §. 43. Wzory w §§. 44 i 45 służą ieszcze w równoważeniu jeodezycznem do przywiedzenia odległości zenitalnych wszystkich znaków do ich wierzchołka lub spodu.
