

CYNEMATYKA

I. SZYBKOŚĆ PUNKTU.

✓13. **Cynematyka i dynamika.** Ruch jest najpospolitszym zjawiskiem natury, bo wszystkie ciała, o których wiemy, pozostają w ustawicznym ruchu, a pojęcie spokoju, spokoju bezwzględnego, powstało w umyśle ludzkim skutkiem błędów dostrzegania. W ruchach ciała możliwa jest różnorodność nieograniczona. Dotyczy to ciał sztywnych, a w jeszcze większej mierze ciał niesztynnych, takich, jak ciało ludzkie lub zwierzęce, albo wreszcie płynów i gazów.

Pierwszym krokiem w nauce o ruchu musi być wprowadzenie pewnego ładu do tej różnorodności. Trzeba więc rozłożyć dostrzegany przez nas ruch ciała na pewne elementy proste i zbadać, jakie kombinacje mogą powstawać skutkiem łączenia się tych elementów. Stanowi to zadanie nauki zwanej *cynematyką**) od wyrazu greckiego *κίνημα*, oznaczającego ruch.

Doświadczenie codzienne wskazuje, że jedne ciała wywierają wpływ na ruch innych. Tak np. szyny wywierają wpływ na ruch lokomotywy. Gdyby w pewnym punkcie toru kolejowego usunąć szyny, to od tego punktu ruch lokomotywy stałby się zupełnie innym. Gdy kula bilardowa wejdzie w zetknięcie z inną kulą lub z bandą, to ruch jej zmienia się od razu pod różnymi względami.

*) Często mówi się i pisze *kinematyka* prawdopodobnie pod wpływem języków rosyjskiego i niemieckiego. Jest to sprzeczne ze zwyczajem, oddawna przyjętym w języku naszym pod wpływem łaciny; według zwyczaju tego zgłoski greckie *κ* i *χ* przechodzą w wyrazach spolszczonych w *cy* i *ce*, np. *cynik*, *cylinder*, *ocean*.

Ten wpływ ciał na ruchy ciał innych stanowi przedmiot drugiej części nauki o ruchu, zwanej *dynamiką* od wyrazu greckiego *δύναμις*, co znaczy siła.

Wpływ ciała na ruch ciała innego określamy wektorem, zwanem *siłą*, albo pewnym układem takich wektorów. Posługując się tem pojęciem, możemy zwięźlej scharakteryzować zadania cynematyki i dynamiki. Cynematyka opisuje, jak się poruszają ciała bez względu na siły, które na nie działają, a dynamika bada zależność ruchu ciał od sił działających.

Dla cynematyki nauką pomocniczą jest geometrya. Zasadnicza różnica pomiędzy naukami temi polega na tem, że w geometryi nie spotykamy się z pojęciem czasu, gdy w cynematyce pojęcie to odgrywa rolę zasadniczą.

Dynamika opiera się zarówno na geometryi, jak i na cynematyce. Wchodzą w niej dwa nowe pojęcia zasadnicze: masa i siła, których nie spotykamy w cynematyce.

Zarówno cynematykę jak i dynamikę można podzielić na dwie części; pierwsza dotyczy ciał sztywnych, druga ciał nieszttywnych. Wykład niniejszy obejmuje tylko elementy pierwszej z tych części.

✓ 14. **Równanie ruchu punktu.** Będziemy naprzód rozważali ruch punktu, aby przejść następnie do ruchu ciała. Mówiąc w cynematyce o punkcie ruchomym, mamy na myśli punkt w sensie geometryi. Wyobraźmy sobie, że punkt taki, poruszając się, pozostawia za sobą ślad w przestrzeni. Będzie to linia w sensie geometrycznym; nazywamy ją torem punktu ruchomego.

Jeżeli torem punktu jest linia prosta, to ruch zowie się *prostoliniowym*.

Dajmy na to, że tor punktu jest znany. Obierzmy na nim kierunek dodatni oraz pewien punkt *O*, który nazwiemy *początkiem toru*. Od punktu tego będziemy mierzyli łuki na torze, jak mierzymy odcinki na osiach współrzędnych od początku układu. Prócz tego obieramy pewną chwilę, od której będziemy rachowali czas. Chwila taka zowie się *erą*, albo *początkiem rachuby czasu*.

Zrobimy tu pewną ważną uwagę o znaczeniu wyrazu „chwila”. W języku potocznym wyraz ten oznacza po prostu

jakiś krótki okres czasu. W książce niniejszej będziemy konsekwentnie przypisywali mu znaczenie odmienne. Będziemy mianowicie oznaczali nim pojęcie, analogiczne do pojęcia punktu w geometrii. Jak punkt oznacza granicę pomiędzy dwiema częściami linii, tak chwila ma jedynie oznaczać granicę pomiędzy dwoma okresami czasu. Jak punkt nie posiada rozciągłości i nie należy do żadnej z owych części, tak chwila w znaczeniu naszym nie posiada trwania i nie należy do żadnego z przedzielanych okresów. Gdy powiemy na przykład „chwila odgradzająca godzinę czwartą od trzeciej“, to oczywiście nie chodzi tu o jakiś okres czasu, bo nie mogło być okresu nawet najkrótszego, któryby nie należał ani do godziny trzeciej ani do czwartej.

Dajmy na to, że od początku rachuby czasu upłynęło

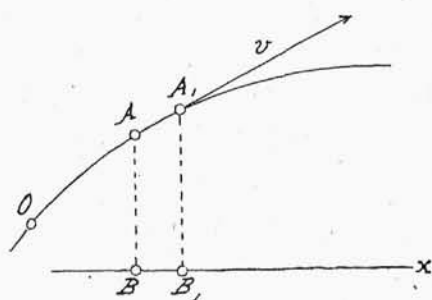


Fig. 6.

t sekund, albo innych umówionych jednostek czasu, że wówczas punkt ruchomy znalazł się w położeniu A na torze, i że łuk $OA=s$. Z biegiem czasu s się zmienia, a zatem zmienne s jest funkcją zmiennej t , funkcją jednoznaczna, bo punkt ruchomy nie może zajmować jednocześnie

nie dwóch lub więcej położań w przestrzeni.

Przypuśćmy, że

$$s = f(t).$$

Równanie to nazywa się równaniem ruchu punktu. Jest w niem zawarty dokładny opis ruchu, bo gdy je znamy, to możemy wskazać położenie punktu na torze w każdej chwili okresu, dla którego równanie jest ważne.

1. Prz. 1. Torem punktu ruchomego jest linia prosta, a równanie ruchu $s = t^2 - 20t + 75$. Gdzie znajdował się punkt, gdy zaczynano rachować czas, w jakiej chwili przebiegał przez początek toru, w którym miejscu i w której chwili kierunek ruchu zmienił się na odwrotny, w jakim kierunku punkt biegł przedtem i w jakim potem?

2. Prz. 2. Punkt biegnie w linii prostej według równania $s = t^3 - 3t^2 - 24t + 5$. Wyznaczyć odległość pomiędzy punktami zwrotu. Odp. 108.

$$\frac{ds}{dt} = 0, \quad t_1, t_2, \quad s_1 - s_2 = ?$$

Prz. 3. Ruch punktu jest prostoliniowy, a równanie ruchu $s = a \sin(\alpha + \omega t)$, gdzie a , α i ω są wielkościami stałymi. Gdzie znajdował się punkt ruchomy, gdy zaczynano rachować czas, kiedy przechodził po raz pierwszy od owej chwili przez początek toru, w jakich położeniach odbywają się zmiany kierunku ruchu, ile czasu upływa pomiędzy dwiema następującymi po sobie zmianami? Odp. Pomiedzy dwiema zmianami upływa $\frac{\pi}{\omega}$ sekund.

Prz. 4. Dwa punkty biegną tąż samą prostą, a ich równania ruchu są: $s = t^2 + 15t - 25$ i $s = 18t + 15$. W których miejscach nastąpią spotkania?

Prz. 5. Dwa punkty biegną prostymi x i y , przecinającymi się w O pod kątem prostym. Jeżeli punkt O obierzemy za początek obydwóch torów, to równania ruchu będą $x = a_1 t + b_1$, $y = a_2 t + b_2$. Wyznaczyć najmniejszą odległość pomiędzy punktami ruchomymi. Odp. $\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$.

15. Szybkość liniowa. Dajmy na to, że od chwili t , gdy punkt ruchomy przebiegał przez położenie A (fig. 6), upłynęło jeszcze dt sek., i wówczas punkt ruchomy doszedł do położenia A_1 , tak że $AA_1 = ds$. Utwórzmy wektor, związany z punktem ruchomym, według definicji następującej: kierunek jego ma być zgodny z kierunkiem elementu AA_1 (t. j. od A do A_1), a pod względem wielkości ma on być równy $\frac{ds}{dt} = v$.

Wektor taki nazywamy szybkością liniową punktu ruchomego w chwili t , albo w położeniu A .

Jak temperatura charakteryzuje stan cieplny ciała, tak szybkość charakteryzuje ruch punktu w danej chwili lub w danym położeniu, możnaby powiedzieć stan cynematyczny punktu.

Gdy mamy tor punktu i równanie ruchu $s = f(t)$, to możemy wyznaczyć szybkość dla każdej chwili, gdyż jest ona oczywiście styczna do toru, a pod względem wielkości równa $f'(t)$.

Jeżeli szybkość jest stałą pod względem wielkości, to ruch punktu nazywamy jednostajnym. W tym przypadku całkując równanie $\frac{ds}{dt} = v$ otrzymamy

$$s = vt + C,$$

gdzie C oznacza stałą całkowania. Jeżeli za początek rachuby

czasu obrano tę chwilę, w której punkt ruchomy przechodził przez początek toru, to $C=0$ i $v=\frac{s}{t}$.

W przypadku ruchu prostoliniowego szybkość oczywiście wciąż leży na torze.

Poznamy tu pewne twierdzenie, które będzie użyteczne w dalszym ciągu. Obierzmy w przestrzeni dowolną prostą x (fig. 6); rzut prostokątny punktu ruchomego na tę prostą jest także punktem ruchomym. Gdy oryginał zajął położenie A , to rzut jego znalazł się w B , gdy po upływie dt sek. oryginał doszedł do A_1 , to rzut doszedł do B_1 . Jeżeli $BB_1=dx$, to szybkość rzutu $u=\frac{dx}{dt}$; leży ona oczywiście na prostej x .

Niech α oznacza kąt pomiędzy szybkością v i prostą x ; w takim razie $dx=ds \cdot \cos \alpha$ i $u=\frac{ds}{dt} \cos \alpha$, czyli

$$u=v \cos \alpha.$$

Widzimy, że rzut szybkości punktu ruchomego na dowolną prostą jest szybkością rzutu punktu na tę prostą.

Prz. 1. Równanie ruchu punktu: $s=2t^3-18t^2+50t-50$. Z jaką szybkością punkt ten przechodził przez początek toru? Odp. 20.

Prz. 2. Prosta x jest nieruchoma, a prosta a posuwa się ze stałą szybkością v w kierunku prostopadłym do a , tworząc z prostą x stały kąt α . Wyznaczyć szybkość punktu przecięcia prostych a i x .

Odp. $\frac{v}{\sin \alpha}$. Należy naprzód utworzyć równanie ruchu.

Prz. 3. Prosta obraca się około punktu O , przyczem punkt jej, położony w odległości $=1$ od O , posiada stałą szybkość ω . Wyznaczyć szybkość punktu przecięcia tej prostej z okręgiem, który przechodzi przez O , i którego promień $=a$. Odp. $2a\omega$.

Prz. 4. Drabina AB opiera się końcem A o podłogę, a końcem B o ścianę, tworząc z podłogą kąt ϑ . Z jaką szybkością ruszy koniec B , gdy zaczniemy koniec A odsuwać od ściany z szybkością v . Odp.

$\frac{v}{\tan \vartheta}$. Oznaczając odległości końców A , B od ściany i podłogi

przez x , y , a długość drabiny przez a , otrzymamy $x=a \cos \vartheta$, $y=a \sin \vartheta$.

Szukana szybkość $\frac{dy}{dt}=a \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{dt}$, lecz z pierwszego równania wyni-

ka, że $\frac{dx}{dt}=-a \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dt}$. Rugując $\frac{d\vartheta}{dt}$, otrzymamy wynik żądany ze znakiem minus.

Prz. 5. Punkt M biegnie po prostej OM w kierunku OM z szyb-

kością v . Jest on połączony sznurem, przechodzącym przez blok O , z innym punktem P , który porusza się po prostej x , równoległej do OM . Wyznaczyć szybkość, którą punkt P posiada w chwili, gdy prosta PO tworzy z x kąt φ . Odp. $\frac{v}{\cos \varphi}$.

16. Inne równania ruchu. Równanie $s=f(t)$ określa całkowicie ruch punktu tylko w tym razie, gdy znany jest tor, dlatego też częściej stosujemy inne równania, określające jednocześnie i tor i ruch na torze.

Oznaczmy współrzędne punktu ruchomego w układzie prostokątnym przez (x, y, z) . Współrzędne te zmieniają się z biegiem czasu, są więc funkcjami czasu. Przypuśćmy, że

$$x=f(t), \quad y=g(t), \quad z=h(t).$$

Równania te nazywają się także równaniami ruchu. Określają one całkowicie ruch punktu, gdyż możemy z nich wyznaczyć dla każdego t , t. j. dla każdej chwili, współrzędne punktu ruchomego, a więc i położenie tego punktu w przestrzeni.

Równania powyższe określają także tor punktu; możemy je uważać wprost za parametryczne równania toru, a rugując z nich t , otrzymamy równania toru w postaci $\varphi(x, z)=0$, $\psi(y, z)=0$.

Oczywistą jest rzeczą, że równanie $x=f(t)$ jest równaniem ruchu rzutu rozważanego punktu ruchomego na osi x ; dwa równania pozostałe posiadają znaczenia analogiczne.

Dajmy na to, że równania ruchu są dane; pragniemy wyznaczyć szybkość punktu w chwili t pod względem wielkości i kierunku. Oznaczmy szukaną szybkość przez v , a jej kąty kierunkowe przez α, β, γ .

Oznaczmy jeszcze rzuty szukanej szybkości na osi przez v_x, v_y, v_z . Możemy wielkości te uważać również za składowe wektora v w kierunkach osi.

Z par. poprzedzającego wiemy, że v_x jest także szybkością rzutu punktu ruchomego na osi x , możemy więc ją wyznaczyć z pierwszego równania ruchu; tak samo wyznaczymy v_y i v_z z dwóch równań pozostałych. Będzie więc

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Dalej

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v}, \quad \cos \beta = \frac{v_y}{v}, \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{v}.$$

Jeżeli ruch jest płaski, t. j. odbywa się w jednej płaszczyźnie, to możemy w płaszczyźnie tej obrać osi x i y , i w takim razie będzie

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad \tan \alpha = \frac{v_y}{v_x}.$$

Prz. 1. Równania ruchu punktu są: $x = a_1 t + b_1$, $y = a_2 t + b_2$, $z = a_3 t + b_3$. Gdy wyrugujemy ślad t , to otrzymamy dwa równania pierwszego stopnia pomiędzy x , y , z , a zatem torem jest linia prosta. $v_x = a_1$, $v_y = a_2$, $v_z = a_3$ i $v = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. Widzimy, że v jest stałe, a zatem ruch jest jednostajny. Wyznamy łałwo α , β , γ , które są w tym razie również kątami kierunkowymi toru.

Prz. 2. Zbadać ruch punktu, którego równania są $x = a \cos \omega t$, $y = a \sin \omega t$. Odp. Torem jest okrąg o promieniu a , punkt biegnie od przecięcia toru z osią x do przecięcia z osią y , ruch jest jednostajny i szybkość $= a\omega$.

Prz. 3. Zbadać ruch punktu, gdy równania ruchu są $x = a \cos^2 \omega t$, $y = a \sin^2 \omega t$. Odp. Torem jest odcinek prostej, zawarty pomiędzy osiami, i punkt przebiega go to w jedną stronę, to w drugą. W którym miejscu szybkość jest największa?

Prz. 4. Równania ruchu: $x = \frac{a^2 t^2}{2p}$, $y = at$. Wyznamy tor oraz szybkość w początku rachuby czasu. Torem jest parabola styczną do osi y , szukana szybkość $= a$.

† Prz. 5. Zbadać ruch punktu, gdy $x = a \cos \omega t$, $y = a \sin \omega t$, $z = ct$. Odp. Torem jest śrubowa, której krok (czyli odległość pomiędzy sąsiednimi zwojami, mierzona w kierunku osi) $= \frac{2\pi c}{\omega}$.

† Prz. 6. Równania ruchu punktu są: $x = a \cos^3 \omega t$, $y = a \sin^3 \omega t$. Wyznamy tor punktu, położenie, w którym szybkość osiąga maksimum, oraz tę szybkość największą. Odp. Szybkość największa $= \frac{3a\omega}{2}$.

† Prz. 7. Punkt porusza się według równań $x = t^2 - 4t + 3$ i $y = 5t - 9$. Wyznamy położenie, w którym szybkość była najmniejsza oraz kierunek tej szybkości. Odp. Szybkość najmniejsza jest prostopadła do osi x .

17. Współrzędne biegunowe. W wielu razach dogodniejsze od współrzędnych Kartezjusza są współrzędne biegunowe; będziemy je stosowali zwłaszcza w przypadku ruchu płaskiego. Tor oraz ruch na torze są tu określone, gdy mamy dane obydwie współrzędne, t. j. promień wodzący r i kąt biegunowy φ w funkcjach czasu.

Przypuśćmy więc, że

$$r = f(t), \quad \varphi = g(t).$$

Są to znowu równania ruchu. Pierwsze z nich określa ruch punktu na promieniu wodzącym, a drugie obrót tego promienia około bieguna. Chodzi teraz o wyznaczenie szybkości v punktu ruchomego. Wyznamy naprzód rzuty jej, na promień wodzący w stronę od bieguna i na prostą u prostopadłą do promienia w stronę, w którą φ wzrasta. Oznaczmy te rzuty odpowiednio przez v_r i v_φ .

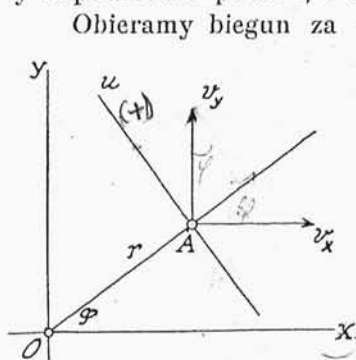


Fig. 7.)

Obieramy biegun za początek układu Kartezjusza, a oś biegunową za oś x , i rozkładamy szybkość na składowe v_x i v_y , równoległe do osi. Rzut szybkości v na jakikolwiek kierunek będzie równy sumie rzutów tych składowych. Otrzymamy więc

$$v_r = v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi,$$

$$v_\varphi = -v_x \sin \varphi + v_y \cos \varphi,$$

a ponieważ $v_x = \frac{dx}{dt}$ i $v_y = \frac{dy}{dt}$, przeto

$$v_r = \frac{dx \cdot \cos \varphi + dy \cdot \sin \varphi}{dt}, \quad v_\varphi = \frac{-dx \cdot \sin \varphi + dy \cdot \cos \varphi}{dt}.$$

Lecz $x = r \cos \varphi$ i $y = r \sin \varphi$. Różniczkując, otrzymamy

$$dx = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi, \quad dy = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi.$$

Wstawiając te wartości w wyrażenia składowych v_r i v_φ , znajdziemy, że

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt}.$$

Pochodne $\frac{dr}{dt}$ i $\frac{d\varphi}{dt}$ wyznaczmy z danych równań ruchu, będziemy więc mieli v_r i v_φ w funkcjach t . Oczywiście

*) Na figurze tej i wielu następnych obrano kierunki osi zgodnie ze zwyczajem. Jeżeli umowa, zawarta w par. 12, ma zachować moc obowiązującą, to trzeba uważać, że oś z jest skierowana na dół, lub za płaszczyznę papieru.

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} \quad \text{i} \quad \tan \vartheta = \frac{v_\varphi}{v_r},$$

jeżeli ϑ oznacza kąt, który szybkość tworzy z promieniem wodzącym.

Prz. 1. Równania ruchu punktu we współrzędnych biegunowych są $r=at$, $\varphi=\omega t$; zbadać ruch punktu. Odp. Torem jest spiralna Archimedeja, szybkość $=a\sqrt{1+\omega^2 t^2}$, a więc szybkość nieograniczenie wzrasta; $\tan \vartheta=\omega t$, z czego wynika, że ϑ wzrasta, zbliżając się nieograniczenie do kąta prostego.

Prz. 2. Równania ruchu we współrzędnych biegunowych: $r=ae^{\omega t}$, $\varphi=\omega t$. Odp. Torem jest spiralna logarytmiczna, szybkość tworzy stale z promieniem wodzącym kąt 45° .

18. Zagadnienie odwrotne. Dajmy na to, że wiemy, jakie szybkości pod względem wielkości i kierunku przybiera punkt ruchomy z biegiem czasu albo ze zmianą miejsca w przestrzeni, że mamy np. składowe szybkości v_x , v_y , v_z (albo v_r , v_φ w przypadku ruchu płaskiego) w funkcyjach czasu albo w funkcyjach współrzędnych. Dane te nie określają jeszcze ruchu punktu, gdyż nie zawierają żadnych wskazówek, przez jakie położenia w przestrzeni punkt przechodził istotnie. Ruch dopiero wtedy będzie całkowicie określony, gdy prócz tego będziemy mieli jeszcze położenie, przez które punkt w pewnej danej chwili przechodził.

Na zasadzie danych powyższych dają się utworzyć równania różniczkowe pierwszego rzędu, zawierające zmienne x , y , z i t (albo r , φ i t), a jeżeli będzie można je całkować, to otrzymamy równania ruchu i będziemy mogli zbadać ruch całkowicie. Owo dane położenie punktu służy do wyznaczenia stałych całkowania.

Przypuśćmy dla przykładu, że w pewnej chwili, którą obierzemy za początek rachuby czasu, punkt ruchomy zajmował położenie (b_1, b_2, b_3) , i że rzuty szybkości jego na osi stałe wynoszą odpowiednio a_1 , a_2 , a_3 . Na zasadzie tego otrzymamy trzy równania różniczkowe

$$\frac{dx}{dt} = a_1, \quad \frac{dy}{dt} = a_2, \quad \frac{dz}{dt} = a_3.$$

Całka pierwszego będzie $x = a_1 t + C$, gdzie C oznacza stałą całkowania. Gdy $t=0$, to $x=b_1$, zatem $C=b_1$. Tak samo znajdziemy dwa pozostałe równania ruchu (parag. 16 prz. 1).

Prz. 1. Punkt ruchomy zajmował w pewnej chwili położenie $(0, a)$, a rzuty szybkości jego na osi x i y wynoszą odpowiednio $\frac{ac}{y}$ i $\frac{c\sqrt{y^2-a^2}}{y}$. Wyznaczyć równanie toru. Odp. Z danych tych wynika, że ruch jest jednostajny, i szybkość $=c$. Dalej znajdziemy, że $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2-a^2}}{a}$, a to jest równanie różniczkowe linii łańcuchowej^{*)}.

Prz. 2. Człowiek stoi w punkcie O , a pies jego w punkcie A w odległości a od O . Człowiek zaczyna iść z szybkością c w kierunku prostopadłym do OA , a pies zaczyna biec doń z szybkością $2c$. Kiedy pies dogoni pana? Odp. Za $\frac{2a}{3c}$ sekund.

Za oś x obieramy prostą OA , a za początek punkt O , i w tym układzie wyznaczamy równanie toru psa. Jeżeli po t sekundach szybkość psa tworzy z osią x kąt ϑ , to $\frac{dx}{dt} = 2c \cos \vartheta$ i $\frac{dy}{dt} = 2c \sin \vartheta$, a stąd $\frac{dy}{dx} = \frac{ct-y}{x}$, równanie, które wynika wprost z figury. Zmiennej t pozbedziemy się w sposób następujący. Pies przebiegł dotychczas drogę $s=2ct$, a zatem $ct = \frac{s}{2}$. Podstawiamy to i różniczkujemy, uważając x za zmienną niezależną. Gdy następnie zamiast ds napiszemy $-\sqrt{dx^2+dy^2}$ (minus, bo s wzrasta, gdy x się zmniejsza), to wypadnie równanie drugiego rzędu $2x \frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. Całkując je, otrzymamy równanie toru, a zatem i punkt spotkania.

Prz. 3. Samochód wyruszył z położenia A i jedzie ze stałą szybkością v , gwiżdżąc. Jaki powinien być tor samochodu, aby fale głosowe, wytworzone na całej drodze, doszły jednocześnie do punktu O , położonego w odległości a od O ? Odp. Równanie toru we współrzęd-

nych biegunowych $r = \frac{ac}{\sqrt{v^2 - c^2}}$, gdzie c oznacza szybkość głosu, a więc tor powinien być spiralną logarytmiczną.

^{*)} Niech będzie na łańcuchowej jakiegokolwiek punkt A . Długość łuku od wierzchołka do A oznaczmy przez s , odległość tego punktu od kierownicy przez y , kąt stycznej w A z kierownicą przez ϑ , i parametr łańcuchowej przez a . Przy pomocy równania łańcuchowej łatwo udowodnić, że $a=y \cos \vartheta$, $s=y \sin \vartheta$ i $a^2+s^2=y^2$. Związki te będą nam nieraz potrzebne w dalszym ciągu. Można je łatwo zapamiętać w sposób następujący. Niechaj B oznacza rzut punktu A na kierownicę, i C rzut punktu B na styczną w A . Oczywiście w prostokątnym trójkącie ABC kąt $ABC=\vartheta$, $AB=y$, $BC=a$ i $AC=s$. Poprowadźmy jeszcze w A prostopadłą do AC , albo normalną do krzywej. Punkt przecięcia jej z kierownicą oznaczmy przez D . Otóż $AD=p$, czyli promieniowi krzywizny w A .

Prz. 4. Prosta obraca się około ogniska F paraboli, przyczem punkt jej, położony w odległości jednostkowej od F , posiada szybkość 2ω . Odległość ogniska od wierzchołka $= p$. Wyznaczyć szybkość punktu przecięcia prostej z parabolą w chwili, gdy pierwsza tworzy z osią paraboli kąt φ . Odp. $v = \frac{2\omega p}{\sin^3 \frac{\varphi}{2}}$. (Równanie biegunowe paraboli $r = \frac{2p}{1 - \cos \varphi}$.)

Prz. 5. Cztery punkty ruchome znajdowały się w pewnej chwili na okręgu o promieniu a w jednakowych odstępach, i każdy z nich wciąż biegnie do następnego ze stałą szybkością u . Znaleźć tor takiego punktu oraz czas, w którym dojdzie do środka koła.

Oczywiście punkty będą wciąż znajdowały się w jednakowych odległościach od środka koła, t. j. będą wciąż leżały na jednym okręgu w jednakowych odstępach. Obrawszy środek koła za biegun i poprowadziwszy oś biegunową przez początkowe położenie jednego z punktów, znajdziemy łatwo równania różniczkowe ruchu: $\frac{dr}{dt} = -\frac{u}{\sqrt{2}}$ i $r \frac{d\varphi}{dt} = \frac{u}{\sqrt{2}}$. Równanie toru $r = ae^{-\varphi}$, czas szukany $= \frac{a\sqrt{2}}{u}$.

19. Ruch względny. W dotychczasowym sposobie mówienia o ruchu punktu był pewien brak, który wypada teraz wyrównać.

Wyobraźmy sobie wagon kolejowy, toczący się po szynach, ułożonych w linii prostej. Można otrzymać wykres toru jakiegoś punktu, należącego do obwodu koła, w sposób następujący. Osadzamy w owym punkcie ołówek i rozpinamy obok toru kolejowego, w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny koła, papier. Podczas biegu wagonu ołówek wykreśli na papierze żadaną linię. Oczywiście będzie to cykloida. Gdybyśmy natomiast rozpięli papier na ramie, przymocowanej do wagonu, to ołówek zakreślił by okrąg koła.

Z tego wynika, że inny jest ruch owego punktu względem ziemi, albo w odniesieniu do układu współrzędnych, połączonego z ziemią, a inny w odniesieniu do układu, połączonego z wagonem. Gdy więc mówimy o ruchu punktu, to należy zawsze wskazać, to jakiego układu ruch ten odnosimy.

Mogłoby się wydawać, że gdy mowa wprost o ruchu punktu, to chodzi o ruch względem układu nieruchomego, ale układu takiego nie znamy; wszystkie ciała znane, a więc zie-

nia, słońce, planety i nawet tak zw. gwiazdy stałe poruszają się jedne względem drugich.

Wprawdzie zarówno w sprawach życia codziennego, jak i w nauce, wciąż się mówi o ruchu różnych ciał bez wyraźnego wskazywania układu odniesienia; nie wywołuje to nieporozumień. gdyż zwykle domyślamy się, o jaki układ odniesienia chodzi. Gdy np. jest mowa o ruchu tłoka maszyny okrętowej, to każdy rozumie, że chodzi o ruch względem korpusu maszyny, albo względem okrętu, a nie względem ziemi, gdy kto mówi o krążeniu krwi ludzkiej, to oczywiście ma on na myśli ruch względem naczyń krwionośnych lub względem ciała ludzkiego.

Najczęściej, gdy mówimy o ruchu bez wskazania układu odniesienia, to mamy na myśli ruch względem ziemi. Człowiek od wieków przywykł uważać planetę, na której mieszka, za nieruchomą i do niej zwykle odnosił ruchy ciał nie tylko ziemskich, ale i niebieskich. Przekonanie o nieruchomości ziemi jest tak głęboko zakorzenione w umyśle ludzkim, że odkrycie jej ruchu uważamy słusznie za jeden z największych wysiłków, na jakie się zdobyła myśl człowieka. Od tego odkrycia upłynęły już cztery wieki, dawno przebrzmiały walki, które musiała staczać nowa idea, pomimo to jednak wciąż mówimy i myślimy o ruchu dziennym sklepienia niebieskiego, o wschodzie i zachodzie słońca i t. d.

Gdy w dalszym ciągu będzie mowa o ruchu bez wyraźnego wskazania układu odniesienia, to można zgodnie z owym odwiecznym zwyczajem uważać, że chodzi o ruch względem ziemi, albo gdy będziemy mówili o układzie nieruchomym, to ma to oznaczać układ związany z ziemią.

20. Równoległobok szybkości. Niech będzie jakiś układ sztywny, który będziemy nazywali układem S , i który porusza się w sposób znany względem innego układu, uważanego za nieruchomy. Niech będzie prócz tego punkt ruchomy M , poruszający się jakkolwiek. Ruch układu S , albo ruch któregośkolwiek z jego punktów, nazywamy *ruchem unoszenia*. Prócz tego trzeba odróżniać dwa ruchy punktu M : ruch względem układu S , który nazywamy *względny*, i ruch względem układu nieruchomego, zwany *bezwzględnym*.

Możemy uważać, że punkt M porusza się wewnątrz ukła-

du S . Zajmuje on coraz nowe punkty tego układu, i wszystkie te punkty leżą na pewnej linii. Dobrze będzie wyobrażać sobie, że jest to kanał, przebity w ciele S i poruszający się wraz z niem, a w kanale porusza się punkt M . Linia ta, należąca do układu S , zowie się *torem względnym* punktu M .

Od toru względnego należy odróżniać *tor bezwzględny*, czyli linię, którą zatacza punkt M w układzie nieruchomym. W przykładzie, o którym była mowa w paragrafie poprzedzającym, torem względnym punktu, należącego do obwodu koła wagonowego, był okrąg, a torem bezwzględnym cycloida.

Będziemy dalej rozróżniali trzy szybkości: 1) *szybkość względną*, czyli szybkość punktu M w ruchu względnym, 2) *szybkość unoszenia*, czyli szybkość tego punktu układu S , który w danej chwili zajmuje punkt M , i 3) *szybkość bezwzględną*, czyli szybkość punktu M w ruchu bezwzględnym. Chodzi teraz o poznanie związku, jaki istnieje pomiędzy temi szybkościami.

Przypuśćmy, że w chwili obecnej punkt M zajmuje punkt

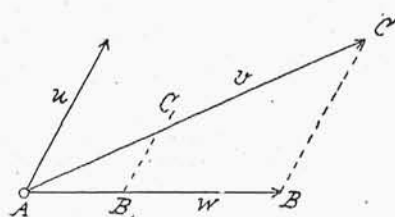


Fig. 8.

A układu S ; niech $w = AB$ będzie szybkością względną, a u szybkością unoszenia. Gdyby istniał tylko ruch względny, to po upływie dt sek. punkt M znalazłby się w punkcie B_1 , położonym na AB tak, że $AB_1 = wdt$. Ale punkt B_1 układu S jest ruchomy i za

dt sek. zajmie nowe położenie C_1 , i tam też znajdzie się oczywiście punkt M .

Punkty A i B_1 układu S są nieskończenie bliskie, a zatem szybkości ich różnią się pod względem wielkości nieskończenie mało, i również kąt zawarty pomiędzy nimi jest nieskończenie mały. Możemy przeto uważać, że szybkość punktu B_1 jest zgodna z u co do wielkości i kierunku, a zatem odcinek B_1C_1 jest równoległy do u i równy udt ,

Z rozważań tych wynika, że punkt C_1 leży w płaszczyźnie, przechodzącej przez u i w , a odcinek AC_1 , jako element toru bezwzględnego, wynosi vdt , gdzie v oznacza szybkość bezwzględną punktu M .

Poprowadźmy przez punkt B prostą, równoległą do u ,

albo do B_1C_1 ; przetnie ona AC_1 w punkcie C i otrzymamy $AC:vd t = w:wd t$, z czego wynika, że odcinek AC co do wielkości i kierunku określa szybkość bezwzględną punktu M . Widzimy, że *szybkość bezwzględna jest wypadkową szybkości względnej i szybkości unoszenia*. Nazywa się to *twierdzeniem o równoległoboku szybkości*.

Twierdzenie to można bez trudności uogólnić. Przypuśćmy, że punkt M posiada szybkość w względem układu S_1 i zajmuje w nim położenie A_1 , punkt A_1 posiada względem innego układu S_2 szybkość u_1 i zajmuje w nim położenie A_2 , punkt A_2 posiada względem S_3 szybkość u_2 i zajmuje w nim położenie A_3 i t. d., wreszcie punkt A_n układu S_n posiada względem układu nieruchomego szybkość u_n . W takim razie szybkość bezwzględna punktu M będzie wypadkową szybkości $w, u_1, u_2 \dots u_n$.

Na zasadzie równoległoboku szybkości można odrazu napisać wzory na v_r i v_φ , t. j. na składowe szybkości punktu ruchomego w biegunowym układzie współrzędnych. Pierwsza z nich v_r jest oczywiście szybkością punktu względem promienia wodzącego, a druga v_φ szybkością unoszenia.

W dalszym ciągu będzie nieraz mowa o *ruchu jednego punktu względem drugiego*, np. punktu A względem punktu B . Wyrażenie to należy rozumieć w sposób następujący. Wyobraźmy sobie, że z punktem B jest połączony cały układ sztywny S_1 , i że wszystkie punkty tego układu poruszają się tak samo, jak B , a więc każdy z nich ma w każdej chwili szybkość zgodną co do wielkości i kierunku z szybkością punktu B . Ruch taki układu sztywnego jest oczywiście możliwy (ob. par. 22), i nazywa się *ruchem postępowym*; rozważymy go szczegółowo w rozdziale następnym. Otóż ruch punktu A względem takiego wyobraźnialnego układu S nazywa się *ruchem względem punktu B* .

Prz. 1. Dane są co do wielkości i kierunku szybkość okrętu i szybkość wiatru. Wyznaczyć wykreślnie w jakim kierunku wychodzi dym z komina okrętowego. Odp. Oczywiście kierunek dymu będzie odwrotny do kierunku szybkości okrętu względem otaczającego powietrza.

Prz. 2. Dwa pociągi wychodzą jednocześnie ze stacji A_1, A_2 dwóch prostych linii kolejowych przecinających się w punkcie O . $OA_1 = x_1, OA_2 = x_2$, szybkość pierwszego pociągu jest stała i równa u , a po-

dróznym jego wydaje się wciąż, że drugi pociąg jest nieruchomy. Wyznaczyć szybkość drugiego pociągu i zbadać ruch jego. Odp. Ruch

ten jest jednostajny, i szybkość $= \frac{x_2 u}{x_1}$.

Widzowi nieruchomemu odległy przedmiot wydaje się nieruchomym, jeżeli szybkość tego przedmiotu jest skierowana wzdłuż prostej, łączącej go z okiem widza.

Prz. 3. Dwa okręty, zajmujące dane położenia płyną z szybkościami danymi. Wyznaczyć wykreślnie szybkość, z którą powinien płynąć trzeci okręt, którego położenie jest również dane, aby jadącym na nim wydawało się, że dwa pierwsze są nieruchome.

16 Prz. 4. Deszcz pada pionowo z szybkością v . Pod jakim kątem do pionu należy ustawić łaskę parasola, aby, idąc z szybkością u , najskuteczniej zasłonić się od deszczu? Odp. $\arctan \frac{u}{v}$.

Prz. 5. Czy do wagonu bez dachu więcej wpada deszczu na sek. podczas postoju czy podczas jazdy?

Prz. 6. Dane są położenia okrętów A i B , szybkość (stała) pierwszego pod względem wielkości i kierunku oraz szybkość drugiego pod względem wielkości. Wyznaczyć wykreślnie kierunek, w którym powinien płynąć okręt B , aby spotkać się z A .

Prz. 7. Okrągła tarcza obraca się około środka; okazać, że względem punktu A , położonego na obwodzie, szybkości wszystkich innych punktów obwodu są skierowane do przeciwnego końca średnicy, przechodzącej przez A , albo od tego końca.

Prz. 8. Środkiem ulicy, której szerokość jest równa c , jedzie szereg wagonów tramwajowych z szybkością stałą u w odstępach a . Szerokość każdego wagonu jest równa b . W ciągu jakiego czasu można przejść przez ulicę, idąc w linii prostej z najmniejszą szybkością stałą. Odp. $\frac{c}{u} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)$.

Prz. 9. Dwa punkty ruchome P i Q zajmują w pewnej chwili położenia O i A . Pierwszy porusza się z szybkością stałą u , prostopadłą do OA , szybkość zaś drugiego jest wciąż skierowana do pierwszego, i odległość pomiędzy nimi jest stale równa a . Jaki kąt utworzą te szybkości po upływie t sekund? Odp. Szybkość punktu Q względem P wynosi $a \frac{d\vartheta}{dt}$, gdzie ϑ oznacza kąt szukany. Znajdziemy łatwo

$$a \frac{d\vartheta}{dt} = -u \sin \vartheta, \text{ a stąd } \tan \frac{\vartheta}{2} = e^{-\frac{ut}{a}}.$$

Prz. 10. Dowieść, że styczna do elipsy jest dwusieczną kąta pomiędzy promieniami wodzącymi.

Jeżeli r_1, r_2 oznaczają promienie wodzące, to rzuty szybkości punktu, obiegającego elipsę, na te promienie wynoszą $\frac{dr_1}{dt}, \frac{dr_2}{dt}$. Po-

nieważ $r_1 + r_2 = 2a$, przeto $\frac{dr_1}{dt} = -\frac{dr_2}{dt}$, skąd bezpośrednio wynika żądane twierdzenie.

Prz. 11. Dowieść, że styczna do hiperboli jest dwusieczną kąta pomiędzy promieniami wodzącymi.

Prz. 12. Dowieść twierdzenie analogiczne dla paraboli.

Prz. 13. Koło obraca się w swej płaszczyźnie około punktu A , położonego na obwodzie, z szybkością kątową ω , a punkt P porusza się po obwodzie w kierunku odwrotnym z szybkością kątową 2ω względem koła. Okazać, że torem punktu P jest linia prosta i wyznaczyć szybkość bezwzględną. Odp. $2a\omega \cos\left(\frac{s}{2a}\right)$, gdzie s oznacza łuk AP .