

NAUKA O RUCHU

K. Koenig
~~Revised~~
~~at Washington 32.11.18~~

WIEDZA FIZYCZNA

*Zbiór dzieł z dziedziny fizyki, wydawany pod redakcją W. Biernackiego,
M. Grotowskiego, St. Kalinowskiego, Z. Straszewicza i W. Wernera.*

NAUKA O RUCHU

(CYNEMATYKA I DYNAMIKA)

Z LICZNYMI PRZYKŁADAMI

PRZEZ

ZYGmunTA STRASZEWICZA

Z zapomogi Kasy Pomocy dla osób, pracujących
na polu naukowym im. Dr. J. Mianowskiego.

WARSZAWA, 1918.

SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI GEBETHNERA I WOLFFA.

Cena marek 12.



C. 8170



nr. 121



Drukarnia Naukowa. Warszawa, Rynek Starego Miasta 11.

Geprüft und auch für die Ausfuhr freigegeben Preseverwaltung
Warschau, den 11/XI 1917. T. № 8121. Dr. № 278.

BGG2P/499-28

PRZEDMOWA.

Książka niniejsza zawiera wykład cynematyki i dynamiki, odpowiadający w głównych rysach kursowi, który wygłosiłem w r. 1916/7 na wydziale Budowy Maszyn Politechniki Warszawskiej. Jest to więc wykład mechaniki teoretycznej (z pominięciem statyki), przystosowany do potrzeb technika i skutkiem tego odbiegający dość daleko od wielu podręczników, które uwzględniają raczej potrzeby astronoma i fizyka. Dotyczy to w równej mierze treści, jak i metody. Licząc się więc z potrzebami współczesnego inżyniera, poświęciłem stosunkowo dużo miejsca cynematyce ciała sztywnego, reakcyom w łożyskach i przegubach, naprężeniom, powstającym w ciele podczas ruchu i t. d. Co się tyczy metody, to dawałem wszędzie, gdzie to było możliwe, pierwszeństwo metodzie geometrycznej, gdyż zdaniem mojem jest ona dla danego celu odpowiedniejsza od analitycznej. Opanowanie należyte aparatu analitycznego jest rzeczą niełatwą i wymaga długiej pracy, na którą nie każdy technik może się zdobyć. Kto zaś nie włada w dostatecznym stopniu metodą, temu zawiłości rachunku przysłaniają często badane zjawisko. Metoda geometryczna ujmuje rzecz bardziej bezpośrednio i skutkiem tego daje wyraźniejszy obraz zjawiska zwłaszcza dla umysłów mniej wyszkolonych matematycznie.

Przy studyowaniu mechaniki niezbędne są ciągłe ćwiczenia, gdyż tylko tą drogą uczący się może osiągnąć całkowitą asymilację poznanej teorii i zapanować nad zjawiskami mechanicznymi. Pragnąc dostarczyć czytelnikowi materiału do ćwiczeń, zebrałem w książce kosztem niemałej pracy pokazną liczbę zadań, starając się, aby były interesujące i istotnie kształtujące, t. j. aby nie tylko rozwijały wprawę w stosowaniu

wzorów i metod, lecz aby jednocześnie wzbogacały wiedzę mechaniczną czytelnika. Zadania te nie stanowią odrębnego zbioru, lecz są umieszczone w różnych rozdziałach tak, że czytelnik, poznawszy nowe twierdzenie, znajduje zaraz materiały do stosownych ćwiczeń. Czerpałem je z różnych źródeł. Niektóre z nich są mego własnego pomysłu, inne zapożyczyłem z dzieł Appella, Castellano, Wittenbauera, Crabtree, Besanta, Waltona, Routha, Whittakera, Graya, Love'a i innych; przeważna część, zwłaszcza z dynamiki, jakkolwiek zaczerpnięta przezemnie z dzieł wymienionych autorów, pochodzi z aktów egzaminacyjnych uniwersytetów angielskich.

Do zrozumienia książki potrzebna jest znajomość zasad rachunków różniczkowego i całkowego wraz z elementami równań różniczkowych, a także podstawowych twierdzeń statyki.

AUTOR.

Warszawa w grudniu 1917 r.

SPIS RZECZY

Wstęp.

Paragr.		Str
1.	Skalary	1
2.	Wektory	1
3.	Rodzaje wektorów	2
4.	Przykłady. Siła i para	3
5.	Suma geometryczna	5
6.	Rzuty wektorów na płaszczyzny i proste	7
7.	Metoda analityczna sumowania wektorów	9
8.	Rzut trójkąta na płaszczyznę	9
9.	Moment wektora względem punktu	10
10.	Moment wektora względem prostej	13
11.	Moment wypadkowy względem prostej i punktu	14
12.	Analityczne wyrażenie momentu	15

CYNEMATYKA.

I. Szybkość punktu.

13.	Cynematyka i dynamika	18
14.	Równanie ruchu punktu w postaci $s=f(t)$	19
15.	Szybkość liniowa	21
16.	Inne równania ruchu $x=f(t)$, $y=g(t)$, $z=h(t)$	23
17.	Współrzędne biegunowe. Wzory na składowe szybkości.	24
18.	Zagadnienie odwrotne	26
19.	Ruch względny	28
20.	Równoległobok szybkości. Ruch względem punktu	29

II. Pole szybkości.

21.	Układ sztywny i ruch jego.	34
22.	Pole szybkości. Twierdzenie zasadnicze	35
23.	Ruch prostej. Prosta zerowa. Linia przewodnia	37
24.	Ruch płaszczyzny. Powierzchnia przewodnia	39
25.	Ruch postępowy. Szybkość postępową	40

Paragr.	Str.
26. Ruch obrotowy. Szybkość kątowna	41
27. Ruch płaski	43
28. Środek chwilowy	43
29. Ruch prostej w płaszczyźnie. Szybkość skręcona	45
30. Linie środków chwilowych	46
31. Tory punktów układu. Metoda wykreślna.	48
32. Wyznaczanie linii środków. Ruch Cardana	49
33. Obwiednie	53
34. Rozwijane i rozwijające.	55
35. Szybkość środka chwilowego	55
36. Krzywizny torów. Konstrukcja Hartmanna	58
37. Koło przegięć. Wzór Savarego	61
38. Zastosowanie statyczne	68
39. Ruch kulisty. Oś chwilowa	69
40. Stożki osi chwilowych	70
41. Ruch śrubowy	71
42. Ruch jakikolwiek. Dowód Koenigsa	73
43. Układ zerowy	76
44. Ruch względny układu Ruchy składowe i ruch wypadkowy	79
45. Równoległobok szybkości kątowych	80
46. Szybkość punktu w funkcji szybkości kątowych	82
47. Szybkości kątowne równoległe	83
48. Szybkość kątowna i szybkość postępową	85
49. Szybkości kątowne wchrowate	88

III. Przyspieszenie punktu.

50. Przyrost geometryczny	90
51. Pochodna geometryczna. Składowe styczna i normalna	91
52. Przyspieszenie	93
53. Wyznaczanie przyspieszeń	94
54. Ruch jednostajnie przyspieszony	96
55. Ruch prosty harmoniczny	98
56. Ruch pocisku w próżni	101
57. Przyspieszenie styczne i normalne	106
58. Współrzędne biegunowe i przyspieszenia p_r , p_φ	109
59. Ruch względny	111
60. Przyspieszenie Coriolisa w ruchu płaskim	113
61. Przypadek ogólny ruchu względnego	115
62. Dowód analityczny twierdzenia Coriolisa	116

IV. Pole przyspieszeń.

63. Przewodnia drugiego rzędu	121
64. Ruch postępowy i ruch obrotowy. Wyznaczanie wykreślne przyspieszeń	122

Paragr.	Str.
65. Plan przyspieszeń w ruchu obrotowym	124
66. Ruch płaski	126
67. Środek chwilowy przyspieszeń	129
68. Plan przyspieszeń w ruchu płaskim	131

DYNAMIKA.

V. Prawa Newtona.

69. Punkt materialny. Podział dynamiki.	133
70. Prawa Newtona	134
71. Masa	137
72. Przykłady bezpośredniego stosowania praw Newtona	138
73. Równania ruchu punktu materialnego	143
74. Ruch punktu materialnego na torze przepisany gładkim	150
75. Spadek na torze przepisany. Ciężka najprędzszego spadku	153
76. Wahadło kołowe.	157
77. Wahadło cykloidalne	160
78. Brachistochrona	163
79. Tarcie o tor. Nieciągłość tarcia	165
80. Opór powietrza. Szybkość graniczna	169
81. Wymiary. Jednorodność równań	172

VI. Siła żywa i ilość ruchu.

82. Dwie zasady	176
83. Praca elementarna i jej wyznaczanie	176
84. Praca całkowita. Sprawność	180
85. Pole sił. Motor i generator	183
86. Potencjał. Energia potencjalna	186
87. Siła żywa. Energia całkowita	189
88. Zasada ilości ruchu. Impuls	192
89. Wektor G (ilość ruchu układu)	193
90. Siła żywa układu. Stosowność zasady sił żywych	195
91. Siły chwilowe i ich impulsy	202
92. Przykłady. Ruch łańcucha	204
93. Moment ilości ruchu. Szybkość wycinkowa	208
94. Wektor H (mom. ilości ruchu) układu	210

VII. Szkielet dynamiczny ciała.

95. Przedmiot rozdziału	214
96. Moment bezwładności względem płaszczyzny	215
97. Moment względem osi	216
98. Moment względem punktu	217

Paragr.	Str.
99. Wyznaczanie momentów bezwładności. Sztaba. Płyta prostokątna. Prosty cylinder kołowy. Stożek prosty. Kula . . .	218
100. Ośi główne punktu i ciała	224
101. Moment odśrodkowy	225
102. Moment bezwładności w funkcji kątów kierunkowych. Ciała kuliste	227
103. Trzecia oś główna. Przekroje kołowe	231
104. Punkt główny prostej	233

VIII. Zasady dynamiki ciała sztywnego.

105. Model ciała	237
106. Zasada d'Alemberta	240
107. Przykłady stosowania zasady d'Alemberta	241
108. Równania ruchu układu	247
109. Ruch środka masy	249
110. Ruch ciała sztywnego. Zasada niezależności ruchów postępowego i kulistego	251
111. Siła żywa ciała sztywnego	254
112. Przykłady stosowania zasady sił żywych	256
113. Ilość ruchu ciała, czyli wektor G.	260
114. Wektor H (moment ilości ruchu) ciała sztywnego	263
115. Ciało jakiegokolwiek. Wektor H względem środka masy	267
116. Zastosowania. Działanie impulsu na wektory G i H	271
117. Ruch istot żyjących	278

IX. Ruch obrotowy ciała sztywnego.

118. Równanie zasadnicze	281
119. Wahadło fizyczne. Środek wahań	283
120. Reakcje łożysk w ruchu jednostajnym. Osi swobodne	286
121. Reakcje łożysk w ruchu przyspieszonym. Reakcje dynamiczne i statyczne	289
122. Środek uderzeń.	293

X. Ruch płaski ciała sztywnego.

123. Równania zasadnicze	298
124. Naprężenia, występujące w sztabach podczas ruchu	305

XI. Ruch kulisty.

125. Ruch bez udziału sił. Stożek ruchomy osi chwilowych.	310
126. Trwałość ruchu kulistego. Płaszczyzny graniczne	313
127. Elipsoida bezwładności i polodya	317
128. Herpolodya	321

Paragr.	Str.
129. Przypadki szczególne ruchu kulistego	324
130. Równania Eulera	327
131. Inny dowód równań Eulera	329
132. Precesya regularna	333
133. Trwałość precesyi regularnej	339
134. Precesya pseudoregularna	341
135. Ruch kuli na płaszczyźnie poziomej	348

XII. Siły chwilowe.

136. Odkształcalność ciał	353
137. Uderzenie proste centralne. Współczynnik restytucyi . . .	355
138. Przypadki szczególne. Uderzenie plastyczne i uderzenie sprężyste	359
139. Strata siły żywej	360
140. Uderzenie ukośne i ekscentryczne	362

DOSTRZEŻONE OMYŁKI.

Str.	wiersz		zamiast	czytaj
38	14	od góry	$\gamma \xi_2$	$\lambda \xi_2$
92	18	" "	normalnym	stycznym
92	19	" "	stycznym	normalnym
98	9	" "	dodać na końcu „od	drugiego wystrzału“
142	6	" "	linii	równi
199	6	od dołu	$\left(\frac{2M}{2M+m}\right)a$	$\left(\frac{2M}{2M+m}\right)^2 a$
227	12 i 13	od góry	I^{yz}, x	I_{yz}, I_{zx}
228	14	" "	$I_{xy} \cos 2\alpha$	$2I_{xy} \cos 2\alpha$
230	9	od dołu	$l \sin^2 \alpha$	$l^2 \sin^2 \alpha$
235	23	od góry	I_{xy}	I_{zx}
242	10	od dołu	brak po = znaku -	
339	15	od góry	$k^2 \omega^2 \tan \alpha$	$k^4 \omega^2 \tan \alpha$
346	1	" "	$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} =$	$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = 0$

345 zamiast wierszy 12—5 od dołu powinno być:

Różniczkując równania (1) i (2) względem t i rugując $\frac{d\Omega}{dt}$, otrzymamy

$$C\Omega\omega \sin \vartheta - A\Omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + A \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = Qa \sin \vartheta \quad (5)$$

WSTĘP.

1. Skalary. Wielkości, z którymi mamy do czynienia w mechanice, dadzą się podzielić na dwie kategorie: *skalary* i *wektory*.

Skalar jest to wielkość, nie pozostająca w związku z żadnym określonym kierunkiem przestrzeni. Daje się ona całkowicie określić jedną liczbą jednostek znanych. Tak np. skalar jest czas. Gdy powiedziano, że pewne wydarzenie trwało tyle a tyle godzin czy minut, to czas trwania tego wydarzenia jest całkowicie określony.

Zamiast podawać liczbę można wskazać odcinek odpowiedniej skali. Skala taka urządza się na linii prostej, albo na jakiej innej linii. Pewna znana długość, odmierzona na tej linii, odpowiada obranej jednostce. Skala czasu urządza się najczęściej na okręgu koła, i zazwyczaj godzinie odpowiada łuk długości $\frac{\pi r}{6}$, gdzie r oznacza promień koła.

Prócz czasu do skalarów należą masa, praca, siła żywa, potencjał i in.

2. Wektory. Wektor jest to wielkość, pozostająca w związku z pewnym kierunkiem przestrzeni. Wektor nie daje się całkowicie określić zapomocą jednej liczby, gdyż trzeba jeszcze wskazać ów kierunek. Tak więc wektor należy określać *pod względem wielkości i kierunku*.

Prostym przykładem wektora jest przesunięcie jakiegoś drobnego przedmiotu, powiemy punktu ruchomego. Dajmy na to, że punkt ten zajmuje znane położenie A , i wiadomo, że ma być przesunięty o 3 metry. Dane te nie określają jeszcze przesunięcia, gdyż na ich zasadzie nie umielibyśmy wskazać, gdzie znajdzie się punkt ruchomy po dokonaniu przesunięcia. Wia-

domo jedynie, że nowe położenie znajduje się gdzieś na powierzchni kuli, zatoczonej z punktu A promieniem 3 m.

Jeżeli posługujemy się metodami analitycznymi, to określamy kierunek przesunięcia, lub wogóle kierunek wektora, tak, jak to się robi w geometrii analitycznej, t. j. zapomocą stosownych kątów kierunkowych. Jeżeli stosujemy metody wykresne, to określamy kierunek wektora odcinkiem prostej, na którym jeszcze wskazać potrzeba, w którą stronę jest zwrócony wektor. Jeżeli więc odcinek MN ma określać kierunek przesunięcia, to należy wskazać, np. zapomocą strzałki, czy przesunięcie ma się odbyć w stronę od M do N , czy też w stronę odwrotną. W przypadku pierwszym punkt M zowie się *początkiem* odcinka, a N *końcem*.

Pod względem wielkości wektor określa się tak samo, jak skalar, a więc liczbą albo długością, wskazaną na skali. Dogodnie jest odznaczać tę długość na tym samym odcinku, który ma wskazywać kierunek, albo wprost nadawać odcinkowi temu taką właśnie długość. Odcinek taki określa wektor nie tylko co do kierunku, ale i co do wielkości.

Przypuśćmy dla przykładu, że na przyjętej skali przesunięć przesunięciu jednego metra odpowiada jeden centymetr. W takim razie przesunięcie, o którym wyżej była mowa, będzie całkowicie określone odcinkiem MN , wskazującym kierunek przesunięcia i posiadającym długość 3 cm.

Do kategorii wektorów należą siła, moment, szybkość, przyspieszenie i t. d.

3. Rodzaje wektorów. Przesunięcie punktu ruchomego z danego położenia A nazywamy *wektorem związanym z punktem A* . Umówiono się obierać początek odcinka MN , który ma określać przesunięcie, właśnie w tym punkcie A . Tym sposobem, mając dany odcinek MN , nie tylko znamy przesunięcie co do wielkości i kierunku, ale wiemy jeszcze, z jakiego położenia wyrusza punkt przesuwany.

Przypuśćmy teraz, że chodzi o przesunięcie nie punktu, lecz cienkiego, sztywnego i prostego pręta, powiedzmy linii prostej, w kierunku tejże prostej. Oczywiście wszystkie punkty tej prostej doznają jednakowych przesunięć zarówno pod względem wielkości, jak i kierunku. Gdy znamy przesunięcie jednego, to znamy przesunięcie i wszystkich innych, a zatem takie

przesunięcie prostej możemy całkowicie określić zapomocą jednego odcinka. Początek tego odcinka obierzemy naturalnie w jednym z punktów przesuwanej prostej, w którymkolwiek, bo żaden nie wyróżnia się z pośród ogółu. Oczywiście i cały odcinek będzie leżał na tejże prostej. Takie przesunięcie prostej wzdłuż tej prostej nazywamy *wektorem związanym z tą prostą*.

Dajmy teraz na to, że przesuwa się cała bryła, przyczem wszystkie jej punkty doznają przesunięć jednakowych zarówno co do kierunku, jak i co do wielkości. Początek odcinka, określającego takie przesunięcie, możemy obrać w dowolnym punkcie przestrzeni, uważając, że bryła rozciąga się w przestrzeni nieograniczenie. Takie przesunięcie bryły nazywa się *wektorem swobodnym*.

Wektory wogóle dzielą się na trzy kategorie: wektory związane z punktami, wektory związane z prostymi i wektory swobodne. Wektor związany z punktem, lub raczej odcinek, określający ten wektor, posiada zupełnie określone położenie w przestrzeni. Wektor związany z prostą, musi pozostawać na pewnej określonej prostej, ale możemy go na niej przenosić dowolnie, wektor swobodny możemy dowolnie przenosić w przestrzeni.

4. Przykłady. Pojęcie siły uważamy za znane ze statyki. Siła posiada kierunek, a więc jest to wektor, i, jak wiadomo, możemy ją całkowicie określić zapomocą odcinka. Chodzi teraz o to, do której z trzech wyżej wymienionych kategorii wektorów wypada zaliczyć siłę.

Zapomocą tego wektora daje się w pewnych razach całkowicie określić mechaniczne działanie jednego ciała na drugie, jak np. w tym razie, gdy ciało A działa na ciało B przez bezpośrednie zetknięcie, przyczem ciała te stykają się tylko w jednym punkcie M . Wyobrażamy sobie, że bezpośredniemu działaniu ciała A podlega tylko ten element ciała B , do którego należy punkt M . Na inne elementy działanie przenosi się za pośrednictwem połączeń, które istnieją pomiędzy nimi. Punkt M nazywamy *punktem przyłożenia* albo punktem zaczepienia siły. Prosta, przeprowadzona przez punkt przyłożenia w kierunku siły, zowie się *linią działania siły*.

Skutki działania siły zależą nie tylko od jej wielkości i kierunku, ale także od punktu przyłożenia. Gdybyśmy przenieśli

punkt przyłożenia do jakiegoś innego punktu, położonego na linii działania lub gdzieindziej, to wogóle skutek byłby inny. Aby się o tem przekonać, wyobraźmy sobie sznur, leżący na podłodze i tworzący linię prostą MN . Przyłożmy do końca N siłę, działającą na prostej MN i zwróconą od M do N . Cały sznur zacznie się poruszać wzdłuż prostej MN . Gdybyśmy taką samą siłę, działającą na tejże prostej w tym samym kierunku, przyłożyli do końca M , to oczywiście wywołała by ona zupełnie inny ruch sznura.

Stąd widać, że siła jest to wektor związany z punktem.

Twierdzenia o siłach, znane ze statyki, dotyczą przeważnie tak zw. „ciała sztywnego“, t. j. ciała, które nie odkształca się pod działaniem sił. Ciało sztywne jest to abstrakcja, do której jedynie mniej lub więcej zbliżają się takie ciała, jak żelazo, kamień, drzewo, gdy działające na nie siły nie są zbyt wielkie.

Jeżeli siła działa na ciało sztywne, to skutki jej nie ulegają zmianie, gdy przenosimy punkt przyłożenia na linii działania. W tym więc razie siła jest wektorem, związanym z prostą.

W statyce ciała sztywnego mamy prócz siły inne zasadnicze pojęcie, a mianowicie parę sił. Zazwyczaj definiujemy parę, jako układ dwóch sił równych, równoległych i zwróconych w strony odwrotne. Trzy są odróżniające znamiona pary: płaszczyzna działania, zwrot, czyli kierunek, w którym para usiłuje obrócić ciało, i wreszcie moment, czyli iloczyn z jednej siły przez ramię. Wiadomo, że wszystkie te znamiona dadzą się wyrazić zapomocą jednego odcinka, opatrzonego grotem. Odcinek ten jest prostopadły do płaszczyzny pary, jest zwrócony tak, że dla osoby, patrzącej od końca do początku, zwrot pary pozostaje w zgodzie z ruchem wskazówki zegara, a długość odcinka wyraża w odpowiedniej skali wielkość momentu. Z tego widać, że para jest to wektor tak, jak siła.

Wiadomo, że dwie pary, działające w płaszczyznach równoległych, zwrócone zgodnie i posiadające momenty równe, wywierają skutki jednakowe. Para zatem nie pozostaje w związku z żadnym szczególnym punktem ani żadną szczególną prostą. Początek odcinka, określającego parę, można obierać dowolnie w przestrzeni, a więc para jest to wektor swobodny.