

XI. RUCH KULISTY.

125. Ruch bez udziału sił. Dajmy na to, że punkt O ciała sztywnego jest osadzony nieruchomo, a zatem może ono mieć tylko ruch kulisty około środka O . Przypuśćmy, że początkowo ciało pozostawało w spokoju, a następnie zostało uderzone przez ciało inne. Uderzenie to wytworzy moment ilości ruchu H względem punktu O , prostopadły do płaszczyzny, przechodzącej przez ten punkt i przez linię działania siły chwilowej. Jeżeli w dalszym ciągu na ciało żadne siły nie działają, oprócz reakcyi w O , to wektor H zachowa stałą wielkość i kierunek, gdyż moment owej reakcyi względem O jest zerem, a więc nie wytwarza ona żadnych przyrostów wektora H .

Przytem reakcyja ta oczywiście nie pracuje, a zatem siła żywa ciała będzie również stała. Oznaczmy tę siłę żywą przez $\frac{T}{2}$, czyli podwójną siłę żywą przez T .

Aby zdać sobie sprawę z ruchu ciała, trzeba znać szybkość kątową ω co do wielkości i kierunku. Jeżeli wektor H powstał w kierunku jednej z osi głównych punktu O , to taki sam kierunek przybrał i wektor ω (par. 114). Wiemy z par. 120, że i w dalszym ciągu ciało będzie wciąż wirowało około tejże prostej, gdyż ta jest osią swobodną. Wektor ω posiada w tym razie stałą wielkość i kierunek.

Jeżeli wektor H powstanie nie na osi głównej punktu O , to ω przybierze kierunek odmienny. Gdybyśmy chcieli, aby ω zachowało stale ten kierunek w ciele i w przestrzeni, t. j. aby ciało wciąż wirowało około tejże prostej, to trzebaby je do tego zmusić, przykładając odpowiednie siły. Ponieważ siły takie nie działają, przeto wektor ω będzie wciąż zmieniał kie-

runek i w cieie i w przestrzeni, będzie więc istniał stożek stały i stożek ruchomy osi chwilowych.

Oznaczmy momenty bezwładności ciała względem osi głównych punktu O przez A , B , C i przypuścmy, że w chwili t składowe szybkości kątowej w kierunkach tych osi wynoszą ω_x , ω_y , ω_z . W takim razie momenty ilości ruchu względem osi, albo składowe wektora H w ich kierunkach, będą $A\omega_x$, $B\omega_y$, $C\omega_z$, a zatem

$$A^2\omega_x^2 + B^2\omega_y^2 + C^2\omega_z^2 = H^2 \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Dalej według par. 111 będzie

$$A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2 = T \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Pomnóżmy (2) przez A i odejmijmy od tego (1).

$$B(A-B)\omega_y^2 + C(A-C)\omega_z^2 = AT - H^2 \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

W podobny sposób otrzymamy dwa inne równania analogiczne:

$$C(B-C)\omega_z^2 + A(B-A)\omega_x^2 = BT - H^2 \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

$$A(C-A)\omega_x^2 + B(C-B)\omega_y^2 = CT - H^2 \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Założymy, że momenty A , B , C są nierówne, i że

$$A > B > C.$$

W takim razie, jak widać z (3), $AT - H^2$ jest dodatnie, gdyż różnice $A - B$ oraz $A - C$ są dodatnie, a wszystkie wielkości, występujące w równaniach, t. j. momenty bezwładności, siła żywa, oraz kwadraty szybkości kątowych i momentu ilości ruchu są dodatnie z natury rzeczy. Tak samo wynika z (5), że $CT - H^2$ jest ujemne, bo obydwie różnice $C - A$ i $C - B$ są ujemne. Natomiast $BT - H^2$ w pewnych razach bywa dodatnie, w innych ujemne, gdyż pierwszy wyraz lewej strony równania (4) jest dodatni, a drugi ujemny.

Pomnóżmy równania (3), (4) i (5) odpowiednio przez $A\omega_x^2$, $B\omega_y^2$, $C\omega_z^2$ i dodajmy stronami. Wypadnie

$$A(AT - H^2)\omega_x^2 + B(BT - H^2)\omega_y^2 + C(CT - H^2)\omega_z^2 = 0 \quad . \quad . \quad (6).$$

Moglibyśmy dojść do tego samego bezpośrednio, mnożąc (1) przez T , (2) przez H^2 i odejmując

Obierzmy osi główne punktu O za osi współrzędnych. Osi te są wprawdzie ruchome, ale z okolicznością tą możemy się nie liczyć, gdyż chodzi tu jedynie o stan cynematyczny ciała w chwili t . Oznaczmy współrzędne końca wektora ω

przez x, y, z . Są one oczywiście proporcjonalne do $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, a więc na zasadzie (6) napiszemy

$$A(AT - H^2)x^2 + B(BT - H^2)y^2 + C(CT - H^2)z^2 = 0.$$

Wszystkie trzy współczynniki są tu stałe, a więc równaniu temu odpowiada powierzchnia związana z ciałem, albo przeprowadzona w ciele; jest to stożek drugiego stopnia, symetryczny względem płaszczyzn współrzędnych i posiadający wierzchołek w początku układu. Początek wektora ω leży w wierzchołku tego stożka, a koniec musi zawsze leżeć na powierzchni; z tego wynika, że jest to stożek ruchomy osi chwilowych.

Wprowadzimy dla krótkości oznaczenia następujące:

$$A(AT - H^2) = m^2, \quad B(BT - H^2) = \pm n^2, \quad C(CT - H^2) = -p^2.$$

Tym sposobem równanie stożka ruchomego osi chwilowych w odniesieniu do osi głównych punktu O przybierze jedną z postaci następujących:

$$m^2x^2 + n^2y^2 - p^2z^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

$$m^2x^2 - n^2y^2 - p^2z^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Przypuśćmy, że zachodzi pierwszy z tych przypadków. Poprowadźmy płaszczyznę prostopadłą do osi z w odległości z_1 od O , czyli płaszczyznę $z = z_1$. Przetnie ona stożek według linii, której rzut na płaszczyznę xy będzie miał równanie

$$m^2x^2 + n^2y^2 = p^2z_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Jest to oczywiście elipsa, której środek leży w początku układu. Sama krzywa przekroju nie różni się niczem od tego rzutu, a środek jej leży na osi z . Widzimy z tego, że osią stożka jest oś z , czyli oś najmniejszego momentu punktu O .

Przypuśćmy teraz, że zachodzi przypadek drugi. Prowadzimy płaszczyznę $x = x_1$, prostopadłą do osi x . Równanie rzutu przekroju na płaszczyznę yz będzie

$$n^2y^2 + p^2z^2 = m^2x_1^2.$$

Stąd widać, że w tym razie osią stożka jest prosta x , czyli oś największego momentu punktu O .

Tak więc stożek ruchomy osi chwilowych jest zawsze eliptyczny, czyli drugiego stopnia; osią jego jest albo oś najmniejszego momentu, albo oś największego momentu punktu O . W żadnym razie osią tego stożka nie może być oś średniego

momentu. Można wyciągnąć stąd pewien ważny wniosek, jak zobaczymy w paragrafie następnym.

Prz. 1. Wyznaczyć w ciele miejsce geometryczne prostych, na których z kolei przypada wektor H dla przypadku, rozważanego w poprzednim. Odp. Równanie szukanego stożka $\frac{m^2x^2}{A^2} \pm \frac{n^2y^2}{B^2} - \frac{p^2z^2}{C^2} = 0$, gdzie m, n, p mają te same znaczenia, co w (7) i (8).

Prz. 2. Dowieść, że rzut szybkości kątowej na linię wektora H jest stały i równy $\frac{T}{H}$.

Prz. 3. Ciało sztywne może poruszać się swobodnie około punktu O i posiada momenty bezwładności A, B, C względem jego osi głównych. Wymierzamy uderzenie w punkt P , którego współrzędne w odniesieniu do osi głównych są (xyz) . Okazać, że jeżeli szybkość kątowa ciała ma być jak największa, to (1) kierunek uderzenia powinien być prostopadły do OP , (2) kosynusy kierunkowe a, b, c tego kierunku powinny czynić zadość równaniu

$$\frac{x}{a} \left(\frac{1}{B^2} - \frac{1}{C^2} \right) + \frac{y}{b} \left(\frac{1}{C^2} - \frac{1}{A^2} \right) + \frac{z}{c} \left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{B^2} \right) = 0.$$

Wyrzucimy łatwo ω w funkcji a, b, c . Dajmy na to, że $\omega^2 = f(a, b, c)$, gdzie pomiędzy a, b, c zachodzi jeszcze związek $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tworzymy funkcję $u = f(a, b, c) + \lambda(a^2 + b^2 + c^2 - 1)$, gdzie λ nie zależy od a, b, c . Wiadomo, że u osiąga maksimum dla tych samych wartości zmiennych a, b, c , co i ω^2 , i możemy uważać u za funkcję trzech zmiennych niezależnych; otrzymamy więc równania

$$\frac{\partial u}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial c} = 0.$$

Mnożąc te równania odpowiednio przez x, y, z i dodając, otrzymamy $ax + by + cz = 0$, co jest dowodem pierwszej części twierdzenia. Aby udowodnić część drugą mnożymy równania powyższe odpowiednio przez $cy - bz, az - cx, bx - ay$ i dodajemy.

Prz. 4. Ciało sztywne może się obracać około punktu O , i wiadomo, że $A > B > C$. Jak powinien być skierowany moment pary chwilowej H , aby siła żywa była jak największa?

Znajdziemy z łatwością, że

$$T = \frac{H^2}{C} - H_x^2 \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) - H_y^2 \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right).$$

Z tego wynika, że T jest największe, gdy $H_x = H_y = 0$, t. j. gdy moment pary ma kierunek osi najmniejszego momentu.

126. Trwałość ruchu. Widzieliśmy w paragrafie poprzedzającym, że trzecia oś główna punktu O , czyli oś średniego momentu, nie może być osią stożka ruchomego osi chwiło-

wych. Wiąże się z tem inna właściwość dynamiczna, odróżniająca tę oś od dwóch pozostałych.

W równaniu (3) par. poprzedniego obydwaj wyrazy lewej strony są dodatnie, a zatem $AT - H^2$, jak również m^2 , tylko w takim razie jest zerem, gdy $\omega_y = \omega_z = 0$, t. j. gdy ciało wiruje około osi największego momentu. W przypadku takim, jak widać z (4), $BT - H^2$ jest ujemne, a zatem równanie stożka osi chwilowych sprowadzi się do

$$n^2 y^2 + p^2 z^2 = 0.$$

Odpowiadają mu dwie płaszczyzny urojone, przechodzące przez oś x , albo powierzchnia stożkowa, której wszystkie tworzące leżą na osi x . Widzieliśmy z góry, że tak być musi, bo oś x pozostaje stale osią obrotu.

Również $-p^2$ a także $CT - H^2$ może być zerem tylko wtedy, gdy $\omega_x = \omega_y = 0$. W tym przypadku równanie stożka ruchomego osi chwilowych sprowadza się do

$$m^2 x^2 + n^2 y^2 = 0,$$

i trzeba uważać, że stożkiem tym jest oś z , czyli oś najmniejszego momentu.

W równaniu (4) par. poprzedzającego wyrazy lewej strony mają znaki odwrotne, a zatem $BT - H^2$ a także n^2 może być zerem, chociaż ω_z i ω_x nie są zerami. Równanie stożka ruchomego sprowadza się w tym razie do

$$m^2 x^2 - p^2 z^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Odpowiadają mu dwie płaszczyzny rzeczywiste, przechodzące przez oś y , i trzeba uważać je za zdegenerowany stożek. Nazwiemy je *płaszczyznami granicznymi*. Są one położone symetrycznie względem płaszczyzn xy , yz ; innymi słowy dwie ostatnie płaszczyzny są dwusiecznymi kąta płaszczyzn granicznych.

Równanie płaszczyzn granicznych możemy napisać w postaci

$$A(AT - H^2)x^2 + C(CT - H^2)z^2 = 0,$$

a ponieważ w przypadku, który właśnie rozważamy, $BT - H^2 = 0$, czyli $H^2 = BT$, przeto będzie

$$A(A - B)x^2 + C(C - B)z^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Występują tu jedynie momenty bezwładności względem osi

głównych, a zatem położenie płaszczyzn granicznych nie zależy od ruchu, który posiada ciało. Są to pewne płaszczyzny stałe związane z ciałem, albo istniejące w ciele.

Jeżeli wektor ω znajdzie się w pewnej chwili na jednej z płaszczyzn granicznych, i następnie żadne siły na ciało nie działają, to pozostanie on i nadal w tejże płaszczyźnie, gdyż ta w danym razie stanowi powierzchnię stożka osi chwilowych. Z tego wynika, że wektor ω bez pomocy sił zewnętrznych nie może przedostać się przez żadną z płaszczyzn granicznych; są one dla tego wektora nieprzenikalne.

Płaszczyzny graniczne dzielą przestrzeń na cztery wycinki klinowe. W dwóch z nich, przeciwległych, przebiega oś x ; powiemy, że tworzą one obszar x , dwa pozostałe, w których przebiega oś z , nazwiemy obszarem z .

Dajmy na to, że pod działaniem pierwotnego impulsu, który otrzymało ciało, oś chwilowa w pierwszej chwili utworzyła się w obszarze x . Pozostanie ona i nadal w tym samym obszarze, bo od obszaru z odgradzają płaszczyzny graniczne. Z tego wynika, że osią stożka ruchomego będzie oś x , czyli oś największego momentu. Jeżeli oś chwilowa znajdzie się w obszarze z , to osią owego stożka będzie oś najmniejszego momentu.

Przypuśćmy teraz, że ciało wiruje około osi x , na tej więc prostej leżą obydwa wektory H i ω . Dajmy ciału bardzo mały impuls, skierowany jakkolwiek, ale nie w płaszczyźnie yz . Skutkiem tego wektor H otrzyma drobny przyrost geometryczny i opuści oś x , tworząc z nią mały kąt. Składowe jego w kierunkach osi będą teraz H_x , H_y , H_z ; z nich pierwsza jest prawie równa wypadkowemu wektorowi H , a dwie pozostałe są bardzo małe.

Również wektor ω zejdzie z osi x . Składowe jego w nowym położeniu będą

$$\omega_x = \frac{H_x}{A}, \quad \omega_y = \frac{H_y}{B}, \quad \omega_z = \frac{H_z}{C}.$$

Związki te wskazują, że ω_y i ω_z są małe, a zatem i ω utworzy z osią x kąt mały. Jeżeli tylko impuls był dostatecznie słaby, to ω znajdzie się w obszarze x , osią stożka osi chwilowych pozostanie prosta x , a jeżeli przytem stożek ruchomy różni się niezbyt wiele od kołowego, to będzie on bardzo ostry.

Tak więc położenie osi obrotu zmieni się w ciebie nieznacznie, a łatwo zrozumieć, że zmieni się ono niewiele i w przestrzeni. Jeżeli ϑ oznacza kąt pomiędzy ω i H , to

$$\cos \vartheta = \frac{H_x \omega_x + H_y \omega_y + H_z \omega_z}{H \omega}.$$

Pierwszy wyraz licznika różni się niewiele od $H\omega$, a dwa wyrazy pozostałe są małe; a zatem $\cos \vartheta$ mało różni się od jedności, i wektor ω niewiele odchyła się od H . Z drugiej strony wektor H odchylił się nieznacznie od położenia pierwotnego. Z tego widać, że wogóle ruch zmieni się niewiele, i mówimy że ruch około osi największego momentu jest *trwały*.

Jeżeli nowy impuls jest zbyt wielki, to wektor ω przebieje jedną z płaszczyzn granicznych i znajdzie się w obszarze z . Oś stożka stanie się prosta z , i ruch ciała zmieni się w dużym stopniu, a mianowicie oś chwilowa będzie odchyłała się bardzo znacznie od położenia pierwotnego, czyli od osi x .

Oczywiście większa lub mniejsza trwałość ruchu około osi x zależy od tego, czy obszar x , czyli kąt dwuścienny, zawierający oś x , jest duży czy mały. Jeżeli obszar ten jest duży, to nawet znaczny stosunkowo impuls nie wyprze wektora ω z obszaru x , a więc nie zaburzy zasadniczo ruchu ciała. Jeżeli obszar x jest mały, to już słaby impuls wywoła całkowitą zmianę w ruchu ciała. Ten kąt dwuścienny można do pewnego stopnia uważać za miarę trwałości ruchu około osi x .

To samo mutatis mutandis można powiedzieć o ruchu obrotowym około osi z , czyli około osi najmniejszego momentu punktu O . Ruch ten jest trwały, i tem trwalszy, im większy jest obszar z .

Oznaczmy przez α połowę tego kąta dwuściennego, który stanowi obszar x , albo kąt, który jedna z płaszczyzn granicznych tworzy z osią x . Z równania (2) znajdziemy z łatwością, że

$$\tan^2 \alpha = \frac{A(A-B)}{C(B-C)}.$$

Wzór ten wskazuje, od czego zależy trwałość ruchu obrotowego około osi największego i najmniejszego momentu. Jeżeli B tyleż się różni od A , co i od C , t. j. jeżeli $A-B=B-C$, to $\tan \alpha > 1$, czyli $\alpha > 45^\circ$. W tym więc razie obszar x jest większy

od obszaru z , a zatem ruch około osi największego momentu posiada większą trwałość, niż ruch około osi najmniejszego momentu. W przypadku ogólnym ruch pierwszy jest tem trwalszy, a drugi tem mniej trwały, im w przedziale $A-C$ moment B leży dalej od A i bliżej do C .

Przypuśćmy wreszcie, że ciało wiruje około osi średniego momentu. Udzielmy mu impuls, skierowany dowolnie, ale nie w płaszczyźnie zx . Jakkolwiek mały będzie ten impuls, to w każdym razie wektor ω zejdzie z osi y i znajdzie się w obszarze x albo w obszarze z . W pierwszym przypadku osią stożka ruchomego stanie się oś x , a zatem ruch ciała zmieni się w sposób zasadniczy. To samo stanie się w przypadku drugim, gdy wektor ω wkroczy do obszaru z . Widzimy, że ruch około osi średniej, czyli około osi średniego momentu jest chwiejny. Najdrobniejsze wstrząśnienie może zburzyć go całkowicie.

Pozostaje jeszcze rozważyć, jak ukształtuje się ruch ciała, jeżeli wektor ω znajdzie się w jednej z płaszczyzn granicznych, ale nie na osi y . Uczynimy to w dalszym ciągu.

127. Elipsoida bezwładności i polodya. Poincot dał inny obraz ruchu ciała, obracającego się dookoła nieruchomego punktu O . Poznamy obraz ten w zarysie w paragrafie niniejszym i następnym.

Widzieliśmy w par. 125, że składowe $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ wektora ω czynią zadość równaniu

$$A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2 = T,$$

Współrzędne x, y, z końca wektora ω są proporcjonalne do $\omega_x, \omega_y, \omega_z$; rezygnując z jednorodności wzorów, obierzemy za współczynnik proporcjonalności jednostkę; wówczas

$$x = \omega_x, \quad y = \omega_y, \quad z = \omega_z,$$

i z równania powyższego otrzymamy

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = T \quad \dots \quad (1).$$

Równaniu temu odpowiada elipsoida, której środkiem jest punkt O , a osi leżą na osiach głównych tego punktu.

Półowki osi elipsoidy, położonych na x, y, z , wynoszą odpowiednio

$$\sqrt{\frac{T}{A}}, \quad \sqrt{\frac{T}{B}}, \quad \sqrt{\frac{T}{C}}.$$

Z tych wielkości pierwsza jest najmniejsza, trzecia największa,

zatem mała oś leży na osi największego momentu, a duża na osi najmniejszego momentu. Oś średnia leży na trzeciej osi głównej.

Tak więc koniec wektora ω musi pozostawać na elipsoidzie (1). Kształt tej elipsoidy zależy jedynie od momentów A, B, C , a wymiary od siły żywej. Gdy zmienia się siła żywa, to wszystkie trzy osi zmieniają się proporcjonalnie do \sqrt{T} , lecz elipsoida pozostaje podobną do pierwotnej.

Jeżeli podwójna siła żywa jest równa jednostce, to koniec wektora ω pozostaje na elipsoidzie

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Elipsoida taka nazywa się *elipsoidą bezwładności punktu O*. Posiada ona następującą własność zasadniczą.

Poprowadźmy przez O dowolną prostą, oznaczmy jej punkt przecięcia z elipsoidą bezwładności przez P , a moment bezwładności ciała względem niej przez I . Jeżeli podwójna siła żywa ciała jest równa jednostce, a osią chwilową jest owa prosta OP , to w myśl definicji elipsoidy bezwładności szybkość kątowna wynosi OP , a zatem podwojona siła żywa powinna być równa $I.(OP)^2$. Tak więc $I.(OP)^2 = 1$, czyli

$$I = \frac{1}{(OP)^2}.$$

Widzimy, że odwrotność kwadratu połowy średnicy, położonej na dowolnej prostej, jest równa momentowi bezwładności względem tej prostej, albo raczej proporcjonalna do tego momentu.

Oś chwilowa w chwili danej przecina elipsoidę bezwładności w dwóch punktach. Jeden z nich leży po tej stronie środka O , w którą jest skierowana szybkość kątowna, a drugi po stronie odwrotnej. Poinset nazywa pierwszy z nich *P biegunem*, a miejsce geometryczne biegunów na elipsoidzie bezwładności *polodyą*.

Z poprzedniego wynika, że OP jest \sqrt{T} razy mniejsze od ω , a zatem współrzędne bieguna wynoszą odpowiednio

$$\frac{\omega_x}{\sqrt{T}}, \quad \frac{\omega_y}{\sqrt{T}}, \quad \frac{\omega_z}{\sqrt{T}}.$$

Tak więc polodya jest to krzywa, położona na elipsoidzie bezwładności, i poruszająca się wraz z nią. Prócz tego polodya

leży również na stożku ruchomym osi chwilowych, gdyż biegun jest punktem osi chwilowej; jest to zatem linia przecięcia tych dwóch powierzchni. Jeżeli osią stożka jest oś x , to polodya okala wierzchołek elipsoidy, położony na tej osi i jest symetryczna względem płaszczyzn xy i zx . Jest to następstwem tej okoliczności, że obydwie powierzchnie są symetryczne względem owych płaszczyzn.

Jeżeli oś stożka ruchomego stanowi prosta z , to polodya okala wierzchołek, leżący na tej osi, i jest symetryczna względem płaszczyzn yz i zx .

Linia przecięcia elipsoidy ze stożkiem składa się z dwóch odrębnych gałęzi, symetrycznych jedna do drugiej względem płaszczyzn yz lub xy , gdy osią stożka jest prosta x lub z . Z tych dwóch gałęzi tylko jedna stanowi polodyę, a obydwie razem tworzą krzywą algebraiczną czwartego stopnia o podwójnej krzywiznie. Za równania jej można uważać równanie elipsoidy bezwładności oraz równanie stożka ruchomego osi chwilowych.

Jeżeli ciało obraca się około osi największego lub najmniejszego momentu, to polodyą jest jeden punkt, a mianowicie wierzchołek elipsoidy, leżący na jej małej lub dużej osi. Jeżeli oś chwilowa leży w płaszczyźnie granicznej, to polodyą jest elipsa, stanowiąca przecięcie tej płaszczyzny z elipsoidą.

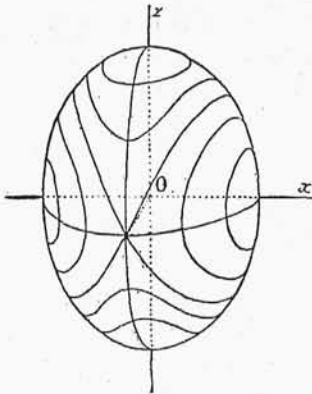


Fig. 65.

Załączona figura wyobraża elipsoidę bezwładności jakiegoś ciała. Proste x, y, z są jej małą, średnią i dużą osią, czyli są to osi największego, średniego i najmniejszego momentu tego ciała. Na powierzchni elipsoidy wykreślono kilka możliwych polodyi. Jedne z nich obiegają koniec osi x , inne koniec osi z . Granicę pomiędzy tymi dwoma układami stanowią dwie elipsy, przechodzące przez koniec osi y . Są to przecięcia płaszczyzn granicznych z elipsoidą.

Prz. 1. Wyznaczyć równania rzutów polodyi na płaszczyzny współrzędnych, czyli na płaszczyzny główne punktu O , i okazać, że

rzut na płaszczyznę zx jest hiperbolą, a dwa rzuty pozostałe są elipsami.

Prz. 2. Dowieść, że mała oś elipsy przecięcia płaszczyzny granicznej z elipsoidą bezwładności leży na średniej osi głównej punktu O .

Oczywiście jedna oś elipsy leży na osi y , a druga na prostej przecięcia u płaszczyzny granicznej z płaszczyzną zx . Oznaczmy długości tych osi odpowiednio przez $2b$ i $2a$. Znajdziemy łatwo, że $b^2 = \frac{1}{B}$. Oznaczmy kąt, który tworzy u z osią x , przez α ; w takim razie moment bezwładności względem u wynosi $A \cos^2 \alpha + C \sin^2 \alpha$, a zatem

$$\frac{1}{a^2} = A \cos^2 \alpha + C \sin^2 \alpha.$$

Aby sprawdzić, która oś jest większa tworzymy różnicę

$$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} = B - A \cos^2 \alpha - C \sin^2 \alpha.$$

Prawa strona $= (B - A) \cos^2 \alpha + (B - C) \sin^2 \alpha$, a gdy zużytkujemy wzór na $\tan^2 \alpha$ z paragrafu 126, to wypadnie $\frac{(A - B)(A - C)}{C} \cos^2 \alpha$. Jest to oczywiście dodatnie, a więc $a > b$.

Prz. 3. Dowieść, że linia wektora ω jest miejscem geometrycznym środków płaskich przekrojów elipsoidy bezwładności, prostopadłych do wektora H .

Oznaczmy przez α, β, γ kąty kierunkowe wektora ω i przez ξ, η, ζ współrzędne środka jakiejkolwiek cięciwy, równoległej do ω . W takim razie równania cięciwy można napisać w postaci

$$x = \xi + r \cos \alpha, \quad y = \eta + r \cos \beta, \quad z = \zeta + r \cos \gamma,$$

gdzie r oznacza promień wodzący z owego środka. Gdy podstawimy to w równanie elipsoidy, to otrzymamy równanie kwadratowe względem r ; powinno ono posiadać dwa pierwiastki równe i odwrotne, a zatem

$$A\xi \cos \alpha + B\eta \cos \beta + C\zeta \cos \gamma = 0.$$

Jest to równanie płaszczyzny, w której leżą środki wszystkich cięciw równoległych do ω , czyli płaszczyzny sprzężonej z linią tego wektora. Można łatwo okazać, że płaszczyzna ta jest prostopadła do H , a z tego wynika bezpośrednio twierdzenie żądane.

Prz. 4. Przypuśćmy, że końce średnic głównych elipsoidy bezwładności są w odległościach p, q, r od linii wektora H . Okazać, że $p^2 + q^2 + r^2$ nie zmienia się podczas ruchu (twierdzenie Poinso't'a).

Umieśmy we wszystkich sześciu końcach punkty masy m ; w takim razie $2m(p^2 + q^2 + r^2)$ będzie momentem bezwładności takiego układu względem linii wektora H . Można ten sam moment obrachować na innej drodze.

Prz. 5. Wyznaczyć pole przekroju elipsoidy bezwładności płaszczyzną, poprowadzoną przez środek prostopadle do wektora H , czyli

t: zw. *płaszczyzną niezmienną*, i okazać że pole to nie zmienia się podczas ruchu ciała.

Można łatwo dowieść, że pole elipsy $ax^2+by^2+2cxy=d$ wynosi $\frac{\pi d}{\sqrt{ab-c^2}}$. Korzystając z tego wzoru, znajdziemy pola rzutów wskazanego przekroju na płaszczyzny główne, a następnie przy pomocy twierdzenia, podanego w przykładzie 2 paragrafu 8, pole samego przekroju. Wypadnie $\frac{\pi H}{\sqrt{ABCT}}$, co oczywiście jest niezmiennie.

Prz. 6. Prowadzimy w ciele elipsoidę, która w odniesieniu do osi głównych posiada równanie $\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=1$, czyli tak zw. elipsoidę Mac Cullagha. Okazać, że podczas ruchu ciała przechodzi ona wciąż przez pewien stały punkt P przestrzeni, i wyznaczyć położenie jego. Odp. P leży na linii wektora H , i $OP=\frac{H}{\sqrt{T}}$.

Prz. 7. Prowadzimy w punkcie P , o którym była mowa w przykładzie poprzedzającym, płaszczyznę styczną do elipsoidy Mac-Cullagha; w chwili danej odległość tej płaszczyzny od środka $=p$. Wyznaczyć szybkość kątową ciała w tej chwili. Odp. $\frac{\sqrt{T}}{p}$.

128. Herpolodya. Z geometryi analitycznej wiadomo, że równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(x_1 \ y_1 \ z_1)$ do elipsoidy

$$Ax^2+By^2+Cz^2=1,$$

czyli do elipsoidy bezwładności, jest takie:

$$Axx_1+Byy_1+Czz_1=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Wyznaczymy równanie płaszczyzny stycznej w biegunie. Współrzędne tego punktu, jak wiemy z par. poprzedzającego, są

$$\frac{\omega_x}{\sqrt{T}}, \quad \frac{\omega_y}{\sqrt{T}}, \quad \frac{\omega_z}{\sqrt{T}};$$

wprowadzając je do (1), otrzymamy

$$A\omega_x \cdot x + B\omega_y \cdot y + C\omega_z \cdot z = \sqrt{T}.$$

Lecz $A\omega_x=H_x=H \cos \alpha$, jeżeli α, β, γ oznaczają kąty kierunkowe wektora H . Przekształcając analogicznie $B\omega_y$ i $C\omega_z$, nadamy równaniu płaszczyzny stycznej postać

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \frac{\sqrt{T}}{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Jest to tak zw. postać normalna równania płaszczyzny.

Wiadomo, że prostopadła do płaszczyzny tworzy z osiami kąty α , β , γ , i że odległość płaszczyzny od początku układu wynosi $\frac{\sqrt{T}}{H}$. Z tego wynika, że płaszczyzna styczna w biegunie do elipsoidy bezwładności jest wciąż prostopadła do wektora H i pozostaje w stałej odległości od nieruchomego punktu O , a ponieważ kierunek wektora H nie ulega zmianom, przeto owa płaszczyzna styczna jest nieruchoma. Oznaczmy ją dla krótkości literą F .

Tak więc biegun pozostaje wciąż w nieruchomej płaszczyźnie F . Jego miejsce geometryczne w tej płaszczyźnie Poinso't nazwał *herpolodyą*. Jest to oczywiście krzywa nieruchoma; gdy połączymy wszystkie jej punkty ze środkiem O , to powstaną stożek stały osi chwilowych.

Herpolodya przebiega pomiędzy dwoma okręgami, posiadającymi wspólny środek w rzucie środka elipsoidy O na płaszczyznę F . Okrąg zewnętrzny odpowiada punktowi polodyi najbardziej oddalonemu od O , a wewnętrzny punktowi najbliższemu. Na załączonym rysunku mamy obraz herpolodyi, wykreślony dla pewnego przypadku konkretnego. Jest to krzywa przestępna.

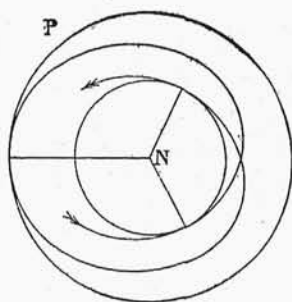


Fig. 66.

Polodya i herpolodya posiadają w każdej chwili wspólny punkt, a mianowicie ówczesny biegun. Wyobraźmy sobie ruchomy punkt M , który nie należy do badanego ciała, ale podąża za biegunem i znajduje się wciąż w tym punkcie. Torem bezwzględnym punktu M jest herpolodya, a względnym do badanego ciała polodya; zatem szybkość bezwzględna jest styczna do pierwszej z tych krzywych, a względna do drugiej. Szybkość unoszenia jest zerem, bo biegun leży na osi chwilowej. Z tego wynika, że krzywe posiadają wspólną styczną, i polodya toczy się po herpolodyi bez poślizgu. Mówi się także, że elipsoida bezwładności toczy się po nieruchomej płaszczyźnie F , jakkolwiek ruch jej nie zupełnie odpowiada pojęciu toczenia się.

Wytworzył się więc taki obraz ruchu ciała. W ciele istnieje pewna elipsoida, elipsoida bezwładności, której środek O po-

zostaje w spokoju, i ta elipsoida toczy się po nieruchomej płaszczyźnie **F**.

Prz. Wyznaczyć herpolodę w przypadku, gdy stożkiem ruchomym jest jedna z płaszczyzn granicznych.

Polodą jest w tym razie elipsa, mamy więc tu następujące zadanie geometryczne. Elipsa, której środek jest nieruchomy, toczy się bez poślizgu po płaszczyźnie **F**; wyznaczyć w tej płaszczyźnie miejsce geometryczne punktu zetknięcia.

Oznaczmy rzut punktu *O* na płaszczyznę **F** przez *Q*, punkt zetknięcia przez *P*, i osi elipsy przez *2a* i *2b*. Z prz. 2 w par. 127 wiemy, że połowa małej osi $b = \frac{1}{\sqrt{B}}$. Według (2) $OQ = \frac{\sqrt{T}}{H}$, a ponieważ

w tym razie $H^2 = BT$, przeto $OQ = b$. Z tego wynika, że herpoloda przechodzi przez punkt *Q*. Gdy biegun dojdzie do tego punktu, to osią obrotu stanie się trzecia oś główna punktu *O*, elipsa przestanie się toczyć, i zacznie wraz z ciałem obracać się około *OQ*. Można zresztą ruch ten uważać także za toczenie się.

Elipsę odniesiemy do jej osi i zastosujemy jej równania w postaci

$$x = a \cos \vartheta, \quad y = b \sin \vartheta \quad \dots \dots \dots (3),$$

gdzie ϑ oznacza t. zw. anomalie ekscentryczną. Herpolodę odniesiemy do współrzędnych biegunowych. Za biegun obierzemy punkt *Q*, a oś biegunową poprowadzimy przez ten punkt, który zajmował koniec dużej osi elipsy w chwili, gdy był biegunem ruchu.

Oczywiście $QP^2 = OP^2 - OQ^2$, a z tego otrzymamy z łatwością $r = c \cos \vartheta$, jeżeli (*r*, φ) oznaczają współrzędne bieżące herpolody, a *2c* odległość międzyogniskową elipsy.

Ponieważ niema poślizgu, przeto punkt zetknięcia w czasie *dt* przebiega jednakowe łuki na polodzie i herpolodzie, a zatem $dr^2 + r^2 d\varphi^2 = (a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta) d\vartheta^2$, i stąd

$$d\varphi = - \frac{b dr}{r \sqrt{c^2 - r^2}}.$$

Stawiamy znak —, bo ze wzrostem φ oczywiście *r* się zmniejsza.

Równanie powyższe zcałkujemy łatwo, wprowadzając nową zmienną $u = \frac{c}{r}$. Wypadnie

$$r = - \frac{2c}{e \frac{c\varphi}{b} + e - \frac{c\varphi}{b}}.$$

Takie jest równanie herpolody. Widać z niego, że *r* przybiera jednakowe wartości dla φ i $-\varphi$, a zatem krzywa jest symetryczna względem osi biegunowej. Promień wodzący jest największy, gdy $\varphi = 0$; wówczas $r = c$. Gdy φ wzrasta nieograniczenie, to *r* nieograni-

czenie zbliża się do zera, innemi słowy krzywa obiega wciąż punkt Q , zbliżając się doń asymptotycznie; jest to spiralna, posiadająca punkt asymptotyczny Q .

Tak więc, jeżeli oś chwilowa znajdzie się w płaszczyźnie granicznej, to następnie dąży ona wciąż do trzeciej osi głównej punktu O . Po pewnym czasie kąt pomiędzy temi prostemi staje się znikomo małym, i możemy uważać, nie popełniając wyraźnego błędu, że ciało obraca się stale około owej osi głównej.

129. Przypadki szczególne. Rozważymy osobno ten przypadek szczególny, w którym momenty bezwładności względem dwóch osi głównych środka O , mianowicie A i B , są równe. Przypadek taki zachodzi np. w tym razie, gdy ciało jest jednorodną bryłą obrotu, i punkt O leży na osi symetrii.

Oznaczmy tę oś główną punktu O , której odpowiada moment bezwładności C , nie równy A , przez z . Wiemy, że w płaszczyźnie dwóch pozostałych osi głównych, czyli w płaszczyźnie prostopadłej do z , wszystkim prostym, przechodzącym przez O , odpowiadają momenty równe A , i każdą z tych prostych można uważać za oś główną.

Poprowadźmy przez oś z i przez wektor ω płaszczyznę i oznaczmy jej prostą przecięcia z ową płaszczyzną równych momentów przez x . Rozłożmy następnie ω na składowe ω_z i ω_x w kierunkach z i x . Wektor H posiada w tych kierunkach składowe $C\omega_z$, $A\omega_x$ i oczywiście leży w płaszczyźnie zx .

Podobnie, jak w par. 125, otrzymamy tu równania

$$\left. \begin{aligned} C^2\omega_z^2 + A^2\omega_x^2 &= H^2 \\ C\omega_z^2 + A\omega_x^2 &= T' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1).$$

Z równań tych wynika, że ω_z i ω_x są stałe, a zatem i szybkość wypadkowa $\omega = \sqrt{\omega_z^2 + \omega_x^2}$ jest stała.

Tak więc w rozważanym przypadku szczególnym *szybkość kątowa nie zmienia się co do wielkości*.

Wektor ω tworzy z osią z kąt $\arctan \frac{\omega_x}{\omega_z}$. Kąt ten jest stały, gdyż ω_z i ω_x są stałe. Z tego wynika, że prosta z jest osią stożka ruchomego osi chwilowych, i że stożek ten jest kołowy.

Wektor H tworzy z osią z kąt $\arctan \frac{A\omega_x}{C\omega_z}$, a kąt pomiędzy wektorami H i ω wynosi $\arctan \frac{A\omega_x}{C\omega_z} - \arctan \frac{\omega_x}{\omega_z}$. Kąt ten