

leży nieskończenie daleko, a zatem składowa u musi być równa szybkości środka. Korzystając z tego, można odrazu wykreślić koło γ . Dogodnie będzie obrać $\omega=1$.

Prz. 3. Punkty A i B układu płaskiego poruszają się na prostych a i b , tworzących kąt prosty; wyznaczyć wykreślnie środek krzywizny toru dowolnego punktu układu.

Obrawszy dowolnie szybkość środka odcinka AB , można odrazu wykreślić koło γ .

34. Prz. 4. Wyznaczyć promienie krzywizny w wierzchołkach elipsy, której osi wynoszą $2a$ i $2b$. Odp. $\frac{a^2}{b}$ i $\frac{b^2}{a}$. Elipsę należy tu uważać za tor punktu prostej, której dwa punkty poruszają się na osiach.

Prz. 5. Ruchoma prosta m przechodzi wciąż przez punkt O , a jej punkt A pozostaje wciąż na nieruchomej prostej n . Odległość punktu O od n wynosi a , i na m dany jest punkt B w odległości b od A . Wyznaczyć wykreślnie środek krzywizny toru punktu B dla jakiegokolwiek położenia prostej m i obrać promień krzywizny, gdy prosta m jest prostopadła do n .

Obrawszy O za początek układu współrzędnych i prostopadłą do n za oś x , znajdziemy łatwo równanie linii stałej środków chwilowych, a mianowicie $y^2=ax$. Jest to parabola, której wierzchołek leży w O , a oś na osi x . Wiadomo, że rzut punktu paraboli na oś i przecięcie stycznej z osią leżą w jednakowych odległościach od wierzchołka; korzystając z tego twierdzenia, wyznaczmy wspólną styczną do krzywych środków chwilowych, a następnie koło γ . Promień krzywizny w szczególnem położeniu wskazanem wynosi $\frac{(a \pm b)^2}{b}$.

37. Koło przegięć. Na fig. 22 widzimy znowu środek chwilowy M , wspólną normalną do linii środków m i koło γ . Poprowadźmy w układzie ruchomym przez środek chwilowy dowolną prostą MP , tworzącą z m kąt ϑ , i niech MP' będzie jej linią przewodnią. Prowadzimy następnie przez koniec N szybkości u prostą równoległą do MP i przez punkt S' , w którym ta równoległa przecina linię przewodnią, prostopadłą $S'S$ do MP . Środek krzywizny toru punktu S leży w przecięciu prostych NS' i MS , a więc jest punktem nieskończenie odległym; z tego wynika, że punkt S przypada obecnie w przegięciu swego toru.

Z figury widać, że $MS=SS' \cot \alpha = c \cdot \cos \vartheta \cdot \cot \alpha$, gdzie $\alpha = \arctan \omega$ oznacza kąt PMP' . Ostatecznie

$$MS = \frac{c}{\omega} \cos \vartheta.$$

Równanie powyższe zowie się zwykle *wzorem Savarego*. Uważamy w niem p za dodatnie, gdy punkt P leży po tej samej stronie środka chwilowego, co i punkt S , natomiast q uważamy za dodatnie, gdy Q leży po stronie odwrotnej. Badając przy pomocy rysunku różne położenia możliwe punktów P i Q , znajdziemy, że przy umowie powyższej lewa strona równania pozostaje zawsze dodatnią, a zatem d uważać należy zawsze za dodatnie.

Średnicę d koła przegięć można wyznaczyć z wzoru, który poznaliśmy w par. 35, pisząc tylko $\frac{1}{d}$ zamiast $\frac{\omega}{c}$. Będzie wówczas

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

gdzie R_1 i R_2 oznaczają promienie krzywizny linii stałej i ruchomej środków chwilowych. Co do znaków należy tu trzymać się umowy, zawartej we wzmiankowanym paragrafie.

Punkt Q leży zawsze po tej samej stronie punktu P , co i punkt S . Można się o tem przekonać, śledząc na figurze położenia pierwszego przy różnych położeniach drugiego, wynika to również ze wzoru Savarego. Pisząc tam MS zamiast $d \cos \vartheta$, otrzymamy

$$q = \frac{p \cdot MS}{p - MS}.$$

Rozważymy trzy przypadki następujące:

1) $p > MS$; w takim razie q jest dodatnie, i położenie punktów P , Q jest takie, jak na fig. 22.

2) $MS > p > 0$; q jest ujemne, a więc Q leży po stronie S i $MQ = MP \cdot \frac{MS}{PS}$. Z tego wynika, że $MQ > MP$.

3) $p < 0$; q dodatnie, przeto Q po stronie odwrotnej do S i, jak poprzednio, $MQ = MP \cdot \frac{MS}{PS}$. Z tego widać, że $MQ < MP$.

Z powyższych roztrząsań wynika, że tor punktu P zawsze zwraca się do S wklęsłością, jeżeli więc punkt ruchomy leży nazewnątrz koła przegięć, to tor jego jest zwrócony do środka chwilowego wklęsłością, jeżeli wewnątrz, to wypukłością.

Zwrócimy jeszcze uwagę na ten przypadek szczególny, gdy punkt P leży na wspólnej stycznej do linii środków chwiło-

wych. W takim razie $\cos \vartheta = 0$, i wzór Savarego nie przestaje być ważny tylko pod warunkiem, że $\dot{q} = 0$, z czego wnioskujemy, że dla punktów, położonych na wspólnej stycznej, środek chwilowy jest środkiem krzywizny torów.

Do tego samego można dojść bezpośrednio. Przypuśćmy, że jakikolwiek punkt układu ruchomego zajmował w chwili t położenie P , a w chwili $t + dt$ położenie P_1 . W pierwszej z tych chwil środek chwilowy był, dajmy na to, w M , a w drugiej w M_1 . Obydwa te punkty leżą na wspólnej stycznej. Oczywiście proste PM i P_1M_1 , jako normalne w nieskończenie blizkich punktach toru punktu P , przecinają się w środku krzywizny. Jeżeli P leży na wspólnej stycznej, to owym punktem przecięcia będzie punkt M_1 albo M .

Oprócz punktów P i Q , o których mówiliśmy dotychczas, i które leżą na prostej n , weźmy jeszcze na wspólnej normalnej m do linii środków chwilowych punkt P' oraz środek krzywizny jego toru Q' , i niechaj p' i q' oznaczają ich odległości od M . W takim razie $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{d}$, a zatem

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \cos \vartheta = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}, \quad \text{lub} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p' \cos \vartheta} + \frac{1}{q' \cos \vartheta}.$$

Jeżeli P jest rzutem prostokątnym punktu P' , to $p = p' \cos \vartheta$. Z równania powyższego wynika, że wówczas i $q = q' \cos \vartheta$, a więc i Q jest rzutem punktu Q' .

Niech będzie dana wspólna normalna m do linii środków chwilowych oraz środek krzywizny Q toru danego punktu P . Naturalnie prosta PQ , oznaczmy ją literą n , przechodzi przez środek chwilowy M . Przy pomocy metody, podanej w paragrafie poprzedzającym, możemy dla punktów $P_1, P_2 \dots$ na prostej n wyznaczyć środki krzywizny $Q_1, Q_2 \dots$; poprowadziwszy następnie przez $P, P_1, P_2 \dots Q, Q_1, Q_2 \dots$ prostopadłe do n , znajdziemy na m szeregi $P', P'_1, P'_2 \dots, Q', Q'_1, Q'_2 \dots$, i punkty drugiego są środkami krzywizny punktów pierwszego. Rzutując te szeregi na jakąkolwiek prostą, przechodzącą przez M , znajdziemy z łatwością środek krzywizny toru punktu dowolnego na tej prostej.

Prz. 1. Punkty O_1 i O_2 są środkami krzywizny linii środków chwilowych stałej i ruchomej w punkcie zetknięcia; okazać, że O_1 jest środkiem krzywizny toru punktu O_2 .

Prz. 2. Koło toczy się po linii prostej; wyznaczyć koło przegięć.

Prz. 3. Koło o promieniu a toczy się po takim samym kole stałym i obecnie styka się z niem w punkcie C . Wyznaczyć promień

krzywizny toru punktu A , położonego na okręgu ruchomym tak, że łuk AC wynosi 60° . Odp. $\frac{4a}{3}$.

36 Prz. 4. Jeden punkt układu obiega koło, a drugi prostą, przechodzącą przez środek tego koła. Wykreślić koło przecięć w jednym z położań układu.

Prz. 5. Okazać, że promień krzywizny w jakimkolwiek punkcie spiralnej logarytmicznej ($r=ae^\varphi$) wynosi $r\sqrt{2}$, (prz. 6, par. 32).

Prz. 6. Wyznaczyć promień krzywizny w jakimkolwiek punkcie spiralnej Archimedesza $r=a\varphi$ (prz. 5, par. 32). Odp. $\frac{a(1+\varphi^2)^{3/2}}{2+\varphi^2}$.

W tym razie $d=a$, i łatwo można się przekonać, że krzywa w samym biegunie nie tworzy przecięcia, z czego wynika, że p we wzorze Savarego będzie ujemne.

Prz. 7. Punkty A_1, A_2 układu obiegają jednakowe koła, przecinające się pod kątem prostym (znaczy to, że styczne w punkcie przecięcia tworzą kąt prosty), pozostając wciąż po odwrotnych stronach linii środków. Promień każdego koła $= a$, a odległość pomiędzy środkami $= A_1A_2$. Wyznaczyć tor środka odcinka A_1A_2 oraz promień krzywizny tego toru w dowolnym punkcie.

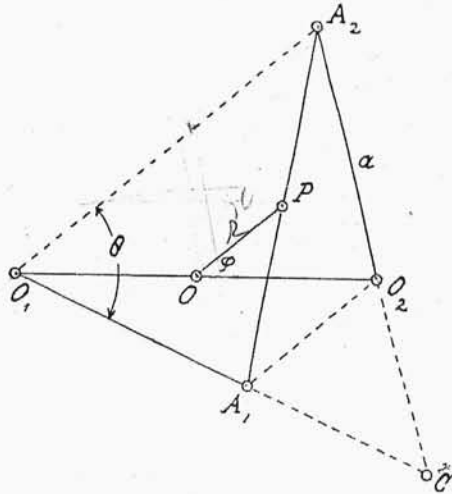


Fig. 23.

Oznaczmy środki odcinków O_1O_2 i A_1A_2 przez O i P , a środek chwilowy przez C ; niech dalej będzie kąt $CO_1A_2=\vartheta$, $POO_2=\varphi$ i $OP=r$. Znajdziemy, że $O_1O_2=A_1A_2=a\sqrt{2}$, a z trójkąta $A_1A_2O_1$ wypadnie, że $\sin \vartheta = \sqrt{2} \sin \varphi$. Dalej będzie $A_2O_1-A_1O_2=2r$ i $A_2O_1-A_1O_2=2a \cos \vartheta$; stąd wynika, że $r=a \cos \vartheta$, a uwzględniając związek poprzedzający,

otrzymamy $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$. Jest to równanie toru punktu P we współrzędnych biegunowych. Wiadomo, że równaniu temu odpowiada lemniskata, której osią jest prosta O_1O_2 .

Żądany promień krzywizny wyznaczmy przy pomocy wzoru Savarego. Z prz. 3, par. 32 wiemy, że linią stałą środków chwilowych jest hiperbola, której ogniskami są O_1 i O_2 , a styczna do hiperboli jest dwusieczną kąta pomiędzy promieniami wodzącymi. Punkt O_1 jest środkiem krzywizny toru punktu A_1 ; położenie tych punktów wskazuje, że koło przegięć leży po tej samej stronie wspólnej stycznej, co A_1 , i będzie

$$\frac{1}{d} = \left(\frac{1}{CA_1} - \frac{1}{CO_1} \right) \cos \vartheta = \frac{a \cos \vartheta}{CA_1 \cdot CO_1}.$$

Odcinki CA_1 i CO_1 wyznaczmy z trójkąta CO_1O_2 , i wówczas wypadnie, że $\frac{1}{d} = \frac{4r^3}{a^4}$.

Odległość prostej OP od środka chwilowego, równa różnicy rzutów odcinków CO_1 i OO_1 na wspólną styczną, wynosi $\frac{a \tan \vartheta \cos \varphi}{\sqrt{2}}$; przy pomocy tego wyniku znajdziemy łatwo, że prosta CP tworzy z wspólną normalną do krzywych środków chwilowych kąt 2φ . Dal-szy rachunek jest prosty, należy tylko unikać błędów w znakach. Szukany promień krzywizny równa się $\frac{a^2}{3r}$.

Prz. 8. Wiadomo, że promień krzywizny katenoidy jest równy długości odcinka normalnej, zawartego pomiędzy tą krzywą i jej kierownicą. Posługując się tem twierdzeniem oraz wynikami przykładu 1, par. 30, dowieść, że promień krzywizny paraboli wynosi $\frac{2r^{3/2}}{p^{1/2}}$, gdzie r jest promieniem wodzącym, a $2p$ oznacza odległość pomiędzy ogniskiem i kierownicą paraboli.

Prz. 9. Prostopadła ze środka chwilowego M do prostej a , należącej do układu, przecina koło przegięć w punkcie B i prostą a w punkcie A . Dowieść, że promień krzywizny obwiedni prostej a w punkcie A jest równy $AB + 2BM$.

Na fig. 24 δ oznacza koło przegięć, a γ koło znane z par. 36. Niech MD będzie linią przewodnią prostej AB , należącej do układu. W takim razie $BD = v$ jest szybkością punktu B . Ponieważ ten punkt leży na kole przegięć, przeto $v = u$. Wyobraźmy sobie prostą p ruchomą, lecz nie należącą do układu. Dajmy na to, że pozostaje ona wciąż normalną do obwiedni prostej a , a jeden jej punkt przypada zawsze w punkcie zetknięcia prostej a z obwiednią. Oczywiście prosta p jest w każdej chwili prostopadła do a , a zatem obraca się około swego środka chwilowego C z taką samą szybkością kątową, jak dany układ około M . Z tego wynika, że linia przewodnia prostej p musi być ró-

wnoległa do MD . Zauważymy jeszcze, że szybkość tego punktu prostej p , który przypada obecnie w M , jest równa u , i że O jest środkiem krzywizny obwiedni. Z tego wszystkiego daje się łatwo wywnioskować, że $MC=BM$. Środki krzywizny obwiedni wszystkich prostych układu ruchomego leżą na okręgu koła ε symetrycznego do koła przecięć względem środka chwilowego lub względem wspólnej stycznej do linii środków chwilowych.

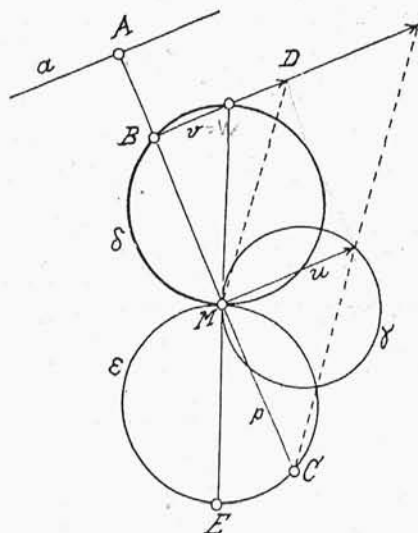


Fig. 24.

Prz. 10. Pomiedzy prostemi układu są takie, które w chwili obecnej przechodzą przez ostrza, czyli punkty zwrotu (punkty o krzywiznie nieskończenie wielkiej), swych obwiedni. Okazać, że wszystkie takie ostrza, leżą na okręgu ε , równym okręgowi przecięć i stykającym się z nim w środku chwilowym; można by ten okrąg przez analogię nazwać *okręgiem ostrzy*. Wszystkie owe proste przechodzą przez punkt E , położony na okręgu ostrzy i na wspólnej normalnej.

Prz. 11. Okazać, że promień krzywizny w dowolnym punkcie astroidy równa się $\frac{3a \sin 2\phi}{2}$, gdzie a oznacza długość odcinka stycznej, zawartego pomiedzy osiami, a ϕ kąt, który ta styczna tworzy z jedną z osi. (Prz. 2, par. 33).

Prz. 12. Wyznaczyć miejsce geometryczne środków krzywizny torów punktów, położonych na linii prostej.

Niechaj P_1, P_2, \dots oznaczają położenia punktów prostej a w chwili t , a P'_1, P'_2, \dots w chwili t' ; środki chwilowe w owych chwilach oznaczmy przez C i C' . Łącząc C z P_1, P_2, \dots i C' z P'_1, P'_2, \dots , otrzymamy dwa pęki rzutowe. Jeżeli $t' = t + dt$, to punkty przecięcia odpowiednich pro-

mieni pęków są właśnie szukanymi środkami krzywizny. Z tego wynika, że szukanym miejscem geometrycznym jest stożkowa. W jaki sposób można przewidzieć rodzaj stożkowej, mając prostą a oraz koło przegięć?

38. Zastosowanie statyczne. Wyobraźmy sobie ruchome ciało A , oparte w punkcie C o nieruchome ciało B . Powierz-

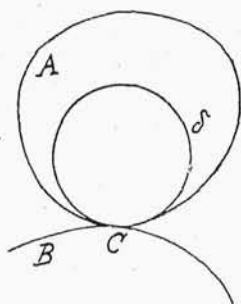


Fig. 25.

chnie tych ciał są tak chropowate, że A może tylko toczyć się po B bez poślizgu. Dajmy na to, że na fig. 25 mamy przekrój tych ciał w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez środek ciężkości ciała A i przez punkt C , i że ciało A może poruszać się jedynie równoległe do tej płaszczyzny.

Podczas ruchu ciała A jego środek ciężkości zataczałby pewną linię. Ciało pozostaje w równowadze, jeżeli styczna do tego toru w położeniu obecnym środka ciężkości jest pozioma, innymi słowy, jeżeli środek ciężkości zajmuje na swym torze położenie najwyższe lub najniższe. W pierwszym przypadku równowaga jest chwiejna, w drugim trwała.

Wobec założeń, poczynionych wyżej, kontury ciał, nakreślone na fig. 25, są liniami środków chwilowych, a punkt C środkiem obecnym. Niechaj δ będzie kołem przegięć. Jeżeli środek ciężkości leży na zewnątrz koła δ , to, jak wiemy z par. poprzedzającego, tor jego jest zwrócony do punktu oparcia C wklęsłością, a zatem środek ciężkości zajmuje położenie najwyższe, i równowaga jest chwiejna, jeżeli zaś środek ciężkości leży wewnątrz koła przegięć, to równowaga jest trwała. Tym sposobem koło przegięć może służyć do rozróżniania tych dwóch rodzajów równowagi.

~~Prz.~~ 1. Jednorodna belka o grubości a ma być oparta o kołowy cylinder poziomy. Jaki powinien być promień cylindra, aby równowaga była trwała. Odp. Promień powinien być większy od $\frac{a}{2}$.

~~Prz.~~ 2. Półkula jednorodna o promieniu a jest oparta o kulę powierzchnią krzywą. Jaki powinien być promień kuli, aby równowaga była trwała? (Odległość środka ciężkości półkuli od podstawy wynosi $\frac{3}{8}$ promienia). Odp. Większy od $\frac{5a}{3}$.

39. Ruch kulisty. Jeżeli w układzie sztywnym istnieje punkt O , którego szybkość jest równa zero, to ruch układu nazywa się kulistym, punkt O środkiem tego ruchu, a każda prosta, przechodząca przez O , promieniem. Oczywiście promień jest prostą zerową, a zatem szybkości wszystkich jego punktów są doń prostopadłe.

Jeżeli punkt O pozostaje stale nieruchomym, to torem każdego punktu układu jest krzywa sferyczna, położona na kuli, której środkiem jest O . Stąd pochodzi nazwa ruchu.

Przypuśćmy, że punkty A_1 i A_2 układu, nie leżące na jednym promieniu, posiadają w chwili obecnej szybkości v_1 i v_2 . Poprowadźmy przez A_1 płaszczyznę F_1 prostopadłą do v_1 ; przejdzie ona przez promień OA_1 , a więc i przez środek O . Weźmy w tej płaszczyźnie dowolny punkt B . Proste BA_1 i BO są oczywiście zerowe, a zatem szybkość punktu B musi być prostopadła do płaszczyzny BOA_1 czyli do F_1 . Szybkości wszystkich punktów płaszczyzny F_1 są do niej prostopadłe.

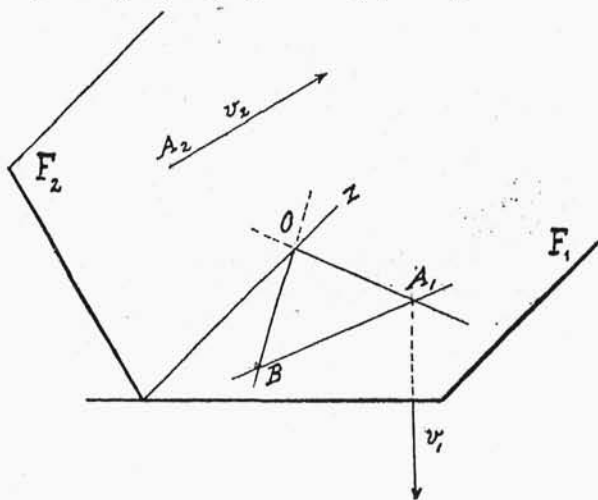


Fig. 26.

Poprowadźmy również przez A_2 płaszczyznę F_2 prostopadłą do v_2 . Przejdzie ona przez O , i szybkości jej punktów będą także do niej prostopadłe.

Płaszczyzny F_1 i F_2 przecinają się według prostej z , przechodzącej przez środek O , i szybkości punktów tej prostej muszą

być zerami, bo inaczej musiałyby być prostopadłe do F_1 i F_2 . Widzimy więc, że w układzie istnieje prosta nieruchoma, a zatem ruch jest obrotowy, i prosta z jest osią jego. Nazywamy ją *osią chwilową*, gdyż wogóle w chwili następnej już inna prosta układu, zajmująca inne położenie w przestrzeni, będzie osią obrotu.

^{1/12} **40. Stożki osi chwilowych.** Badając ruch układu w przestrzeni musimy odróżniać punkty, proste i płaszczyzny, należące do układu ruchomego, od punktów, prostych i płaszczyzn przestrzeni nieruchomej, tak jak odróżnialiśmy w ruchu płaskim punkty i proste układu ruchomego od punktów i prostych płaszczyzny nieruchomej.

Z pośród wszystkich promieni układu, który pozostaje w ruchu kulistym, wyróżniają się te, które były lub będą osiami chwilowymi; ich miejscem geometrycznym jest oczywiście powierzchnia stożkowa, której wierzchołek leży w środku ruchu kulistego. Powierzchnia ta zowie się *stożkiem ruchomym osi chwilowych*.

Z pośród wszystkich prostych przestrzeni nieruchomej, przechodzących przez środek O , musimy wyróżniać te, w których przypadała lub przypadać będzie oś chwilowa. Miejscem geometrycznym takich prostych jest znowu oczywiście powierzchnia stożkowa, której wierzchołek leży w O . Nazywamy ją *stożkiem stałym osi chwilowych*.

Zatoczmy z punktu O kulę dowolnym promieniem. Stożek ruchomy osi chwilowych przetnie jej powierzchnię według pewnej krzywej sferycznej, którą oznaczmy przez ρ . Krzywa ta porusza się na kuli, nie zmieniając jednak z biegiem czasu ani kształtu ani wymiarów. Stożek stały przetnie tę samą powierzchnię według krzywej nieruchomej σ .

Linie ρ i σ posiadają w każdej chwili wspólny punkt C , w którym oś chwilowa przebija powierzchnię kuli. Wziąwszy do pomocy ruchomy punkt M , podążający za tym punktem C , dowiedzimy, że linia ρ toczy się bez poślizgu po linii σ , tak jak dowiedliśmy w paragrafie 30 analogiczne twierdzenie o ruchu płaskim. Dowód byłby prawie dosłownem powtórzeniem odnośnego ustępu ze wzmiankowanego paragrafu, i z tego względu pomijamy go tutaj.

Z rozważań powyższych wynika bezpośrednio, że stożek

ruchomy toczy się bez poślizgu po stożku stałym, i tworząca zetknięcia jest w każdej chwili osią chwilową.

Dajmy na to, że obydwą stożki osi chwilowych są kołowe, i że szybkość kątowna układu jest stała. Ruch taki nazywa się *ruchem precesyjnym*, albo wprost *precesją*.

Prz. 1. W ruchu precesyjnym szybkość kątowna układu $=\omega$, osi stożków tworzą kąt α , a kąt wierzchołkowy stożka stałego $=2\beta$, przy czem stożek ruchomy leży na zewnątrz stałego. Z jaką szybkością kątową oś stożka ruchomego obraca się około osi stożka stałego? Odp. $\frac{\omega \sin(\alpha-\beta)}{\sin \alpha}$.

Prz. 2. Oś ziemską tworzy z prostopadłą do płaszczyzny ekliptyki (czyli drogi ziemskiej) stały kąt $23\frac{1}{2}^\circ$ i obraca się koło niej bardzo wolno, a mianowicie wykonywa całkowity obrót mniej więcej w $26 \cdot 10^4$ lat. Ruch ten odbywa się w stronę odwrotną do ruchu ziemi naokoło osi. Abstrahując od ruchu rocznego, możemy uważać ruch ziemi za kulisty. Wyznaczyć promień koła, według którego stożek ruchomy przecina powierzchnię ziemi.

Oznaczywszy przez 2β kąt wierzchołkowy stożka ruchomego, znajdziemy z łatwością, że $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{365 \cdot 26 \cdot 10^3}$, gdzie $\alpha = 23\frac{1}{2}^\circ$. Ponieważ kąt β jest bardzo mały, przeto $\beta = \sin \beta$, i szukany promień $r = \frac{\sin \alpha \cdot 4 \cdot 10^9}{365 \cdot 26 \cdot 10^3 \cdot 2\pi}$ cm. $= 27$ cm.

41. **Ruch śrubowy.** Dajmy na to, że do układu należy prosta z , zawierająca szybkości dwóch swych punktów. O przypadku tym była już mowa w par. 23. Widzieliśmy tam, że na z leżą szybkości wszystkich punktów tej prostej i, że szybkości te są równe. Taki ruch układu nazywamy śrubowym, a prostą z osią tego ruchu.

Będziemy rozważali ruch układu względem któregośkolwiek punktu, należącego do osi (par. 20). Szybkości unoszenia wszystkich punktów układu są tu zgodne co do kierunku i wielkości z szybkością punktów osi. Oznaczmy tę szybkość przez u ; będziemy ją nazywali *szybkością postępową ruchu śrubowego*.

Szybkość bezwzględna każdego punktu osi jest równa szybkości unoszenia, a więc

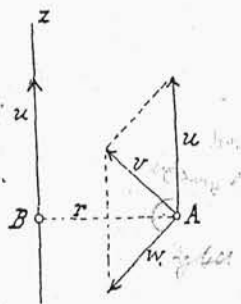


Fig. 27.

szybkość względna jest równa zeru. Z tego wynika, że ruch względny układu jest obrotowy około osi z . Oznaczmy szybkość kątową przez ω .

Weźmy teraz jakikolwiek punkt A układu, położony w odległości r od osi z . Jego szybkość względna $w = r\omega$ i jest prostopadła do płaszczyzny, przechodzącej przez A i z . Tak więc szybkość bezwzględna v punktu A posiada dwie składowe prostopadłe $w = r\omega$ i u .

Możemy powiedzieć, że ruch układu składa się z dwóch ruchów: z ruchu obrotowego około osi z i z ruchu postępowego w kierunku osi z . Pierwszy z tych ruchów składowych odbywa się z szybkością kątową ω , drugi z szybkością postępową u . Inaczej mówiąc, pole szybkości układu w danej chwili daje się całkowicie określić zapomocą dwóch wektorów: wektora ω , związanego z osią z , i wektora swobodnego u , równoległego do osi. Takie połączenie dwóch wektorów zowie się skrętnikiem. W statyce mamy do czynienia ze skrętnikiem, złożonym z siły i momentu pary.

Jeżeli wektory ω i u są stałe co do wielkości i kierunku, i oś nie zmienia położenia w przestrzeni, to torem każdego punktu układu jest linia śrubowa. Okoliczność ta usprawiedliwia nazwę tego rodzaju ruchu.

Wypada jeszcze zwrócić uwagę, że obydwie składowe szybkości v są prostopadłe do promienia AB (B oznacza rzut punktu A na oś), a zatem i szybkość v jest do niego prostopadła. Prócz tego oczywiście rzut szybkości v na oś jest równy u , a więc w ruchu śrubowym rzuty szybkości wszystkich punktów układu na oś są równe.

Dowodnimy teraz twierdzenie odwrotne. Przypuśćmy, że szybkości wszystkich punktów układu na pewien kierunek (nazwiemy go kierunkiem k) są równe u ; dowiedzimy, że do układu należy prosta, zawierająca szybkości swych punktów, czyli że ruch układu jest śrubowy.

W tym celu uważajmy ruch układu względem jakiegoś punktu, posiadającego szybkość u . Tym sposobem szybkość bezwzględna dowolnego punktu A układu rozkłada się na szybkość unoszenia u i szybkość względną w . Pierwsza z nich jest rzutem prostokątnym szybkości v na kierunek k , a zatem druga jest prostopadła do k . Z tego wynika, że szybkości względne

wszystkich punktów są równoległe do płaszczyzny, prostopadłej do kierunku k , czyli że ruch względny układu jest płaski.

Ruch płaski jest zawsze ruchem obrotowym. Niechaj osią będzie prosta z , która oczywiście musi być równoległa do k . Szybkość względna każdego punktu tej osi jest zerem, a zatem jego szybkość bezwzględna jest co do wielkości i kierunku zgodna z szybkością unoszenia, czyli z szybkością u , położoną oczywiście na z . Widzimy, że w ruchu bezwzględnym prosta z zawiera szybkości wszystkich swych punktów, a zatem ruch bezwzględny układu jest śrubowy.

Prz. 1. Ruch układu jest śrubowy, przyczem obydwie szybkości ω i u są stałe. Wyznaczyć tor rzutu jednego z punktów układu na płaszczyznę nieruchomą, przechodzącą przez oś. Odp. Synusoida.

Prz. 2. Dane są obydwie szybkości ω i u ruchu śrubowego i na prostopadłej do osi punkt A w odległości r od osi. Wyznaczyć na tejże prostopadłej taki punkt, aby szybkość jego była prostopadła do szybkości punktu A . Odp. Szukany punkt leży po odwrotnej stronie osi w odległości $\frac{u^2}{r\omega^2}$.

42. Ruch jakikolwiek. Rozważymy teraz przypadek najogólniejszy, usuwając wszelkie ograniczenia, które dotychczas krępowały ruch układu sztywnego. Uważamy więc, że układ porusza się jakikolwiek, i dajmy na to, że A , jeden z jego punktów, posiada w obecnej chwili szybkość u .

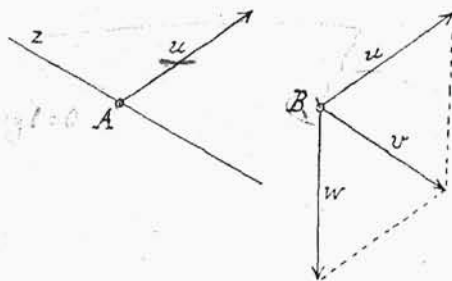


Fig. 28.

Będziemy rozważali ruch układu względem tego punktu A . Oczywiście ruch ten jest kulisty, bo szybkość względna punktu A jest zerem. Lecz ruch kulisty jest zawsze obrotowy, a oś tego ruchu obrotowego przechodzi przez środek A . Niech tą osią będzie prosta z .

Weźmy teraz jakiś inny punkt B układu, posiadający szybkość v . Szybkość ta rozkłada się na szybkość unoszeniu u i na szybkość względną w , a rzut wypadkowej v na prostą z jest równy sumie rzutów składowych u i w . Lecz szybkość w jest prostopadła do z , jako do osi obrotu, a zatem rzut jej jest zerem. Z tego wynika, że rzuty szybkości u i v na prostą z są równe.

Tak samo dowiedziemy, że rzut szybkości każdego innego punktu na prostą z jest równy rzutowi szybkości punktu A na tę prostą, a zatem ruch układu jest śrubowy; oś tego ruchu śrubowego, oczywiście równoległa do prostej z , nazywa się *osią chwilową ruchu śrubowego*, bo w chwili następnej już wogóle inna prosta układu, zajmująca inne położenie w przestrzeni, będzie osią.

Istnieją powierzchnie ruchoma i stała osi chwilowych, ale ta sprawa przekracza już zakres książki.

Z rozważań powyższych wynika, że najogólniejszym ruchem układu sztywnego jest ruch śrubowy. Określają go w danej chwili całkowicie, jak widzieliśmy w paragrafie poprzedzającym, wektory ω i u . Ruchy postępowy i obrotowy możemy uważać za szczególne przypadki ruchu śrubowego. Jeżeli $\omega = 0$, to ruch układu jest postępowy, jeżeli $u = 0$, to mamy ruch obrotowy.

Użyteczny bywa i odwrotny sposób patrzenia na tę sprawę. Możemy powiedzieć, że istnieją tylko dwa zasadniczo odmiennie rodzaje ruchu układu sztywnego, postępowy i obrotowy. Jeżeli układ posiada jednocześnie obydwa te ruchy, to ruch jego nazywa się śrubowym.

G. Koenigs w dziele p. t. „Leçons de Cinématique“ dowodzi twierdzenie powyższe w sposób uderzająco prosty. Przytaczam dowód jego w przekładzie.

„Udzielmy ciału sztywnemu nieskończenie małego przesunięcia. Jakiś punkt M , obrany w ciele dowolnie, przejdzie do nieskończenie blizkiego położenia M_1 ; M_1 , uważany za punkt ciała w położeniu pierwotnem, przejdzie do sąsiedniego położenia M_2 ; M_2 , uważany znowu za punkt ciała, wzięty w chwili początkowej, zajmie położenie sąsiednie M_3 i t. d. Tym sposobem wyznaczmy w położeniu pierwotnem ciała szereg punktów M, M_1, M_2, \dots . Podczas ruchu M przejdzie do M_1 , M_1 do M_2 , M_2 do M_3 i t. d., jednym słowem linia, na której te punkty leżą, przesunie się nieskończenie mało sama po sobie.

Obierzmy na tej krzywej dowolny punkt P , i niechaj R oznacza promień krzywizny w tym punkcie, a T promień skręcenia^{*)}. Podczas ruchu punkt P przesunie się do P' na krzywej. Promienie krzywizny i skręcenia w tym sąsiednim punkcie P' muszą być znowu równe R i T , gdyż element krzywej, do którego należy P , przystał do elementu, zawierającego P' . Tak więc gdy obiegamy krzywą, to różniczkowe promieni R i T są zerami, a więc promienie te są stałe. Istnieją trzy linie, posiadające obydwie krzywizny stałe, a mianowicie prosta, koło i śrubowa.

W przypadku śrubowej nieskończenie mały ruch ciała jest tego rodzaju, że pewna śrubowa przesuwają się po samej sobie. Jest to nieskończenie mały ruch śrubowy.

W przypadku koła, nieskończenie mały ruch ciała jest taki, że pewne koło przesuwają się po samej sobie; jest to więc obrót chwilowy około osi koła.

Pozostaje przypadek linii prostej. W tym razie pewna prosta, należąca do ciała, przesuwają się po samej sobie; jeżeli ciało nie obraca się jednocześnie około tej prostej, to mamy zwykły ruch postępowy. Jeżeli ciało się obraca, to należy połączyć ruch postępowy z obrotowym, i otrzymujemy znowu nieskończenie mały ruch śrubowy.

Prz. 1. Z punktu O , obranego dowolnie w przestrzeni, prowadzimy odcinki równoległe do szybkości różnych punktów układu sztywnego i równe tym szybkościom. Dowieść, że końce tych odcinków leżą w jednej płaszczyźnie.

Prz. 2. Dane są szybkości trzech punktów układu, nie leżących na jednej prostej. Wyznaczyć kierunek osi ruchu śrubowego.

Prz. 3. W układzie ruchomym sztywnym istnieją dwie proste, zawierające szybkości swych punktów; dowieść, że ruch takiego układu jest postępowy.

Prz. 4. Okazać, że linia układu sztywnego, stanowiąca obwiednię szybkości swych punktów, jest śrubową.

Gdyby wektory ω i u przestały od danej chwili się zmieniać, to linia taka stałaby się torem swych punktów.

Prz. 5. Punkty A_1, A_2, A_3 układu sztywnego posiadają szybkości v_1, v_2, v_3 prostopadłe do płaszczyzny $A_1A_2A_3$. Określić rodzaj ruchu i wyznaczyć wykreślić oś chwilową.

^{*)} Oznaczmy przez ds łuk elementarny krzywej przestrzennej, przez $d\theta$ kąt pomiędzy stycznymi (albo normalnymi) w końcach tego łuku i przez $d\tau$ kąt pomiędzy płaszczyznami ściśle stycznymi (albo pomiędzy binormalnymi) w tych samych punktach; w takim razie $\frac{ds}{d\theta} = R$

nazywa się promieniem pierwszej krzywizny, a $\frac{ds}{d\tau} = T$ promieniem drugiej krzywizny, albo promieniem skręcenia. Jeżeli wszędzie $R = \infty$, to linia jest prosta, jeżeli $T = \infty$, to linia jest płaska.