

VI. SIŁA ŻYWA I ILOŚĆ RUCHU.

82. Dwie zasady. Widzieliśmy w rozdziale poprzedzającym, że można rozwiązać bardzo wiele zagadnień z dynamiki punktu masy, posługując się bezpośrednio prawami Newtona; właściwie napotykanne ograniczenia tkwią nie w samej naturze pewnych zagadnień, lecz wynikają raczej z trudności matematycznych, które występują zwłaszcza przy całkowaniu równań różniczkowych.

Pomimo tak rozległego zakresu stosowalności praw Newtona, ważną rolę odgrywają jeszcze w dynamice pewne twierdzenia zasadnicze, czyli *zasady*, które ułatwiają w znacznym stopniu układanie równań i skracają rachunki, ale są one same oparte na prawach Newtona, nie zawierają więc żadnych elementów nowych.

Nam chodzi tu głównie o *zasadę sił żywych* i *zasadę ilości ruchu*. Treścią każdej z nich jest związek pomiędzy pewnymi dwiema wielkościami. Tak więc w pierwszej mamy związek pomiędzy siłą żywą i pracą mechaniczną, a w drugiej pomiędzy ilością ruchu i popędem albo impulsem siły.

Zasadnicza różnica pomiędzy zasadami temi polega na tem, że pierwsza posiada charakter skalarowy, bo zarówno siła żywa jak i praca są skalarami, natomiast druga posiada charakter wektorowy, bo ilość ruchu i popęd są wektorami.

Rozważymy naprzód *zasadę sił żywych*; wypada jednak na wstępie przypomnieć w zarysie teorię pracy mechanicznej, znaną już ze statyki.

83. Praca elementarna. Przypuśćmy, że na punkt masy, który posiada szybkość v , działa siła P , tworząca z v kąt ϑ . Możemy przyjąć, że w ciągu najbliższych dt sekund kąt ten nie ulegnie zmianie. W ciągu tego czasu punkt mate-

ryalny przejdzie drogę $ds = v dt$. Iloczyn $P ds \cos \vartheta$, albo $P v \cos \vartheta dt$ nazywamy *pracą elementarną* siły P . Będziemy ją oznaczali przez dL .

Pracy nie przypisujemy kierunku, jest to więc skalar, a nie wektor.

Element drogi ds możemy uważać za wektor, a zatem dL jest wynikiem pewnego działania, dokonanego nad dwoma wektorami P i ds . Jest to jedno z działań zasadniczych rachunku wektorowego; nazywa się mnożeniem skalarowym, a $dL = P ds \cos \vartheta$ zowie się iloczynem skalarowym. Również $P v \cos \vartheta$ jest iloczynem skalarowym wektorów P i v . Nazw tych nie będziemy jednak używali w dalszym ciągu (par. 9).

Można powiedzieć, że *praca elementarna* jest to iloczyn z elementu drogi ds przez $P \cos \vartheta$, czyli przez rzut siły na kierunek *szybkości*, albo że jest to iloczyn z siły P przez $ds \cdot \cos \vartheta$, t. j. przez rzut elementu drogi na kierunek siły.

Pracę elementarną uważamy za dodatnią lub ujemną stosownie do znaku czynnika $\cos \vartheta$. Jeżeli $\vartheta < \frac{\pi}{2}$, to dL jest dodatnie, jeżeli $\vartheta > \frac{\pi}{2}$, to dL jest ujemne, wreszcie $dL = 0$, jeżeli $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, t. j. jeżeli siła działa prostopadle do szybkości.

Przypuśćmy, że na punkt materialny działa pewna liczba sił P_1, P_2, \dots , i że siły te tworzą z szybkością odpowiednio kąty $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$. Oznaczmy wypadkową przez R , a kąt pomiędzy nią i szybkością przez φ . Rzut wypadkowej na kierunek szybkości jest równy sumie rzutów składowych, a zatem

$$R \cos \varphi = \Sigma P \cos \vartheta.$$

Mnożąc obydwie strony przez ds , otrzymamy

$$R \cos \varphi ds = \Sigma P \cos \vartheta ds;$$

to znaczy, że *praca elementarna siły wypadkowej jest równa sumie prac elementarnych sił składowych*.

Przy pomocy tego twierdzenia wyprowadzimy jeszcze inne użyteczne wyrażenie pracy elementarnej.

Obierzmy prostokątny układ współrzędnych i rozłóżmy siłę P na składowe P_x, P_y, P_z . W chwili t punkt materialny posiadał współrzędne x, y, z , a w chwili $t + dt$ współrzędne

$x+dx$, $y+dy$, $z+dz$. Oczywiście dx jest rzutem elementu ds na oś x albo na kierunek siły P_x , a więc praca elementarna tej składowej $=P_x dx$. Tak samo znajdziemy, że prace elementarne składowych P_y i P_z są odpowiednio $P_y dy$ i $P_z dz$. Tak więc

$$dL = P_x dx + P_y dy + P_z dz \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Rozważymy jeszcze parę ważniejszych przypadków szczególnych.

Przypuśćmy, że punkt materialny A obraca się około punktu O z szybkością kątową ω , promień $OA=r$, i na A w płaszczyźnie toru działa siła P , tworząca ze styczną kąt ϑ . Praca elementarna $dL = P \omega r \cos \vartheta dt$. Lecz $r \cos \vartheta = p$ jest ramieniem siły P względem O , a zatem $Pr \cos \vartheta$ jest to moment tej siły względem O .

Fig. 50.

Oznaczmy go przez M , a kąt ωdt , o który punkt A obrócił się w czasie dt , przez $d\varphi$. Będzie wówczas

$$dL = M \omega dt = M d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Łatwo się przekonać, że dL jest dodatnie, jeżeli wektory M i ω mają kierunki jednakowe; w razie przeciwnym dL jest ujemne.

Twierdzenie, zawarte we wzorze (2), można łatwo uogólnić. Dajmy na to, że punkt A obraca się około osi z , a siła P jest jakkolwiek skierowana w przestrzeni. Poprowadźmy przez A płaszczyznę \mathbf{A} , prostopadłą do z i przecinającą tę prostą w punkcie O , i rozłóżmy siłę P na składowe P_1 i P_2 , z których pierwsza leży w płaszczyźnie \mathbf{A} , a druga jest do niej prostopadła, albo równoległa do osi z . Praca elementarna siły P_2 jest zerem, gdyż siła ta działa prostopadle do szybkości, a zatem praca siły P jest równa pracy składowej P_1 czyli równa $M d\varphi$, gdzie M oznacza moment siły P_1 względem O , albo moment siły P względem osi z .

Tak więc *w ruchu obrotowym praca elementarna siły jest równa iloczynowi z momentu tej siły względem osi obrotu przez kąt elementarny.*

Rozważymy teraz inny ważny przypadek szczególny. Niech

będą dwa punkty masy, zajmujące w danej chwili położenia A_1 i A_2 , i przypuścmy, że wywierają one na siebie nawzajem siły. Według trzeciego prawa Newtona siły te są równe i odwrotne; oznaczmy każdą z nich przez P , i będziemy je uważali za dodatnie, jeżeli są skierowane na zewnątrz odcinka A_1A_2 , w razie przeciwnym za ujemne. Chodzi o wyznaczenie sumy prac elementarnych takich dwóch sił.

Obierzmy prostokątny układ współrzędnych i oznaczmy współrzędne punktów A_1, A_2 odpowiednio przez $(x_1y_1z_1), (x_2y_2z_2)$, a kąty kierunkowe prostej A_2A_1 przez α, β, γ . Według (1) prace elementarne obydwóch sił będą

$$P \cos \alpha dx_1 + P \cos \beta dy_1 + P \cos \gamma dz_1$$

$$\text{ i } -P \cos \alpha dx_2 - P \cos \beta dy_2 - P \cos \gamma dz_2,$$

a ich suma

$$dL = P[(dx_1 - dx_2) \cos \alpha + (dy_1 - dy_2) \cos \beta + (dz_1 - dz_2) \cos \gamma].$$

Wyrażenie, zawarte w nawiasie, przekształcimy w sposób następujący. Oznaczmy przez r odległość A_2A_1 . W takim razie

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = r^2;$$

a ponieważ $x_1 - x_2 = r \cos \alpha$ i t. d., przeto

$$(dx_1 - dx_2) \cos \alpha + (dy_1 - dy_2) \cos \beta + (dz_1 - dz_2) \cos \gamma = dr.$$

Gdy wprowadzimy to do powyższego wzoru, to wypadnie

$$dL = Pdr. \quad (3)$$

Praca dL jest dodatnia, gdy obydwie czynniki P i dr mają znaki jednakowe, t. j. gdy np. siły P są odpychające, i odległość A_1A_2 wzrasta; w razie przeciwnym dL będzie ujemne. Jeżeli odległość punktów jest stała, to $dr=0$ i suma prac elementarnych obydwóch sił jest zerem.

Gdy np. punkty są połączone lekkim sznurem, którego naprężenie $=S$, a długość $=l$, to praca elementarna naprężenia $= -Sdl$. Jeżeli sznur jest nierozciągalny, to praca naprężenia jest równa zeru.

Wzór $dL = Pdr$ jest ważny i w tym razie, gdy jeden z punktów jest nieruchomy. Wówczas siłę P , działającą na drugi punkt, nazywamy *centralną*, a ten punkt nieruchomy, przez który wciąż przechodzi siła P , zowie się *środkiem siły centralnej*. Tak więc praca elementarna siły centralnej $= Pdr$.

84. Praca całkowita. Przypuśćmy, że punkt materialny wyszedł z położenia A i doszedł jakimkolwiek torem do położenia B , przyczem wciąż działała nań siła P . Podzielmy tor AB na nieskończenie małe elementy i wyznaczmy dla każdego z nich pracę elementarną, którą wykonała na nim siła P . Sumę tych prac elementarnych nazywamy pracą całkowitą, albo wprost pracą siły P na drodze AB .

Dajmy np. na to, że siła P jest stała co do wielkości i posiada wciąż kierunek szybkości. W takim razie $dL = Pds$ i $L = Ps$, gdzie s oznacza długość toru AB . Jeżeli $P = 1$ kg i $s = 1$ m, to praca jest równa jednemu kilogramometrowi. W fizyce jest w użyciu inna jednostka *erga*.

Przypuśćmy, że ciężki punkt materialny, wążący Q , przeszedł z położenia A_1 do położenia A_2 ; pragniemy wyznaczyć pracę siły ciężenia. Obierzmy w taki sposób układ współrzędnych, aby oś z była skierowana pionowo na dół, i oznaczmy w tym układzie współrzędne punktów A_1 i A_2 przez $(x_1 y_1 z_1)$ i $(x_2 y_2 z_2)$. Pracę elementarną wyznaczmy przy pomocy wzoru (1) w paragrafie poprzedzającym. Oczywiście $P_x = P_y = 0$, $P_z = Q$, zatem

$$dL = Qdz,$$

$$\text{ i } \quad L = Q \int_{z_1}^{z_2} dz = Q(z_2 - z_1);$$

$z_2 - z_1$ jest różnicą poziomów położzeń A_1 i A_2 . Widzimy, że praca L zależy jedynie od tej różnicy poziomów, lecz jest niezależna od drogi, którą punkt materialny przeszedł z jednego położenia do drugiego.

Wyznaczymy jeszcze pracę całkowitą siły centralnej P w przypadku, gdy ta jest funkcją odległości r punktu materialnego od środka O , gdy np. $P = f(r)$. Dajmy na to, że punkt materialny przeszedł z położenia A_1 do A_2 i oznaczmy promienie OA_1 i OA_2 odpowiednio przez r_1 i r_2 .

Praca elementarna $dL = Pdr$, jak wiemy z paragrafu poprzedzającego, czyli

$$dL = f(r) dr,$$

a zatem praca całkowita

$$L = \int_{r_1}^{r_2} f(r) dr.$$

Oczywiście L zależy tu znowu tylko od r_1 i r_2 , czyli od skrajnych położań punktu materialnego, lecz jest niezależne od drogi, którą punkt ten przeszedł od jednego z nich do drugiego.

Przypuśćmy dla przykładu, że punkt O przyciąga punkt materialny z siłą odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości. W takim razie $P = -\frac{\kappa}{r^2}$, gdzie κ oznacza współczynnik proporcjonalności, i

$$L = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{\kappa dr}{r^2} = \kappa \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

W technice obok pracy ważną rolę odgrywa pojęcie *sprawności* siły. Sprawność jest to skalar, równy $\frac{dL}{dt}$. Jeżeli sprawność jest stała, to wynosi ona $\frac{L}{t}$, gdzie L jest pracą, wykonaną w czasie t . Jednostką sprawności jest kilogramometr na sekundę, częściej jednak są w użyciu inne jednostki, a zwłaszcza koń parowy lub mechaniczny (75 kilogramometrów na sekundę) i kilowat.

Ponieważ praca jest równa iloczynowi z siły przez drogę, przeto wymiar pracy $= MLT^{-2}$. $L = ML^2T^{-2}$. Wymiar sprawności $= ML^2T^{-3}$; $T = ML^2T^{-3}$.

Prz. 1. Wyznaczyć pracę, którą wykonała ziemską siła ciężenia podczas spadania meteorytu, który na powierzchni ziemi waży 1 kg. (Należy uważać, że ciała są przyciągane do środka ziemi z siłami odwrotnie proporcjonalnymi do kwadratu odległości, i że meteoryt doszedł do ziemi z odległości nieskończenie wielkiej). Odp. 6370000 kilogramometrów.

Prz. 2. Punkt materialny musi pozostawać na łańcuchowej o parametrze a i jest przyciągany do kierownicy z siłą prostopadłą do tej prostej i proporcjonalną do odległości (współcz. prop. $= k$). Wyznaczyć pracę, którą wykona ta siła, gdy punkt materialny dojdzie z położenia P do wierzchołka A , jeżeli łuk $PA = s$. Odp. $\frac{\kappa s^2}{2}$.

Prz. 3. Wyznaczyć pracę, wykonaną w ciągu roku przez siłę, z którą słońce przyciąga ziemię.

Prz. 4. Sznur sprężysty, którego współczynnik sprężystości $= E$, posiada w stanie nierozciągniętym długość l . Wyznaczyć pracę, potrzebną do wydłużenia tego sznura o a . Odp. $\frac{Ea^2}{2l}$.

Prz. 5. Część łańcucha, wążącego Q i l długiego, leży na stole, a część o długości a zwisa. Jaką pracę wykona siła ciężenia, gdy łańcuch całkowicie zsunie się ze stołu. Odp. $\frac{Q(l^2 - a^2)}{2l}$.

Prz. 6. Punkt materyalny jest przyczepiony do końca sznura, zarzuconego na gładką tarczę kołową, położoną w płaszczyźnie pionowej. W początku punkt znajdował się na końcu średnicy poziomej, a następnie został wciągnięty do szczytu tarczy ze stałym przyspieszeniem (stycznym) g . Wyznaczyć stosunek pracy, wykonanej na pierwszej połowie drogi, do pracy, wykonanej na drugiej. Odp. $\frac{\pi + 2\sqrt{2}}{\pi + 4 - 2\sqrt{2}}$.

Prz. 7. Po brzegu okrągłej tarczy, położonej w płaszczyźnie pionowej, wciągnięto punkt materyalny z końca średnicy poziomej do szczytu z przyspieszeniem stycznym $\frac{g}{\pi}$; współczynnik tarcia $=f$. Wyznaczyć stosunek wykonanej pracy do pracy, którą należałoby wykonać, aby ten sam punkt podnieść wprost na taką samą wysokość. Odp. $\frac{6 + f(4 - \pi)}{4}$.

Prz. 8. Bardzo ostry stożek, posiadający wierzchołek w środku kuli ziemskiej, a podstawę na powierzchni, jest wypełniony ciałem jednorodnym. Dowieść, że do wyciągnięcia zawartości stożka na powierzchnię potrzebna byłaby praca, która by wystarczyła do podniesienia tej samej zawartości z powierzchni na wysokość równą piątej części promienia ziemskiego, gdyby nad powierzchnią siła ciężenia się nie zmieniała. Zob. par. 72, prz. 18.

Należy naprzód wyznaczyć pracę, potrzebną do wyciągnięcia jednego elementu stożka.

Prz. 9. Cząsteczki, składające obecnie kulę jednorodną o masie M i promieniu a , były niegdyś rozproszone w przestrzeni w nieskończenie wielkich odległościach jedna od drugiej i zbiegły się dzięki przyciąganiu wzajemnemu, podlegającemu prawu Newtona (współczynnik proporc. $= 1$). Jaką pracę wykonały przytem siły przyciągania? Odp. $\frac{3M^2}{5a}$.

Kula tworzy się stopniowo. Po pewnym czasie już część cząsteczek utworzyła kulę o promieniu r i masie $M_r = \frac{4\pi r^3 \mu}{3}$, gdy reszta pozostaje jeszcze w odległości nieskończenie wielkiej. Następnie przybywa nowa cząsteczka m , która rozkłada się na kuli w postaci warstwy sferycznej o grubości dr , a zatem $m = 4\pi r^2 dr \cdot \mu$. Siła przyciągania wykonała przytem pracę $\frac{M_r m}{r}$. Sumując, otrzymamy żadaną pracę.

Prz. 10. Powłoka w postaci kuli o promieniu a zawiera gaz o ciśnieniu p (siła na jednostkę powierzchni $= p$). Jaką pracę potrzeba

wykonać, aby zapomocą ciśnienia, wywieranego na powłokę, doprowadzić kulę do promienia b . Przyjmujemy przytem, że ciśnienie gazu jest odwrotnie proporcjonalne do objętości. Odp. $4\pi a^2 p \lg \frac{a}{b}$.

Prz. 11. Do polerowania podłogi służy kamień, ważący 40 kg; jego współczynnik tarcia o podłogę = 0,3. Robotnik przesuwa kamień 10 razy na minęte o 1,2 m w jedną i drugą stronę. Wyznaczyć sprawność robotnika. Odp. 4,8 kilogramometrów na sek.

Prz. 12. Staw o pojemności 5000 m³ ma być opróżniony zapomocą pompy, której współczynnik użytecznego skutku (stosunek pracy użytecznej do pracy, zużytej do poruszania pompy) = 0,8. Motor rozwija 2 konie parowe, a wodę trzeba odprowadzać na wysokość 3 m. Ile czasu zajmie opróżnianie stawu? Odp. 34 godz. 43 min.

Prz. 13. Koło wodne daje 10 koni par. Jego współczynnik użytecznego skutku = 0,5, a spadek wody wynosi 4 m. Ile metrów sześciennych wody spada na sek. na koło? Odp. 0,375.

Prz. 14. Okręt płynie z szybkością 12½ węzła (to znaczy z szybkością 12½ mili morskiej na godzinę, a mila morska = 1850 m), przy czem maszyna jego daje 6000 koni par. Wyznaczyć opór wody. Odp. 70,05 tonn.

85. Pole sił. Wyobraźmy sobie część przestrzeni, która posiada właściwość następującą: gdziekolwiek umieścimy w niej punkt materyalny, to zawsze na ten punkt działa siła. Taka część przestrzeni nazywa się *polem sił*. Tak np. okolice kuli ziemskiej są polem sił, gdyż tu na każde ciało działa siła ciężenia; nazywamy je *grawitacyjnem polem ziemskim*. Nasz system planetarny jest pogrążony w grawitacyjnem polu słonecznem, i każde ciało wytwarza naokoło siebie grawitacyjne pole sił, gdyż każde ciało przyciąga okoliczne punkty materyalne.

Są pola sił, w których siły działają tylko na niektóre ciała. Tak np. okolice magnesu są polem sił, ale tylko dla żelaza i niewielu ciał innych. Również tak zw. pole elektrostatyczne, istniejące w okolicach ciała naelektryzowanego, oddziałuje nie na wszystkie ciała. W dalszym ciągu będzie mowa głównie o takich polach, w których siły działają na wszystkie ciała, a więc o polach grawitacyjnych.

Umieścimy w punkcie A takiego pola punkt materyalny o masie m . Na punkt ten zacznie działać siła P ; założymy zgodnie z doświadczeniem, że ta siła jest proporcjonalna do masy, a zatem

$$P = Hm,$$

gdzie H oznacza współczynnik proporcjonalności. Wielkość ta charakteryzuje pod pewnymi względami punkt A i nazywa się natężeniem pola w punkcie A . Jeżeli $m=1$, to $P=H$, a więc natężenie pola w punkcie A jest to wektor, zgodny co do kierunku i wielkości (liczbowo) z siłą, która działałaby na punkt materialny o masie jednostkowej, gdyby go umieścić w A .

Ponieważ $H = \frac{P}{m}$, przeto wymiar natężenia $= MLT^{-2} \cdot M = LT^{-2}$. Jest to wymiar przyspieszenia. W polu ziemskim, w pobliżu powierzchni ziemi, natężenie jest wszędzie równe g i posiada kierunek pionowy na dół.

Wyjdźmy z punktu A i wędrujemy w kierunku natężenia H aż do nieskończonego blizkiego punktu A_1 . Znajdziemy tam natężenie H_1 , które wogóle różni się nieskończenie mało od H pod względem wielkości i kierunku. Wędrujemy dalej w kierunku tego nowego natężenia H_1 aż do następnego nieskończonego blizkiego punktu A_2 , w którym panuje natężenie H_2 . Pójdziemy następnie w kierunku H_2 i t. d. Tym sposobem zakreślimy w polu sił pewną linię; linia taka nazywa się linią sił.

Przez każdy punkt pola przechodzi linia sił; natężenie jest wszędiestyczne do tej linii, gdyż posiada z nią dwa nieskończenie blizkie punkty wspólne.

W polu ziemskim linie sił są liniami prostymi; można uważać, że wychodzą one ze środka kuli ziemskiej i rozchodzą się na kształt promieni. Jeżeli chodzi tylko o niewielką część pola ziemskiego, np. o pole, zawarte w granicach jednej sali, to możemy uważać, że linie sił są równoległe, a więc natężenie jest tu stałe co do wielkości i kierunku. Pole takie nazywamy jednorodnem.

Pole sił jest szczególnym przypadkiem pojęcia ogólniejszego, a mianowicie pola wektorowego. Nazywamy tak przestrzeń, w której każdemu punktowi odpowiada pewien wektor. Już poprzednio (par. 22) mówiliśmy np. o polu szybkości układu sztywnego. Tam w danej chwili punktowi A pola odpowiada szybkość tego punktu układu, który właśnie przez A przebiega.

W polu szybkości zamiast linii sił mamy linie szybkości. Linia szybkości przechodzi przez każdy punkt pola i jest styczna do jego szybkości. Ruch układu sztywnego jest wogóle śrubowy; określają go dwa wektory, a mianowicie szybkość

postępowa i szybkość kątowna. Gdyby te wektory od tej chwili zachowały obecną wielkość i kierunek, to oczywiście linie szybkości stałyby się torami punktów; z tego wynika, że linie te są śrubowemi, posiadającemi wspólną oś i jednakowe kroki.

Jeżeli owe dwa wektory nie są stałe, to i całe pole szybkości zmienia się z biegiem czasu. Przez dany punkt przestrzeni przebiegają punkty układu z coraz innemi szybkościami, i linie szybkości mają coraz inny przebieg. Pole takie nazywamy zmiennem.

Można łatwo wyobrazić sobie również zmienne pole sił, w którym natężenia zmieniają się co do wielkości i kierunku, a linie sił przybierają coraz inną postać. Takie zmienne pola odgrywają ważną rolę w elektrotechnice. Maszyna elektrodynamiczna w najprostszej postaci składa się z masy magnetycznej, która porusza się w zmiennem polu magnetycznem, wytwarzanem przez prąd elektryczny. Siła pola, działająca na masę, wykonywa podczas tego ruchu pracę. Jeżeli ta praca jest dodatnia, to można ją przy pomocy znanych urządzeń mechanicznych przenieść na inne maszyny. Maszynę elektrodynamiczną nazywamy w tym razie *motorem*. Prąd do wytwarzania pola w motorze musi być dostarczany z zewnątrz.

Jeżeli praca siły pola jest ujemna, to maszynę nazywamy *generatorem*. Do poruszania masy magnetycznej trzeba tu doprowadzać pracę z zewnątrz, natomiast w generatorze powstaje prąd, który można zużytkować w stosownych urządzeniach *).

Niżej podane przykłady mają ilustrować takie urządzenia, należy jednak uważać, że mamy tam do czynienia z polami grawitacyjnymi i masami zwykłemi.

Prz. 1. Jednorodne pole sił o stałym natężeniu H wiruje ze stałą szybkością kątowną ω około osi prostopadłej do linii sił. Wyznaczyć pracę, której podczas n obrotów dostarczy motor, złożony z punktu materalnego m , osadzonego zapomocą ramienia a na osi równoległej do osi obrotu pola, i posiadający stałą szybkość kątowną ω_1 .

*) Istnieją motory i generatory oparte na innej zasadzie. Pole ich jest stałe, ale posiada zamknięte linie sił. Pole tego rodzaju zowie się wielowartościowem, a owe motory i generatory unipolarnymi lub jednobiegunowymi.

Przyjmijmy, że ω i ω_1 są skierowane jednakowo. Możemy uważać, że masa m wiruje około osi lub około punktu O pod działaniem siły Hm , która znowu obraca się około m . Dajmy na to, że w początku rachuby czasu siła tworzyła z ramieniem mO kąt α , i że jej moment względem O miał kierunek szybkości ω_1 . W takim razie praca, wykonana w okresie od t do $t+dt$, będzie

$$dL = Hma\omega_1 \sin [\alpha + (\omega_1 - \omega)t] dt \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Całkując w granicach od 0 do $\frac{2\pi n}{\omega_1}$, znajdziemy, że praca szukana

$$L = \frac{Hma\omega_1}{\omega_1 - \omega} \left[\cos \alpha - \cos \left(\alpha + 2\pi n \frac{\omega_1 - \omega}{\omega_1} \right) \right] \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Jeżeli ω_1 różni się od ω , to ze wzrostem n L oscyluje pomiędzy pewną wartością dodatnią i ujemną, a więc motor nie może dostarczać nieograniczonych ilości pracy. Możliwe to jest tylko w takim razie, gdy

$\omega_1 = \omega$. Wówczas z (2) wypadnie $L = \frac{0}{0}$; stosując znaną metodę wyznaczenia

takich wartości lub wprost z (1), otrzymamy $L = 2Hma\pi n \sin \alpha$. Taki motor zowie się *synchronicznym*. Jeżeli $\alpha < 0$, to L jest ujemne, i mamy generator synchroniczny.

Prz. 2. Pole grawitacyjne pulsuje według prawa $H = H_0 \sin \omega t$. Wyznaczyć pracę, której podczas n obrotów dostarczy motor, złożony z masy jednostkowej, osadzonej na osi poziomej zapomocą ramienia a , i wirujący ze stałą szybkością kątową ω_1 . Odp. $L = \frac{H_0 a \omega_1}{\omega^2 - \omega_1^2} \left(\omega_1 \cos \alpha \sin 2\pi n \frac{\omega}{\omega_1} - \omega \sin \alpha \cos 2\pi n \frac{\omega}{\omega_1} + \omega \sin \alpha \right)$, gdzie α oznacza kąt, który w początku rachuby czasu ramię tworzyło z pionem. Motor jest synchroniczny podobnie, jak poprzedni. Pracuje on tylko w takim razie, gdy $\omega_1 = \omega$, i wówczas $L = H_0 a \pi n \cos \alpha$.

§ 86. **Potencjał.** Przenieśmy w polu sił punkt materalny o masie m z położenia A_1 do położenia A_2 . Podczas ruchu na punkt ten będzie wciąż działała siła pola, a zatem siła ta wykona pewną pracę. Istnieją pola, w których praca ta jest niezależna od tego, jaką drogą punkt m dostał się z A_1 do A_2 . Otrzymujemy zawsze jedną i tę samą pracę, jakakolwiek będzie ta droga. Pole, posiadające taką właściwość, nazywa się *jednowartościowym* *).

*) Nazwa pochodzi stąd, że w polu takim potencjał jest jednowartościową funkcją współrzędnych punktu. Nie wszystkie pola sił są jednowartościowe. W polu magnetycznym prądu elektrycznego potencjał jest wielowartościową funkcją współrzędnych, a zatem pole takie jest wielowartościowe. (Ob. przypisek w par. poprzedzającym).

W grawitacyjnym polu ziemskim punkty materialne są przyciągane do środka ziemi, a siły są funkcjami odległości od środka. Widzieliśmy w par. 84, że właśnie w tym razie praca zależy jedynie od położenia pierwotnego i końcowego, a jest niezależna od drogi. Z tego wynika, że pole ziemskie, i wogóle wszystkie pola grawitacyjne, są jednowartościowe.

Obierzmy w polu jednowartościowym punkt O , który nazwiemy początkiem pola. Przenieśmy następnie punkt materialny m z O do jakiegoś innego punktu A . Siła pola wykona przytem pracę L . Ponieważ siła jest w każdym położeniu proporcjonalna do masy, przeto i praca L będzie proporcjonalna do m . Będzie więc

$$L = Vm,$$

gdzie V oznacza współczynnik proporcjonalności. Wielkość ta jest także charakterystyczną dla punktu A i nazywa się potencjałem tego punktu.

Jeżeli $m=1$, to $L=V$, a zatem potencjał punktu A jest to skalar, liczbowo równy pracy, którą wykona siła pola, gdy masa jednostkowa przejdzie z początku pola do punktu A .

Potencjał $= \frac{L}{m}$, a więc wymiar jego będzie $ML^2T^{-2}:M=L^2T^{-2}$.

Oczywiście potencjał początku pola jest zerem, a potencjały wszystkich punktów zależą od położenia początku. Gdy obierzemy początek inaczej, to wogóle potencjały wszystkich punktów pola się zmienią.

Dajmy na to, że punkt materialny o masie m przeszedł z położenia A_1 do położenia A_2 , i że potencjały tych punktów są odpowiednio równe V_1 i V_2 . Mamy wyznaczyć pracę, którą wykonała przytem siła pola.

Ponieważ droga, którą dążył punkt m od A_1 do A_2 , nie wywiera wpływu na pracę, możemy przeto uważać, że droga ta przechodzi przez początek O , i składa się z dwóch części A_1O i OA_2 . Na pierwszej części siła pola wykonała oczywiście pracę $-V_1m$, na drugiej V_2m , a zatem praca całkowita

$$L = (V_2 - V_1)m.$$

Jeżeli $m=1$, to praca L jest liczbowo równa różnicy potencjałów. Jeżeli potencjały punktów A_1 i A_2 są równe, to praca siły pola jest zerem.

Weźmy dla przykładu małą część pola ziemskiego w pobliżu powierzchni ziemi, np. część, zawartą w granicach jednej sali. Początek pola O obierzmy w jednym z punktów sufitu. Gdy punkt materalny o masie jednostkowej przejdzie z O do jakiegoś punktu A , położonego o z niżej, to siła ciężenia wykona pracę gz , a więc potencjał punktu $A = gz$. Oczywiście potencjały punktów, położonych na jednym poziomie, są równe.

Poprowadźmy w polu sił powierzchnię, która w każdym ze swych punktów jest normalna do linii sił, przechodzącej przez ten punkt. Gdy będziemy po takiej powierzchni przesuwali punkt materalny, to siła pola wciąż pozostanie normalną do toru, a zatem praca jej będzie zerem. Z tego wynika, że potencjały wszystkich punktów takiej powierzchni są równe, czyli że jest to miejsce geometryczne punktów jednakowego potencjału. Powierzchnie takie zowią się ekwipotencjalnemi.

W grawitacyjnem polu ziemskiem powierzchnie ekwipotencjalne są w przybliżeniu powierzchniami kulistemi, współśrodkowemi z powierzchnią ziemi, gdy zaś chodzi o małą część tego pola, to możemy uważać, że powierzchnie ekwipotencjalne są płaszczyznami poziomemi.

W dalszym ciągu będzie nieraz mowa o *energii potencjalnej* punktu materalnego. Nazwa ta ma znaczenie następujące. Przypuśćmy, że punkt materalny m zajmuje w polu położenie A , gdzie panuje potencjał V ; mówimy w takim razie, że punkt m posiada energię potencjalną Vm . Gdybyśmy ten punkt przenieśli do początku pola, to właśnie taką pracę wykonałaby siła pola. Wymiar energii potencjalnej jest oczywiście równy wymiarowi pracy. Energia potencjalna punktu materalnego, który zajmuje w polu pewne określone położenie, jest zależna od obioru początku pola. Gdy zmienimy początek, to zmieni się i energia.

W małej części pola ziemskiego energia potencjalna punktu m , położonego o z niżej od początku, wynosi $-mgz$.

Prz. Wyznaczyć potencjał punktu, położonego na wysokości h nad powierzchnią ziemi, jeżeli początek pola obrano na powierzchni ziemi. Odp. $-\frac{gh}{1+\frac{h}{a}}$, gdzie a oznacza promień kuli ziemskiej.

87. **Siła żywa.** Dajmy na to, że punkt materialny o masie m posiada szybkość v . Iloczyn $\frac{mv^2}{2}$ nazywamy *siłą żywą*, albo *energją cynetyczną* punktu *). Siła żywa jest skalarem, gdyż nie przypisujemy jej kierunku, i posiada ten sam wymiar, co i praca.

Przypuśćmy, że na punkt m działa siła P , tworząca z szybkością v kąt ϑ . Składowa styczna jest równa $P \cos \vartheta$, a zatem

$$m \frac{dv}{dt} = P \cos \vartheta.$$

Pomnóżmy obydwie strony przez element toru ds . Skutkiem tego lewa strona przekształci się tak: $m \frac{ds}{dt} dv = m v dv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$, a zatem będzie

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = P \cos \vartheta ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

czyli *elementarny przyrost siły żywej punktu materialnego jest równy pracy elementarnej siły, działającej na ten punkt.*

Twierdzenie to wyraża tak zw. *zasadę siły żywej* w postaci różniczkowej.

Jeżeli siła P jest wypadkową pewnej liczby składowych, to możemy powiedzieć, że przyrost elementarny siły żywej jest równy sumie prac elementarnych tych składowych.

Zasada siły żywej wynika również bezpośrednio z równań ruchu, przytoczonych w par. 73. Równania te można napisać w postaci

*) Nazwę *siła żywa* (*vis viva*) wprowadził Leibniz w wieku siedemnastym. Wówczas znaczenie wyrazu *siła* było rozleglejsze, niż dzisiaj. Jeszcze niezbyt dawno nazywano siłami różne rodzaje energii, a i obecnie mówi się nieraz o „siłach natury“, „siłach społecznych“ i t. d. W nauce jednak, a przynajmniej w naukach ścisłych, znaczenie tego wyrazu doznało z biegiem czasu dużych ograniczeń, i dziś nazywa się tak tylko wektor, stanowiący podstawowe pojęcie mechaniki. Siła żywa nie jest siłą w tem znaczeniu, i z tego względu wielu uważa tę nazwę za nielogiczną. Pomimo to utrzymała się ona we wszystkich językach europejskich dzięki parowiekowej tradycji i, jak wykazuje doświadczenie, nie wywołuje żadnych nieporozumień. Niektórzy autorowie, zwłaszcza angielscy, nazywają mv^2 siłą żywą, a $\frac{mv^2}{2}$ energją cynetyczną.

$$m \frac{dv_x}{dt} = P_x, \quad m \frac{dv_y}{dt} = P_y, \quad m \frac{dv_z}{dt} = P_z.$$

Pomnóżmy je odpowiednio przez dx , dy , dz i dodajmy stronami. Wypadnie

$$m(v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z) = P_x dx + P_y dy + P_z dz.$$

Lewa strona = $d\left[\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2}\right] = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$, a prawa jest znaniem wyrażeniem pracy elementarnej.

Przypuśćmy, że punkt materialny przeszedł na swym torze z położenia A_1 do położenia A_2 , i że działała nań siła P . Podzielmy tor $A_1 A_2$ na nieskończenie małe elementy. Na każdym z nich siła żywa otrzymała pewien przyrost, i siła P wykonała pewną pracę, i ten przyrost siły żywej jest równy tej pracy. Można powiedzieć, że siła P na każdym elemencie toru wytwarza pewną ilość siły żywej, i ta dołącza się algebraicznie do dotychczasowej siły żywej punktu materialnego. Oczywiście całkowity przyrost siły żywej na drodze $A_1 A_2$ jest równy całkowitej pracy siły P na tej drodze. W twierdzeniu tem mamy zasadę siły żywej w postaci całkowitej.

Dajmy na to, że punkt materialny m porusza się w polu sił i w pewnej chwili przebiegał przez punkt A z szybkością v . Potencjał punktu A niech będzie V . W położeniu A punkt m posiadał siłę żywą, czyli energię cynetyczną $\frac{mv^2}{2}$ i energię potencjalną $-Vm$. Suma tych energii, czyli $\frac{mv^2}{2} - Vm$ nazywa się energią całkowitą punktu materialnego.

Przypuśćmy, że punkt materialny m przebiegał z kolei z szybkościami v_0 i v położenia A_0 i A , w których panują potencjały V_0 i V . Całkowity przyrost siły żywej na tej drodze wynosi $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$, a całkowita praca siły pola $mV - mV_0$. W myśl zasady sił żywych

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mV - mV_0,$$

czyli
$$\frac{mv^2}{2} - mV = \frac{mv_0^2}{2} - mV_0.$$

Widzimy, że energia całkowita nie uległa zmianie. Tak więc, gdy punkt materialny porusza się w polu jednoznacznym, to jego energia całkowita jest wielkością stałą.

Dajmy na to, że zjawisko odbywa się w niewielkiej części pola ziemskiego, i że punkty A_0, A leżą odpowiednio o z_0, z niżej od początku. W takim razie

$$\frac{mv^2}{2} - mgz = \frac{mv_0^2}{2} - mgz_0,$$

z czego wynika, że

$$v^2 = v_0^2 + 2g(z - z_0);$$

jest to równanie, które otrzymaliśmy bezpośrednio w par. 75.

Prz. 1. Sprawność lokomotywy pociągu o masie M jest stała i równa H ; również całkowity opór F , który pociąg spotyka na drodze, jest stały. W jakim czasie od wyruszenia ze stacji pociąg osiągnie szybkość v . Odp. $\frac{M}{F} \left[\frac{H}{H-Fv} - v \right]$.

Prz. 2. Robotnik wyciągnął przy pomocy linki i bloka nieruchomego wiadro o masie m ze studni o głębokości h . Cała czynność trwała t sek.; z początku robotnik wywierał siłę stałą, następnie wypuścił linkę, i wiadro po pewnym czasie zatrzymało się dokładnie u wylotu studni. Wyznaczyć największą sprawność, z jaką pracował robotnik. Odp. $\frac{2mg^2ht}{gt^2 - 2h}$.

Prz. 3. Paciórka o masie m , nawleczona na gładki krzywy drut, otrzymała początkową szybkość v_0 i podlegała dalej działaniu siły P . Gdyby taka sama paciórka swobodna otrzymała początkową szybkość u_0 i podlegała działaniu takiej samej siły P , to tor jej nie różniłby się od linii drutu. Wyznaczyć reakcję drutu na paciorkę w funkcji promienia krzywizny. Odp. $\frac{m(v_0^2 - u_0^2)}{\rho}$.

Prz. 4. Punkt materialny leży na gładkiej płaszczyźnie poziomej w odległości l od punktu O i jest z nim połączony sprężystą nicią, której naturalna długość $= l$. Wyznaczyć największą odległość, o którą punkt materialny odsunie się od O , otrzymawszy uderzenie, skierowane pod kątem α do przedłużenia nici. Gdyby takie same uderzenie zostało wymierzone w kierunku przedłużenia nici, to największa odległość wyniosłaby $2l$.

Wyznaczamy napróżd szybkość v_0 , którą dane uderzenie udzieliło punktowi. Gdyby było ono skierowane wzdłuż nici, to w położeniu skrajnem szybkość byłaby równa zero, a przyrost siły żywej $-\frac{mv_0^2}{2}$.

Przyrost ten musi być równy pracy naprężenia nici czyli $-\frac{El}{2}$ (par. 84,

prz. 4). Stąd wynika, że $v_0 = kl$, gdzie $k^2 = \frac{E}{ml}$. W przypadku danym, gdy uderzenie wymierzono ukośnie, w położeniu skrajnem $v_r = 0$ i $v = v_\varphi$. Aby wyznaczyć v_φ w funkcji promienia wodzącego, należy wziąć pod uwagę, że $p_\varphi = 0$. Ostatecznie znajdziemy, że szukana odległość jest największym pierwiastkiem równania $r^4 - 2lr^2 + l^4 \sin^2 \alpha = 0$.

24/3 **88. Zasada ilości ruchu.** Niech będzie punkt materialny o masie m , posiadający w danej chwili szybkość v . Nazywamy ilością ruchu wektor, zgodny co do kierunku z szybkością v , a co do wielkości równy mv . Wektor ten, tak samo jak szybkość v , jest związany z punktem m i posiada wymiar MLT^{-1} .

Jeżeli rzut szybkości v na jakąś prostą x jest równy v_x , to oczywiście rzut ilości ruchu na tę prostą jest równy mv_x . Mówimy, że punkt m posiada w kierunku prostej x ilość ruchu mv_x .

Dajmy na to, że szybkość przybrała elementarny przyrost geometryczny δv . Oczywiście ilość ruchu przybierze w takim razie przyrost, zgodny co do kierunku z δv , a co do wielkości równy $m\delta v$. Napiszemy, że

$$\delta(mv) = m\delta v.$$

Znak $=$ ma oznaczać zgodność nie tylko co do wielkości, lecz i co do kierunku.

W tym samym czasie rzut szybkości na oś x przybiera przyrost δv_x , równy rzutowi δv , a rzut ilości ruchu przybiera przyrost $\delta(mv_x)$, równy rzutowi $\delta(mv)$.

Przypuśćmy, że w danej chwili na punkt m działa siła P . Możemy uważać, że w ciągu następnego okresu dt siła ta ani pod względem kierunku ani wielkości nie ulegnie zmianie. Wprowadzimy nowy wektor, a mianowicie popęd albo impuls elementarny siły P . Nazywamy tak wektor, zgodny co do kierunku z siłą P , a co do wielkości równy Pdt . Popęd posiada ten sam wymiar, co ilość ruchu, a mianowicie MLT^{-1} .

Jeżeli rzut siły P na prostą x jest równy P_x , to oczywiście rzut popędu elementarnego na tę prostą jest równy $P_x dt$. Mówimy, że popęd siły P w kierunku prostej x jest równy $P_x dt$.

Siła P nadaje punktowi m przyspieszenie $\frac{P}{m}$, posiadające zgodny z nią kierunek, i

$$\delta v = \frac{P}{m} dt;$$

znak = wyraża tu znowu zgodność co do wielkości i kierunku. Z równania tego wynika, że

$$\delta(mv) = P dt;$$

znaczy to, że *przyrost elementarny ilości ruchu jest zgodny co do wielkości i kierunku z popędem elementarnym siły*.

W twierdzeniu tem zawiera się tak zw. zasada ilości ruchu w postaci różniczkowej. Możemy uważać, że w ciągu każdego elementu czasu siła P wytwarza nową ilość ruchu, która dołącza się geometrycznie do dotychczasowej ilości ruchu punktu materalnego. Jeżeli na punkt materalny działa większa liczba sił, to każda z nich wytwarza w czasie dt przyrost ilości ruchu, równy jej popędowi, i wszystkie te przyrosty dodają się geometrycznie do poprzedniej ilości ruchu punktu.

Oczywiście

$$d(mv_x) = P_x dt,$$

t. j. *przyrost elementarny ilości ruchu w dowolnym kierunku jest równy popędowi elementarnemu siły w tymże kierunku*.

Można byłoby nadać zasadzie powyższej postać całkową, ale nie przyniosło by to wyraźnej korzyści.

89. Wektor G . Zasada ilości ruchu jest szczególnie użyteczna w tym razie, gdy mamy do czynienia nie z jednym, lecz z większą liczbą punktów materalnych.

Niech będą punkty materalne $m_1, m_2 \dots$ posiadające w danej chwili szybkości $v_1, v_2 \dots$. Mówimy, że punkty te tworzą układ punktów materalnych. Obrawszy dowolnie w przestrzeni punkt O (nazwiemy go *środkiem redukcji*), utwórzmy układ wektorów, posiadających początek w O i zgodnych z ilościami ruchu punktów $m_1, m_2 \dots$ zarówno pod względem wielkości, jak i kierunku.

Mamy teraz wektory $m_1 v_1, m_2 v_2 \dots$, posiadające wspólny początek, możemy przeto wyznaczyć ich wypadkową. Oznaczmy ją literą G i będziemy nazywali *ilością ruchu układu* $m_1, m_2 \dots$, lub krócej *wektorem G* . Oczywiście ani wielkość ani kierunek wektora G nie zależy od położenia środka redukcji.

Z biegiem czasu wektor G zmienia się co do wielkości i kierunku, i ze zmian tych można wyciągać pewne wnioski,