

DYNAMIKA.

V. PRAWA NEWTONA.

69. Punkt materalny. Mówiliśmy już w par. 13 o zadaniach dynamiki. Nauka ta bada, jak poruszają się ciała pod wpływem ciał innych, czyli pod działaniem sił. Siłę będziemy uważali tu za pojęcie znane ze statyki (par. 4).

Nasuwa się tu pytanie, czy każdą siłę wywiera jakieś ciało, czy zawsze, gdy na ciało A działa siła, to możemy wskazać jakieś ciało B , od którego ta siła pochodzi?

Byłoby może ryzykownem dawać na to pytanie odpowiedź kategorycznie twierdzącą, gdyż znane są zjawiska, w których zachodzi wątpliwość. Zjawiskiem takim jest np. ciśnienie promieni świetlnych. Gdy światło pada na ciało A , to na powierzchnię tego ciała działają pewne siły; fakt ten przewidziała teoria i stwierdziło doświadczenie. Nie mamy prawa uważać, że siły te wywiera ciało B , wysyłające promienie światła, bo fale świetlne, które w chwili obecnej dochodzą do A , zostały już dawno wysłane przez B , i może B już świecić przestało.

Zasadę, głoszącą, że każdą siłę wywiera jakieś ciało, można byłoby uratować, uważając środowisko, w którym rozchodzą się fale świetlne, czyli tak zw. eter świetlny, za ciało, nie różniące się pod względem zasadniczych właściwości mechanicznych od ciał innych. Kwestya ta jednak nie może być rozstrzygana na gruncie mechaniki.

Pomimo tych wątpliwości dobrze jest przyjąć, przynajmniej jako regułę praktyczną, że siłę wywiera zawsze jakieś ciało. Gdy więc myślimy o sile, to trzeba zaraz zdać sobie sprawę z tego, od jakiego ciała siła ta pochodzi. Reguła taka może uchronić od wielu błędów.

Dynamika, podobnie jak cynematyka, dzieli się na dwie

części: dynamikę punktu materialnego i dynamikę układu. Mówimy punktu materialnego, gdyż chodzi tu nie o ruch punktu geometrycznego, jak było w cynematyce.

Punktem materialnym nazywamy ciało, którego położenie w przestrzeni daje się określić z dokładnością wystarczającą w taki sam sposób, jak położenie punktu geometrycznego, np. zapomocą trzech współrzędnych Kartezjusza. A więc punktem materialnym jest przedewszystkiem ciało bardzo małych rozmiarów, albo drobna cząsteczka ciała większego. Nieraz jednak i ciało bardzo wielkie uważamy za punkt materialny, zwłaszcza, gdy wymiary jego są drobne w stosunku do wymiarów toru. Gdy np. badamy roczny ruch ziemi, to możemy ziemię uważać za punkt materialny.

Nazwę punkt materialny można określić i w inny sposób, ściślejszy i dający jednocześnie głębsze pojęcie o podziale dynamiki. Wiemy z cynematyki, że ruch ciała składa się z ruchu postępowego i ruchu obrotowego. Ciało nazywamy punktem materialnym, jeżeli, badając ruch jego, nie zwracamy uwagi na ruch obrotowy. Tym sposobem można powiedzieć, że pierwsza część dynamiki, dynamika punktu materialnego, dotyczy ruchu postępowego ciała, a część druga, dynamika układu, ruchu obrotowego, albo raczej ruchu kulistego.

70. Prawa Newtona. Cały gmach dynamiki jest oparty na pewnych twierdzeniach zasadniczych, tak zw. prawach, podobnie jak geometria opiera się na aksjomatach. Aksjomaty geometrii sformułował Euklides, i od tego czasu powtarzają się one prawie bez zmiany w ogromnej większości wykładów tej nauki, jakkolwiek według badań nowoczesnych nie wystarczają do czysto logicznej budowy. Wykładający wprowadza do geometrii najczęściej bezwiednie pewne elementy intuicyjne, nie zawierające się w aksjomatach.

Zasadnicze prawdy dynamiki sformułował Newton we wstępie do dzieła „*Philosophiae naturalis principia mathematica*“, wydanego w r. 1687. Te prawa Newtona stanowią zazwyczaj punkt wyjścia wykładów dynamiki, jakkolwiek zapewne możnaby i tu wykazać, że nie wystarczają one całkowicie na podwaliny tej nauki, i że zawiera ona jeszcze inne twierdzenia, wprowadzone ubocznie bez dowodów, i uważane za prawdy intuicyjne.

Podajemy tu prawa Newtona w wysłowieniu, przystosowanem do celów naszych.

Prawo pierwsze (prawo bezwładności). Punkt materyalny pozostaje w stanie spokoju lub ruchu prostoliniowego i jednostajnego, jeżeli nie działa nań żadna siła.

Prawo drugie. Siła, działająca na punkt materyalny, udziela mu przyspieszenia, które jest z nią zgodne co do kierunku i proporcjonalne do niej co do wielkości.

Prawo trzecie (prawo akcji i reakcji). Siły, które dwa punkty materyalne, lub dwa ciała, wywierają jedno na drugie, mają wspólną linię działania są równe i odwrotnie skierowane.

Pierwsze z tych praw jest oczywiście następstwem lub raczej szczególnym przypadkiem drugiego, bo jeżeli na punkt materyalny żadne siły nie działają, to w myśl drugiego prawa nie może on mieć przyspieszenia, a zatem ruch jego musi być prostoliniowy i jednostajny. Swoją drogą właśnie w tem pierwszym prawie najłatwiej dostrzedz pewne braki, czy niedomówienia, które dotyczą w równej mierze i drugiego.

Niedomówienia te dotyczą wyrazów *prostoliniowy* i *jednostajny*; bez dalszych wyjaśnień są to wyrazy o znaczeniu nieokreślonem.

Wyobraźmy sobie dwie stacye kolei żelaznej na równinie. Możemy twierdzić, że linia kolei pomiędzy nimi jest prosta, i twierdzenie takie będzie słuszne, o ile pominiemy pewne niezbędne niedokładności. Czy jednak jest prostoliniowym ruch pociągu pomiędzy temi stacyami? Tak jest niewątpliwie względem ziemi, ale względem innego układu, np. względem słońca, ruch pociągu nie będzie prostoliniowy, bo pociąg bierze udział w ruchu kuli ziemskiej.

Z tego widać, że pierwsze prawo jest niejasne, gdyż nie zawiera wskazówek, względem jakiego układu ruch punktu, nie podlegającego działaniu sił, jest prostoliniowy.

Przymiotnik *jednostajny* ma oznaczać, że punkt w równych, dowolnie krótkich, odstępach czasu przebiega równe drogi. Jest to także niejasne, dopóki nie umówiliśmy się, co mamy nazywać równymi odstępami czasu.

Człowiek posiada zdolność szeregowania wydarzeń w czasie. Jeżeli dostrzegliśmy trzy wydarzenia *A*, *B* i *C*, to odczu-

wamy bezpośrednio, że np. B nastąpiło po A , i C po B . Musimy uznać, że czas, który upłynął od A do C , jest dłuższy od czasu AB lub BC , ale żadna logika nie narzuca nam sądu, że np. czas AB był dłuższy od BC , dopóki nie zapadła umowa co do sposobu mierzenia czasu.

O długości odstępu czasu sądzimy według doniosłości zmian, które podczas tego odstępu zachodzą w otaczającym nas świecie i w naszym organizmie, możliwy więc jest tylko jeden sposób mierzenia czasu. Obieramy jakieś zjawisko, powtarzające się ustawicznie, i umawiamy się uważać za równe odstępy czasu pomiędzy pewnemi fazami jego. W wyborze takiego zjawiska—zegara mamy zupełną swobodę; kierujemy się tu pewnymi względami praktycznymi, lecz nie logiką, która nie stawia tu żadnych norm obowiązujących. Umówiono się uważać za równe dwa odstępy czasu, w których ziemia w ruchu obrotowym względem gwiazd stałych obraca się o jednakowe kąty, ale można by np. uznać za równe takie dwa odstępy, w których ziemia w swym ruchu postępowym w układzie słonecznym przebiega równe drogi. Ten drugi sposób byłby mniej dogodny od pierwszego, ale nie doprowadziłby do żadnych sprzeczności logicznych.

Wiadomo, że drogi, które ziemia przebiega w ruchu postępowym, nie są proporcjonalne do kątów, o które się jednocześnie obraca. Równym kątom odpowiadają wogóle nierówne drogi, a zatem dwa okresy czasu, równe przy jednej umowie, byłyby nierówne przy drugiej; ruch, który uważalibyśmy za jednostajny przy jednej, nie byłby jednostajny przy drugiej.

Z uwag tych wynika, że pierwsze prawo, albo raczej ogół tych praw, wymaga jeszcze drugiego uzupełnienia. Powinien być wskazany sposób mierzenia czasu.

Gdybyśmy uważali dynamikę za abstrakcję bez związku ze zjawiskami natury, to trudnościom tym możnaby zejść z drogi, uważając pierwsze prawo za połączone definicje ruchu prostoliniowego oraz równych odstępów czasu. Definicje te w postaci rozwiniętej byłyby takie: ruch punktu nazywamy prostoliniowym, jeżeli torem jego może być punkt materialny, na który żadne siły nie działają; nazywamy równymi takie odstępy czasu, w których punkt materialny, nie podlegający działaniu sił, przebiega równe drogi. Zdaje się jednak, że ogół ludzi,

mających do czynienia z mechaniką, nie przypisuje pierwszemu prawu takiego znaczenia.

Kierując się wskazówkami praktyki stosowania twierdzeń dynamicznych do poszczególnych zjawisk, dopełnimy w następujący sposób pierwsze prawo ruchu. Gdy chodzi o zjawiska ziemskie, to najczęściej rozumiemy ruch prostoliniowy, o którym mowa w pierwszym prawie, w odniesieniu do ziemi (por. par. 19). *) gdy chodzi o zjawiska astronomiczne, to rozumiemy ten ruch w odniesieniu do pewnego układu, związanego z naszym systemem planetarnym. W obydwóch przypadkach przyjmować należy sposób mierzenia czasu według ruchu obrotowego ziemi względem gwiazd stałych.

Dynamika jest nauką przyrodniczą. Zawiera ona teorię, czyli opis naukowy, pewnego rodzaju zjawisk natury, i opis ten powinien być możliwie wierny, możliwie blizki rzeczywistości. Z tego wynika konieczność sprawdzenia, czy prawa Newtona, stanowiące podwalinę całej budowy, są w zgodzie z istotnym przebiegiem zjawisk w przyrodzie. Sprawdzenie takie można skutecznie jedynie na drodze doświadczalnej, ale stosowne doświadczenia nie zostały dotychczas wykonane w sposób dostatecznie dokładny i przekonujący.

Nie mamy więc dowodów bezpośrednich słuszności praw Newtona, lecz natomiast istnieje olbrzymia liczba dowodów pośrednich. Dowodem takim jest w pierwszej linii zgodność różnych zjawisk astronomicznych z przepowiedniami astronomów, których rachunki są oparte na prawach dynamiki, w drugiej linii dobre funkcyonowanie maszyn, których konstruktorzy posługiwali się poprawnie twierdzeniami tej nauki. Można więc twierdzić, że prawa Newtona, przynajmniej w dziedzinie zjawisk, w której je dotychczas stosowano, z dostatecznym przybliżeniem oddają istotny przebieg zjawisk natury.

71. Masa. Według drugiego prawa przyspieszenie punktu materialnego jest wprost proporcjonalne do siły. Współczynnik proporcjonalności jest wielkością, charakteryzującą

*) Przy takim układzie odniesienia pierwsze prawo jest tylko w przybliżeniu słuszne. W większości zastosowań, zwłaszcza w technice, przybliżenie jest wystarczające, w pewnych jednak razach potrzeba wprowadzać poprawki, wynikające z ruchu obrotowego ziemi.

całkowicie punkt materialny pod względem dynamicznym; odwrotność jego nazywa się masą punktu.

Dajmy na to, że dla pewnego punktu współczynnik ten wynosi $\frac{1}{m}$, czyli że masa tego punktu jest równa m . Działająca

nań siła P nada mu takie przyspieszenie p , że $p = \frac{1}{m} P$, albo

$$P = mp.$$

Weźmy ciało, ważące Q kilogramów. Gdy pozwolimy temu ciału spadać swobodnie w próżni, to ta siła Q udzieli mu przyspieszenie ziemskie g , czyli w naszych szerokościach 9,81 w metrach i sekundach, a zatem $Q = mg$. Jeżeli $Q = g$ klg, to $m = 1$, a zatem masę jednostkową w naszych szerokościach posiada ciało, ważące 9,81 klg. Taka też jednostka masy jest ogólnie używana w technice w krajach, które przyjęły system metryczny. W fizyce wprowadzono jednostkę gram, należącą do systemu CGS, o którym można znaleźć wyczerpujące wiadomości w podręcznikach fizyki.

Niech będą dwa punkty materialne o masach m_1, m_2 , i przypuścmy, że drugi wywiera na pierwszy pewną siłę, a mianowicie nada mu przyspieszenie p_1 . Według trzeciego prawa jednocześnie pierwszy punkt musi działać z siłą równą lecz odwrotną na drugi, a zatem $m_1 p_1 = m_2 p_2$, gdzie p_2 oznacza przyspieszenie drugiego.

72. Przykłady. Podajemy tu szereg przykładów, zawierających zastosowania praw Newtona. Niezbędna jest przed tem pewna uwaga ogólna.

Przypuścmy, że na punkt materialny o masie m działają siły $P_1, P_2 \dots$. Siły te nadają punktowi pewne przyspieszenie, które można wyznaczyć w sposób dwojaki. Wyznaczamy wypadkową R tych wszystkich sił. Możemy uważać, że działa tylko ta jedna siła R , nada więc ona punktowi przyspieszenie, zgodne z nią co do kierunku, a co do wielkości równe $\frac{R}{m}$.

Drugi sposób jest następujący. Siła P_1 , działając sama jedna, nadała by punktowi przyspieszenie $\frac{P_1}{m}$, również siła P_2 nadała by mu sama przyspieszenie $\frac{P_2}{m}$ i t. d. Układ przyspie-

szeń $\frac{P_1}{m}, \frac{P_2}{m} \dots$ jest oczywiście podobny do układu sił $P_1, P_2 \dots$, a zatem wyznaczając wypadkową tych przyspieszeń, otrzymamy przyspieszenie, które istotnie posiada punkt.

Odwrotnie, jeżeli rozłożyliśmy przyspieszenie na pewną liczbę składowych, to możemy uważać, że każdą z nich wytwarza odpowiednia składowa siła.

Prz. 1. Na poziomej płycie leży ciało, ważące Q kg, a płyta posiada przyspieszenie pionowe p . Wyznaczyć siłę, którą ciało wywiera na płytę.

Przyspieszenie dodatnie będziemy mierzyli na dół, a szukaną siłę oznaczmy przez P . Taką samą siłę, ale zwróconą ku górze, płyta wywiera na ciało, a więc działa na nie siła wypadkowa $Q - P$, nadająca mu przyspieszenie p . Masa ciała $= \frac{Q}{g}$, zatem będzie $Q - P = \frac{Q}{g} \cdot p$, a stąd

$$P = \frac{Q(g-p)}{g}.$$

Jeżeli $p = g$, to $P = 0$. Gdyby klatka windy osobowej schodziła z przyspieszeniem ziemskim, to jadący mieliby wrażenie, że siła ciężenia przestała działać; np. ciężki przedmiot, nie podtrzymywany, nie spadał by na podłogę.

Prz. 2. Do jednego końca belki wagowej przyczepiono lekki *) bloczek, przez bloczek przerzucono sznur, a na końcach sznura zawieszono ciężary Q_1 i Q_2 . Jaki ciężar należy zawiesić na przeciwnym końcu belki, aby ta pozostawała w równowadze podczas ruchu ciężarów Q_1 i Q_2 . Odp. $\frac{4Q_1Q_2}{Q_1+Q_2}$.

Przyjmujemy, że tarcie bloczka o oś jest znikomo małe, oraz że sznur jest lekki i doskonale wiotki. W tych warunkach naprężenia we wszystkich punktach sznura są jednakowe. Jeżeli naprężenie sznura $= S$, to na koniec belki działa siła $2S$. Otrzymamy S z równań $Q_1 - S = \frac{Q_1 p}{g}$ i $S - Q_2 = \frac{Q_2 p}{g}$. Jeżeli na przeciwnym końcu belki wisi ciężar $Q_1 + Q_2$, to która strona belki opadnie?

Prz. 3. Na jednym końcu sznura, przechodzącego przez blok, wisi ciężar Q , a u drugiego końca uczepił się gimnastyk, ważący również Q . Co stanie się z ciężarem, gdy gimnastyk zacznie wspinać się po sznurze w górę?

*) Przysłowiowy *lekki* ma wskazywać, że masy bloczka nie potrzeba brać w rachubę. Będziemy wyrazu tego używali w tym samym znaczeniu i w dalszym ciągu.

Prz. 4. Wielokrażek składa się z bloka stałego i bloka ruchomego (fig. 44). Wyznaczyć przyspieszenie ciężaru, wiszącego u bloka

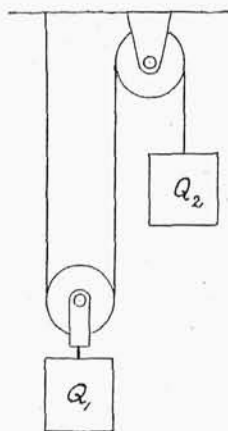


Fig. 44.

ruchomego, jeżeli na końcu sznura wisi ciężar Q_2 . Odp. $\frac{(2Q_2 - Q_1)g}{4Q_2 + Q_1}$.

Gdy oznaczymy odległości ciężarów od sufitu przez x_1 i x_2 , to oczywiście $2x_1 + x_2$ jest wielkością stałą. Z tego wynika $2\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2} = 0$, równanie, określające związek pomiędzy przyspieszeniami ciężarów.

Prz. 5. Ciało o masie m wisi na sprężystym sznurze, którego współczynnik sprężystości $= E$, a naturalna długość $= l$ *). Podnosimy je na taką wysokość, aby sznur przybrał tę długość naturalną, i następnie pozostawiamy je samemu sobie. Okazać, że ruch ciała będzie harmoniczny, wyznaczyć okres, amplitudę i środek wahań.

Oznaczywszy odległość ciała od punktu zawieszenia przez y , otrzymamy $m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - \frac{E(y-l)}{l}$. Można tak obrać

początek toru, aby równanie to przekształciło się na $\frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{E\eta}{ml}$, a to jest równanie ruchu harmonicznego, znane z par. 55. Okres wynosi $2\pi\sqrt{\frac{ml}{E}}$, a amplituda $\frac{2mgl}{E}$.

Prz. 6. Rurka o długości $2a$, wewnątrz gładka, obraca się w płaszczyźnie poziomej około swego końca O ze stałą szybkością kątową ω . W rurce, w samym środku, znajduje się kulka, przywiązana nicią do punktu O . W jakim czasie i z jaką szybkością kulka wyjdzie z rurki, gdy nieć się zerwie? Wyznaczyć także reakcję pomiędzy rurką i kulką w funkcji odległości r od O . Odp. Szukany czas $= \frac{\lg(2 + \sqrt{3})}{\omega}$, szybkość $= a\omega\sqrt{7}$, reakcja $= 2m\omega^2\sqrt{r^2 - a^2}$, gdzie m jest masą kulki.

Gdy kulka znajduje się w odległości r od O , to jej przyspieszenie posiada trzy składowe: przyspieszenie unoszenia $\omega^2 r$ i przyspie-

*) Jeżeli długość rozciągniętego sznura $= y$, to napężenie jego wynosi $\frac{E(y-l)}{l}$; współczynnik E można uważać dla danego sznura za wielkość stałą, o ile wydłużenie nie przekroczyło pewnych granic, tak zw. granic sprężystości. Należy przyjmować, że warunek ten jest spełniony, gdy w dalszym ciągu będzie mowa o sznurach, lub wogóle ciałach sprężystych.

szenie względne $\frac{d^2r}{dt^2}$ w kierunku rurki, a prócz tego przyspieszenie Coriolisa, prostopadłe do rurki. Ponieważ w kierunku rurki nie działa na kulkę żadna siła, przeto wypadkowa dwóch pierwszych musi być zerem, otrzymamy więc $\frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2 r = 0$. Z tego już łatwo otrzymać żądane wielkości. Interesującą jest rzeczą, że szukany czas nie zależy od długości rurki.

(Prz. 7.) Ciało o masie M leży na gładkim stole; do niego jest przyczepiony sznur, który zwisa ze stołu i dźwiga na końcu blok o masie m . Przez blok przechodzi inny sznur, na którego końcach wiszą masy m_1 i m_2 . Wyznaczyć przyspieszenie ciała M . Odp.

$$\frac{m(m_1+m_2)+4m_1m_2}{(M+m)(m_1+m_2)+4m_1m_2}g.$$

(Prz. 8.) Przez nieruchomy blok przerzucono sznur, a na lewym końcu sznura zawieszono drugi blok lekki, przez który przechodzi drugi sznur, dźwigający na końcach ciężary P i Q . Jaki ciężar należy zawiesić na prawym końcu pierwszego sznura, aby ciężar Q pozostał w spokoju. Odp. $\frac{4PQ}{3P-Q}$. Urządzenie jest możliwe tylko w takim ra-

zie, gdy $P > \frac{Q}{3}$.

(Prz. 9.) Sznur przechodzi przez dwa nieruchome bloki; jego część, zawarta pomiędzy blokami, dźwiga nawleczony gładki pierścień o masie M , a na jego końcu lewym wisi masa m . Wszystkie części sznura mają kierunek pionowy. Jaka masa powinna wisieć na prawym końcu sznura, aby pierścień pozostawał w spokoju? Odp. $\frac{Mm}{4m-M}$. Urządze-

nie jest możliwe, jeżeli $m > \frac{M}{4}$.

13. Prz. 10. Na końcach sznura, przerzuconego przez nieruchomy blok, wiszą dwa jednakowe ciężary. Jak zmieni się naprężenie sznura, gdy podwoimy obciążenie jednego końca i zmniejszymy obciążenie drugiego do $\frac{2}{3}$? Odp. Pozostanie bez zmiany.

Prz. 11. Wielokrażek składa się z jednego bloka ruchomego i jednego stałego, jak na fig. 44. Na bloku i na końcu sznura wiszą równoważące się ciężary; jak zmieni się naprężenie, gdy podwoimy obciążenie bloka i zmniejszymy do połowy obciążenie sznura?

Prz. 12. Ciało zostało rzucone w górę z szybkością v_0 po linii największego spadku równi pochyłej, ustawionej pod kątem α do poziomu. Kąt tarcia $= \varphi$. Wyznaczyć szybkość, z którą ciało powróci do miejsca, z którego wyszło. Odp. $v_0 \sqrt{\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\alpha + \varphi)}}$.

15. Prz. 13. Wagon o masie m oderwał się w punkcie A podczas pełnego biegu od pociągu, którego całkowita masa była równa M .

Wagon zatrzymał się w punkcie B w odległości l od A . W jakiej odległości od B była wówczas reszta pociągu, jeżeli siła pociągowa lokomotywy pozostała bez zmiany, a opór, który pociąg napotyka w biegu, jest proporcjonalny do masy? Odp. $\frac{Ml}{M-m}$.

Prz. 14. Łańcuch jednorodny, którego waga $= Q$, a długość $= l$, leży wzdłuż linii największego spadku gładkiej linii pochyłej, tworzącej z poziomem kąt α ; początkowo dolny koniec łańcucha znajduje się na samym brzegu równi. Gdy wyswobodzimy łańcuch, i już x metrów zsunie się z równi, to jakie będzie naprężenie w punkcie, który właśnie przechodzi przez brzeg? Odp. $\frac{Qx(l-x)(1-\sin \alpha)}{l^2}$.

Punkt wskazany dzieli łańcuch na dwie części, które możemy uważać za dwa odrębne ciała; każde z nich wywiera na drugie siłę S , równą szukanemu naprężeniu.

Prz. 15. Punkt O przyciąga wszystkie ogniwa jednorodnego łańcucha z siłami odwrotnie proporcjonalnymi do kwadratu odległości, i pod działaniem tych sił wyprostowany łańcuch sunie wprost do O . Współczynnik proporcjonalności $= k$, długość łańcucha $= a$, i jego masa $= \mu a$. Wyznaczyć naprężenie w jakimkolwiek punkcie łańcucha przy jakimkolwiek położeniu jego.

Końce łańcucha oznaczmy przez A i B ; z nich pierwszy ma być bliższy do O . Pragniemy wyznaczyć naprężenie S w punkcie P , w odległości x od A , w chwili, gdy $OA=r$. Na element dx działają siły S , $S+dS$ i $\frac{k\mu dx}{(r+x)^2}$, zatem będzie $\mu dx \cdot p = \frac{k\mu dx}{(r+x)^2} - dS$, gdzie p oznacza przyspieszenie łańcucha. Całkując i uwzględniając, że w A i B naprężenie jest zerem, znajdziemy $S = \frac{k\mu x(a-x)}{r(r+x)(a+r)}$.

Prz. 16. Ciało o masie m otrzymało szybkość v_0 w ośrodku, który stawia opór proporcjonalny do kwadratu szybkości; współczynnik proporcjonalności $= k$. Wyznaczyć drogę, którą ciało przebiegnie w czasie t .

Równanie ruchu $m \frac{dv}{dt} = -kv^2$. Całkując, otrzymamy $s = \frac{m}{k} \lg \frac{v_0 k t + m}{m}$.

Prz. 17. Ciało spadło na ziemię z nieskończenie wielkiej odległości. Dowieść, że doszłoby ono do powierzchni ziemi z taką samą szybkością, gdyby wysokość spadania była równa promieniowi ziemskiemu, i gdyby siła ciężenia była stale równa mg .

Prz. 18. Przypuśćmy, że w kuli ziemskiej przebito prosty tunel w kierunku średnicy. Uważając, że ziemia jest kulą jednorodną i nie uwzględniając oporu powietrza, wyznaczyć czas, w ciągu którego ciało, wpuszczone do tunelu bez początkowej szybkości, dojdzie do końca przeciwnego. Odp. Około 42 minut.

Dajmy na to, że ciało znalazło się w odległości x od środka ziemi. Poprowadźmy przez nie w wyobraźni powierzchnię kulistą współśrodkową z powierzchnią ziemską; tym sposobem podzielimy ziemię na dwie części, zewnętrzną i wewnętrzną. Wiadomo, że pierwsza nie wywiera na ciało żadnej siły, a druga przyciąga je tak, jak gdyby cała jej masa była skoncentrowana w środku. Równanie różniczkowe ruchu będzie $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gx}{a}$. Żądany czas znajdziemy według par. 55.

Prz. 19. Dwa punkty masy m i μ przyciągają się według prawa Newtona, t. j. wprost proporcjonalnie do mas i odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości; współczynnik proporcjonalności $=k$. Punkty te umieszczono w położeniach A i B w odległości a , następnie nadano drugiemu stałą szybkość u w kierunku AB i jednocześnie wyswobodzono pierwszy. Czy punkt pierwszy dogoni drugi?

Dajmy na to, że w chwili t odległość pomiędzy punktami była równa x ; w takim razie przyspieszenie względne punktu A wynosi $\frac{d^2x}{dt^2}$. Temuż samemu jest równe przyspieszenie bezwzględne, bo przyspieszenie unoszenia jest zerem, a zatem będzie

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k\mu\mu}{x^2}.$$

Z tego otrzymamy, że $w^2 = \frac{2k\mu}{x} + u^2 - \frac{2k\mu}{a}$, gdzie w oznacza szybkość względną. Początkowo punkty się oddalają, szybkość w jest odwrotna od μ i x jest wciąż większe od a ; w przejdzie przez zero i zmieni kierunek, jeżeli $u^2 - \frac{2k\mu}{a}$ jest ujemne, lub jeżeli $u^2 < \frac{2k\mu}{a}$. W tym razie punkt m dogoni μ .

Prz. 20. Część łańcucha, którego całkowita długość $=a$, leży na gładkim stole, a druga część o długości b zwisa. W jakim czasie łańcuch zsunie się ze stołu, jeżeli pozwolimy mu spadać? Odp.

$$\sqrt{\frac{a}{g}} \lg \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}.$$

73. **Równania ruchu.** Niech będzie punkt masy m , na który działa siła P , udzielająca mu przyspieszenie p . Obierzmy prostokątny układ współrzędnych i oznaczmy współrzędne punktu m przez x, y, z . Rzuty siły na osi niech będą P_x, P_y, P_z , a rzuty przyspieszenia $p_x = \frac{d^2x}{dt^2}, p_y = \frac{d^2y}{dt^2}, p_z = \frac{d^2z}{dt^2}$. Oczywiście stosunek p_x do P_x jest taki sam, jak stosunek p do P ,

a zatem $P_x = mp_x$; toż samo dotyczy rzutów pozostałych. Będzie więc

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = P_x, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = P_y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = P_z.$$

Całkując, otrzymamy równania ruchu punktu.

Gdy mamy do czynienia z współrzędnymi biegunowymi, to rozkładamy siłę i przyspieszenie w kierunku promienia wodzącego oraz w kierunku prostopadłym. Oznaczając składowe siły przez P_r i P_φ a współrzędne punktu przez r , φ , otrzymamy

$$m \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] = P_r, \quad \frac{m}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = P_\varphi.$$

Często wypada rozkładać w kierunku stycznej i normalnej do toru. Składowe siły w tych kierunkach oznaczmy przez P_t , P_n i nazwiemy *siłą styczną* i *siłą normalną*. Będzie więc

$$m \frac{dv}{dt} = P_t, \quad m \frac{v^2}{\rho} = P_n.$$

Wypada dodać, że gdy tor nie jest płaski, to całkowite przyspieszenie leży w płaszczyźnie ściśle stycznej (par. 57), a zatem i całkowita siła leży w tejże płaszczyźnie. Z tego wynika, że ostatnie dwa równania dotyczą zarówno ruchu płaskiego jak i nie płaskiego.

Prz. 1. Na płaszczyźnie poziomej stoi klin, którego ściany boczne tworzą z podstawą kąty α_1 i α_2 . Ściany te są gładkie i leżą na nich masy m_1 , m_2 , połączone nicią, przechodzącą przez krawędź. Jakie przyspieszenie poziome powinien mieć klin, aby masy m_1 , m_2 pozostały względem niego w spokoju?

Na każde ciało działa siła ciężenia, naprężenie sznura oraz reakcja ściany. Skoro ciało ma pozostać w spokoju względem klina, to siły te powinny mu nadawać przyspieszenie poziome, równe przyspieszeniu klina, a zatem suma ich rzutów na dowolny kierunek musi być równa rzutowi owego przyspieszenia, pomnożonemu przez masę ciała. Aby nie wprowadzać reakcji ścian bierzemy rzuty na linie największego spadku, rugując następnie naprężenie nici, znajdziemy, że szukane przyspieszenie wynosi $\frac{(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)g}{m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2}$.

Prz. 2. Z równi pochyłej, tworzącej z poziomem kąt α , zsuwa się naczynie z wodą. Współczynnik tarcia pomiędzy dnem naczynia i równią jest równy $\tan \varphi$. Wyznaczyć kąt, który powierzchnia wody tworzy z równią.

Na cząsteczkę wody o masie m , położoną na samej powierzchni, działa siła ciężenia mg oraz reakcja R pozostałej masy wody. Jeżeli woda pozostaje w spokoju względem naczynia, to ta reakcja jest prostopadła do powierzchni wody, a obydwie siły mg i R nadają cząsteczce przyspieszenie, równe przyspieszeniu naczynia, czyli $\frac{g \sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}$.

Rzut tego przyspieszenia na dowolny kierunek, pomnożony przez m , jest równy sumie rzutów owych sił. Biorąc rzuty na dwa stosownie obrane kierunki, znajdziemy, że szukany kąt $= \varphi$.

Prz. 3. Na gładki poziomy drążek nawleczono pierścień o masie m , do pierścienia przyczepiono sznur o długości a i na końcu sznura zawieszono masę nm . W początku sznur był wypięty i odchyłony od pionu o kąt α w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez drążek, przyczem zarówno punkt nm , jak i pierścień, pozostawały w spokoju. Wyznaczyć tor, który zatoczył punkt nm po wyswobodzeniu układu.

Za początek obieramy pierwotne położenie pierścienia, drążek za oś x , a oś y kierujemy pionowo na dół. W chwili t punkt nm posiada współrzędne (x, y) , pierścień $(x', 0)$, a sznur jest odchyłony od pionu o ϑ . Otrzymamy równania

$$nm \frac{d^2x}{dt^2} = -S \sin \vartheta, \quad m \frac{d^2x'}{dt^2} = S \sin \vartheta,$$

stad
$$n \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2x'}{dt^2} = 0.$$

Z tego wynika przedewszystkiem $n \frac{dx}{dt} + \frac{dx'}{dt} = 0$, a następnie

$$nx + x' = an \sin \alpha.$$

Korzystając z rzucających się w oczy związków geometrycznych, otrzymamy równanie toru

$$(n+1)^2 x^2 + y^2 - 2(n+1) nax \sin \alpha + n^2 a^2 \sin^2 \alpha - a^2 = 0.$$

Jest to elipsa, której osi posiadają długości $\frac{2a}{n+1}$ i $2a$; pierwsza z nich leży na osi x .

Prz. 4. Na gładkiej płaszczyźnie poziomej stoi umocowana w płaszczyźnie pionowej gładka obręcz o masie M . Na obręczy leży punkt materialny o masie m , przywiązany do końca sznura A . Sznur ten dochodzi po obręczy do jej najwyższego punktu B , następnie idzie poziomo i w drugim końcu jest umocowany nieruchomo. Kąt $AOB = \vartheta$, gdzie O oznacza środek obręczy. O ile zmniejszy się reakcja, którą punkt m wywiera na obręcz, gdy ta zostanie wyswobodzona? Odp.

$$\frac{m^2 g \sin^2 \vartheta}{M + 4m \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}.$$

Po wyswobodzeniu ruch obręczy będzie postępowy, bo tarcia niema. W pierwszej chwili szybkości obręczy i punktu m są jeszcze zerami, ale już każde z tych ciał posiada przyspieszenie. Dajmy na to, że przyspieszenie obręczy $= p$; w takim razie obydwie składowe przyspieszenia punktu m , t. j. przyspieszenie względne i unoszenia, są także równe p .

Na obręcz działa reakcja punktu m oraz reakcje różnych elementów sznura AB . Wyznaczanie wypadkowej tych ostatnich może nastręczyć pewne trudności. Następujące proste rozumowanie ułatwi sprawę.

Przypuśćmy, że pewien układ sił działa na ciało o drobnej masie. Jeżeli przyspieszenie tej masy jest niezbyt wielkie, to siły są prawie w równowadze; znaczy to, że ich suma rzutów na dowolny kierunek lub suma momentów względem dowolnej prostej różni się niewiele od zera. Jeżeli nie uwzględniamy wcale masy owego ciała, to możemy uważać, że siły się równoważą.

W danym przypadku na sznur AB działają naprężenia S w A i B oraz reakcje, które obręcz wywiera na różne elementy. Możemy uważać, że siły te się równoważą, bo nie uwzględniamy masy sznura. Z tego wynika, że naprężenia S równoważą reakcje obręczy, a więc są równoważne z reakcjami, które sznur wywiera na obręcz.

Prz. 5. Gładki pierścień o masie m_1 jest nawleczony na sznur, którego jeden koniec umocowano nieruchomo, a do drugiego przywiązano punkt materyalny o masie m . Początkowo punkt m jest podtrzymywany na poziomie końca nieruchomego, a każda część sznura tworzy z poziomem kąt α . Jakie będzie naprężenie sznura w pierwszej chwili po wyswobodzeniu punktu m . Odp. $\frac{mm_1g \sin \alpha}{m_1 + 4m \sin^2 \alpha}$.

Obrawszy nieruchomy punkt sznura za początek, znajdziemy

$$\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} + \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = l,$$

gdzie (x, y) , (x_1, y_1) oznaczają współrzędne punktu m i pierścienia, a l długość sznura. Różniczkując równanie powyższe dwa razy względem t , otrzymamy związek pomiędzy współrzędnymi, szybkościami i przyspieszeniami. Wszystkie te wielkości można łatwo dla pierwszej chwili wyznaczyć.

Prz. 6. Na gładkiej płaszczyźnie poziomej jest umocowana okrągła tarcza o promieniu a . Do pewnego punktu jej obwodu przyczepiono punkt materyalny zapomocą sznura, którego długość jest równa połowie obwodu. Sznur był wyprostowany i miał kierunek promienia, gdy punkt materyalny otrzymał szybkość v_0 prostopadłą do sznura.

W jakim czasie dojdzie on do obwodu tarczy. Odp. $\frac{\pi^2 a}{v_0}$.

Prz. 7. Koniec nici o długości l jest umocowany w najwyższym punkcie gładkiej kuli o promieniu a . W drugim końcu nie dźwiga ciężarek, który zatacza koło poziome ze stałą szybkością ką-

ową, przyczem część nici ax pozostaje w zetknięciu z kulą. Wyznaczyć szybkość kątową. Odp. $\omega^2 = \frac{g \cos \alpha}{[a \sin \alpha + (l - a) \cos \alpha] \sin \alpha}$.

Prz. 8. Pierścień, którego promień $= a$ i waga $= Q$, wiruje około osi, prostopadłej do jego płaszczyzny i przechodzącej przez środek. Wiadomo, że sztaba, z której zrobiono obwód pierścienia, zrywa się pod działaniem siły rozciągającej S_0 . Ile obrotów na minutę może najwyżej robić pierścień? Odp. $30 \sqrt{\frac{2gS_0}{\pi a Q}}$.

Należy rozważyć stan jednego elementu obwodu, który widać ze środka pod kątem $d\vartheta$. Działają nań naprężenia S na końcach; wypadkowa ich wynosi $2S \sin \frac{d\vartheta}{2}$, albo $S d\vartheta$, gdyż $\sin \frac{d\vartheta}{2} = \frac{d\vartheta}{2}$.

Prz. 9. Dwa punkty materialne o masach m_1 i m_2 , połączone nicią nierozciągalną o długości l , leżą na gładkim stole, i nie jest wyprężona. Punkt m_1 otrzymuje uderzenie w kierunku prostopadłym do nici; wyznaczyć promień krzywizny toru jego w punkcie początkowym.

Na m_1 działa tylko naprężenie nici S , zatem punkt ten będzie miał tylko przyspieszenie normalne, i $\frac{v^2}{\rho} = \frac{S}{m_1}$, gdzie v oznacza szybkość początkową. Torem względnym jego, względem m_2 , jest koło o promieniu l , szybkość względna $= v$, bo punkt m_2 jest w pierwszej chwili nieruchomy, a więc przyspieszenie względne $= \frac{v^2}{l}$, i przyspieszenie unoszenia $= \frac{S}{m_2}$. Będzie przeto $\frac{v^2}{l} - \frac{S}{m_2} = \frac{S}{m_1}$. Rugując z tych równań S , otrzymamy $\rho = \frac{l(m_1 + m_2)^2}{m_2}$. Jeżeli $m_1 = m_2$, to $\rho = 2l$; w tym przypadku torami obydwóch punktów są cykloidy pospolite, jak zobaczymy w przyszłości.

Prz. 10. W środku nici o długości $2a$ jest przywiązany punkt materialny m , a na końcu punkt M . Drugi koniec nici jest przymocowany do gładkiego stołu, na którym leżą punkty, i dwie połowy nici tworzą kąt α . Punkтови M nadano szybkość prostopadłą do części nici, łączącej go z m , przyczem obydwie części pozostały w naprężeniu. Wyznaczyć promień krzywizny toru punktu M w punkcie początkowym. Odp. $\frac{a(m + M \sin^2 \alpha)}{m}$.

Łatwo zrozumieć, że M posiada w pierwszej chwili tylko przyspieszenie normalne, a m tylko styczne.

Prz. 11. Koniec nici jest przymocowany w punkcie O do poziomej gładkiej płaszczyzny; nie przechodzi przez paciorkę B , i do jej drugiego końca jest przyczepiony punkt materialny A o masie, równej masie paciorki. Początkowo wszystko to spoczywa na płaszczy-

źnie, obydwie części nici są wyciągnięte, tworząc rozwarły kąt α , i część $AB=a$. Wyznaczyć początkowy promień krzywizny toru, który obierze punkt A , gdy mu nadamy szybkość prostopadłą do AB . Odp.

$$a\left(1+4\cos^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

Może tu zająć trudność przy wyznaczaniu przyspieszenia punktu A względem B . Potrzebna jest tylko składowa jego w kierunku BA . Można ją obrachować według wzoru $p_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$, gdzie $\frac{d^2r}{dt^2}$ jest w pierwszej chwili składową przyspieszenia paciorki w kierunku OB .

Prz. 12. Dwa punkty materialne A, B o masach m_1, m_2 są połączone nierozciągalną nicią, przewleczoną przez małe gładkie kółko C . Kółko to jest osadzone nieruchomo u szczytu równi pochyłej, tworzącej z poziomem kąt α . Początkowo punkt A spoczywa na równi część nici AC , równa a , leży na linii największego spadku, a część CB wisi pionowo. Nadajemy punktowi A szybkość v prostopadłą na równi do AC . Zbadać, czy punkt B zacznie się wznosić, czy opadać.

Punkt B zacznie się wznosić, jeżeli naprężenie nici w pierwszej chwili będzie większe od m_2g , lub jeżeli $\frac{m_2}{m_1} < \frac{v^2}{ag} + \sin\alpha$.

Prz. 13. Trzy jednakowe cząsteczki A, B, C , połączone nićmi, stanowią wierzchołki trójkąta równobocznego, w którym promień opisanego koła $= a$. Układ ten wirował około środka ciężkości trójkąta, gdy nić AC się zerwała. Wyznaczyć promienie krzywizny torów cząsteczek w pierwszej chwili po zerwaniu. Odp. $\frac{5a}{3}, \frac{5a}{6}, \frac{5a}{3}$.

Prz. 14. Punkty materialne A, B, C , każdy o masie m , leżą na gładkiej płaszczyźnie poziomej, przyczepione do nierozciągalnej nici, i części nici AB, BC są odpowiednio równe a, b . Punkt B jest przymocowany do płaszczyzny, A zaś oraz C krążą koło niego z szybkością kątową ω , przyczem obydwie części nici leżą na linii prostej. Wyznaczyć naprężenia, które powstaną w nici bezpośrednio po wyswobodzeniu punktu B . Odp. $\frac{m(2a+b)\omega^2}{3}$ i $\frac{m(a+2b)\omega^2}{3}$.

Prz. 15. Punkt materialny o masie m jest zawieszony na nierozciągalnej nici u końca poziomego sztywnego ramienia, które może się obracać około osi pionowej, przechodzącej przez drugi koniec. Długość ramienia $= a$, długość nici $= b$. Gdy wszystko pozostaje w spoczynku, nadajemy ramieniu szybkość kątową ω . Wyznaczyć początkowe naprężenie nici. Odp. $m\left(g + \frac{a^2\omega^2}{b}\right)$.

Prz. 16. Wagon rusza na łuku i idzie ze stałym przyspieszeniem p . Szyna zewnętrzna leży wyżej od wewnętrznej, skutkiem czego podłoga wagonu tworzy z poziomem kąt α . Jaki powinien być co naj-

mniej współczynnik tarcia pomiędzy podłogą i leżącym na niej przedmiotem, aby przedmiot ten się nie zsuwał. Odp. $\frac{\sqrt{p^2 + g^2 \sin^2 \alpha}}{g \cos \alpha}$.

Należy naprzód wyznaczyć niezbędną wartość współczynnika tarcia dla szybkości wagonu v , a następnie zbadać, przy jakim v wartość ta jest największa.

Prz. 17. Dwie jednakowe cząsteczki A, B o masach m są połączone nierozciągalną nicią o długości l . Cząsteczki te leżą na gładkiej płaszczyźnie poziomej, pierwsza z nich jest swobodna, a druga może się poruszać tylko po prostej x . Nić była wyciągnięta prostopadłe do x , gdy cząsteczka A otrzymała szybkość v_0 równoległą do tej prostej. W jakich granicach zmienia się naprężenie nici? Odp. Od $\frac{mv_0^2}{4a}$ do $\frac{mv_0^2}{a}$.

Prz. 18. Punkt materialny leży w O na płaszczyźnie, nachylonej do poziomu pod kątem φ , równym kątowi tarcia punktu o płaszczyznę. Punktowi temu udzielono szybkość v_0 w kierunku poziomym na płaszczyźnie; jaka będzie szybkość jego, gdy ruch stanie się jednostajnym na linii największego spadku płaszczyzny, i w jakiej odległości linia ta leży od O ? Odp. $\frac{v_0}{2}$ i $\frac{2v_0^2}{3g \sin \varphi}$.

Obrawszy za oś odciętych prostą poziomą i za oś rzędnych prostą największego spadku, otrzymamy łatwo $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{v^2}{\rho}$, a stąd $\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{d\vartheta}{\cos \vartheta}$ i $v_x = \frac{v_0 \cos \vartheta}{1 + \sin \vartheta}$, gdzie ϑ oznacza kąt, który szybkość tworzy z osią x . Przy pomocy ostatniego równania wyznaczmy szukaną szybkość. Aby wyznaczyć szukaną odległość, należy wyrazić odciętą punktu w funkcji ϑ .

Prz. 19. Płaszczyzna materialna przechodzi przez prostą pionową y i obraca się koło niej ze stałą szybkością kątową ω . Z punktu O , położonego na osi, wybiegł punkt materialny m z szybkością początkową v_0 ; szybkość ta jest pozioma i zawarta w płaszczyźnie, przyczem punkt biegnie po stronie przedniej. Wyznaczyć linię, którą punkt zakreśli na płaszczyźnie, a także reakcję płaszczyzny na punkt. Odp. Równania ruchu względnego, lub równania parametryczne linii szukanej są $x = \frac{v_0}{2\omega}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})$, $y = \frac{gt^2}{2}$. Szukana reakcja wynosi $2m\omega \sqrt{\omega^2 x^2 + v_0^2}$ i wytwarza przyspieszenie Coriolisa.

Prz. 20. Sznur sprężysty, którego długość naturalna $= a$, współczynnik sprężystości $= E$ (par. 72, prz. 5) i masa $= \mu a$, jest zawarty w prostej rurce. Koniec sznura jest umocowany w końcu rurki, i rurka obraca się około tego końca w płaszczyźnie poziomej z szybkością kątową ω . Wyznaczyć długość sznura w przypuszczeniu, że pozostaje

on względem rurki w spoczynku, a także napężenie w końcu nieruchomym. Odp. $\frac{\tan ak}{k}$, $\frac{\mu\omega^2}{k^2} \cdot \frac{1-\cos ak}{\cos ak}$, gdzie $k=\omega\sqrt{\frac{\mu}{E}}$.

Obierzmy na sznurze dowolny punkt P i oznaczmy przez x długość części OP w stanie naturalnym, a przez y w stanie rozciągniętym. Możemy uważać y za funkcję zmiennej niezależnej x . W punkcie P napężenie $S=E\frac{dy-dx}{dx}$, a stąd $\frac{dS}{dx}=E\frac{d^2y}{dx^2}$. Z drugiej strony $\mu dx \cdot y\omega^2 = -dS$, zatem $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\mu\omega^2}{E} y$.

Prz. 21. Punkty materyalne A i B są połączone nierozciągalną nicią; pierwszy leży na stole, a drugi zwisa o h niżej od brzegu. Współczynnik tarcia pomiędzy pierwszym i stołem $=f$. Punkt A miał właśnie ruszyć, gdy punktowi B udzielono szybkość poziomą. Wyznaczyć promień krzywizny toru punktu B w położeniu początkowym. Odp. $(1+f)h$.

74. Ruch na torze przepisany. Dotychczas mówiliśmy o ruchu punktu swobodnego, t. j. takiego, który z każdego położenia mógłby ruszyć dowolnym torem, gdyby tylko przyłożyć doń odpowiednią siłę. Rozważymy teraz ruch punktu, zmuszonego pozostawać na pewnym określonym torze, np. ruch kulki, zawartej w sztywnej rurce, albo ruch paciórki, nawleczonej na sztywny drut. Tymczasem będziemy pomijali tarcie punktu o tor (o ściany rurki albo o powierzchnię drutu), innemi słowy będziemy uważali tor za doskonale gładki.

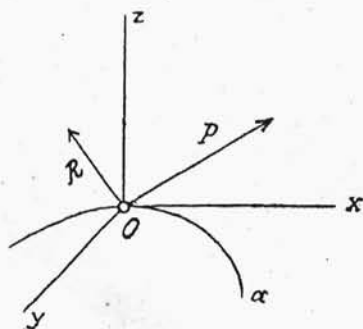


Fig. 45.

Przypuśćmy więc, że punkt materyalny o masie m musi pozostawać na torze α , i że działa nań siła P . W chwili t punkt m zajmuje na torze położenie O .

Obieramy układ współrzędnych w sposób następujący. Początkiem będzie punkt O , osią x styczna do toru, kierunek dodatni w stronę szybkości, osią y główna normalna w stronę środka krzywizny; dyspozycja ta określa również stosownie do przyjętej umowy (par. 12) i oś z . Oczywiście płaszczyzna xy jest ściśle styczna do krzywej α , a oś z jest binormalną tej krzywej.