

czenie zbliża się do zera, innemi słowy krzywa obiega wciąż punkt Q , zbliżając się doń asymptotycznie; jest to spiralna, posiadająca punkt asymptotyczny Q .

Tak więc, jeżeli oś chwilowa znajdzie się w płaszczyźnie granicznej, to następnie dąży ona wciąż do trzeciej osi głównej punktu O . Po pewnym czasie kąt pomiędzy temi prostemi staje się znikomo małym, i możemy uważać, nie popełniając wyraźnego błędu, że ciało obraca się stale około owej osi głównej.

129. Przypadki szczególne. Rozważymy osobno ten przypadek szczególny, w którym momenty bezwładności względem dwóch osi głównych środka O , mianowicie A i B , są równe. Przypadek taki zachodzi np. w tym razie, gdy ciało jest jednorodną bryłą obrotu, i punkt O leży na osi symetrii.

Oznaczmy tę oś główną punktu O , której odpowiada moment bezwładności C , nie równy A , przez z . Wiemy, że w płaszczyźnie dwóch pozostałych osi głównych, czyli w płaszczyźnie prostopadłej do z , wszystkim prostym, przechodzącym przez O , odpowiadają momenty równe A , i każdą z tych prostych można uważać za oś główną.

Poprowadźmy przez oś z i przez wektor ω płaszczyznę i oznaczmy jej prostą przecięcia z ową płaszczyzną równych momentów przez x . Rozłożmy następnie ω na składowe ω_z i ω_x w kierunkach z i x . Wektor H posiada w tych kierunkach składowe $C\omega_z$, $A\omega_x$ i oczywiście leży w płaszczyźnie zx .

Podobnie, jak w par. 125, otrzymamy tu równania

$$\left. \begin{aligned} C^2\omega_z^2 + A^2\omega_x^2 &= H^2 \\ C\omega_z^2 + A\omega_x^2 &= T' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1).$$

Z równań tych wynika, że ω_z i ω_x są stałe, a zatem i szybkość wypadkowa $\omega = \sqrt{\omega_z^2 + \omega_x^2}$ jest stała.

Tak więc w rozważanym przypadku szczególnym *szybkość kątowa nie zmienia się co do wielkości*.

Wektor ω tworzy z osią z kąt $\arctan \frac{\omega_x}{\omega_z}$. Kąt ten jest stały, gdyż ω_z i ω_x są stałe. Z tego wynika, że prosta z jest osią stożka ruchomego osi chwilowych, i że stożek ten jest kołowy.

Wektor H tworzy z osią z kąt $\arctan \frac{A\omega_x}{C\omega_z}$, a kąt pomiędzy wektorami H i ω wynosi $\arctan \frac{A\omega_x}{C\omega_z} - \arctan \frac{\omega_x}{\omega_z}$. Kąt ten

jest także stały, a ponieważ linia wektora H zajmuje niezmiennicze położenie w przestrzeni, przeto jest ona osią stożka stałego osi chwilowych, i stożek ten jest również kołowy.

Sprawa więc w rozważanym przypadku jest szczególnie prosta. Ruchomy stożek kołowy, którego osią jest prosta z , toczy się po również kołowym stożku stałym, którego osią jest linia wektora H . W par. 40 nazwaliśmy ruch taki precesją.

Przypuśćmy, że z jest osią najmniejszego momentu. W takim razie $\frac{A}{C} > 1$, i $\arctan \frac{A\omega_x}{C\omega_z} > \arctan \frac{\omega_x}{\omega_z}$, a zatem ω leży pomiędzy H i z , i stożek ruchomy toczy się zewnętrzną stroną po stożku stałym. Przypadek ten wyobraża fig. 67, na której stożek bardziej ostry należy uważać za stały. Jeżeli z jest osią największego momentu, to H leży pomiędzy z i ω , i stożek ruchomy obejmuje stożek stały, stykając się z nim stroną wewnętrzną. Przypadek taki widzimy na fig. 68, gdzie znowu stożek ostry ma być stałym.

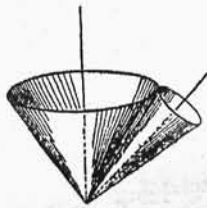


Fig. 67.

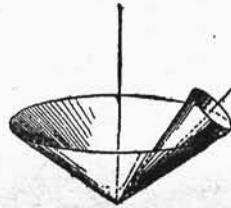


Fig. 68.

Jeżeli ciało obraca się około prostej z , to na tej prostej leży również wektor H , i oś obrotu jest stała. Dajmy w tym razie wektorowi H mały przyrost geometryczny. Odchyli się on cokolwiek od osi z i powstanie mała składowa H_x na osi x . Skutkiem tego powstanie także na tej osi mała składowa $\omega_x =$

$$= \frac{H_x}{A} \text{ wektora } \omega, \text{ a zatem wektor ten utworzy mały kąt z osią } z,$$

który pozostanie już nadal bez zmiany. Z tego widać, że ruch zmieni się w małym stopniu, i można uważać ruch około osi z za trwały.

Przypuśćmy teraz, że ciało obraca się około prostej x , prostopadłej do z . I w tym razie wektor H leży na osi obrotu, która nie zmienia się z biegiem czasu, ale ruch taki jest nie-

trwały. Istotnie dajmy wektorowi H przyrost dowolnie mały. Jeżeli tylko wektor ten wyjdzie z płaszczyzny równych momentów, to oś stożka ruchomego stanie się prosta z , i oś chwilowa zacznie wędrować *w ciele*, odchylając się coraz bardziej od położenia pierwotnego. Stożek ruchomy będzie w tym razie bardzo rozwarty, a stożek stały bardzo ostry. Ośią tego drugiego jest wektor H , który zmienił bardzo mało położenie w przestrzeni, a zatem *w przestrzeni* oś obrotu będzie zmieniała położenie bardzo mało.

Rozważania powyższe wyjaśniają znany fakt, że szybki ruch obrotowy do pewnego stopnia utrwala położenie osi obrotu w przestrzeni.

Wyobraźmy sobie bryłę obrotu, której środek ciężkości O jest unieruchomiony. Możemy uważać, że żadne siły na nią nie działają, gdyż moment siły ciężenia względem O jest zerem. Nadajmy takiemu ciału bardzo szybki ruch obrotowy około osi symetrii; skutkiem tego powstanie bardzo duży wektor H w kierunku tejże osi.

Wymierzmy bryle uderzenie, skierowane np. prostopadle do osi symetrii, i niechaj h oznacza moment impulsu względem O . Oczywiście wektor H otrzyma przyrost geometryczny h i odchyli się od dotychczasowego położenia o $\arctan \frac{h}{H}$. Ponie-

waż H było duże, przeto kąt ten jest mały, a więc wektor H zmieni nieznacznie położenie w przestrzeni. W dalszym ciągu oś symetrii będzie tworzyła z tym wektorem mały kąt stały, zataczając w przestrzeni stożek bardzo ostry. Będzie się wydawało, że bryła i dalej wiruje około nieruchomej osi symetrii.

Oś symetrii tem mniej zmienia położenie pod działaniem uderzeń, im większy jest wektor H , lub im większa jest szybkość kątowa bryły. Gdyby szybkość początkowa była mała lub równa zeru, to nawet słabe uderzenie odchyliłoby znacznie wektor H od osi symetrii, a zatem ta oś zmieniała by bardzo znacznie położenie w przestrzeni, i dalszy ruch ciała byłby na pozór zupełnie nieregularny.

Przypuśćmy wreszcie, że $A=B=C$. W takim razie ciało jest kuliste; znaczy to, że momenty bezwładności jego względem wszystkich prostych, przechodzących przez O , są równe, i każdą z nich można uważać za oś główną.

Gdy wprowadzimy w ruch takie ciało, to w każdym razie wektory H i ω znajdują się na jednej prostej, a zatem oś obrotu nie będzie zmieniała położenia ani w ciele, ani w przestrzeni. Ruch ten jest oczywiście trwały.

Prz. 1. Cienka jednorodna sztaba może poruszać się swobodnie około swego środka. Wprawiamy ją w ruch około osi, tworzącej z nią kąt dowolny. Dowieść, że sztaba, pozostawiona nadal samej sobie, będzie zataczała w przestrzeni płaszczyznę.

Prz. 2. Prosty stożek kołowy, którego wysokość $=h$, a kąt wierzchołkowy ma 60° , może się swobodnie obracać około swego środka ciężkości. Jaki będzie tor wierzchołka, gdy wprowadzimy taki stożek w ruch około osi, tworzącej z jego osią kąt α ? Odp. Koło o promieniu

$$\frac{21h \sin \alpha}{4\sqrt{49+15 \cos^2 \alpha}}.$$

Prz. 3. Okrągłej tarczy, której środek jest nieruchomy, nadano szybkość kątową ω około osi, tworzącej z płaszczyzną tarczy kąt α . Po jakim czasie tarcza powróci do położenia pierwotnego? Odp.

$$\frac{2\pi}{\omega \sqrt{1+3 \sin^2 \alpha}}.$$

Prz. 4. Sześcian obraca się około jednego ze swych wierzchołków, i żadne siły zewnętrzne nań nie działają. Niechaj $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ oznaczają składowe szybkości kątowej w kierunkach krawędzi, przechodzących przez środek ruchu; okazać, że sumy $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ i $\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$ są stałe.

130. Równania Eulera. Niechaj znowu punkt O ciała sztywnego będzie nieruchomy, ale przypuścimy teraz, że na ciało działają siły P_1, P_2, \dots . Jeżeli te siły sprowadzają się do jednej wypadkowej, przechodzącej wciąż przez O , czyli jeżeli suma geometryczna ich momentów względem O jest stale zerem, to nie wytwarzają one żadnych przyrostów wektora H ; wektor ten nie zmienia się ani co do kierunku ani co do wielkości, a zatem ruch ciała całkowicie odpowiada teorii, wyłożonej w par. 125 i następnych. Od sił P_1, P_2, \dots zależy jedynie reakcja w punkcie O , lecz na ruch ciała nie wywierają one żadnego wpływu.

W przypadku ogólnym, gdy suma momentów sił P_1, P_2, \dots względem O nie jest zerem, badanie ruchu ciała jest wogóle trudniejsze. Często bywają tu użyteczne tak zw. *dynamiczne równania Eulera*, które właśnie mamy teraz poznać.

Niech A, B, C oznaczają, jak poprzednio, główne momenty bezwładności względem punktu O ; osi główne oznaczmy tym razem przez a, b, c . Oznaczmy dalej te proste prze-

strzeni, an których w chwili t przypadają osi a, b, c odpowiednio przez x, y, z .

Rzuty wektora H na osi główne będziemy oznaczali przez H_a, H_b, H_c , a na x, y, z przez H_x, H_y, H_z . W chwili t pierwsze nie różnią się od drugich ale już w chwili następnej, gdy osi a, b, c zajmą nowe położenia, zaznaczy się różnica zarówno co do wielkości, jak i kierunku.

W analogiczny sposób będziemy oznaczali rzuty wektora ω . Pragniemy wyrazić przyrosty dH_x, dH_y, dH_z , które w czasie dt otrzymają składowe H_x, H_y, H_z w funkcjach $\omega_a, \omega_b, \omega_c$.

H_a, H_b, H_c są składowymi wektora H , a zatem H_x jest w każdej chwili równe sumie rzutów tych składowych na prostą x . Z tego wynika bezpośrednio, że dH_x będzie równe sumie rzutów przyrostów, które w czasie dt otrzymają owe składowe.

Składowe H_a, H_b, H_c są to wektory ruchome, takie właśnie, jakie rozważaliśmy w par. 50 i 51. W czasie dt każdy z nich otrzyma pewien przyrost geometryczny, który rozłożymy zaraz na dwie składowe, a mianowicie na przyrost styczny i przyrost normalny. Pierwszy z nich, jak wiemy ze wzmiankowanych paragrafów, posiada kierunek wektora ruchomego, a drugi jest doń prostopadły.

Przyrosty styczne wynoszą dH_a, dH_b, dH_c . Rzut pierwszego na oś x jest równy dH_a , rzuty dwóch pozostałych są zerami. Rzut przyrostu normalnego składowej H_a na oś x jest także zerem, potrzeba więc jeszcze tylko wyznaczyć rzuty przyrostów normalnych składowych H_b i H_c .

Oś b obróci się w czasie dt o kąt $\omega_a dt$ około osi a i o kąt $\omega_c dt$ około osi c . Stosownie do tego przyrost normalny wektora H_b będzie miał dwie składowe, a mianowicie składową $H_b \omega_a dt$, położoną w płaszczyźnie bc lub yz , oraz składową $H_b \omega_c dt$, położoną w płaszczyźnie ab lub xy . Rzut pierwszej na oś x jest oczywiście zerem, druga jest równoległa do x , ale zwrócona w stronę ujemną, a zatem rzut jej $= -H_b \omega_c dt$.

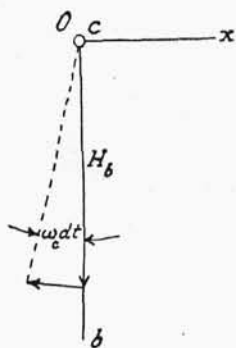


Fig. 69.

Prosta c obróci się o kąt $\omega_a dt$ około a i o kąt $\omega_b dt$ około b , a zatem składowe przyrostu normalnego wektora H_c będą

$H_c\omega_a dt$ i $H_c\omega_b dt$. Pierwsza leży w płaszczyźnie yz , i rzut jej na oś x jest zerem, druga leży w płaszczyźnie zx , i rzut jej jest równy $+H_c\omega_b dt$.

Wypada więc, że

$$dH_x = dH_a - H_b\omega_c dt + H_c\omega_b dt.$$

Lecz $H_a = A\omega_a$, a zatem $dH_a = A d\omega_a$; dalej $H_b = B\omega_b$ i $H_c = C\omega_c$. Wstawiając to w wyrażenie powyższe, otrzymamy

$$dH_x = A d\omega_a - (B - C)\omega_b\omega_c dt \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Oznaczmy przez L , M , N odpowiednio sumy momentów sił P_1 , $P_2 \dots$ względem osi x , y , z . W takim razie $dH_x = L dt$, a zatem $A d\omega_a - (B - C)\omega_b\omega_c dt = L dt$. Z tego oraz z dwóch równań analogicznych otrzymamy

$$A \frac{d\omega_a}{dt} - (B - C)\omega_b\omega_c = L,$$

$$B \frac{d\omega_b}{dt} - (C - A)\omega_c\omega_a = M,$$

$$C \frac{d\omega_c}{dt} - (A - B)\omega_a\omega_b = N.$$

Są to właśnie równania Eulera.

131. Inny dowód. Sposób, w jaki otrzymaliśmy w paragrafie poprzedzającym równania Eulera, jest bardzo prosty. Pozwala on nawet przy niewielkiej wyobraźni geometrycznej przypomnieć je sobie od razu bez żadnych rachunków. Dobrze będzie jednak poznać jeszcze inny sposób, prawie równie prosty; przyczyni się to do lepszego zrozumienia rzeczy.

Zachowamy wszystkie oznaczenia poprzednie i jeszcze oznaczmy przez Q koniec wektora H . Współrzędne tego punktu w układzie a , b , c będą H_a , H_b , H_c , a w układzie x , y , z H_x , H_y , H_z , jeżeli współczynnik proporcjonalności jest równy jednostce. W czasie t współrzędne te są odpowiednio równe, jak już zaznaczyliśmy w par. poprzedzającym.

Wektor H zmienia się z czasem zarówno co do wielkości, jak i kierunku, a zatem koniec jego Q jest ruchomy. Szybkość (bezwzględna) punktu Q posiada dwie składowe, a mianowicie szybkość w względem ciała, czyli względem układu a , b , c , i szybkość unoszenia u , t. j. szybkość tego punktu ciała, w któ-

rym w chwili t przypada punkt Q . Wyznaczymy rzut szybkości bezwzględnej na oś x , czyli $\frac{dH_x}{dt}$.

Oczywiście rzut ten jest równy sumie rzutów składowych w i u , czyli

$$\frac{dH_x}{dt} = w_x + u_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

W chwili t $w_x = w_a = \frac{dH_a}{dt} = A \frac{d\omega_a}{dt}$; u_x znajdziemy przy pomocy wzorów, które poznaliśmy w par. 46. Mianowicie

$$u_x = \omega_y H_z - \omega_z H_y.$$

Lecz $\omega_y = \omega_b$, $\omega_z = \omega_c$, $H_z = H_c = C\omega_c$, i wreszcie $H_y = H_b = B\omega_b$ a zatem

$$u_x = (C - B)\omega_b\omega_c.$$

Wprowadzając to do (1), otrzymamy

$$\frac{dH_x}{dt} = A \frac{d\omega_a}{dt} - (B - C)\omega_b\omega_c,$$

a ponieważ z drugiej strony $\frac{dH_x}{dt} = \frac{Ldt}{dt}$, przeto wypadnie, jak poprzednio

$$A \frac{d\omega_a}{dt} - (B - C)\omega_b\omega_c = L.$$

Równania Eulera ściągną się do osi nieruchomych, ale do coraz innych, a mianowicie w każdej chwili do tych, na których przypadają wówczas osi główne punktu O , a zatem można uważać, że równania te dotyczą osi głównych, t. j. prostych, należących do ciała i poruszających się wraz z niem.

Prz. 1. Okazać, że równania (1) i (2) par. 125 wynikają z równań Eulera.

W przypadku, gdy na ciało siły nie działają, $L = M = N = 0$. Mnożąc równania Eulera odpowiednio przez ω_a , ω_b , ω_c i dodając, otrzymamy

$$A\omega_a d\omega_a + B\omega_b d\omega_b + C\omega_c d\omega_c = 0,$$

a mnożąc przez $A\omega_a$, $B\omega_b$, $C\omega_c$ i dodając, otrzymamy

$$A^2\omega_a d\omega_a + B^2\omega_b d\omega_b + C^2\omega_c d\omega_c = 0.$$

Całki tych równań są równaniami żądanymi.

Prz. 2. Punkt O ciała jest nieruchomy, i żadne siły z wyjątkiem reakcyi nie działają. Początkowo wektor ω leżał na przecięciu jednej

z płaszczyzn granicznych i płaszczyzny zx . Wyznaczyć ω w funkcji t .

Wyznaczamy naprzód ω_y w funkcji t . Według drugiego równania Eulera będzie

$$B \frac{d\omega_y}{dt} = -(A-C)\omega_x\omega_z \dots \dots \dots (2).$$

Dalej z (3) i (5) w par. 125, uwzględniając $H^2=BT$, otrzymamy

$$\begin{aligned} C(A-C)\omega_z^2 &= (A-B)T - B(A-B)\omega_y^2, \\ A(C-A)\omega_x^2 &= (C-B)T - B(C-B)\omega_y^2. \end{aligned}$$

Zakładamy $T=B\omega_1^2$. Znaczenie stałej ω_1 jest jasne; taką wartość przybierze szybkość kątowna, gdy osią obrotu stanie się prosta y . Przy pomocy tego związku z dwóch równań ostatnich otrzymamy

$$\omega_x^2\omega_z^2 = \frac{B^2n^2(\omega_1^2 - \omega_y^2)^2}{(A-C)^2}$$

gdzie $n^2 = \frac{(A-B)(B-C)}{AC}$. Przyjmiemy, że początkowo ω leży w tej ćwiartce płaszczyzny zx , w której współrzędne z i x są dodatnie. W takim razie ω_x, ω_z , a więc i $\omega_x\omega_z$ muszą być dodatnie, i

$$\omega_x\omega_z = \frac{Bn(\omega_1^2 - \omega_y^2)}{A-C}.$$

Wprowadzając to do (2), znajdziemy

$$\frac{d\omega_y}{dt} = -n(\omega_1^2 - \omega_y^2).$$

skąd

$$\omega_y = -\frac{\omega_1(e^{n\omega_1 t} - e^{-n\omega_1 t})}{e^{n\omega t} + e^{-n\omega_1 t}}.$$

Z tego równania wynika, że ω_y zbliża się asymptotycznie do $-\omega_1$. Jest to zgodne z prz. par. 128, według którego oś chwilowa zbliża się asymptotycznie do osi y .

Znajdziemy już teraz łatwo, że $\omega^2 = \omega_1^2 + n^2(\omega_1^2 - \omega_y^2)$; gdy ω_y zbliża się do ω_1 , to i ω zbliża się do ω_1 .

Prz. 3. Ciało obraca się około punktu nieruchomego pod działaniem sił jakichkolwiek. Dowieść, że $\frac{dT}{dt} = N\Omega$, gdzie T oznacza siłę żywą, N sumę momentów sił względem osi chwilowej i Ω szybkość kątową.

Prz. 4. Ciało jest w ruchu kulistym około punktu O i pozostaje pod działaniem sił, które w każdej chwili wywołałyby ruch około osi, prostopadłej do ówczesnej szybkości kątowej, gdyby wówczas ciało było w spokoju. Dowieść, że w tych warunkach szybkość kątowa pozostanie stałą co do wielkości tylko w takim razie, jeżeli momenty bezwładności względem dwóch osi głównych punktu O są równe.

Z przytoczonych okoliczności wynika, że

$$\frac{L\omega_a}{A} + \frac{M\omega_b}{B} + \frac{N\omega_c}{C} = 0.$$

Przy pomocy tego związku otrzymamy z równań Eulera

$$ABC \cdot \frac{d(\omega^2)}{dt} = 2(A-B)(B-C)(A-C).$$

Prz. 5. Prostopadłościan, posiadający krawędzie $2a$, $2a$, $2b$, obraca się około swego środka; działa nań jedynie siła ciężenia wraz z reakcją, a składowa szybkości kątowej w kierunku osi symetrii $=\omega_1$. Dowieść, że szybkość kątowa około każdej z pozostałych osi głównych zmienia się okresowo, i wyznaczyć długość okresu. Odp. $\frac{2\pi(b^2+a^2)}{\omega_1(b^2-a^2)}$.

Prz. 6. Płyta w kształcie jednej pętlicy lemniskaty może się poruszać około punktu węzłowego, i żadne siły na nią nie działają. Płyta otrzymała w pierwszej chwili szybkość kątową około jednej ze stycznych w punkcie węzłowym; wyznaczyć stosunek największej szybkości kątowej do najmniejszej. Odp. $\sqrt{\frac{3\pi+4}{3\pi}}$.

Oznaczmy przez x, y, z osi główne środka obrotu, i dajmy na to, że pierwsza przechodzi przez pole płyty, a trzecia jest prostopadła do jej płaszczyzny. Z dwóch równań Eulera wynika, że $\omega_x^2 + \omega_y^2 = \omega_0^2$, gdzie ω_0 oznacza szybkość początkową. Zatem $\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_z^2$, i ω osiąga maksimum i minimum jednocześnie z ω_z . Biorąc pod uwagę trzecie równanie Eulera oraz równanie siły żywej, dojdziemy łatwo, że ω_z osiąga maksimum, gdy $\omega_y = 0$.

Prz. 7. Na ciało sztywne, będące w ruchu kulistym, działa taka para sił, że kwadrat momentu ilości ruchu względem środka jest proporcjonalny do siły żywej. Dowieść, że płaszczyzna, zawierająca wektory H i ω , jest prostopadła do płaszczyzny, zawierającej pierwszy z nich oraz moment pary.

Z równań (1) i (2) w par. 125 oraz z równań Eulera otrzymamy

$$LH_x + MH_y + NH_z - D(L\omega_x + M\omega_y + N\omega_z) = 0.$$

Oznaczmy przez θ i ϕ kąty, które moment pary tworzy z H i ω , a przez φ kąt pomiędzy H i ω . Wiadomo, że $\omega \cos \varphi = \frac{T}{H}$ (par. 125, prz. 2). Stąd i z poprzedniego równania wynika $\cos \theta \cos \varphi = \cos \phi$. Związek ten jest dowodem wypowiedzianego twierdzenia.

Prz. 8. Ciało porusza się około nieruchomego punktu O . Momenty bezwładności względem osi głównych x, y, z tego punktu wynoszą A, A, C , i w kierunku osi z działa wciąż para o stałym momencie N . W pierwszej chwili ciało miało szybkość kątową ω_0 około osi y . Wyznaczyć stożek ruchomy osi chwilowych. Odp. $\frac{x}{y} = \tan \frac{(A-C)C\omega_0^2}{2AN} \frac{z^2}{x^2+y^2}$.

Z dwóch równań Eulera dojdziemy, że $\omega_x^2 + \omega_y^2 = \omega_0^2$, a z trzeciego, że $C\omega_z = Nt$; następnie otrzymamy ω_x, ω_y w funkcjach t . Należy zachować jednorodność równań.

Prz. 9. Punkt O ciała sztywnego jest nieruchomy, a momenty bezwładności względem jego osi głównych x, y, z wynoszą odpowiednio A, A i C . Ciało otrzymało szybkość kątową około osi, tworzącej z osią z kąt γ_0 , a dalej działa na nie para opóźniająca (np. opór powietrza), której moment jest skierowany zawsze według osi chwilowej i proporcjonalny do szybkości kątowej (współcz. proporcjonalności $=k$). Jak zmienia się z czasem kąt γ pomiędzy osią chwilową i osią z ?

Odp. $\tan \gamma = \tan \gamma_0 e^{\frac{k t (A-C)}{AC}}$. Jeżeli $A > C$, to oś chwilowa odchyła się coraz bardziej od osi z , zbliżając się asymptotycznie do płaszczyzny równych momentów. Jeżeli $A < C$, to oś chwilowa zbliża się asymptotycznie do osi z . Jeżeli wreszcie $A = C$, to kąt pomiędzy temi osiami jest stały.

132. Precesja regularna. Na fig. 70 prosta OC wyobraża oś symetrii jednorodnej bryły obrotu, a zarazem oś materialną, wystającą z tej bryły w obydwóch końcach. Koniec dolny osi jest osadzony w łożysku kulistym nieruchomem O , a koniec górny w łożysku ruchomem cylindrycznem C . To ostatnie

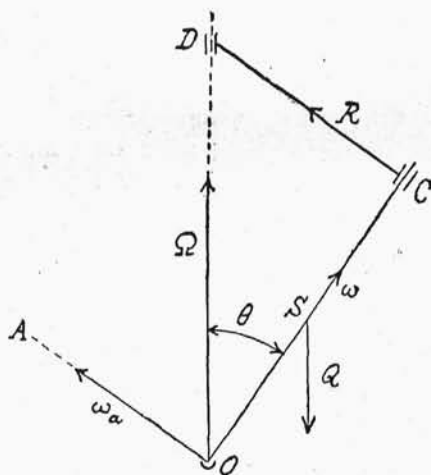


Fig. 70.

łączy się zapomocą sztywnego lekkiego ścięgna CD z łożyskiem D , nasadzonem na nieruchomą oś pionową OD , przechodzącą przez łożysko O . Ściągno to jest prostopadłe do OC . Przy takim

urządzeniu ciało może obracać się około swej osi OC i jednocześnie wraz z ostatnią około pionu OD .

Przypuśćmy, że środkiem ciężkości ciała jest punkt S , i że ciężar jego jest równy Q . Moment bezwładności względem osi OC oznaczmy przez C , a względem prostych, poprowadzonych przez O prostopadłe do OC przez A . Prócz tego niechaj będzie kąt $COD = \vartheta$, $OS = a$ i $OC = b$.

Nadajmy teraz ciału ruch obrotowy około OC i około OD ; pragniemy zbadać reakcję R , którą łożysko D wywiera za pośrednictwem ścięgna na koniec osi ciała C .

Jest rzeczą prawie oczywistą, że szybkości kątowne obydwóch ruchów obrotowych, które posiada ciało, są stałe. Można to uzasadnić ściśle w sposób następujący.

Całkowita szybkość kątowna ciała leży w płaszczyźnie OCD ; rozłożmy ją na składowe ω i ω_a w kierunkach prostych OC i OA , z których druga jest poprowadzona prostopadłe do OC w płaszczyźnie OCD . W takim razie podwójna siła żywa ciała wyniesie

$$A\omega_a^2 + C\omega^2.$$

Jest to oczywiście wielkość stała. Z drugiej strony dowiedziemy łatwo, że ω , t. j. rzut szybkości kątownej na oś OC , jest stały^{*)}. W tym celu poprowadźmy w ciele przez O prostopadłe do OC dwie proste, tworzące kąt prosty. Możemy je wraz z OC uważać za osi główne punktu O i zastosować do nich równania Eulera^{*)}. W trzecim z nich, dotyczącem osi OC , $B = A$, a prócz tego $N = 0$, gdyż momenty wszystkich sił, działających na ciało, względem OC są zerami. Wypada więc, że $\frac{d\omega}{dt} = 0$; z tego wynika, że ω , a więc i ω_a , są stałe.

Rozłożmy teraz całkowitą szybkość kątowną na składowe Ω i ω' w kierunkach OD i OC . Biorąc ich rzuty na OC i OA , znajdziemy, że

$$\omega = \omega' + \Omega \cos \vartheta, \quad \omega_a = \Omega \sin \vartheta.$$

Z tego wynika, że Ω i ω' są również stałe.

^{*)} Prosta OA jest ruchoma w ciele, a więc do niej równań tych stosować nie wolno.

Moment ilości ruchu ciała względem O , czyli wektor H , posiada w kierunku OC składową $C\omega$, a w kierunku OA składową $A\Omega \sin \vartheta$. Składowe te w czasie dt obróć się wraz z płaszczyzną OCD o kąt Ωdt około pionu OD , a zatem pierwsza otrzyma przyrost $C\omega \sin \vartheta \cdot \Omega dt$, prostopadły do płaszczyzny rysunku i zwrócony w stronę widza, a druga przyrost $A\Omega \sin \vartheta \cos \vartheta \cdot \Omega dt$ również prostopadły do tej płaszczyzny, lecz zwrócony w stronę odwrotną. Całkowity przyrost wektora H , mierzony w stronę widza, wyniesie $\Omega(C\omega - A\Omega \cos \vartheta) \sin \vartheta dt$.

Przyrost ten wytwarzają momenty sił Q i R względem O . Moment wypadkowy, mierzony w stronę widza, wynosi $Qa \sin \vartheta - Rb$, a zatem

$$\Omega(C\omega - A\Omega \cos \vartheta) \sin \vartheta dt = (Qa \sin \vartheta - Rb) dt$$

$$R = \frac{[Qa + \Omega(A\Omega \cos \vartheta - C\omega)] \sin \vartheta}{b} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Taka więc siła powinna działać w płaszczyźnie pionowej na punkt C prostopadle do osi OC , aby wskazany ruch mógł trwać stale. Siła ta jest równa zeru w dwóch przypadkach, po pierwsze gdy $\sin \vartheta = 0$, czyli, gdy kąt ϑ jest równy zeru lub π ; a więc w tym razie OC zajmuje położenie pionowe, a środek ciężkości może znajdować się wyżej lub niżej od O . Było to oczywiste z góry. Przypadek drugi jest daleko ciekawszy. Zachodzi on wówczas, gdy

$$Qa + \Omega(A\Omega \cos \vartheta - C\omega) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Ponieważ w tym razie ścięgno CD nie wywiera reakcji, możemy więc je usunąć, nie wywołując tem żadnej zmiany w ruchu ciała. Będzie ono w dalszym ciągu wirowało około osi symetrii OC z szybkością kątową $\omega' = \omega - \Omega \cos \vartheta$ (względem płaszczyzny OCD), obracając się jednocześnie z szybkością Ω około osi pionowej OD . Taki ruch pp. Klein i Sommerfeld w swem obszernem dziele o bąku nazwali *precesją regularną*. W podobny sposób porusza się w stosownych warunkach bąk dziecienny lub żyroskop.

Precesja regularna należy do najdziwniejszych zjawisk mechanicznych. Wydaje się ona czemś paradoksalnem, zwłaszcza gdy kąt ϑ jest bliski prostego. Wygląda tak, jak gdyby ciało nie podlegało działaniu siły ciężenia, bo nie spada, jak-

kolwiek jest podparte tylko w punkcie O , położonym zdala od środka ciężkości.

Gdy mamy dane ω i ϑ , to możemy z (2) wyznaczyć taką szybkość kątową Ω , przy której zachodzi precesja regularna. Wypadnie

$$\Omega = \frac{C\omega \pm \sqrt{C^2\omega^2 - 4AQa \cos \vartheta}}{2A \cos \vartheta} \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Widzimy, że istnieją dwie wartości szybkości Ω , przy której w danych warunkach zachodzi precesja regularna. Jeżeli $\vartheta > \frac{\pi}{2}$, inaczej mówiąc, gdy środek ciężkości ciała znajduje się niżej od O , to wartości te są w każdym razie rzeczywiste. Jeżeli $\vartheta < \frac{\pi}{2}$, a więc środek ciężkości leży nad O , to Ω jest rzeczywiste, jeżeli wyrażenie stojące pod znakiem pierwiastka jest większe od zera, czyli jeżeli

$$\omega^2 > \frac{A}{C} \cdot \frac{4 \cdot Qa \cos \vartheta}{C}.$$

Warunek ten wskazuje, że tem łatwiej jest doprowadzić ciało do precesyi regularnej w położeniu, wskazanem na fig. 70, im mniejszy jest stosunek $\frac{A}{C}$. Ołówek, oparty na zaostrozonym końcu, mógłby poruszać się w ten sposób tylko przy bardzo wielkiej szybkości kątowej około osi. W nim C , t. j. moment bezwładności względem osi, jest bardzo mały w stosunku do A .

Jeżeli $\vartheta < \frac{\pi}{2}$, to w (3) licznik jest dodatni, jakkolwiek znak położymy przed pierwiastkiem, a więc obydwie wartości Ω są dodatnie; znaczy to, że obydwie szybkości kątowe Ω i ω podczas precesyi regularnej mają kierunki takie, jak wskazują strzałki na fig. 70, albo obydwie odwrotne. Jeżeli $\vartheta > \frac{\pi}{2}$, to licznik w (3) jest dodatni lub ujemny stosownie do tego, czy przed pierwiastkiem stoi plus czy minus, mianownik zaś jest w każdym razie ujemny; znaczy to, że dwie wartości Ω , przy których zachodzi precesja regularna, posiadają kierunki odwrotne.

Jeżeli $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, to precesyi regularnej odpowiada tylko jedna (skończona) wartość Ω , a mianowicie

$$\Omega = \frac{Qa}{C\omega},$$

jak widać z (2).

Prz. 1. Kółko żyroskopu jest zrobione z cienkiego drutu; promień jego $= r$ i ciężar $= Q$. Oś OS i szprychy są lekkie. Kółko wiruje około osi OS z szybkością kątową ω i obraca się jednocześnie około pionu OD ; oś OS pozostaje poziomą, i odległość $OS = a$, gdzie S oznacza środek kółka. Wyznaczyć bezpośrednio, posługując się zasadą d'Alemberta, szybkość precesyi Ω , t. j. szybkość kątową około pionu OD .

Rozkładamy reakcję w O na składowe w kierunkach OS i OD . Pierwszą oznaczmy przez R , druga musi być równa Q , gdyż środek ciężkości S nie posiada przyspieszenia pionowego.

Podzielmy obwód kółka na elementy. Przyspieszenie każdego z nich ma trzy składowe: (1) przyspieszenie względne, (2) przyspieszenie unoszenia i (3) przyspieszenie Coriolisa. Odpowiednio do tego otrzymamy trzy układy sił odwrotnych do czynnych. Pierwszy równoważy się sam przez się, drugi posiada wypadkową na OS , która równoważy się z R , trzeci sprowadza się do pary, której moment jest prostopadły do płaszczyzny DOS i równy $mr^2\Omega\omega$, gdzie m oznacza masę kółka. Para ta musi się równoważyć z reakcją pionową i ciężarem, a zatem

$$mr^2 \cdot \Omega\omega = Qa.$$

Jest to zgodne z ostatnim wzorem w tekście, bo mr^2 jest momentem bezwładności kółka względem osi OS . Ostatecznie $\Omega = \frac{ag}{r^2\omega}$.

Prz. 2. Okrągła tarcza o promieniu a pozostaje w ruchu precesyi regularnej na zupełnie chropowatej płaszczyźnie poziomej. Płaszczyzna tarczy tworzy z pionem kąt α , a szybkość kątową precesyi jest równa Ω . Wyznaczyć promień koła, które zatacza środek tarczy.

Odp. $\frac{(4g - \Omega^2 a \cos \alpha) \tan \alpha}{6\Omega^2}$.

Przypuśćmy, że osią precesyi jest prosta OD ; oś tarczy OS przecina ją w punkcie O . Punkt ten jest nieruchomy, i przez niego przechodzi zawsze oś chwilowa, obecnie OB . Tworzymy wektor H względem tego punktu O . W tym celu rozkładamy całkowitą szybkość kątową według prostej OS oraz według równoległej przez O do średnicy

BE . Znajdziemy, że pierwsza $\omega = \frac{\Omega r}{a}$, gdzie r oznacza promień szukanym, a druga $= \Omega \cos \alpha$. Stosownie do tego wektor H posiada składowe

$C\omega$ i $A\Omega \cos \alpha$, gdzie C i A oznaczają odpowiednie momenty bezwładności. Wektor ten w czasie dt otrzyma przyrost

$$\Omega(C\omega \cos \alpha + A\Omega \sin \alpha \cos \alpha)dt \dots$$

Przyrost ten wytwarzają ciężar tarczy Q i reakcja w punkcie zetknięcia B . Ostatnią rozkładamy na składowe pionową i poziomą; pierwsza

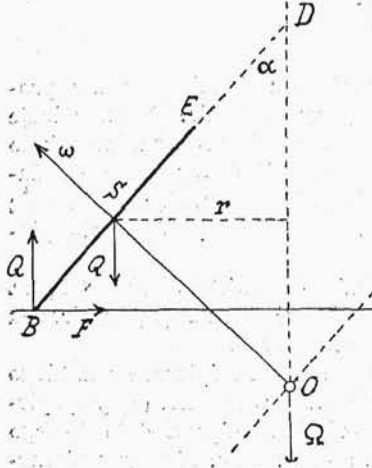


Fig. 71.

jest równa Q , bo środek ciężkości nie posiada przyspieszenia pionowego, a druga F nadaje temu środkowi przyspieszenie normalne, a więc jest równa $M\Omega^2 r$, gdzie M oznacza masę tarczy.

Prz. 3. Jednorodny prosty stożek kołowy toczy się na płaszczyźnie poziomej doskonale chropowatej, i ruch jest jednostajny; promień podstawy stożka jest równy a , a kąt wierzchołkowy 2α . Ile co najmniej sekund trwa całkowity obrót stożka około pionu, przechodzącego przez wierzchołek? Odp.

$$2\pi \sqrt{\frac{3a(1+5\cos^2\alpha)\cos\alpha}{5g(4-3\cos^2\alpha)}}.$$

Precesja regularna odbywa się tu pod działaniem pary sił, z których jedna jest ciężarem stożka, a druga reakcją płaszczyzny. Punkt przyłożenia reakcji z góry nie da się wskazać, w każdym razie leży on na tworzącej, którą stożek w danej chwili dotyka płaszczyzny. Znajdziemy łatwo, że ruch jest najszybszy, gdy ramię owej pary jest największe.

Prz. 4. Chropowata tarcza pozioma może się obracać około osi pionowej. Na tarczy spoczywa prosty stożek kołowy z wierzchołkiem na jej osi. Zaczynamy obracać tarczę ze stałą szybkością kątową ω . Dowieść (1), że stożek może z tarczy zaczerpnąć najwyżej $\frac{AC\omega^2}{2D}$ siły żywej

(w tem C , A i D oznaczają odpowiednio momenty bezwładności stożka względem osi, względem prostopadłej do osi przez wierzchołek i względem tworzącej), (2) że wówczas reakcja tarczy przechodzi przez środek ciężkości stożka. Prócz tego zbadać ruch w tym szczególnym przypadku, gdy $C=A$.

Prz. 5. Naczynie stożkowe, posiadające kąt wierzchołkowy α , obraca się ze stałą szybkością kątową Ω około pionowej tworzącej z . W naczyniu znajduje się kula o powierzchni chropowatej i promieniu a ; styka się ona stale z wewnętrzną powierzchnią stożka w punkcie C , położonym na tworzącej przeciwległej do z , a odległość tego punktu od wierzchołka stożka jest równa r . Wyznaczyć szybkość kątową, z którą kula obraca się około średnicy, przechodzą-

cej przez C względem płaszczyzny, przechodzącej przez C i z . Odp.

$$\frac{5[g - \Omega^2(r \sin \alpha - a \cos \alpha) \tan \alpha]}{2a\Omega}$$

Prz. 6. Kulę jednorodną o promieniu a oparto na chropowatym drucie, wygiętym w formę koła o promieniu c i umocowanym w płaszczyźnie poziomej; następnie nadano kuli impuls w kierunku poziomym, skutkiem czego obiega ona drut ze stałą szybkością kątową, i średnica, przechodząca przez punkt zetknięcia, tworzy z pionem

kąt α . Wyznaczyć tę szybkość kątową. Odp. $\frac{5g \tan \alpha}{7c - 5a \sin \alpha}$

Prz. 7. Żyroskóp, złożony z ciężkiego krążka, osadzonego na lekkiej osi, jest zawieszony na nici o długości a ; nić ta jest przymocowana do osi w odległości h od środka ciężkości żyroskopu, a ramię bezwładności krążka względem osi jest równe k . Krążek wiruje z szybkością kątową ω około osi, a oś pozostaje poziomą. Wyznaczyć kąt, który nić tworzy z pionem. Odp. Szukany kąt α czyni zadość równaniu $k^2 \omega^2 \tan \alpha = (a \sin \alpha \pm h) g h^2$.

133. Trwałość precesyi regularnej. Przypuśćmy, że w urządzeniu, wyobrażonem na fig. 70, ścięgno CD wydłuża się lub skraca, przyczem łożysko D powinno tak przesuwac się na pionie OD , aby ścięgno pozostawało prostopadłem do osi OC . Podczas tego wydłużania lub skracania oczywiście na koniec C osi ciała musiała działać prócz siły R jakaś nowa siła P w kierunku DC lub CD . Gdy już pożądana zmiana długości nastąpiła, usuńmy tę siłę P . Naturalnie zmienił się kąt ϑ , a zatem zmieniła się i siła R . Zbadamy, czy R ze wzrostem kąta ϑ wzrasta, czy maleje.

Naprzód zobaczymy, jak zmieniają się szybkości kątowe ω i Ω , gdy ϑ zmienia się w opisany sposób. Moment siły P względem osi OC jest zerem, a zatem dowiedzimy z łatwością przy pomocy trzeciego równania Eulera, jak w paragrafie poprzedzającym, że szybkość ω pozostaje stałą.

Siła P działała wciąż w płaszczyźnie OCD , podobnie jak siły Q i R , a zatem moment jej względem O był poziomy, i wektor H względem O otrzymywał wciąż przyrosty poziome. Z tego wynika, że koniec tego wektora pozostaje stale w niezmienniej płaszczyźnie poziomej, a więc rzut jego H' na pion OD jest wielkością stałą.

Ponieważ składowe wektora H w kierunkach OC i OA wynoszą odpowiednio $C\omega$ i $A\Omega \sin \vartheta$, otrzymamy przeto

$$C\omega \cos \vartheta + A\Omega \sin^2 \vartheta = H' \quad (1)$$