

IX. RUCH OBROTOWY CIAŁA SZTYWNEGO.

118. Równanie zasadnicze. Rozważymy teraz rozmaite rodzaje ruchów ciała sztywnego przy pomocy twierdzeń, wyłożonych w rozdziale poprzedzającym. Ruch postępowy stanowi przedmiot dynamiki punktu materialnego, zaczniemy więc od ruchu obrotowego.

Przypuścimy, że ciało obraca się około nieruchomej osi z pod działaniem sił $P_1, P_2 \dots$. W chwili t ciało posiadało, dajmy na to, szybkość kątową ω , a moment ilości ruchu względem osi z wynosił $I\omega$, gdzie I oznacza moment bezwładności ciała względem z . W ciągu następnego okresu dt ten moment ilości ruchu przybiera przyrost algebraiczny $d(I\omega)$; z drugiej strony wiemy, że siły $P_1, P_2 \dots$ wytworzą w tym samym czasie przyrosty momentu ilości ruchu $+N_1 dt, +N_2 dt \dots$, gdzie $N_1, N_2 \dots$ oznaczają ich momenty względem osi z . Będzie więc $d(I\omega) = \Sigma N dt$, albo

$$I \frac{d\omega}{dt} = \Sigma N \quad (1).$$

To samo równanie wynika także z zasady sił żywych. Siła żywa ciała w chwili t wynosi $\frac{I\omega^2}{2}$; w czasie dt przybierze ona przyrost $d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right)$, a siły $P_1, P_2 \dots$ wykonają jednocześnie prace $N_1 d\vartheta, N_2 d\vartheta \dots$, gdzie $d\vartheta$ oznacza kąt, o który w czasie dt obróciło się ciało. Będzie więc $d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = \Sigma N d\vartheta$, albo $I\omega d\omega = \Sigma N \omega dt$, gdyż $d\vartheta = \omega dt$. Z tego otrzymamy równanie (1).

Równanie to piszemy często w postaci

$$Mk^2 \frac{d\omega}{dt} = \Sigma N,$$

gdzie M oznacza masę ciała, k jego ramię bezwładności względem osi, a $\frac{d\omega}{dt}$ jest przyspieszeniem kątowym.

Jeżeli suma momentów sił $P_1, P_2 \dots$ względem osi obrotu jest równa zeru, to $\frac{d\omega}{dt} = 0$, a zatem ω jest wielkością stałą.

Prz. 1. Poziomy cylinder kołowy o masie M i promieniu a może obracać się swobodnie około swej osi. Na cylinder nawinięto sznur, a do końca sznura przyczepiono ciężar o masie m . O jaki kąt obróci się cylinder w ciągu t sek. od wyswobodzenia ciężaru? Odp. $\frac{mgt^2}{(M+2m)a}$.

Nie trzeba zapominać, że w tego rodzaju urządzeniach na cylinder działa nie ciężar mg , lecz naprężenie sznura.

Prz. 2. Lekki sznur przerzucono przez chropowaty poziomy cylinder, który może się obracać około swej osi, i na końcach zawieszono ciężary. Dowieść, że droga, którą każdy z nich przebiegnie w danym czasie, nie zależy od średnicy cylindra, lecz tylko od masy jego.

Prz. 3. Poziomy cylinder o masie M i promieniu a może obracać się swobodnie około swej osi. Na cylinder nawinięto lekki sznur, a do końca sznura przywiązano łańcuch o masie m i długości l . Sznur był wyprostowany pionowo, a zwinięty łańcuch leżał na podstawie, gdy wtem usunięto podstawkę. O jaki kąt obróci się cylinder, zanim łańcuch wyprostuje się całkowicie? Odp. $\frac{ml}{Ma}$.

W każdej chwili łańcuch dzieli się na dwie części: pierwsza, wyprostowana, spada z przyspieszeniem $a \frac{d\omega}{dt}$, druga, zwinięta, posiada przyspieszenie ziemskie.

Prz. 4. Tarcza kołowa jest osadzona na osi, około której może się obracać bez tarcia. Przyciskamy jej obwód do pasa maszynowego, posiadającego szybkość stałą. Przez pewien czas szybkość kątowa tarczy będzie wzrastała, aż wreszcie przybierze wartość, przy której poślizg ustaje. Dowieść, że w tym okresie tarcza zaczerpnie z pasa tyle siły żywej, ile energii przejdzie jednocześnie skutkiem tarcia w ciepło.

Prz. 5. Prostokątna deska $ABCD$, której bok $AD=a$, może się obracać około osi poziomej AB . W początku deska jest podparta i zajmuje położenie poziome, a na niej leży ciężki przedmiot. Jaka powinna być co najmniej odległość przedmiotu od osi AB , aby z chwilą usunięcia podparcia natychmiast ustało zetknięcie pomiędzy nim i deską. Odp. $\frac{2a}{3}$.

Prz. 6. Jednorodna belka o długości a spoczywa poziomo na

dwóch podstawkach, położonych symetrycznie względem środka. Jaka powinna być odległość pomiędzy podstawkami, aby reakcja jednej z nich nie uległa zmianie w chwili, gdy usuniemy drugą? Odp. $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Prz. 7. Kula jednorodna o promieniu r i gęstości μ wisi na sznurze. Obracamy ją n razy około średnicy pionowej i pozostawiamy samej sobie. Przyjmując, że moment, który sznur wywiera na kulę, jest proporcjonalny do kąta skręcenia, i że współczynnik proporcjonalności $= \lambda$, znaleźć kąt, o który obróci się kula w czasie t . Odp.

$$2\pi n \cos t \sqrt{\frac{15\lambda}{8\mu\pi r^5}}.$$

Prz. 8. Belka, wążąca Q , może się obracać około swego środka w płaszczyźnie pionowej; do końców jej jest przywiązany dwoma sznurami punkt materialny, a długości sznurów są równe długości belki. Jaki powinien być ciężar punktu, aby po przecięciu jednego sznura naprężenie drugiego w pierwszej chwili pozostało bez zmiany.

Odp. $\frac{2Q}{9}$.

119. Wahadło fizyczne. Wahadłem fizycznym nazywa się ciało ciężkie, które może się swobodnie obracać około osi poziomej i na które działają jedynie reakcje osi i siła ciężenia. Wahadło kołowe, złożone z punktu materialnego na sznurze, które opisaliśmy w par. 76, nazywa się w przeciwstawieniu do fizycznego matematycznym albo prostym.

Poprowadźmy w wahadle fizycznym przez środek ciężkości S płaszczyznę, prostopadłą do osi. Nazwiemy tę płaszczyznę *płaszczyzną wahań*. Punkt O , w którym płaszczyzna wahań przecina oś wahadła, nazywa się *punktem zawieszenia*. Odległość OS oznaczmy przez a .

Nadajmy wahadłu pewną szybkość kątową i pozostawmy je samemu sobie. Gdy prosta OS odchyli się od pionu o kąt ϑ , to moment siły ciężenia względem osi, lub względem punktu zawieszenia, będzie $Mga \sin \vartheta$, a zatem w myśl paragrafu poprzedzającego

$$M(k^2 + a^2) \frac{d\omega}{dt} = -Mga \sin \vartheta \quad (1);$$

k oznacza tu ramię bezwładności względem osi, przechodzącej przez środek ciężkości i równoległej do osi obrotu, a zatem $k^2 + a^2$ jest kwadratem ramienia bezwładności względem tej drugiej.

Weźmy na prostej OS punkt O_1 w odległości l od O .

Torem jego jest łuk koła, zatoczony z O promieniem l w płaszczyźnie wahań. Za początek toru obierzmy punkt najniższy i oznaczmy przez s łuk, przebieżony przez O_1 i mierzony od tego początku. W takim razie $\vartheta = \frac{s}{l}$, $\dot{\vartheta} = \frac{ds}{l dt} = \frac{1}{l} \frac{ds}{dt}$, zatem $\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{l} \frac{d^2s}{dt^2}$, i równanie (1) przybierze postać

$$\frac{k^2 + a^2}{la} \frac{d^2s}{dt^2} = -g \sin\left(\frac{s}{l}\right).$$

Możemy to uważać za równanie ruchu punktu O_1 .

Obierzmy O_1 w taki sposób, aby współczynnik po lewej stronie był równy jedności, czyli aby było

$$l = \frac{k^2 + a^2}{a} \quad (2).$$

W takim razie będzie

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g \sin\left(\frac{s}{l}\right).$$

Jest to równanie ruchu wahadła prostego, mieliśmy je w par. 76. Tak więc punkt O_1 , obrany w sposób powyższy, porusza się tak, jak wahadło proste o długości OO_1 . Innymi słowy, gdybyśmy całą masę ciała skoncentrowali w O_1 , to punkt ten poruszałby się tak, jak obecnie. Mówimy o takim wahadle prostym, że jest *równoważne* z danym wahadłem fizycznym, a punkt O_1 nazywamy *środkiem wahań* wahadła fizycznego.

Oczywiście okres wahań wahadła fizycznego musi być taki sam, jak okres wahań wahadła prostego równoważnego.

Przy małej amplitudzie ten okres $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ (par. 76), czyli

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + a^2}{ag}}.$$

Oznaczmy jeszcze odległość SO_1 przez a_1 . W takim razie $l = a + a_1$. Wstawiając to w (2), otrzymamy

$$aa_1 = k^2 \quad (3).$$

Ze związku tego wynika, że punkty O i O_1 odgrywają względem siebie role analogiczne; gdy O_1 uczynimy punktem zawieszenia, to O stanie się środkiem wahań, a okres będzie taki sam, jak poprzednio.

Każdy punkt prostej OS możemy uczynić punktem zawie-

szenia, i każdemu odpowiada inny punkt tej prostej, jako środek wahań; pomiędzy ich odległościami od S zachodzi zawsze związek (3). Punkтови S odpowiada oczywiście nieskończenie odległy punkt prostej. Tego rodzaju odpowiadanie sobie punktów na prostej zowie się *inwolucją punktów*, a punkt S *środkiem tej involucyi* *), powiemy więc, że punkty zawieszon są ze środkami wahań w involucyi.

Weźmy którąkolwiek parę punktów tej involucyi i zbudujmy prostokąt z ich odległości od S ; pole takiego prostokąta będzie według (3) równe k^2 . Ze wszystkich prostokątów o jednakowem polu najmniejszy obwód posiada kwadrat, a z tego wynika, że te dwa odpowiadające sobie punkty involucyi są najbliżej siebie położone, których odległości od S są równe k . Gdy jeden z nich obierzemy za punkt zawieszenia, to długość prostego wahadła równoważnego, równa $2k$, będzie możliwie najmniejsza, a zatem otrzymamy możliwie najkrótszy okres wahań.

Zatoczmy z punktu S w płaszczyźnie wahań okrąg promieniem k . Gdy obierzemy którykolwiek punkt tego okręgu za punkt zawieszenia, to zawsze otrzymamy jeden i ten sam okres wahań, a mianowicie dla danego wahadła i danej płaszczyzny wahań okres najkrótszy. Punktom, położonym wewnątrz tego koła albo na zewnątrz, odpowiadają okresy dłuższe.

W innych płaszczyznach wahań mogą istnieć punkty, którym odpowiadają jeszcze krótsze okresy. Chcąc otrzymać dla danego wahadła okres najkrótszy, należy poprowadzić płaszczyznę wahań prostopadle do osi najmniejszego momentu środka ciężkości i w tej płaszczyźnie zatoczyć koło promieniem, równym ramieniowi bezwładności względem owej osi. Gdy osią wahadła jest prostopadła w którymkolwiek punkcie tego okręgu do jego płaszczyzny, to okres wahań jest dla danego wahadła fizycznego najkrótszy.

Prz. 1. Sześcian jednorodny może się obracać około jednej z krawędzi, umocowanej w położeniu poziomem. Długość krawędzi jest równa $2a$. Wyznaczyć długość równoważnego wahadła prostego. Odp. $\frac{4a\sqrt{2}}{3}$.

*) Jest to tak zw. *inwolucja eliptyczna*, gdyż punkty podwójne są urojone.

Prz. 2. Toż samo, jeżeli osią obrotu jest przekątnia jednej ze ścian. Odp. $\frac{5a}{3}$.

Prz. 3. Końce jednorodnego pręta mogą się poruszać po gładkiej obręczy o promieniu r , ustawionej nieruchomo w płaszczyźnie pionowej. Pręt obejmuje łuk tej obręczy, wynoszący 120° . Wyznaczyć długość równoważnego wahadła prostego. Odp. r .

Prz. 4. Łuk koła o promieniu r może się wahać około osi, przechodzącej przez środek łuku (nie koła) i prostopadłej do jego płaszczyzny. Wyznaczyć długość równoważnego wahadła prostego. Odp. $2r$.

Prz. 5. Wahadło ma być zrobione z pręta o długości a , którego gęstość zmienia się proporcjonalnie do odległości od jednego z końców. W jakiej odległości od środka ciężkości należy obrać punkt zawieszenia, aby okres wahań był jak najkrótszy? Odp. $\frac{a}{3\sqrt{2}}$.

Prz. 6. Dwa wahadła fizyczne o masach m_1, m_2 są osadzone na jednej osi poziomej. Odległości środków ciężkości od osi są odpowiednio równe h_1 i h_2 , a długości równoważnych wahadeł prostych l_1 i l_2 . Wahadła te połączono sztywno, gdy środki ciężkości znalazły się w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez oś. Wyznaczyć dla tego wahadła złożonego długość równoważnego wahadła prostego. Odp. $\frac{m_1 h_1 l_1 + m_2 h_2 l_2}{m_1 h_1 + m_2 h_2}$.

Prz. 7. Dwie sztaby AB i BC są połączone sztywno w B pod kątem prostym i mogą się obracać około tego punktu w płaszczyźnie pionowej. Ustawiamy sztabę AB poziomo i następnie pozostawiamy układ samemu sobie. Dowieść, że amplituda będzie dwa razy większa od kąta, który AB tworzy z poziomem w stanie równowagi.

120. Reakcje łożysk. Będziemy uważali oś, około której wiruje ciało sztywne, za sztywną linię materalną, należącą do owego ciała. Podobne urządzenie posiadają różne obracające się części maszyn, jak koła rozpędowe, pasowe, zębate i t. d. Są one zazwyczaj sztywno umocowane na wale, a wał jest osadzony w łożyskach nieruchomych.

Dajmy na to, że oś ciała wirującego jest osadzona w dwóch łożyskach; wystarcza to całkowicie do unieruchomienia jej w przestrzeni. Rola mechaniczna łożysk polega jedynie na tem, że wywierają one na oś pewne reakcje. Rozważymy teraz, w jaki sposób reakcje te dają się wyznaczyć. Aby ułatwić sprawę będziemy uważali łożyska za punkty; w takim razie każde z nich może wywierać tylko jedną siłę, i zadanie sprowadza się do wyznaczenia dwóch sił, przyłożonych w danych punktach osi.

Zbadamy naprzód przypadek szczególny, w którym na ciało nie działają żadne siły z wyjątkiem owych reakcji. Wiemy z paragrafu poprzedzającego, że w takim razie szybkość kątowa jest stała. Oznaczmy ją przez ω .

Obierzmy na osi obrotu środek redukcji O i wyznaczmy dlań wektory G i H . Prócz tego zredukujmy obydwie reakcje łożysk do siły wypadkowej, przyłożonej w O i do pary. Tę siłę wypadkową oznaczmy przez R , a moment pary przez N . Siła R nie wywiera wpływu na wektor H , gdyż moment jej względem O jest zerem, z drugiej strony para N nie oddziałuje wcale na wektor G , gdyż jej siły wytwarzają przyrosty równe i odwrotne tego wektora. Tak więc wektor G zmienia się jedynie pod działaniem siły R , a wektor H pod działaniem pary N , i zadanie nasze rozpada się na dwa zadania odrębne, a mianowicie wyznaczenie siły R według zmian, zachodzących w wektorze G , i wyznaczenie pary N według zmian wektora H .

Wektor G jest równoległy do szybkości środka ciężkości S ciała, czyli prostopadły do płaszczyzny, przechodzącej przez S i oś obrotu. Co do wielkości $G = Ma\omega$, gdzie M oznacza masę ciała i a odległość środka ciężkości od osi. Można uważać, że wektor G jest sztywno połączony z ciałem i obraca się wraz z nim około osi z szybkością kątową ω .

W czasie dt wektor G obróci się o kąt ωdt , czyli przybierze przyrost geometryczny $G\omega dt$ w kierunku, w którym porusza się koniec jego; przyrost ten jest równy pędowi Rdt , a zatem $R = G\omega$, czyli

$$R = Ma\omega^2.$$

Co do kierunku siły R jest prostopadła do osi, leży w płaszczyźnie, przechodzącej przez oś oraz środek ciężkości, i jest odwrócona od tego środka.

Do tego samego moglibyśmy dojść bardzo łatwo przy pomocy zasady ruchu środka ciężkości. Ponieważ ω jest stałe,

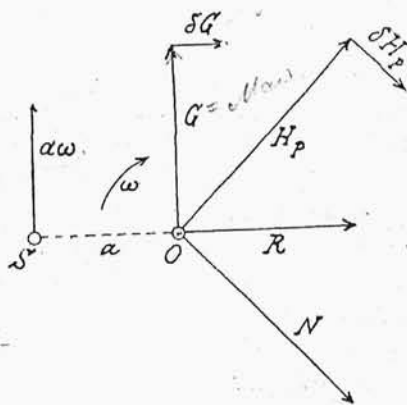


Fig. 61.

zatem środek ciężkości posiada tylko przyspieszenie normalne, skierowane prostopadłe do osi obrotu i wynoszące $a\omega^2$. Przyspieszenie to nadałaby masie M siła R , z czego wynika ta sama wielkość jej i kierunek, które znaleźliśmy poprzednio.

Siłę R wywierają obydwie łożyska razem; aby znaleźć, jaki w tem udział bierze każde z nich, trzeba tylko rozłożyć R na dwie składowe równoległe R' i R'' , przyłożone w łożyskach. Jeżeli środek redukcji O został obrany w jednym z łożysk, to łożysko to wywiera całkowitą siłę R .

Wektor H , podobnie jak G , nie zmienia się co do wielkości, lecz tylko wiruje około osi obrotu z szybkością kątową ω . Rozłożymy go na dwie składowe, a mianowicie w kierunku osi obrotu i w kierunku prostopadłym do osi. Pierwszą oznaczmy przez H_0 , drugą przez H_p . Składowa H_0 nie zmienia się ani pod względem wielkości, ani pod względem kierunku a zatem para N wytwarza tylko przyrost składowej H_p .

W czasie dt wektor H_p przybierze przyrost geometryczny $H_p\omega dt$ w kierunku szybkości końca, i przyrost ten musi być równy Ndt , a zatem

$$N = H_p\omega.$$

Moment ten jest prostopadły do płaszczyzny, przechodzącej przez wektor H i osi obrotu, zwrócony zaś jest w stronę, w którą porusza się koniec H_p .

Siły, tworzące parę N (oznaczymy je przez P' , P''), są przyłożone w łożyskach; mając moment N , możemy je z łatwością wyznaczyć co do wielkości i kierunku.

Tak więc jedno łożysko wywiera siły R' i P' , a drugie R'' i P'' . Znając te składowe, wyznaczymy reakcję wypadkową każdego łożyska. Jest ona oczywiście prostopadła do osi i obraca się około niej z szybkością kątową ω .

Rozważymy pewne ważne przypadki szczególne. Przypuśćmy naprzód, że obrany przez nas środek redukcji O jest punktem głównym osi obrotu. W takim razie wektor H leży na osi obrotu (par. 114), nie otrzymuje on żadnych przyrostów, a więc moment N jest zerem. Istnieje tylko siła wypadkowa R , i łożyska wywierają reakcje równoległe R' i R'' .

Jeżeli przytem ten główny punkt O leży w jednym z łożysk, to wywiera ono całkowitą siłę R . Drugie łożysko nie

wywiera żadnej reakcji, a więc nie odgrywa żadnej roli. Gdybyśmy je usunęli, to ciało poruszałoby się w dalszym ciągu zupełnie tak samo, jak poprzednio. W tym przypadku oś obrotu, jedna z osi głównych punktu O , nazywa się także osią swobodną tego punktu. Nazwa pochodzi stąd, że ciało bez zewnętrznego przymusu może się obracać około tej prostej, jeżeli tylko jest unieruchomiony punkt O . Gdybyśmy chcieli, aby ciało wirowało stale około jakiejś innej prostej, przechodzącej przez O , lecz nie będącej jego osią główną, to trzeba by ruch ten wymusić, ustawiając drugie łożysko, albo wywierając na oś odpowiednie siły.

Przypuśćmy teraz, że środek ciężkości ciała leży na osi obrotu. Jeżeli ta prosta nie jest osią główną ciała, to, jak wiemy (par. 104), nie posiada ona punktu głównego w odległości skończonej, a zatem moment N nie może być zerem. Natomiast nie istnieje siła wypadkowa R , gdyż środek ciężkości pozostaje w spokoju, a zatem wektor G jest stale równy zeru. Tak więc w tym razie łożyska wywierają reakcje P' , P'' równe i odwrotne.

Jeżeli oś obrotu jest osią główną środka ciężkości, to zarówno siła R , jak i moment N , są zerami. Obydwa łożyska nie wywierają na oś żadnych reakcji, i można by je usunąć. Dla tego też osi główne środka ciężkości nazywają się także osiąmi swobodnymi ciała.

Twierdzenia powyższe wyrażają zasadniczą właściwość dynamiczną osi głównych.

× **121. Reakcje łożysk w ruchu przyspieszonym.** Rozważymy teraz przypadek ogólny, w którym na wirujące ciało działają siły P_1, P_2, \dots . Będziemy postępować, jak poprzednio. Obieramy na osi obrotu środek redukcji O , wyznaczamy dlań wektory G, H i redukujemy siły P_1, P_2, \dots oraz reakcje łożysk. Pierwsze sprowadzą się do siły Q i pary o momencie L , drugie do siły R i momentu N .

Otrzymaliśmy więc wektory G, H, Q, R, L i N , posiadające wspólny początek O ; z nich G i N są prostopadłe do osi, gdyż wektor G jest równoległy do szybkości środka ciężkości, a siły, tworzące parę N , są przyłożone w punktach osi, przeto płaszczyzna pary przechodzi przez oś, i moment musi być do osi prostopadły. Każdy z wektorów pozostałych rozkładamy na

dwie składowe w kierunku osi i w kierunku prostopadłym, wyróżniając te składowe odpowiednio wskaźnikami o i p .

Wypada zwrócić uwagę, że L_0 jest to suma momentów sił $P_1, P_2 \dots$ względem osi obrotu, a zatem

$$Mk^2 \frac{d\omega}{dt} = L_0.$$

Na wektor G wywierają wpływ tylko siły, a na wektor H tylko momenty, ale siły Q_0 i R_0 nie wywierają wpływu nawet na wektor G , gdyż ten nie przybiera przyrostów w kierunku osi. Z tego wynika, że siły te się równoważą, a zatem reakcja osiowa R_0 jest równa Q_0 , czyli równa sumie rzutów sił $P_1, P_2 \dots$ na oś obrotu.

Tę reakcję R_0 wogóle wywierają obydwie łożyska razem, ale nie da się rozstrzygnąć, jaki w tem udział bierze każde z nich, jeżeli uważamy oś za ciało sztywne. Siły osiowe, wywierane przez poszczególne łożyska, należą do tak zw. sił *statycznie niewyznaczalnych*. Zresztą łożyska można urządzić i w taki sposób, aby jedno z nich wywierało całkowitą reakcję R_0 , i tak też zazwyczaj dzieje się w technice.

Wektor G zmienia się nie tylko co do kierunku, ale i co do wielkości; w czasie dt przybierze on przyrost prostopadły $G\omega dt = Ma\omega^2 dt$, a obok tego przyrost $dG = Ma d\omega$ w swym kierunku. Pierwszy z tych przyrostów leży w płaszczyźnie, przechodzącej przez środek ciężkości i oś obrotu, a drugi jest do niej prostopadły. Wytwarzają je siły Q_p i R_p , a zatem sumy rzutów tych sił na kierunki przyrostów powinny być odpowiednio równe $Ma\omega^2$ i $Ma \frac{d\omega}{dt}$. Z tego wynikają dwa równania, określające wielkość i kierunek reakcji R_p .

W analogiczny sposób wyznacza się moment N , który łącznie ze znanym momentem L_p wytwarza przyrosty $H_p\omega dt$ oraz dH_p wektora H_p . Jeżeli O jest punktem głównym osi, to H_p jest zerem i nie przybiera żadnych przyrostów, a zatem moment N musi być równy i odwrotny do L_p .

Znając R_p i N , wyznaczymy, jak poprzednio, reakcje, które łożyska wywierają w kierunkach prostopadłych do osi.

Często bywa dogodny inny sposób postępowania; opisując

go, pominiemy siły osiowe Q_o i R_o , z którymi załatwiliśmy się już wyżej.

Wyznaczamy naprzód takie dwie siły, które przyłożone do osi w łożyskach, wytworzyłyby same, bez udziału sił P_1, P_2, \dots , wszystkie przyrosty, jakie istotnie przybierają wektory G oraz H_p . Siły te nazwiemy *reakcjami dynamicznymi łożysk*. Oczywiście reakcje dynamiczne łącznie z parą L_o nadały by ciału taki sam ruch, jaki posiada ono w rzeczywistości.

Następnie wyznaczamy dwie inne siły, które przyłożone w łożyskach zrównoważyłyby siłę Q_p oraz parę L_p . Takie siły nazwiemy *reakcjami statycznymi*. Reakcje statyczne wraz z siłami P_1, P_2, \dots są oczywiście równoważne z parą L_o .

Możemy uważać, że jednocześnie działają siły P_1, P_2, \dots , reakcje statyczne i reakcje dynamiczne, gdyż siły P_1, P_2, \dots z reakcjami statycznymi sprowadzają się do pary L_o , a ta para łącznie z reakcjami dynamicznymi wywołuje dany ruch ciała. Z tego wynika, że reakcja, którą istotnie wywiera łożysko, jest wypadkową reakcji statycznej i reakcji dynamicznej.

Łatwo jest zrozumieć, że ani reakcje statyczne, ani reakcje dynamiczne nie zależą od położenia środka redukcji O , możemy przeto dla każdego z tych rodzajów reakcji obrać inny punkt redukcji, co pozwala nieraz znacznie uprościć sprawę.

Przypuśćmy dla przykładu, że oś obrotu posiada punkt główny O , i że na ciało działa tylko jedna siła P , prostopadła do osi. Za środek redukcji dla reakcji dynamicznych obierzemy punkt O . Wektor H leży na osi obrotu, a zatem reakcje dynamiczne posiadają jedną wypadkową R , przyłożoną w O i wytwarzającą obydwie przyrosty wektora G .

Za środek redukcji reakcji statycznych obierzemy punkt O' , w którym oś przecina prostopadłą do niej płaszczyznę, poprowadzoną przez P . W takim razie zamiast siły P otrzymamy parę, której moment L leży na osi obrotu, i siłę P , przyłożoną w O' ; łatwo jest dojść, że reakcje statyczne posiadają także wypadkową, przyłożoną w O' , równą i odwrotną do P .

Rozłożywszy każdą z tych wypadkowych na składowe równoległe, przyłożone w łożyskach, znajdziemy reakcję istotną każdego łożyska.

Prz. 1. Sztaba o długości $2a$, ważąca Q , jest umocowana w punkcie środkowym O na osi poziomej i tworzy z nią kąt α . Oś posiada dwa łożyska, każde w odległości b od O , i obraca się z szybkością kątową ω . Wyznaczyć reakcje łożysk.

Reakcje statyczne są obydwie skierowane pionowo w górę, i każda z nich wynosi $\frac{Q}{2}$. Aby znaleźć reakcje dynamiczne, wyznaczamy naprzód według par. 114 wektor H . Jest on skierowany prosto-

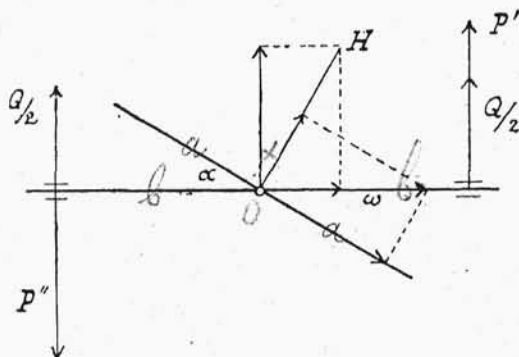


Fig. 62.

padle do sztaby i wynosi $\frac{Qa^2\omega\sin\alpha}{3g}$. W czasie dt wektor ten przybiera przyrost $H\cos\alpha\cdot\omega dt$; na rysunku ten przyrost jest skierowany od widza. Reakcje dynamiczne składają się z pary sił o momencie $H\cos\alpha$, a każda z sił pary $=\frac{Qa^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha}{6bg}$. Siły te P' i P'' leżą zawsze w płaszczyźnie, przechodzącej przez oś i sztabę. Całkowita reakcja każdego łożyska zmienia się w zależności od położenia sztaby, osiągając maksimum lub minimum, gdy sztaba przechodzi przez płaszczyznę pionową, przeprowadzoną przez oś.

Prz. 2. Koło rozpędowe zostało umontowane w taki sposób, że płaszczyzna jego tworzy z osią wału kąt α . Moment bezwładności koła względem średnicy $=A$, i względem osi symetrii $=C$. Wyznaczyć moment pary, działającej na łożyska, gdy wał posiada stałą szybkość kątową ω . Odp. $(C-A)\omega^2\sin\alpha\cos\alpha$.

Prz. 3. Prosty kołowy cylinder o masie m , promieniu a i wysokości h wiruje około tworzącej AB , która zachowuje położenie pionowe, jakkolwiek tylko górny koniec A jest umocowany. Wyznaczyć reakcję w tym punkcie A . Odp. $\frac{mg}{h}\sqrt{h^2+4a^2}$.

Można uważać, że i w B , lub w jakimś innym punkcie prostej AB , istnieje łożysko, lecz tam reakcje statyczne równoważą się z dynamicznymi.

Prz. 4. Jednorodna płyta posiada kształt prostokątnego, równoramiennego trójkąta ABC . Kąt B jest prosty i $AB=a$. Płyta wiruje około przyprostokątnej AB , zachowując położenie pionowe, i tylko górny koniec B jest umocowany. Wyznaczyć szybkość kątową. Odp.

$$2\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Za środek redukcji dogodnie będzie obrać wierzchołek B . Potrzebna jest tylko składowa wektora H w kierunku BC ; można łatwo wyznaczyć ją bezpośrednio, dzieląc płytę na paski elementarne i sumując momenty ilości ruchu wszystkich pasków.

Prz. 5. Ciało ciężkie może się obracać około poziomej osi AB , dla której A jest punktem głównym. Ruch rozpoczął się w położeniu, w którym płaszczyzna ABS , przechodząca przez środek ciężkości S , była pozioma. Dowieść, że, gdy płaszczyzna ABS tworzy z pionem kąt Φ , to wypadkowa reakcji dynamicznych tworzy z ową płaszczyzną kąt φ taki, że $\tan \varphi = \frac{1}{2} \tan \Phi$.

Prz. 6. Czwartka AOB koła o promieniu a obraca się około promienia OA , ustawionego poziomo. Dowieść, że reakcje łożysk są równoważne z dwiema siłami, z których jedna jest równa ciężarowi płyty i działa na punkt promienia OA , położony w odległości $\frac{4a}{3\pi}$ od środka, a punkt przyłożenia drugiej dzieli ten promień w stosunku 3:5.

Aby wyznaczyć reakcje dynamiczne, potrzebaby znaleźć naprzód punkt główny promienia OA . Zamiast tego można obrać za środek redukcji punkt O i wyznaczyć składową wektora H w kierunku OB , rozkładając płytę na paski elementarne równoległe do OB .

Prz. 7. Końce sztaby o długości $2a$ mogą przesuwać się po dwóch gładkich prętach x i y , z których pierwszy jest poziomy, drugi pionowy, i obydwie leżą w jednej płaszczyźnie. Cały ten układ obraca się ze stałą szybkością kątową ω około prostej y . Jaki kąt tworzy sztaba z prętem x , gdy pozostaje względem prętów w spokoju. Odp. $\frac{\pi}{2}$ lub $\arcsin \frac{3g}{4a\omega^2}$. To drugie położenie istnieje tylko w takim razie, jeżeli $\omega^2 > \frac{3g}{4a}$.

Prz. 8. Tarcza eliptyczna jest utrzymywana w płaszczyźnie pionowej zapomocą dwóch poziomych kołków, umocowanych na jednym poziomie, i przechodzących przez otwory tarczy w ogniskach. Jaki powinien być mimośród liczbowy elipsy, aby po usunięciu jednego kołka reakcja drugiego nie uległa zmianie? Odp. $\sqrt{\frac{2}{5}}$.

5/6 122. **Środek uderzeń.** Poprowadźmy w ciele wirującym płaszczyznę F przez środek ciężkości S i przez oś obrotu u .

Przypuśćmy, że na ciało działa jedna siła P , prostopadła do płaszczyzny F i przyłożona w jej punkcie A . Oznaczmy

odległości punktów S i A od osi u odpowiednio przez a i $a+x$, a ramię bezwładności względem prostej u' , przechodzącej przez S i równoległej do u , przez k . W takim razie będzie

$$M(k^2 + a^2) \frac{d\omega}{dt} = P(a+x) \quad \dots \quad (1)$$

Dajmy na to, że oś obrotu posiada punkt główny, i że jest nim rzut O punktu A na tę prostą. Obierzemy O za śro-

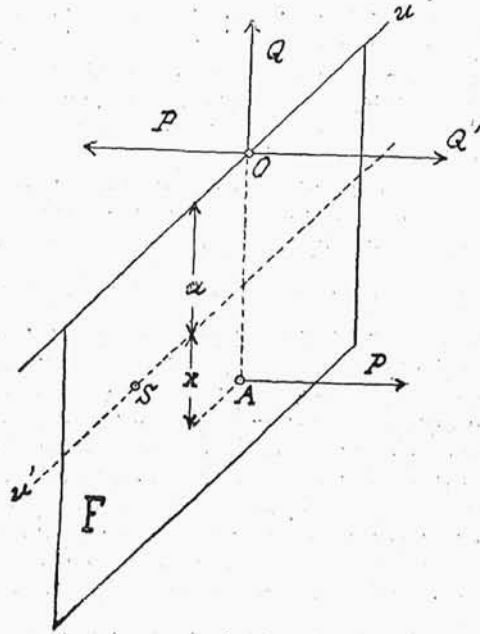


Fig. 63.

dek redukcji dla wszystkich reakcji. Reakcje dynamiczne sprowadzają się do jednej siły wypadkowej; rozłożymy ją od razu na składowe Q i Q' , z których pierwsza leży w płaszczyźnie F , a druga jest do niej prostopadła. Znajdziemy, że

$$Q = Ma\omega^2, \quad \dots \quad (2)$$

a $Q' = Ma \frac{d\omega}{dt}$, rugując zaś $\frac{d\omega}{dt}$ przy pomocy (1), otrzymamy

$$Q' = \frac{Pa(a+x)}{k^2 + a^2} \quad \dots \quad (3)$$

Reakcje statyczne sprowadzają się również do jednej wy-

padkowej, równej i odwrotnej do siły P . Wypadkową siły Q' i tej reakcyi statycznej oznaczmy przez R ; oczywiście $R = Q' - P$, albo, gdy uwzględnimy (3),

$$R = \frac{P(ax - k^2)}{k^2 + a^2} \dots \dots \dots (4).$$

Tak więc całkowite reakcje łożysk sprowadzają się do dwóch sił Q i R . Pierwsza nie zależy bezpośrednio od siły P , lecz tylko od szybkości kątowej, którą ciało posiada w danej chwili, natomiast druga jest niezależna od szybkości kątowej, a zależy jedynie od siły P . Jeżeli ciało pozostawało w spokoju, gdy siła P zaczęła działać, to w pierwszej chwili Q było zerem, a R od razu osiągnęło wartość, wymienioną w (4).

Jeżeli punkt A jest tak położony, że

$$x = \frac{k^2}{a} \dots \dots \dots (5),$$

to $R = 0$, i reakcje łożysk sprowadzają się do siły Q . Można powiedzieć, że siła P w tym przypadku nie oddziałuje wcale na łożyska. Taki punkt A nazywa się *środkiem uderzeń*. Gdy porównamy (5) z (3) w paragrafie 119, to przekonamy się, że środek uderzeń leży w tej samej odległości od osi, w której by leżał środek wahań, gdyby dane ciało uczynić wahadłem fizycznym, pozostawiając je na tej samej osi. Jeżeli oś obrotu jest równoległa do osi głównej ciała, to, jak wiemy, punkt główny O znajduje się w rzucie środka ciężkości, a zatem środki uderzeń i wahań leżą razem.

Jeżeli x jest większe od $\frac{k^2}{a}$, t. j. jeżeli punkt przyłożenia siły P leży dalej od osi, niż środek uderzeń, to R jest dodatnie; znaczy to, że łożyska wywierają na oś siły prostopadłe do płaszczyzny F w kierunku siły P . Jeżeli punkt przyłożenia siły P znajduje się bliżej osi, niż środek uderzeń, albo po drugiej stronie osi, to reakcje łożysk mają kierunek odwrotny.

Środek uderzeń istnieje tylko w takim razie, gdy oś obrotu posiada punkt główny.

Twierdzenia powyższe dotyczą oczywiście w równej mierze sił chwilowych, i właśnie w tym przypadku posiadają doniosłość szczególną. Gdy ciało, osadzone na osi, dozna uderzenia w środku uderzeń w kierunku prostopadłym do płaszczy-

zny F , to reakcyje łożysk w pierwszej chwili nie doznają zmiany. Jeżeli ciało było poprzednio w spokoju, i żadne inne siły na nie nie działają, to podczas uderzenia łożyska nie wywierają żadnych reakcyi, a zatem nie odgrywają żadnej roli. Gdyby ciało było swobodne, to zaczęłoby się obracać około tej samej osi u ; byłaby to pierwsza oś chwilowa.

Dla przykładu wyobraźmy sobie wahadło fizyczne, urządzone na podstawie ruchomej, np. na wózku kolejowym, i niech oś będzie prostopadła do szyn. Przypuśćmy, że wahadło pozostaje w spokoju, gdy uderza je pocisk, biegnący z szybkością, równoległą do szyn. Jeżeli pocisk trafi niżej od środka uderzeń, to łożyska, połączone sztywno z wózkiem, wywrą na oś w krótkim okresie uderzenia bardzo wielkie reakcyje, czyli siły chwilowe, w kierunku szybkości pocisku, a zatem oś wywrze na łożyska siły odwrotne, i wózek potoczy się w kierunku odwrotnym do szybkości pocisku. Jeżeli pocisk trafi wyżej od środka uderzeń, to wózek potoczy się w tę samą stronę, w którą biegł pocisk. Jeżeli wreszcie uderzenie nastąpi w samym środku uderzeń, to wózek w pierwszej chwili pozostanie w spokoju.

Niech będzie jeszcze cienka płyta, leżąca na płaszczyźnie poziomej. Wprawmy ją w ruch zapomocą uderzenia poziomego, skierowanego wzdłuż pewnej określonej prostej p . Twierdzenia powyższe pozwalają łatwo wyznaczyć najpierwszy środek chwilowy O .

Gdybyśmy osadzili płytę na pionowej osi u , przechodzącej przez ten środek chwilowy, to w pierwszej chwili ruch płyty byłby taki sam, jak i bez tej osi. Z tego wynika, że oś u nie wywiera podczas uderzenia żadnych reakcyi, a więc uderzenie nastąpiło w jej środku uderzeń A ; środek ten jest oczywiście rzutem punktu O na prostą p . Prosta AO przechodzi przez środek ciężkości S , gdyż punkt ten musi leżeć w płaszczyźnie, przechodzącej przez A i u .

Tak więc znajdziemy punkt A , prowadząc prostopadłą z S do p , a środek chwilowy leży na tejże prostopadłej po drugiej stronie środka ciężkości w odległości $\frac{k^2}{AS}$.

Narzędzia, przeznaczone do uderzeń, jak młoty, siekiery i t. d. powinny być tak urządzone, aby środek uderzeń przypadał mniej więcej w tem miejscu, które obejmuje dłoń ro-

botnika. Jeżeli warunek ten nie jest spełniony, to ręka doznaje nieprzyjemnych wstrząśnięć.

Prz. 1. Sztaba AOB , która może się obracać około O , otrzymuje uderzenie w sam koniec A , wymierzone w kierunku do niej prostopadłym. Okazać, że sztaba zaczerpnie najwięcej siły żywej, jeżeli A jest środkiem uderzeń punktu O .

Prz. 2. Zwykle wysokość band bilardowych jest równa 0,7 średnicy kul. W jakim celu obrano taki stosunek?

Prz. 3. Tarcza kołowa, której środek leży w O , a promień $= r$, otrzymuje uderzenia w punkt A obwodu i może się obracać około cięciwy prostopadłej do AO . W jakiej odległości od środka powinna być ta cięciwa, aby uderzenia nie wywoływały wstrząśnięć? Odp. $\frac{r}{4}$.

Prz. 4. Trójkąt prostokątny ABO , w którym $OB=a$ i $OA=b$, może się obracać około przyprostokątnej OB . Wyznaczyć środek uderzeń.

Należałoby wyznaczyć naprzód ramię bezwładności względem OB oraz punkt główny tej przyprostokątnej, ale można znaleźć żądany punkt i bezpośrednio. Obieramy proste OB , OA za osi x , y i wyznaczamy momenty ilości ruchu H_x i H_y , które powstaną względem takich osi po uderzeniu. Ponieważ oś obrotu ma nie wywierać żadnych reakcji, przeto $H_x=P\eta$ i $H_y=P\xi$, gdzie ξ , η oznaczają współrzędne punktu szukanego, a P impuls, który łatwo wyrazić w funkcji szybkości kątowej. Z równań tych wypadnie $\xi=\frac{a}{4}$, $\eta=\frac{b}{2}$.

Prz. 5. Ćwiartka koła AOB o promieniu r może się obracać około promienia OA . Wyznaczyć środek uderzeń. Odp. Odległości szukanego punktu od OA i OB wynoszą odpowiednio $\frac{3\pi r}{16}$, $\frac{3r}{8}$.

Prz. 6. W jaki sposób należy uderzyć tarczę okrągłą, leżącą na gładkim stole, aby zaczęła się obracać około jednego z punktów obwodu? Odp. Linia uderzenia powinna dzielić prostopadłą średnicę w stosunku 3:1.

Prz. 7. Wahadło składa się z kuli o promieniu a i masie M , osadzonej na końcu pręta o długości b i masie m . Wyznaczyć środek uderzeń. Odp. Szukana odległość x od punktu zawieszenia wyznacza się z równania

$$\left[M(a+b) + \frac{mb}{2} \right] x = M \left[\frac{2a^2}{5} + (a+b)^2 \right] + \frac{mb^2}{3}.$$