

ciało żadne inne siły nie działają, to wynikiem będzie ruch obrotowy około osi, przechodzącej przez środek ciężkości, albo raczej ruch kulisty około tego punktu.

Magnetyzm ziemski wywiera na magnes parę sił, a zatem magnes, umieszczony w magnetycznym polu ziemskim, otrzymuje ruch obrotowy.

Prz. 1. Człowiek stoi na zupełnie gładkim stole; wskazać, w jaki sposób mógłby on zejść na podłogę.

Prz. 2. Przez gładki poziomy kołek przechodzi sznur, na którego końcach wiszą masy  $M$  i  $m$ . Wyznaczyć przyspieszenie środka ciężkości tych mas, a następnie reakcję, którą kołek wywiera na sznur. Odp. Reakcja  $= \frac{4Mmg}{M+m}$ .

Prz. 3. Na zupełnie gładkiej podłodze ustawiono w płaszczyźnie pionowej półkolistą tarczę o promieniu  $a$ . Tarcza opiera się o podłogę punktem  $P$  obwodu, a promień, przechodzący przez  $P$ , tworzy z podstawą kąt  $\alpha$ . Gdzie się znajdzie w pierwszej chwili środek chwilowy, gdy tarcza zostanie wyswobodzona? Odp. Na pionie, przechodzącym przez  $P$ , w odległości  $\frac{(3\pi - 4 \sin \alpha)a}{3\pi}$ .

Prz. 4. Płaska płyta wisi w płaszczyźnie pionowej na dwóch sznurach pionowych. Gdzie będzie leżał w pierwszej chwili środek chwilowy, gdy jeden ze sznurów się zerwie?

Prz. 5. Nadajemy prostej sztabie położenie pochyle, opierając jeden koniec o gładką podłogę. Okazać, że gdy wyswobodzimy sztabę, to torem drugiego końca będzie elipsa.

Prz. 6. Trzy jednakowe punkty masy  $A, B, C$  są połączone nierozciągalną nicią tak, że  $AB=BC$ . Z początku punkt  $A$  jest umocowany, a dwa pozostałe krążą koło niego, i nić jest wyprostowana. W jakim stosunku zmieniają się naprężenia obydwóch części nici, gdy wyswobodzimy punkt  $A$ ? Odp. W  $AB$  naprężenie spadnie do  $\frac{1}{3}$ , a w  $BC$  do  $\frac{1}{2}$ .

**110. Ruch ciała sztywnego.** Zastosujemy wyniki, osiągnięte w ostatnich paragrafach, do ciała sztywnego. Ruch jego rozłożymy na ruch postępowy, zgodny z ruchem środka ciężkości, i na ruch kulisty, którego środkiem ma być środek ciężkości. Innymi słowy będziemy rozważali osobno ruch środka ciężkości i ruch ciała względem środka ciężkości.

W tym celu obierzemy dwa układy współrzędnych, jeden nieruchomy  $xyz$  i drugi ruchomy  $\xi\eta\zeta$ . Początkiem drugiego niech będzie środek ciężkości, i układ ten ma brać udział je-

dynie w ruchu postępowym ciała; jeżeli zatem obierzemy w początku rachuby czasu osi  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  równoległe do  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , to pozostaną one równoległymi i nadal.

Oznaczmy przez  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  współrzędne środka ciężkości w układzie nieruchomym, a przez  $x$ ,  $y$ ,  $z$  i  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  współrzędne typowego elementu  $m$  ciała w układach nieruchomym i ruchomym. W takim razie będzie

$$x = \xi + x_0, \quad y = \eta + y_0, \quad z = \zeta + z_0 \quad (1).$$

Składowe szybkości względnej elementu  $m$  w kierunkach osi będą  $\frac{d\xi}{dt}$ ,  $\frac{d\eta}{dt}$ ,  $\frac{d\zeta}{dt}$ , szybkości unoszenia  $\frac{dx_0}{dt}$ ,  $\frac{dy_0}{dt}$ ,  $\frac{dz_0}{dt}$  i szybkości bezwzględnej  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$ ,  $\frac{dz}{dt}$ . Również przyspieszenie względne posiada składowe  $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2\eta}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ , przyspieszenie unoszenia  $\frac{d^2x_0}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2y_0}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2z_0}{dt^2}$ , a przyspieszenie bezwzględne  $\frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2y}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2z}{dt^2}$ . Przyspieszenie Coriolisa jest zerem, gdyż ruch unoszenia jest postępowy.

Przekształcimy prócz tego układ sił zewnętrznych  $P_1, P_2, \dots$ , działających na ciało. Mianowicie obierzemy środek ciężkości za punkt redukcji i zredukujemy wszystkie siły do jednej siły wypadkowej, przyłożonej w środku ciężkości, i do jednej pary. Siłę oznaczmy przez  $R$ , a moment pary przez  $N$ . Ten ostatni jest równy geometrycznej sumie momentów sił  $P_1, P_2, \dots$  względem środka ciężkości \*).

Sprawę ruchu postępowego rozstrzyga całkowicie zasada ruchu środka ciężkości, którą poznaliśmy w paragrafie poprzedzającym. Para  $N$  nie wywiera tu żadnego wpływu, a zatem będzie

$$M \frac{d^2x_0}{dt^2} = R_x, \quad M \frac{d^2y_0}{dt^2} = R_y, \quad M \frac{d^2z_0}{dt^2} = R_z \quad (2).$$

\*) Celem dokonania redukcji przykładamy w środku ciężkości siły  $P$  i  $-P$  równoległe do danej siły zewnętrznej  $P$ . Z nich  $P$  będzie składową wypadkowej  $R$ , a  $-P$  wraz z daną siłą  $P$  tworzy parę, składową pary  $N$ . Oczywiście moment tej pary  $P, -P$  jest to samo, co moment danej siły  $P$  względem środka ciężkości, a zatem  $N$  będzie sumą geometryczną momentów sił  $P_1, P_2, \dots$  względem tego punktu.

Chodzi teraz o ruch względem środka ciężkości. Łatwo jest zrozumieć, że do określenia jego potrzebne są trzy nowe równania. Wiemy mianowicie, że sześć równań określa całkowicie ruch ciała sztywnego; trzy równania ostatnie są niezbędne do określenia ruchu środka ciężkości, a więc do określenia ruchu względnego pozostają trzy. Otrzymamy je przekształcając odpowiednio równania (2) z par. 108.

W tym celu zastąpimy w nich  $x$  przez  $\xi + x_0$  i t. d. stosownie do (1) w par. niniejszym. Wówczas lewa strona równania pierwszego przybierze postać taką:

$$\Sigma m \left[ (\xi + x_0) \left( \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \frac{d^2 y_0}{dt^2} \right) - (\eta + y_0) \left( \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{d^2 x_0}{dt^2} \right) \right].$$

Gdy wykonamy wskazane działania i przed każdym wyrazem napiszemy znak sumy, to otrzymamy ośm wyrazów. Przedewszystkiem będą dwa wyrazy, zawierające same współrzędne  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ; łącząc je, otrzymamy

$$\Sigma m \left( \xi \frac{d^2 \eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2 \xi}{dt^2} \right).$$

Dalej będą cztery wyrazy, zawierające współrzędne  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  łącznie z  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ . Łatwo okazać, że każdy z nich jest zerem. Tak np.  $\Sigma m \xi \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \frac{d^2 y_0}{dt^2} \Sigma m \xi = 0$ , gdyż  $\Sigma m \xi$  jest momentem statycznym względem płaszczyzny, przechodzącej przez środek ciężkości. Również  $\Sigma m x_0 \frac{d^2 \eta}{dt^2} = x_0 \Sigma m \frac{d^2 \eta}{dt^2} = 0$ , gdyż  $\Sigma m \eta = 0$ , i t. d.

Wreszcie wypadną dwa wyrazy, zawierające tylko współrzędne  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ , a mianowicie

$$\Sigma m x_0 \frac{d^2 y_0}{dt^2} - \Sigma m y_0 \frac{d^2 x_0}{dt^2} = x_0 M \frac{d^2 y_0}{dt^2} - y_0 M \frac{d^2 x_0}{dt^2};$$

uwzględniając (2) w par. niniejszym, przekształcimy te wyrazy na

$$x_0 R_y - y_0 R_x.$$

Po prawej stronie równania należy napisać moment siły  $R$  względem osi  $z$  oraz rzut momentu  $N$  na oś  $z$  albo oś  $\zeta$ . Wypadnie

$$x_0 R_y - y_0 R_x + N_\zeta.$$

Gdy przeprowadzimy analogiczne przekształcenia również

w dwóch równaniach pozostałych, to otrzymamy trzy równania następujące:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma m \left( \xi \frac{d^2 \eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2 \xi}{dt^2} \right) &= N_{\zeta}, \\ \Sigma m \left( \eta \frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \zeta \frac{d^2 \eta}{dt^2} \right) &= N_{\xi}, \\ \Sigma m \left( \zeta \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \xi \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \right) &= N_{\eta} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3).$$

Są to szukane równania ruchu kulistego.

Możemy teraz wypowiedzieć dwa następujące twierdzenia, z których pierwsze jest tylko powtórzeniem zasady ruchu środka ciężkości:

1) Ruch postępowy ciała sztywnego jest niezależny od ruchu kulistego; nie zależy on od pary wypadkowej  $N$ , lecz tylko od siły wypadkowej  $R$ .

2) Ponieważ równania (3) nie zawierają wcale szybkości ani przyspieszeń środka ciężkości, przeto ruch kulisty jest niezależny od ruchu postępowego. Prócz tego z równań tych wynika, że na ruch kulisty nie wywiera wpływu siła wypadkowa  $R$ , lecz tylko para wypadkowa  $N$ , albo momenty sił zewnętrznych względem środka ciężkości.

Twierdzenia te zawierają tak zw. *zasadę niezależności ruchów postępowego i kulistego*. W myśl tej zasady zagadnienie ruchu ciała sztywnego rozpada się na dwa zagadnienia odrębne i od siebie niezależne; jedno z nich dotyczy ruchu postępowego, drugie ruchu kulistego. Rozwiązując pierwsze, możemy uważać, że ruch kulisty nie istnieje, t. j. że całkowity ruch ciała jest postępowy, rozwiązując drugie, możemy nie zwracać uwagi na ruch postępowy, albo uważać, że środek ciężkości jest nieruchomy. Pierwsze zagadnienie stanowi przedmiot dynamiki punktu, drugie dynamiki ciał sztywnych.

**111. Siła żywa ciała sztywnego.** Nazywamy siłą żywą ciała, albo układu ciał, sumę sił żywych wszystkich elementów jego, czyli  $\sum \frac{mv^2}{2}$ , gdzie  $m$  oznacza masę elementu, a  $v$  jego szybkość. Wiemy już (par. 90), że przyrost elementarny tej siły żywej jest równy sumie prac elementarnych wszystkich

sił, działających na ciało, zarówno zewnętrznych, jak i wewnętrznych.

W ciele sztywnym odległości pomiędzy elementami się nie zmieniają, a w takim razie, jak widzieliśmy we wspomnianym paragrafie, suma prac sił wewnętrznych jest zerem, i przyrost elementarny siły żywej jest równy sumie prac elementarnych sił zewnętrznych. *(Z tego wynika, że i przyrost całkowity siły żywej w pewnym czasie jest równy sumie prac całkowitych sił zewnętrznych.)*

Istnieją pewne proste wzory na siłę żywą ciała sztywnego, które w dużym stopniu ułatwiają stosowanie zasady sił żywych. Jeżeli ruch ciała jest postępowy, to szybkości wszystkich elementów są równe i wówczas

$$\sum \frac{mv^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m = \frac{Mv^2}{2} \quad (2),$$

gdzie  $M$  oznacza masę całego ciała. Tak więc w przypadku ruchu postępowego siła żywa ciała wyznacza się tak, jak gdyby ciało było punktem masy  $M$ .

Przypuśćmy teraz, że ruch ciała jest obrotowy, że mianowicie obraca się ono z szybkością kątową  $\omega$  około osi  $z$ . Jeżeli  $r$  oznacza odległość elementu  $m$  od  $z$ , to  $v = r\omega$ , i

$$\sum \frac{mv^2}{2} = \sum \frac{mr^2\omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum mr^2 = \frac{I\omega^2}{2} \quad (2);$$

$I$  oznacza tu moment bezwładności ciała względem osi  $z$ . Ponieważ  $I = Mk^2$ , gdzie  $k$  jest ramieniem bezwładności, można przeto nadać także ostatniemu wyrażeniu postać  $\frac{Mk^2\omega^2}{2}$  *A B C*

Nieraz bywa użyteczne jeszcze inne wyrażenie siły żywej w ruchu obrotowym. Obierzmy na osi  $z$  dowolny punkt  $O$ . Dajmy na to, że osi główne punktu  $O$  tworzą z  $z$  kąty  $\alpha, \beta, \gamma$ , i że momenty bezwładności ciała względem tych osi są  $A, B, C$ . W takim razie  $I = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma$  (par. 102), a zatem siła żywa będzie

$$\frac{A\omega^2 \cos^2 \alpha + B\omega^2 \cos^2 \beta + C\omega^2 \cos^2 \gamma}{2}.$$

Lecz  $\omega \cos \alpha, \omega \cos \beta, \omega \cos \gamma$  są to rzuty wektora  $\omega$  na osi główne punktu  $O$ , albo składowe w kierunkach tych osi. Ozna-

czając te składowe przez  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ , znajdziemy, że

$$\sum \frac{mv^2}{2} = \frac{A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2}{2}.$$

Rozważymy teraz przypadek ogólny, w którym ciało sztywne posiada ruch jakikolwiek; znaczy to, że ruch jego jest śrubowy. Ośią tego ruchu niech będzie w danej chwili prosta  $z$ , szybkość postępową oznaczmy przez  $u$ , a kątową przez  $\omega$ . Jeżeli odległość elementu  $m$  od  $z$  jest równa  $r$ , to  $v^2 = u^2 + r^2\omega^2$ , i

$$\sum \frac{mv^2}{2} = \frac{Mu^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} \sum mr^2 = \frac{Mu^2}{2} + \frac{Mk^2\omega^2}{2},$$

gdzie  $k$  oznacza ramię bezwładności względem osi  $z$ .

Ponieważ w zjawiskach dynamicznych szczególną rolę odgrywa środek masy, dobrze więc będzie zamiast  $u$  wprowadzić szybkość środka masy. Niech  $r_0$  oznacza jego odległość od  $z$ ,  $v_0$  szybkość, a  $k_0$  ramię bezwładności ciała względem osi  $z_0$ , przechodzącej przez ten środek i równoległej do  $z$ . W takim razie  $k^2 = r_0^2 + k_0^2$ , i wyrażenie powyższe przekształci się na  $\frac{M}{2}(u^2 + r_0^2\omega^2 + k_0^2\omega^2)$ . Lecz  $u^2 + r_0^2\omega^2 = v_0^2$ , zatem będzie

$$\sum \frac{mv^2}{2} = \frac{Mv_0^2}{2} + \frac{Mk_0^2\omega^2}{2} \quad (4).$$

Widzimy, że siła żywa składa się z dwóch części; pierwsza pochodzi z ruchu postępowego z szybkością środka ciężkości, a druga z ruchu kulistego około środka ciężkości.

Prz. Krążek toczy się na płaszczyźnie bez poślizgu, i jego całkowita siła żywa =  $L$ . Wyznaczyć części siły żywej, pochodzące z ruchów postępowego i obrotowego. Odp.  $\frac{2L}{3}$  i  $\frac{L}{3}$ .

**112. Przykłady.** Okażemy na paru przykładach użyteczność zasady sił żywych w dynamice ciała sztywnego.

I. Sztaba o długości  $2a$  może się obracać w płaszczyźnie pionowej około osi poziomej, przechodzącej przez koniec sztaby. Nadajemy sztabie położenie poziome i następnie pozostawiamy ją samej sobie. Wyznaczyć szybkość kątową sztaby w funkcji jej nachylenia do poziomu.

Przypuśćmy, że sztaba posiada szybkość kątową  $\omega$ , gdy tworzy z poziomem kąt  $\theta$ . Całkowity przyrost siły żywej wy-

nosi  $\frac{Mk^2\omega^2}{2}$ , gdzie  $M$  oznacza masę sztaby, a  $k$  ramię bezwładności względem osi obrotu. Na sztabę działa tylko reakcja osi i siła ciężenia. Pierwsza nie pracuje, a całkowita praca drugiej  $= Mga \sin \vartheta$ , gdyż środek ciężkości sztaby opadł o  $a \sin \vartheta$ . Zatem

$$\frac{Mk^2\omega^2}{2} = Mga \sin \vartheta.$$

Ponieważ  $k^2 = \frac{4a^2}{3}$  (par. 99), przeto ostatecznie wypadnie, że

$$\omega^2 = \frac{3g \sin \vartheta}{2a}.$$

Przyjęliśmy tu, że praca siły ciężenia, działającej na ciało, jest równa iloczynowi z ciężaru ciała przez obniżenie środka ciężkości. Twierdzenie to jest słuszne zarówno dla ciał sztywnych, jak i niesztwnych, i wynika wprost stąd, że ciężar ciała jest wypadkową ciężarów wszystkich jego elementów, ale można je łatwo dowieść bezpośrednio.

Skierujmy oś  $z$  prostokątnego układu współrzędnych pionowo na dół i przypuśćmy, że element  $m$  jakiegokolwiek ciała przeszedł z położenia  $(xyz)$  do  $(x'y'z')$ . Praca siły ciężenia, działającej na ten element, będzie  $mg(z' - z)$ , a praca wszystkich sił takich jest równa  $\Sigma mg(z' - z) = g(\Sigma mz' - \Sigma mz)$ . Jeżeli środek ciężkości przeszedł z  $(x_0y_0z_0)$  do  $(x'_0y'_0z'_0)$  to  $\Sigma mz = Mz_0$  i  $\Sigma mz' = Mz'_0$ , a zatem wyrażenie powyższe przekształci się na  $Mg(z'_0 - z_0)$ , co było do dowiedzenia.

II. Na zupełnie chropowatej płaszczyźnie, nachylonej do poziomu pod kątem  $\alpha$ , kładziemy kulę jednorodną i pozwalamy jej staczać się swobodnie. Wyznaczyć szybkość środka kuli w funkcji drogi.

Przypuśćmy, że środek przebiegł drogę  $x$  i posiada obecnie szybkość  $v$ . Siła żywa kuli wynosi  $\frac{Mv^2}{2} + \frac{Mk^2\omega^2}{2}$ , gdzie  $\omega$  oznacza szybkość kątową około średnicy poziomej, a  $k$  ramię bezwładności względem średnicy. Na kulę działa siła ciężenia, reakcja normalna płaszczyzny i siła tarcia. Praca pierwszej wynosi  $Mgx \sin \alpha$ ; dwie siły pozostałe są wciąż przyłożone w punkcie kuli, którego szybkość jest zerem, a zatem ich prace są równe zeru. Wypadnie przeto

$$\frac{Mv^2}{2} + \frac{Mk^2\omega^2}{2} = Mgx \sin \alpha.$$

Kula się toczy bez poślizgu, z czego wynika, że  $\omega = \frac{v}{a}$ , gdzie  $a$  oznacza promień. Uwzględniając prócz tego, że  $k^2 = \frac{2a^2}{5}$ , znajdziemy

$$v^2 = \frac{10gx \sin \alpha}{7}.$$

Gdyby płaszczyzna była zupełnie gładka, i kula się zsuwała, to kwadrat szybkości byłby równy  $2gx \sin \alpha$ . Widzimy, że w przypadku rozważanym ruch jest wolniejszy.

**Prz. 1.** Jaki powinien być co najmniej współczynnik tarcia pomiędzy kulą i płaszczyzną w przykładzie ostatnim, aby nie było poślizgu?

W myśl zasady ruchu środka ciężkości możemy uważać środek kuli za punkt materialny o masie  $M$ , na który działają trzy wyżej wymienione siły. Zatem będzie  $M \frac{dv}{dt} = Mg \sin \alpha - F$ , gdzie  $F$  oznacza

siłę tarcia. Z tego otrzymamy  $F = \frac{2Mg \sin \alpha}{7}$ . Taka powinna być siła tarcia, aby nie było poślizgu. W kierunku prostopadłym do płaszczyzny środek ciężkości nie posiada przyspieszenia, a zatem reakcja normalna  $N = Mg \cos \alpha$ . Najmniejszy możliwy współczynnik tarcia  $f = \frac{F}{N} = \frac{2 \tan \alpha}{7}$ . Jeżeli współczynnik tarcia przewyższa tę wartość, to kula

się toczy przy tarciu mniejszem od granicznego.

Jeżeli płaszczyzna jest pozioma, to  $\sin \alpha = 0$  i  $F = 0$ . Znaczy to, że podczas toczenia się kuli sztywnej na płaszczyźnie poziomej siła tarcia nie występuje. Jeżeli kula w pierwszej chwili się toczy, i żadne siły prócz ciężenia i reakcji płaszczyzny na nią nie działają, to będzie ona toczyła się czas nieograniczony z szybkością stałą.

**Prz. 2.** Mamy dwie kule o jednakowych średnicach i jednakowych wagach. Jedna z nich jest złota dęta, a druga srebrna połączana. Jak odróżnić złotą od srebrnej?

**Prz. 3.** Kula surowcowa o promieniu 50 cm robi 120 obrotów na minutę. Ile obrotów na minutę będzie robiła kula, gdy utraci 2452 kilogramometry siły żywej? Odp. 60. (Ciężar właściwy surowca = 7,8).

**Prz. 4.** Ile trzeba wyłożyć pracy, aby kamień młyński, ważący 820 kg, o średnicy 1,4 m wprowadzić w ruch obrotowy o 108 obr. na minutę, nie rachując strat na tarciu? Odp. 1300 kilogramometrów.

**Prz. 5.** Wydrążony żelazny cylinder (cięż. wł. = 7,8) o osi poziomej posiada promień zewnętrzny  $R = 20$  cm, promień wewnętrzny  $r =$



=10 cm i długość  $a=3$  m. Na cylinder jest nawinięty sznur, na którym wisi ciężar  $Q=10$  kg. Jaką szybkość kątową powinien posiadać cylinder, aby jeszcze podnieść ciężar o  $h=5$  m wyżej? Odp. 4,19.

Prz. 6. Cylinder o promieniu  $r$ , wirujący około osi, postawiono na płaszczyźnie poziomej. W chwili, gdy podstawa dotknęła płaszczyzny, cylinder robił  $n$  obrotów na min., a współczynnik tarcia  $=f$ . Ile jeszcze obrotów zrobi cylinder? Odp.  $\frac{\pi r n^2}{4800 f g}$ .

Prz. 7. Sztaba, wirująca na gładkiej płaszczyźnie poziomej około jednego końca, osadzonego na osi, z szybkością kątową  $\omega$ , pękła w samym środku. Jaki był ruch dalszy każdej części?

Prz. 8. Na gładkiej płaszczyźnie poziomej położono dwie jednakowe kulki, połączone lekkim prętem; następnie jedną z nich uderzono w kierunku prostopadłym do pręta. Wyznaczyć tory kulek. Odp. Cykloidy.

Prz. 9. Cienka gładka rurka o długości  $2a$  i masie  $m$  jest osadzona na poziomej osi, przechodzącej przez środek i prostopadłej do osi rurki. Gdy rurka była w spokoju w położeniu poziomym, na przedłużeniu jej osi ustawiono pręt o długości  $2a_1$  i masie  $m_1$ . Następnie nadano prętowi szybkość  $v$  w kierunku osi rurki, skutkiem czego zaczął on wchodzić w rurkę, i środek jego zatrzymał się, doszedłszy do środka rurki. Jaka była w owej chwili szybkość kątowa układu, złożonego z rurki i pręta? Odp.  $v \sqrt{\frac{3m_1}{ma^2 + m_1 a_1^2}}$ .

Prz. 10. Zakładamy, że największa siła, którą może wyrzucić mięsień zwierzęcia, jest proporcjonalna do przekroju mięśnia, i że ciężar zwierzęcia jest proporcjonalny do objętości. Dowieść, że największa wysokość, na którą może podskoczyć zwierzę, jest dla zwierząt, posiadających podobne kształty, lecz różne wymiary, jednakowa. Przez wysokość podskoku rozumieć należy drogę, którą przebywa w kierunku pionowym środek ciężkości, poczynając od chwili, w której zwierzę przestało stykać się z ziemią.

Prz. 11. Jednorodna laska  $AB$  o długości  $2a$  jest zawieszona swobodnie za koniec  $A$  na takiej wysokości, że koniec  $B$  znajduje się nad samą ziemią. Nadajemy lasce pewną szybkość kątową, a gdy dojdzie do położenia poziomego, wyswobodzamy koniec  $A$ . Jaka powinna być ta początkowa szybkość, aby laska, spadając, utkwiała końcem  $B$  w ziemi. Odp. Jeżeli laska ma utkwieć w ziemi po jednym obrocie, to kwadrat szybkości szukanej  $= \frac{3g(3\pi^2 + 6\pi + 4)}{4a(3\pi + 2)}$ .

Prz. 12. Pozioma sztaba o długości  $a$  i masie  $M$  jest osadzona w jednym z końców na osi pionowej. Sztabie nadano szybkość kątową  $\omega_0$ , i w dalszym ciągu działa na nią jedynie opór powietrza, a mianowicie na element  $dx$  opór ten wynosi  $A dx (\text{szybkość})^2$ . Wyznaczyć szybkość sztaby w chwili  $t$ . Odp.  $\frac{4M\omega_0}{4M + 3Aa^2\omega_0 t}$ .

Prz. 13. Sztaba jednorodna i gładka o długości  $a$  obracała się z szybkością kątową  $\omega_0$  około jednego ze swych końców na gładkiej płaszczyźnie poziomej. W pewnej chwili przed sztabą, bardzo blisko nieruchomego końca, położono punkt materyalny, którego masa jest równa masie sztaby. Jaką szybkość osiągnie punkt, doszedłszy do drugiego końca sztaby? Odp.  $\frac{a\omega_0\sqrt{5}}{4}$ .

Obieramy początkowe położenie sztaby za oś biegunową, a jej koniec nieruchomy za biegun. Ponieważ na punkt w kierunku promienia wodzącego żadna siła nie działa, przeto  $\frac{d^2r}{dt^2} = r\omega^2$ , gdzie  $r$  oznacza promień wodzący punktu, a  $\omega$  szybkość kątową sztaby w chwili  $t$ . Gdy prócz tego wyrazimy  $\frac{d^2r}{dt^2}$ , to otrzymamy proste równanie pierwszego rzędu.

Prz. 14. Sztaba trapezu gimnastycznego jest  $2a$  długa i posiada masę  $m$ ; długość każdego sznura jest także równa  $2a$ . W pewnej chwili sztabie nadano szybkość kątową  $\omega_0$  około osi pionowej, przechodzącej przez środek. O ile wzrośnie od razu naprężenie każdego sznura, i jak wysoko wzniesie się sztaba? Odp. Przyrost naprężenia =  $\frac{m a \omega_0^2}{4}$ , wysokość =  $\frac{a^2 \omega_0^2}{6g}$ .

Aby znaleźć przyrost naprężenia trzeba naprzód wyznaczyć początkowe przyspieszenie środka sztaby.

Prz. 15. Cztery jednakowe sztaby o długości  $2a$ , połączone przegubami, tworzą kwadrat  $ABCD$ , zawieszony za wierzchołek  $A$ . Przekątnia  $AC$  jest pionowa, a wierzchołek  $C$  utrzymujemy w spokoju. Wyznaczyć szybkość kątową, którą przybiorą sztaby po wyswobodzeniu wierzchołka  $C$ , w funkcji nachylenia ich do pionu. Odp.  $\omega^2 = \frac{3g(\sqrt{2}\cos\vartheta - 1)}{a(1 + 3\sin^2\vartheta)\sqrt{2}}$ , gdzie  $\vartheta$  oznacza nachylenie.

**113. Ilość ruchu.** Każde ciało, albo układ ciał, możemy uważać za układ punktów materyalnych, a zatem wszystkie twierdzenia, dotyczące wektora  $G$ , które poznaliśmy w par. 89, są słuszne ogólnie. Pozostaje jedynie okazać, jak wyznacza się ten wektor.

Niech będzie jakiegokolwiek ciało, poruszające się w jakimkolwiek sposób. Obieramy dowolny punkt  $O$  za środek redukcji a zarazem za początek prostokątnego układu współrzędnych  $xyz$ . Szukany wektor  $G$  rozkładamy z góry na trzy składowe  $G_x, G_y, G_z$  w kierunkach osi. Oczywiście składowa  $G_x$  jest równa sumie ilości ruchu wszystkich elementów ciała w kierunku

osi  $x$ , czyli

$$G_x = \Sigma m \frac{dx}{dt}.$$

Oznaczmy masę ciała przez  $M$  a współrzędne środka ciężkości przez  $x_0, y_0, z_0$ . W takim razie  $\Sigma m x = M x_0$ . Uwzględniając ten związek, przekształcimy powyższe równanie oraz dwa analogiczne na

$$G_x = M \frac{dx_0}{dt}, \quad G_y = M \frac{dy_0}{dt}, \quad G_z = M \frac{dz_0}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Tak więc przy wyznaczaniu wektora  $G$  możemy uważać, że cała masa ciała, lub układu, jest skoncentrowana w środku ciężkości.

Okażemy na przykładzie zastosowanie tego twierdzenia. Wyznamy mianowicie reakcję, jaką w przykładzie I-ym par. poprzedzającego oś wywiera na sztabę. Rozłożymy tę reakcję na składowe  $R_1$  i  $R_2$  w kierunku sztaby i w kierunku prostopadłym. Za początek wektora  $G$  obierzemy punkt  $O$ , w którym sztaba łączy się z osią. Wektor ten jest równoległy do szybkości środka ciężkości, czyli prostopadły do sztaby;

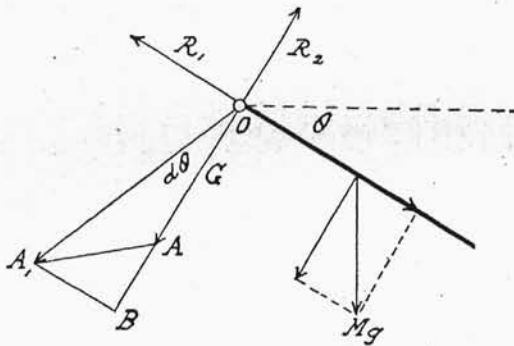


Fig. 59.

przypuśćmy, że wyraża go odcinek  $OA$ . W czasie  $dt$  sztaba obróci się o kąt  $d\vartheta$ , i wektor  $G$  przybierze wartość  $OA_1$ , t. j. otrzyma przyrost elementarny  $AA_1$ . Przyrost ten rozkładamy stosownie do par. 51 na dwie składowe  $AB$  i  $BA_1$  w kierunku  $G$  i w kierunku prostopadłym. Pierwsza jest równa  $dG$ , a druga  $Gd\vartheta$ . Pierwszą wytworzyła reakcja  $R_2$  i składowa  $Mg \cos \vartheta$  siły ciężenia, drugą reakcja  $R_1$  i  $Mg \sin \vartheta$ , a zatem będzie

$$\begin{aligned} dG &= (Mg \cos \vartheta - R_2) dt, \\ G d\vartheta &= (-Mg \sin \vartheta + R_1) dt. \end{aligned}$$

Lecz  $G = Ma\omega$  i  $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$ , a zatem równania powyższe przekształcają się na

$$\left. \begin{aligned} Ma \frac{d\omega}{dt} &= Mg \cos \vartheta - R_2, \\ Ma\omega^2 &= -Mg \sin \vartheta + R_1, \end{aligned} \right\} \quad (2).$$

Wprowadziwszy wartość  $\omega$  z par. poprzedzającego, znajdziemy, że  $R_1 = \frac{5Mg \sin \vartheta}{2}$ ,  $R_2 = \frac{Mg \cos \vartheta}{4}$ .

Wypada zwrócić uwagę, że równania (2) wynikają bezpośrednio z zasady ruchu środka ciężkości, i wogóle zasada ilości ruchu, o ile to dotyczy wektora  $G$ , różni się od tamtej jedynie pod względem formy.

Prz. 1. Okrągła tarcza, wążąca  $Q$ , jest osadzona w punkcie  $C$  obwodu na osi poziomej, prostopadłej do płaszczyzny tarczy. Tarcza wyruszyła z położenia, w którym średnica, przechodząca przez  $C$ , stała pionowo nad tym punktem. Wyznaczyć reakcję osi po obrocie o  $90^\circ$  i o  $180^\circ$ . Odp.  $\frac{\sqrt{17}Q}{3}$  i  $\frac{11Q}{3}$ .

Prz. 2. Szklany sześcian o masie  $M$  zawiera kulistą próżną przestrzeń o promieniu  $a$ , i w tej przestrzeni mieści się punkt materialny o masie  $m$ . Sześcian stoi na gładkiej płaszczyźnie poziomej; jaką szybkość początkową należy mu nadać przez popchnięcie, aby punkt  $m$  obiegł kulę naokoło, pozostając wciąż w zetknięciu ze szkłem? Odp. Co najmniej  $\sqrt{\frac{(5M+4m)ag}{M}}$ .

Ściany kuli są gładkie, a więc w pierwszej chwili na punkt  $m$  nie działa żadna siła pozioma, i jego szybkość bezwzględna jest zerem. Skoro punkt ma wciąż pozostawać w zetknięciu z kulą, to reakcja, którą ta na niego wywiera, nie powinna zniknąć w żadnym położeniu, chyba w najwyższym. W tym przypadku skrajnym i w tem położeniu najwyższym  $\omega^2 = \frac{g}{a}$ . Utworzywszy równania ilości ruchu oraz siły żywej układu, wyznaczymy z łatwością szybkość szukaną.

Prz. 3. W gładkiej rurce kołowej o masie  $M$  umieszczono dwa punkty materialne o masach  $m$ . Punkty te połączono nicią sprężystą, której długość naturalna jest równa  $\frac{2}{3}$  obwodu, następnie wyciągnięto tak nić, aby się punkty zeszyły, położono rurkę na gładkim stole i pozostawiono układ samemu sobie. W jakim stosunku stała siła żywa

punktów w chwili, gdy nić odzyskała długość naturalną, do pracy, wyłożonej na rozciągnięcie nici? Odp.  $\frac{2(M^2+m^2+Mm)}{(M+2m)(2M+m)}$ .

**114. Wektor  $H$  ciała sztywnego.** Bez porównania ważniejszą rolę od wektora  $G$  odgrywa w dynamice ciała sztywnego wektor  $H$ , czyli moment ilości ruchu. I w tym razie wszystkie twierdzenia, które dowiedliśmy w par. 94 dla układu punktów materialnych, są ważne ogólnie, dla ciał sztywnych i niesztywnych; pozostaje tylko wskazać sposoby wyznaczania wektora  $H$  w różnych przypadkach.

Niech będzie jakiekolwiek ciało, albo układ ciał, i jakiekolwiek środek redukcji  $O$ . Pragniemy wyznaczyć moment ilości ruchu względem tego środka. Obieramy punkt  $O$  za początek prostokątnego układu współrzędnych, i rozkładamy szukany wektor  $H$  na składowe  $H_x, H_y, H_z$  w kierunkach osi. Składowe ilości ruchu elementu  $m(xyz)$  ciała są  $m \frac{dx}{dt}, m \frac{dy}{dt}, m \frac{dz}{dt}$ , a zatem moment ilości ruchu tego elementu względem osi  $z$  wynosi  $m(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt})$  i wypadnie

$$\left. \begin{aligned} H_x &= \Sigma m \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) \\ H_y &= \Sigma m \left( z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) \\ H_z &= \Sigma m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1).$$

Przypuśćmy, że ciało jest sztywne, i że ruch jest postępowy. W takim razie szybkości wszystkich elementów są jednakowe co do wielkości i kierunku, a zatem  $H_x = \Sigma m y \frac{dz}{dt} - \Sigma m z \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} \Sigma m y - \frac{dy}{dt} \Sigma m z$ . Oznaczmy masę ciała przez  $M$ , a współrzędne środka ciężkości przez  $x_0, y_0, z_0$ . Możemy napisać  $\frac{dz}{dt} = \frac{dz_0}{dt}$ ,  $\Sigma m y = M y_0$ , i t. d.; wówczas równania (1) przekształcą się na

$$\left. \begin{aligned} H_x &= M \left( y_0 \frac{dz_0}{dt} - z_0 \frac{dy_0}{dt} \right) \\ H_y &= M \left( z_0 \frac{dx_0}{dt} - x_0 \frac{dz_0}{dt} \right) \\ H_z &= M \left( x_0 \frac{dy_0}{dt} - y_0 \frac{dx_0}{dt} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2).$$

Jeżeli więc ruch jest postępowy, to wektor  $H$  względem dowolnego punktu jest taki, jak gdyby cała masa ciała była skoncentrowana w środku ciężkości.

Dajmy na to, że w chwili, dla której wyznaczamy moment ilości ruchu, właśnie środek ciężkości przechodzi przez  $O$ . W takim razie  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ , a zatem  $H_x = H_y = H_z = 0$ . Możemy powiedzieć, że w ruchu postępowym wektor  $H$  względem środka ciężkości jest zerem.

Rozważymy teraz inny ważny przypadek szczególny. Przypuśćmy, że ruch ciała sztywnego jest obrotowy, że mianowicie obraca się ono z szybkością kątową  $\omega$  około prostej  $u$ . Pragniemy wyznaczyć wektor  $H$  względem jakiegoś punktu  $O$ , położonego na osi obrotu.

Za osi współrzędnych  $x, y, z$  obierzemy te proste, na których w chwili danej leżą osi główne punktu  $O$ ; przypuśćmy, że oś obrotu  $u$  tworzy z niemi kąty  $\alpha, \beta, \gamma$ , i rozłożmy szybkość kątową  $\omega$  na składowe  $\omega_x = \omega \cos \alpha$ ,  $\omega_y = \omega \cos \beta$ ,  $\omega_z = \omega \cos \gamma$ . Składowe szybkości elementu  $m(xy z)$  według par. 46 będą

$$\frac{dx}{dt} = v_x = \omega_y z - \omega_z y,$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y = \omega_z x - \omega_x z,$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z = \omega_x y - \omega_y x.$$

Wstawiając to w (1), znajdziemy, że

$$H_x = \Sigma m [\omega_x (y^2 + z^2) - \omega_y xy - \omega_z xz] = \omega_x \Sigma m (y^2 + z^2) - \omega_y \Sigma m xy - \omega_z \Sigma m xz.$$

Lecz  $\Sigma m (y^2 + z^2)$  jest momentem bezwładności względem osi  $x$ , a  $\Sigma m xy$  i  $\Sigma m xz$ , jako momenty odśrodkowe względem osi głównych, są zerami; zatem wypadnie

$$H_x = A \omega_x, \quad H_y = B \omega_y, \quad H_z = C \omega_z \quad \dots \quad (3),$$

gdzie  $A, B, C$  oznaczają momenty bezwładności względem osi  $x, y, z$ , czyli momenty główne punktu  $O$ . Mając składowe  $H_x, H_y, H_z$ , znamy wektor  $H$  co do wielkości i kierunku, a mianowicie  $H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2}$ , czyli

$$H = \omega \sqrt{A^2 \cos^2 \alpha + B^2 \cos^2 \beta + C^2 \cos^2 \gamma}.$$

Jeżeli  $\lambda, \mu, \nu$  oznaczają kąty kierunkowe wektora  $H$ , to

$$\cos \lambda = \frac{H_x}{H} = \frac{A \cos \alpha}{\sqrt{A^2 \cos^2 \alpha + B^2 \cos^2 \beta + C^2 \cos^2 \gamma}}.$$

Dla  $\mu$  i  $\nu$  otrzymamy wzory analogiczne.

Widzimy, że kąty kierunkowe nie zależą od szybkości katowej  $\omega$ , a zatem wektor  $H$  względem punktu  $O$  leży na prostej, zajmującej w ciele położenie stałe. Gdy zmienia się  $\omega$ , to wektor ten zmienia się co do wielkości, ale kierunek jego względem ciała pozostaje bez zmiany. Możemy powiedzieć, że wiruje on wraz z ciałem około prostej  $u$ .

Wyznamy teraz moment ilości ruchu ciała względem osi obrotu. Będzie to rzut wektora  $H$  na prostą  $u$ , albo suma rzutów składowych  $H_x, H_y, H_z$ . Wypadnie

$$H_u = H_x \cos \alpha + H_y \cos \beta + H_z \cos \gamma = \omega (A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma).$$

Wyrażenie, zawarte w nawiasie, jest to moment bezwładności ciała względem prostej  $u$ . Oznaczywszy go przez  $I$ , napiszemy

$$H_u = I\omega.$$

Można łatwo otrzymać równanie to bezpośrednio. Jeżeli  $r$  oznacza odległość elementu  $m$  od osi  $u$ , to szybkość tego elementu  $= \omega r$ , a moment ilości ruchu  $= m\omega r^2$ , zatem  $H_u = \omega \sum m r^2 = I\omega$ .

Zobaczmy, w jakich razach wektor  $H$  punktu  $O$  leży na osi obrotu.  $H_x, H_y, H_z$ , t. j. momenty ilości ruchu względem osi  $x, y, z$ , są rzutami wektora  $H$  na te osi, a zatem w przypadku, o którym mowa,  $A\omega_x = I\omega \cos \alpha$ , czyli  $A\omega \cos \alpha = I\omega \cos \alpha$ ; powinny więc istnieć związki

$$A \cos \alpha = I \cos \alpha, \quad B \cos \beta = I \cos \beta, \quad C \cos \gamma = I \cos \gamma.$$

Równania te są możliwe w dwóch przypadkach. Przedewszystkiem wtedy, gdy dwa z kątów kierunkowych, np.  $\alpha$  i  $\beta$ , są proste; w takim razie  $I = C$ , i prosta  $u$  jest osią główną punktu  $O$ . Powtórę równania powyższe są spełnione, jeżeli wszyst-



kie trzy momenty główne punktu  $O$  są równe. W tym razie, jak wiemy, temuż samemu jest równy moment bezwładności względem  $u$ , a więc można znowu tę prostą uważać za oś główną punktu  $O$ .

Powiemy wogóle, że wektor  $H$  względem punktu  $O$ , wziętego na osi obrotu  $u$ , leży tylko wtedy na tej osi, gdy  $O$  jest punktem głównym prostej  $u$ .

Jeżeli oś obrotu jest osią główną ciała, to, jak wiemy z par. 104, jest ona osią główną każdego ze swych punktów; z tego wynika bezpośrednio, że na niej leżą wektory  $H$  względem wszystkich jej punktów, i że wektory te są równe.

Prz. 1. Tarcza kołowa o promieniu  $a$  i masie  $M$  obraca się z szybkością kątową  $\omega$  około cięciwy, którą widać ze środka pod kątem prostym. Wyznaczyć wektor  $H$  względem punktu  $O$ , w którym oś obrotu przecina obwód. Odp. Oczywiście wektor  $H$  leży w płaszczyźnie tarczy. Osiami głównymi są średnica i styczna. Momenty

bezwładności względem nich są odpowiednio  $A = \frac{Ma^2}{4}$  i  $C = \frac{5Ma^2}{4}$ ,

a składowe wektora  $H$  są  $\frac{Ma^2\omega}{4\sqrt{2}}$  i  $\frac{5Ma^2\omega}{4\sqrt{2}}$ . Wektor  $H = \frac{Ma^2\omega\sqrt{13}}{4}$ ; tworzy on ze średnicą kąt  $\arctan 5$ .

Prz. 2. Sztaba o długości  $2a$  i masie  $M$  obraca się z szybkością kątową  $\omega$  około nieruchomej osi, która przechodzi przez koniec  $O$  sztaby i tworzy z nią kąt  $\alpha$ . Wyznaczyć wektor  $H$  względem punktu  $O$ .

Odp. Wektor  $H$  jest prostopadły do sztaby i równy  $\frac{4Ma^2\omega\sin\alpha}{3}$ .

Prz. 3. Kula o masie  $M$  i promieniu  $a$  obraca się z szybkością kątową  $\omega$  około średnicy, a średnica z szybkością  $2\omega$  około prostej, która tworzy z nią kąt  $60^\circ$  i przechodzi przez koniec  $O$ . Wyznaczyć

wektor  $H$  względem  $O$ . Odp.  $H = \frac{Ma^2\omega\sqrt{163}}{5}$ .

Prz. 4. Prosty stożek kołowy, którego masa jest równa  $M$ , wysokość  $h$  i kąt wierzchołkowy  $2\alpha$ , toczy się bez poślizgu na płaszczyźnie poziomej, przyczem płaszczyzna pionowa, przechodząca przez oś, posiada szybkość kątową  $\omega$ . Wyznaczyć wektor  $H$  względem wierzchołka. Odp.  $H = \frac{3Mh^2\omega\sqrt{1+10\cos^2\alpha+5\cos^4\alpha}}{20\cos\alpha}$ .

Prz. 5. Płyta trójkątna  $ABC$  o masie  $M$  obraca się z szybkością kątową  $\omega$  około boku  $AC$ . Wyznaczyć moment ilości ruchu względem boku  $BC$ . Odp.  $\frac{Mab\omega\sin^2C}{12}$ , gdzie  $a=BC$ ,  $b=CA$  i  $C$  oznacza kąt  $ACB$ .

Płytę możemy tu zastąpić przez model, zrobiony tak: z lekkiego



drutu tworzymy obwód trójkąta i w środkach boków osadzamy punkty materialne, każdy o masie  $\frac{M}{3}$ . Model taki będzie miał z płytą jednakową masę, wspólny środek ciężkości i jednakowe momenty bezwładności względem wszystkich prostych (par. 102, prz. 8); łatwo zrozumieć, że pod względem dynamicznym zastąpi on płytę całkowicie.

Prz. 6. Sztaby  $OA$ ,  $AB$  wirują około osi pionowej, przechodzącej przez  $O$ , z szybkością kątową  $\omega$ , pozostając w jednej płaszczyźnie pionowej i tworząc z osią odpowiednio kąty  $\vartheta$  i  $\varphi$ . Długości sztab wynoszą  $a$  i  $b$ , masy  $m$  i  $m_1$ . Wyznaczyć moment ilości ruchu względem osi obrotu (par. 102, prz. 7). Odp.  $\omega \left[ \left( \frac{m}{3} + m_1 \right) a^2 \sin^2 \vartheta + m_1 ab \sin \vartheta \sin \varphi + \frac{m_1}{3} b^2 \sin^2 \varphi \right]$ .

**115. Ciało jakiegokolwiek.** Poznamy tu pewne twierdzenia, bardzo ważne i zupełnie ogólne. W tym celu przekształcimy równania (1), które otrzymaliśmy w par. poprzedzającym dla jakiegokolwiek ciała i dla dowolnego punktu redukcji.

Poprowadźmy przez środek ciężkości ciała nowe osi współrzędnych  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  odpowiednio równoległe do  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Dla elementu  $m$  będzie

$$x = \xi + x_0, \quad y = \eta + y_0, \quad z = \zeta + z_0.$$

Wstawiamy to w wyżej wspomniane równania i wykonywamy przekształcenia zupełnie podobne do tych, które opisaliśmy w par. 110. Wypadnie

$$\left. \begin{aligned} H_x &= \Sigma m \left( \eta \frac{d\zeta}{dt} - \zeta \frac{d\eta}{dt} \right) + M \left( y_0 \frac{dz_0}{dt} - z_0 \frac{dy_0}{dt} \right) \\ H_y &= \Sigma m \left( \zeta \frac{d\xi}{dt} - \xi \frac{d\zeta}{dt} \right) + M \left( z_0 \frac{dx_0}{dt} - x_0 \frac{dz_0}{dt} \right) \\ H_z &= \Sigma m \left( \xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} \right) + M \left( x_0 \frac{dy_0}{dt} - y_0 \frac{dx_0}{dt} \right) \end{aligned} \right\} \dots (1).$$

Prawa strona każdego z tych równań zawiera dwa wyrazy; oznaczmy odpowiednio wyrazy, postawione na pierwszym miejscu, przez  $H'_x$ ,  $H'_y$ ,  $H'_z$ , a wyrazy, stojące na drugim miejscu, przez  $H''_x$ ,  $H''_y$ ,  $H''_z$ . Pierwsze są momentami ilości ruchu ciała względem osi  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , a drugie momentami ilości ruchu masy  $M$ , skoncentrowanej w środku ciężkości, względem  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Będzie zatem

$$H_x = H'_x + H''_x, \quad H_y = H'_y + H''_y, \quad H_z = H'_z + H''_z.$$