

dzących przez środek ciężkości, oraz momentu masy ciała, skoncentrowanej w środku ciężkości, względem  $x$ ,  $y$ .

Toż samo dotyczy osi  $y$ ,  $z$  i  $z$ ,  $x$ .

Prz. 1. Wyznaczyć moment odśrodkowy prostokąta o masie  $M$  i bokach  $a$ ,  $b$  względem boków. Odp.  $\frac{Mab}{4}$ .

Prz. 2. Wyznaczyć moment odśrodkowy ćwiartki koła o masie  $M$  i promieniu  $a$  względem promieni granicznych. Odp.  $\frac{Ma^2}{2\pi}$ .

**102. Moment bezwładności w funkcji kątów kierunkowych.** Niech będzie znowu ciało sztywne i prostokątny układ współrzędnych. Momenty bezwładności względem osi oznaczmy przez  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$ , a momenty odśrodkowe przez  $I_{xy}$ ,  $I_{yz}$ ,  $I_{zx}$ . Niech będzie prócz tego prosta  $u$ , przechodząca przez początek i tworząca z osiami współrzędnych kąty  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Mamy wyznaczyć moment bezwładności  $I$  danego ciała względem tej prostej  $u$ .

Dajmy na to, że jeden z elementów ciała o masie  $m$  zajmuje położenie  $A(x, y, z)$ , a odległość jego  $AB$  od  $u$  niech będzie równa  $r$ . Oczywiście

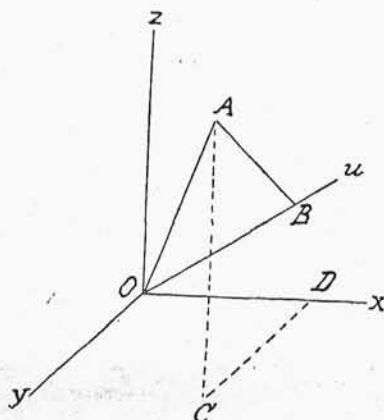


Fig. 56.

$$r^2 = OA^2 - OB^2 \quad \dots \quad (1).$$

$OA^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , a  $OB$  jest rzutem odcinka  $OA$  albo wieloboku  $ODCA$  na prostą  $u$ . Boki tego wieloboku są odpowiednio równe  $x$ ,  $y$ ,  $z$  i tworzą z  $u$  kąty  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , a zatem  $OB = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$ . Wprowadzając te wartości do (1), otrzymamy

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2.$$

Ponieważ  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ , możemy więc napisać  $r^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2$  czyli  $r^2 = (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + (z^2 + x^2) \cos^2 \beta + (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma - 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2zx \cos \gamma \cos \alpha$ .

Mnożymy to przez  $m$  i sumujemy takie równania dla wszystkich elementów. Wypadnie

$$\Sigma m r^2 = \cos^2 \alpha \Sigma m (y^2 + z^2) + \cos^2 \beta \Sigma m (z^2 + x^2) + \cos^2 \gamma \Sigma m (x^2 + y^2) - \\ - 2 \cos \alpha \cos \beta \Sigma m x y - 2 \cos \beta \cos \gamma \Sigma m y z - 2 \cos \gamma \cos \alpha \Sigma m z x.$$

Lecz  $y^2 + z^2$  jest to kwadrat odległości elementu  $m$  od osi  $x$ , a zatem  $\Sigma m (y^2 + z^2) = I_x$  i t. d. Będzie więc

$$I^2 = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2 I_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2 I_{yz} \cos \beta \cos \gamma - \\ - 2 I_{zx} \cos \gamma \cos \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Jest to szukany moment bezwładności.

Rozważymy szczegółowo przypadek, gdy prosta  $u$  leży w płaszczyźnie  $xy$ . W takim razie  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \gamma = 0$  i  $\cos \beta = \sin \alpha$ , a zatem

$$I = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - 2 I_{xy} \cos \alpha \sin \alpha.$$

Wyznamy tę wartość kąta  $\alpha$ , przy której  $I$  osiąga maks. lub min. Zakładając, że  $\frac{dI}{d\alpha} = 0$ , otrzymamy

$$(I_y - I_x) \sin 2\alpha - 2 I_{xy} \cos 2\alpha = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

a zatem

$$\tan 2\alpha = \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x}.$$

Kąt  $2\alpha$  posiada taki tangens przy dwóch wartościach mniejszych od  $2\pi$ ; różnią się one o  $\pi$ , a zatem równaniu (3) czynią zadość dwie wartości  $\alpha$ , różniące się o  $\frac{\pi}{2}$ . Oczywiście przy jednej z nich  $I$  osiąga maks., a przy drugiej min.; jednej z nich odpowiada prosta największego, a drugiej najmniejszego momentu punktu  $O$  w płaszczyźnie  $xy$ .

Jeżeli  $I_{xy} = 0$ , to owe wartości są  $0$  i  $\frac{\pi}{2}$ ; znaczy to, że osi  $x$  i  $y$  są osiami największego i najmniejszego momentu w płaszczyźnie  $xy$ . Odwrotnie, jeżeli za osi  $x$ ,  $y$  obierzemy proste największego i najmniejszego momentu, to  $\tan 2\alpha = 0$ , a zatem  $I_{xy} = 0$ . W tym przypadku

$$I = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Oczywiście otrzymamy to samo  $I$  dla dwóch prostych, z których jedna tworzy z osią  $x$  kąt  $\alpha$ , a druga  $-\alpha$ , innymi słowy osi największego i najmniejszego momentu są dwusiecznymi kąta pomiędzy dwiema prostymi, którym odpowiadają momenty równe.

Jeżeli  $I_y = I_x$ , to  $I = I_x$ ; znaczy to, że ciało posiada wzglę-

dem wszystkich prostych, przechodzących przez  $O$  i położonych w płaszczyźnie  $xy$ , momenty jednakowe.

Jeżeli za osi współrzędnych obierzemy osi główne punktu  $O$ , to w każdej z płaszczyzn współrzędnych będą one prostymi największego i najmniejszego momentu, a więc w tym razie  $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$ . Będziemy w tym przypadku szczególnym oznaczali momenty względem osi  $x, y, z$  odpowiednio przez  $A, B, C$ , nazywając je momentami głównymi punktu  $O$ , a zatem równanie (2) przekształci się na

$$I = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma \quad . . . . . (5).$$

Dowodziemy teraz twierdzenie odwrotne. Osi współrzędnych obrano, dajmy na to, w taki sposób, że wszystkie trzy momenty odśrodkowe są zerami. Tymczasem można stąd wyciągnąć jedynie ten wniosek, że osi  $x$  i  $y$  są prostymi największego i najmniejszego momentu w płaszczyźnie  $xy$ , osi  $y$  i  $z$  w płaszczyźnie  $yz$ , wreszcie osi  $z$  i  $x$  w płaszczyźnie  $zx$ . Wypada dowieść, że osi współrzędnych są także osiami głównymi początku  $O$ .

Aby nie przesądzać sprawy, napiszemy równanie (2) w postaci

$$I = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma.$$

Dajmy na to, że z trzech momentów  $I_x, I_y, I_z$  pierwszy jest największy, a drugi najmniejszy. Oczywiście

$$I_x = I_x \cos^2 \alpha + I_x \cos^2 \beta + I_x \cos^2 \gamma.$$

Odejmując od tego równania poprzednie, otrzymamy

$$I_x - I = (I_x - I_y) \cos^2 \beta + (I_x - I_z) \cos^2 \gamma.$$

Prawa strona jest oczywiście dodatnia, zatem  $I_x$  jest większe od  $I$ , jakiegokolwiek są  $\alpha, \beta, \gamma$ , a z tego wynika, że oś  $x$  jest prostą największego momentu punktu  $O$ . Tak samo dowiedziemy, że oś  $y$  jest prostą najmniejszego momentu, a więc osi współrzędnych są osiami głównymi.

Przypuśćmy, że wszystkie trzy główne momenty bezwładności punktu  $O$ , t. j.  $A, B$  i  $C$ , są równe. Z równania (5) wynika bezpośrednio, że w takim razie ciało posiada względem wszystkich prostych, przechodzących przez  $O$ , momenty równe. Jeżeli do tego  $O$  jest środkiem ciężkości, to ciało takie nazwiemy *kulistem*.

Przedewszystkiem właściwość taką posiada kula jednoro-

dna, ale prócz niej istnieje jeszcze bardzo wiele innych ciał kulistych. Ciałem takim jest np. sześcian. Za osi główne możemy tu uważać proste, prostopadłe do ścian, i oczywiście momenty względem nich są równe.

Prosty kołowy cylinder jednorodny jest kulisty, jeżeli moment bezwładności względem osi jest równy momentowi względem prostej, poprowadzonej przez środek ciężkości prostopadłe do osi, czyli jeżeli  $\frac{a^2}{2} = \frac{3a^2 + h^2}{12}$  (par. 99), gdzie  $a$  oznacza promień, a  $h$  wysokość. Z tego wynika, że w cylindrze kulistym  $h = a\sqrt{3}$ .

Prosty stożek jednorodny jest kulisty, jeżeli  $\frac{3a^2}{10} = \frac{12a^2 + 3h^2}{80}$  (par. 99), gdzie  $a$  jest promieniem podstawy i  $h$  wysokością. W takim razie  $h = 2a$ .

Prz. 1. Dowieść, że ramiona bezwładności trójkąta równobocznego względem wszystkich prostych, położonych w jego płaszczyźnie i przechodzących przez środek ciężkości są równe.

Wynika to wprost stąd, że ramiona bezwładności względem trzech wysokości są równe.

Prz. 2. Dowieść, że momenty bezwładności półkulistej czaszy względem wszystkich prostych, przechodzących przez środek, a także względem wszystkich prostych, przechodzących przez wierzchołek, są równe.

Prz. 3. Wyznaczyć ramię bezwładności elipsy o osiach  $2a$  i  $2b$  względem średnicy, której długość wynosi  $2r$ . Odp.  $k^2 = \frac{a^2b^2}{4r^2}$ .

Prz. 4. Wyznaczyć ramię bezwładności sztaby o długości  $l$  względem prostej, przechodzącej przez koniec i tworzącej ze sztabą kąt  $\alpha$ . Odp.  $k^2 = \frac{l^2 \sin^2 \alpha}{3}$ .

Prz. 5. Wyznaczyć ramię bezwładności prostokąta, mającego boki  $a$  i  $b$ , względem przekątnej. Odp.  $k^2 = \frac{a^2b^2}{6(a^2 + b^2)}$ .

Prz. 6. Promień podstawy prostego stożka  $= a$ , a wysokość  $= h$ ; wyznaczyć ramię bezwładności względem tworzącej. Odp.  $\frac{3a^2(a^2 + 6h^2)}{20(a^2 + h^2)}$ .

Prz. 7. Na końcach prostej sztaby o masie  $m$  umieszczamy dwa punkty materialne, z których każdy posiada masę  $\frac{m}{6}$ , a w środku punkt materialny o masie  $\frac{2m}{3}$ . Dowieść, że moment bezwładności sztaby względem każdej prostej jest równy momentowi tych trzech punktów.

Dowodziemy naprzód, że ramie bezwładności sztaby względem każdej prostej, przechodzącej przez środek, jest równe ramieniu bezwładności układu, złożonego z owych trzech punktów. Z tego wynika bezpośrednio twierdzenie, o którym mowa.

Prz. 8. W środkach boków trójkąta, którego masa =  $m$ , umieszczamy trzy punkty masy o masach  $\frac{m}{3}$ ; dowieść, że moment bezwładności trójkąta względem każdej prostej jest równy momentowi układu, złożonego z tych trzech punktów.

Prowadzimy przez jeden z wierzchołków dowolną prostą; korzystając z wzoru, który otrzymaliśmy w par. 99, prz. 4, znajdziemy łatwo, że ramiona bezwładności trójkąta i układu względem tej prostej są równe. Dowiedzimy następnie, że trójkąt i układ mają równe ramiona bezwładności względem wszystkich prostych, przechodzących przez wspólny środek ciężkości, a z tego wynika twierdzenie żądane.

Naszkicowany dowód dotyczy prostych, położonych w płaszczyźnie trójkąta, ale twierdzenie daje się łatwo rozciągnąć do wszystkich prostych przestrzeni.

Prz. 9. Przekątnia prostokąta tworzy z jednym z boków kąt  $\alpha$ . Wyznaczyć osi główne wierzchołka.

Oznaczamy boki przez  $2a$ ,  $2b$  i przekątnię przez  $2c$ . Prowadzimy przez wierzchołek prostą  $u$ , tworzącą z pierwszym bokiem kąt  $\vartheta$ ; znajdziemy, że kwadrat ramienia bezwładności względem tej prostej =

$$= \frac{b^2}{3} \cos^2 \vartheta + \frac{a^2}{3} \sin^2 \vartheta + c^2 \sin^2 (\alpha - \vartheta). \text{ Wielkość ta osiąga maks. lub min.,}$$

$$\text{gdy } \tan 2\vartheta = \frac{3 \tan 2\alpha}{4}.$$

Do tego samego dojdziemy przy pomocy wzoru

$$\tan 2\vartheta = \frac{I_{xy}}{I_y - I_x}.$$

**103. Trzecia oś.** Z trzech osi głównych punktu  $O$  jedna jest prostą największego momentu, druga prostą najmniejszego momentu, a o trzeciej wiemy dotychczas tylko to, że jest prostopadła do dwóch pierwszych. Mamy tu poznać pewne właściwości szczególne tej trzeciej osi.

Za osi współrzędnych obieramy osi główne punktu  $O$  i oznaczamy momenty główne przez  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Niech z nich  $A$  będzie największym, a  $B$  najmniejszym, a więc  $x$  jest osią największego, a  $y$  osią najmniejszego momentu.

Poprowadzimy przez oś  $z$  dowolnie płaszczyznę, przecinającą płaszczyznę  $xy$  według prostej  $u$ , i w tej płaszczyźnie poprowadzimy również dowolnie przez  $O$  prostą  $v$ . Kąt pomiędzy prostymi  $u$  i  $x$  oznaczmy przez  $\varphi$ , a pomiędzy  $v$  i  $z$  przez  $\vartheta$ .

Jeżeli kąty kierunkowe prostej  $v$  są  $\alpha, \beta, \gamma$ , to, jak wiadomo z geometrii,

$$\cos \alpha = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \cos \beta = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad \cos \gamma = \cos \vartheta^*).$$

Wstawiając to w (5) paragrafu poprzedzającego, otrzymamy

$$I = C \cos^2 \vartheta + (A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi) \sin^2 \vartheta.$$

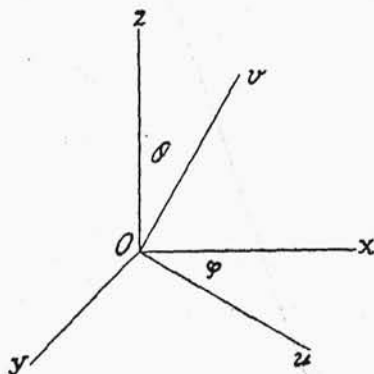


Fig. 57.

Gdy porównamy to z (4) par. poprzedzającego, to dojdziemy z łatwością do dwóch wniosków: 1) że wyrażenie, zawarte w nawiasie, jest momentem bezwładności względem prostej  $u$ ; 2) że proste  $z$  i  $u$  są osiami największego i najmniejszego momentu punktu  $O$  w płaszczyźnie  $zu$ . Tak więc prosta  $z$  jest osią największego lub najmniejszego momentu w każdej, przechodzącej przez nią, płaszczyźnie.

Jasną jest rzeczą, że jeżeli prosta  $u$  leży w pobliżu osi  $x$ , to jest ona prostą największego momentu w płaszczyźnie  $zu$ , a  $z$  jest wówczas prostą najmniejszego momentu. Jeżeli  $u$  leży w pobliżu osi  $y$ , to zachodzi przypadek odwrotny. Granicę pomiędzy dwoma obszarami stanowi to położenie prostej  $u$ , przy którym momenty względem  $z$  i  $u$  są równe. W przypadku granicznym

$$A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi = C.$$

Pisząc  $1 - \cos^2 \varphi$  zamiast  $\sin^2 \varphi$ , znajdziemy odrazu, że

$$A \cos^2 \varphi + B(1 - \cos^2 \varphi) = C \quad (A > B, \text{ wtedy } \cos^2 \varphi = \frac{C-B}{A-B})$$

$$\cos \varphi = \pm \sqrt{\frac{C-B}{A-B}}.$$

Widzimy, że w płaszczyźnie  $xy$  istnieją dwie takie proste graniczne  $u_1$  i  $u_2$ , tworzące odpowiednio z osią  $x$  kąty  $\varphi_1, \varphi_2$  i  $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$ . Dwusiecznymi kąta pomiędzy nimi są osi  $x$  i  $y$ .

\*) Wzory te można łatwo otrzymać w sposób następujący. Przypuśćmy, że na prostej  $v$  leży wektor  $P$ , posiadający początek w  $O$ . Składowe jego w kierunkach  $u$  i  $z$  będą  $P \sin \vartheta$  i  $P \cos \vartheta$ , a rzut na oś  $x$  jest równy  $P \cos \alpha$ , albo  $P \sin \vartheta \cos \varphi$ . Z tego otrzymamy wzór pierwszy, a biorąc rzuty na oś  $y$ , wzór drugi.

Proste  $u_1$  i  $u_2$  dzielą płaszczyznę  $xy$  na cztery wycinki katowe, czyli na dwa obszary. Jeżeli  $u$  leży w obszarze, zawierającym oś  $x$ , to  $z$  jest osią najmniejszego momentu płaszczyzny  $zu$ , jeżeli zaś  $u$  należy do obszaru, w którym przebiega oś  $y$ , to  $z$  jest osią największego momentu.

Wypada jeszcze zwrócić uwagę na płaszczyzny  $zu_1$  i  $zu_2$ . W myśl twierdzenia, które poznaliśmy w par. poprzedzającym, momenty bezwładności względem wszystkich prostych, położonych w tych płaszczyznach i przechodzących przez  $O$ , są równe. Można by płaszczyzny  $zu_1$  i  $zu_2$  nazwać przekrojami kołowymi punktu  $O$ . Wogóle przez każdy punkt przechodzą dwa takie przekroje, a ich przecięcie jest trzecią osią główną tego punktu.

**104. Punkt główny prostej.** Jeżeli prosta  $z$  jest osią główną punktu  $O$ , to punkt ten nazywamy punktem głównym prostej  $z$ . Nasuwa się pytanie, czy każda prosta jest dla któregoś ze swych punktów osią główną, albo czy każda prosta posiada punkt główny.

Na pytanie to można dać z góry odpowiedź przeczącą. Wynika to z uwagi następującej. Położenie punktu w przestrzeni daje się określić zapomocą trzech liczb, np. trzech współrzędnych Kartezjusza, i z tego względu mówimy, że zbiorowość punktów przestrzeni jest rozciągłością trójwymiarową. Położenie prostej określa się zapomocą czterech liczb, np. czterech współczynników równań prostej w układzie Kartezjusza. Z tego wynika, że zbiorowość prostych przestrzeni jest rozciągłością czterowymiarową. Można powiedzieć, że prostych jest nieskończenie razy więcej niż punktów, gdy tymczasem osi głównych może być najwyżej trzy razy więcej niż punktów.

Niech będzie jakiegokolwiek ciało sztywne i jakiegokolwiek prosta  $\zeta$ . Zobaczymy, jakie warunki powinny być spełnione, aby ta prosta posiadała punkt główny. Obierzmy za początek prostokątnego układu współrzędnych środek ciężkości  $O$  danego ciała, a oś  $z$  poprowadźmy równolegle do prostej  $\zeta$ . Przy-  
puśćmy, że ta ostatnia przecina płaszczyznę  $xy$  w punkcie  $P(a, b, 0)$ , i że posiada ona punkt główny  $Q(a, b, c)$ . Poprowadźmy jeszcze przez  $Q$  proste  $\xi$ ,  $\eta$  odpowiednio równolegle do osi  $x$ ,  $y$ .

Według paragrafu 101 momenty odśrodkowe ciała wzglę-

dem osi  $\eta$  i  $\zeta$  tudzież osi  $\xi$  i  $\xi$  są odpowiednio równe  $I_{yz} + Mbc$  i  $I_{zx} + Mca$ , gdzie  $I_{yz}$ ,  $I_{zx}$  oznaczają momenty odśrodkowe względem odpowiednich osi układu  $xyz$ , a  $M$  masę ciała. Skoro jednak prosta  $\zeta$  jest osią główną punktu  $Q$ , to  $\eta$  i  $\zeta$  są osiami największego i najmniejszego momentu tegoż punktu w płaszczyźnie  $\eta\zeta$ , a zatem moment odśrodkowy względem nich jest zerem; również jest zerem moment odśrodkowy względem  $\zeta$  i  $\xi$ . Wynikają stąd równania

$$I_{yz} + Mbc = 0 \quad (1),$$

$$I_{zx} + Mca = 0 \quad (2).$$

Równaniom tym wogóle nie może czynić zadość jedna i ta sama wartość niewiadomej  $c$ , a więc wogóle prosta  $\zeta$  nie posiada punktu głównego. Rugując z równań powyższych  $c$ , otrzymamy

$$I_{yz}a - I_{zx}b = 0 \quad (3).$$

Jest to warunek, który powinien być spełniony, aby prosta  $\zeta$  posiadała punkt główny. Jeżeli warunek ten jest spełniony, to można współrzędną  $c$ , a więc i położenie punktu głównego, wyznaczyć z równania (1) lub (2). Otrzymamy tylko jedną wartość na  $c$ , a więc wogóle prosta może posiadać tylko jeden punkt główny.

Przypuśćmy, że prosta  $\zeta$  jest równoległa do jednej z osi głównych ciała, czyli że oś  $z$  jest osią główną ciała. W tym przypadku szczególnym  $I_{yz} = I_{zx} = 0$ , a więc warunek (3) jest spełniony, a z (1) lub (2) wynika, że  $c = 0$ . Widzimy więc, że każda prosta równoległa do osi głównej ciała posiada punkt główny; jest nim rzut środka ciężkości na tę prostą.

Można twierdzenie to wypowiedzieć w inny sposób. Weźmy w płaszczyźnie, zawierającej dwie osi główne ciała, czyli w płaszczyźnie głównej ciała, jakikolwiek punkt. Oczywiście dwie jego osi główne leżą w owej płaszczyźnie, a trzecia jest do niej prostopadła, a zatem płaszczyzna główna ciała jest płaszczyzną główną każdego ze swych punktów.

Przypuśćmy następnie, że prosta  $\zeta$  przechodzi przez środek ciężkości, a więc  $a = b = 0$ . I w tym razie warunek (3) jest spełniony, a z (1) lub (2) wynika, że  $c = \infty$ , jeżeli  $I_{yz}$  i  $I_{zx}$  są różne od zera. Możemy przeto powiedzieć, że żadna z prostych, przechodzących przez środek ciężkości ciała, nie posiada w odle-



główności skończonej punktu głównego, jeżeli nie jest osią główną ciała.

Przypuśćmy wreszcie, że prosta  $\zeta$  jest osią główną ciała. W tym razie  $I_{yz}=I_{zx}=0$ , oraz  $a=b=0$ , i równaniom (1) i (2) czyni zadość każda wartość współrzędnej  $c$ . Z tego wynika, że oś główna ciała jest osią główną każdego ze swych punktów. Innymi osiami głównymi jakiegokolwiek punktu  $Q$ , położonego na osi głównej ciała, są dwie proste odpowiednio równoległe do dwóch pozostałych osi głównych ciała, gdyż punkt  $Q$  jest na każdej z tych prostych rzutem środka ciężkości.

Prz. 1. Wyznaczyć osi główne sześciianu względem danego punktu  $A$ .

Jeżeli  $O$  oznacza środek sześciianu, to  $AO$  jest jedną z osi szukanych; dwiema innymi może być każda para prostokątna prostych, prostopadłych do  $OA$ .

Prz. 2. Mając dane ciało, wyznaczyć miejsce geometryczne punktów, dla których jedna z osi głównych ma kierunek dany.

Obieramy środek ciężkości za początek układu współrzędnych i prowadzimy oś  $z$  w kierunku danym. Jeżeli  $A(xyz)$  jest jednym z punktów szukanego miejsca geometrycznego, to  $I_{yz}x - I_{zx}y = 0$ , a zatem wszystkie takie punkty leżą w płaszczyźnie, przechodzącej przez oś  $z$ . Gdy oś  $x$  obierzemy w tej płaszczyźnie, to równanie szukanego miejsca będzie  $I_{xx}x - Mzx = 0$ , a więc jest to hiperbola równoramienna, której asymptotą jest prosta  $z$ .

Prz. 3. Osi  $Ox, Oy$  obrano w taki sposób, że  $\Sigma mxy = 0$ , a momenty bezwładności względem nich wynoszą  $A$  i  $B$ . Wyznaczyć moment odśrodkowy względem osi  $Ox', Oy'$ , położonych w płaszczyźnie  $xy$ , jeżeli kąt  $xOx' = \phi$ . Odp.  $\frac{(A-B) \sin 2\phi}{2}$ .

Prz. 4. Wyznaczyć w płaszczyźnie głównej ciała punkt  $F$  w taki sposób, aby wszystkim prostym, przechodzącym przez  $F$  w tejże płaszczyźnie, odpowiadały momenty równe.

Obieramy osi główne za osi  $x, y$ ; momenty względem nich oznaczamy przez  $A, B$ , zakładając, że  $A > B$ . Niechaj  $F(x_1y_1)$  będzie punktem szukanym. Prowadzimy przezeń nowe osi  $\xi\eta$  równoległe do  $xy$ . Możemy uważać  $\xi, \eta$  za osi główne punktu  $F$ , a zatem  $\Sigma m\xi\eta = 0$ , a ponieważ i  $\Sigma mxy = 0$ , przeto według par. 101  $Mx_1y_1 = 0$ . Z tego wynika, że albo  $x_1 = 0$ , albo  $y_1 = 0$ . Znajdziemy bez trudności, że zachodzi ten drugi przypadek, i że  $x_1 = \pm \sqrt{\frac{A-B}{M}}$ .

Istnieją więc dwa punkty  $F_1$  i  $F_2$ , posiadające właściwość żadaną. Punkty te leżą na osi większego momentu w jednakowych odległościach od środka ciężkości. Nazywamy je *ogniskami bezwładności*.

Prz. 5. W płaszczyźnie głównej ciała dane są ogniska bezwładności  $F_1, F_2$  oraz punkt  $P$ . Wyznaczyć osi główne tego punktu.

Jedna z szukanych osi jest prostopadła do danej płaszczyzny głównej, dwie inne są dwusiecznymi kąta  $F_1PF_2$  (par. 102).

Prz. 6. W płaszczyźnie głównej ciała dane są ogniska bezwładności i prosta  $p$ . Wyznaczyć punkt główny tej prostej.

Szukany punkt  $P$  powinien leżeć tak, aby prosta  $p$  była jedną z dwusiecznych kąta  $F_1PF_2$ . Można wyznaczyć  $P$  w sposób następujący. Niech  $Q$  będzie punktem przecięcia prostych  $p$  i  $F_1F_2$ . Wyznaczamy punkt  $R$ , harmonicznie sprzężony z  $Q$  względem  $F_1, F_2$ , i zataczamy okrąg na średnicy  $QR$ ; przetnie on  $p$  w punkcie szukanym.

Jeżeli prosta  $p$  przechodzi przez środek  $O$  odcinka  $F_1F_2$ , czyli przez środek ciężkości ciała, to  $R$  leży w nieskończoności, i ów okrąg wyradza się w dwie proste; jedną jest prosta nieskończenie odległa płaszczyzny, a drugą prostopadłą w  $O$  do  $F_1F_2$ . Oczywiście punkt główny prostej  $p$  jest w tym razie nieskończenie odległy.

Prz. 7. Jeżeli momenty bezwładności względem wszystkich prostych, przechodzących przez pewien punkt są równe, to punkt taki zowie się *kulistym*. Okazać, że ciało posiada punkty kuliste tylko w takim razie, gdy momenty względem dwóch osi głównych są równe, a moment względem trzeciej jest większy od tamtych.

Prz. 8. Wyznaczyć punkty kuliste półkulistej czaszy.

Prz. 9. Wyznaczyć punkty kuliste okrągłej tarczy o promieniu  $a$ , Odp. Punkty osi, położone w odległości  $\frac{a}{2}$  od środka.

Prz. 10. Wyznaczyć punkty kuliste prostego stożka kołowego, w którym wysokość jest równa promieniowi podstawy  $a$ . Odp. Odległość każdego z punktów szukanych od środka ciężkości =  $\frac{3a}{4\sqrt{5}}$ .