

VII. SZKIELET DYNAMICZNY CIAŁA.

95. Przedmiot rozdziału. Zasadnicze zagadnienie dynamiki ciał sztywnych jest takie: mając dane ciało sztywne oraz siły na nie działające, wyznaczyć ruch tego ciała. Aby zagadnienie takie rozwiązać trzeba przedewszystkiem wiedzieć, jak jest w ciele rozłożona masa, czyli znać jego budowę dynamiczną.

Wśród ciał sztywnych możliwa jest nieograniczona różnorodność kształtów, a wśród ciał niejednorodnych o jednakowych kształtach możliwa jest jeszcze nieograniczona różnorodność w rozkładzie mas. Pomimo to jednak wszystkie ciała sztywne wykazują w swej budowie dynamicznej pewne wspólne rysy. Można by powiedzieć, że każde ciało sztywne posiada jakby szkielet dynamiczny, i szkielety wszystkich ciał są zbudowane na jedną modłę, jak na jedną modłę są zbudowane szkielety wszystkich zwierząt kręgowych.

Przedmiotem niniejszego rozdziału ma być właśnie opis budowy dynamicznej ciała sztywnego. Punktem wyjścia będzie pojęcie momentu bezwładności, albo momentu drugiego rzędu. Na początku poznamy trzy rodzaje tych momentów, a mianowicie *moment względem płaszczyzny, moment względem prostej albo osi i moment względem punktu, albo środka.*

Właściwie w zagadnieniach dynamicznych będą potrzebne tylko momenty względem osi, ale pomiędzy wymienionymi rodzajami zachodzą pewne proste związki, które ułatwiają w dużym stopniu wyznaczanie momentów; dla tego też wypada poznać i dwa rodzaje pozostałe. Następnie poznamy jeszcze czwarty rodzaj momentu drugiego rzędu, a mianowicie tak zwany *moment odśrodkowy, albo dewiacyjny.*

Wypada zauważyć, że wyraz moment został tu użyty

w zupełnie innym znaczeniu, niż np. w par. 9. Moment bezwładności nie jest wcale wektorem, lecz jest skalarą.

96. Moment względem płaszczyzny. Niech będzie jakieś ciało sztywne i jakaś płaszczyzna \mathbf{P} . Podzielmy to ciało na tak małe elementy, aby każdy z nich można było uważać za punkt. Masy ich niech będą m_1, m_2, \dots , a odległości od płaszczyzny \mathbf{P} z_1, z_2, \dots . Odległościom tym przypisujemy znaki podobnie, jak odległościom od płaszczyzn współrzędnych. Iloczyn mz^2 nazywa się momentem bezwładności elementu m względem płaszczyzny \mathbf{P} , a suma wszystkich iloczynów takich, t. j. $m_1 z_1^2 + m_2 z_2^2 + \dots = \Sigma m z^2$ zowie się momentem bezwładności ciała względem tejże płaszczyzny.

Oznaczmy masę całego ciała, czyli Σm przez M i obierzmy tak długość k , aby było

$$Mk^2 = \Sigma m z^2.$$

Ta długość k nazywa się ramieniem bezwładności ciała względem płaszczyzny \mathbf{P} .

Wyobraźmy sobie, że cała masa ciała została rozłożona na płaszczyźnie \mathbf{P}' , równoległej do \mathbf{P} i położonej od niej w odległości k . Oczywiście ta płaska warstwa masy miałaby względem \mathbf{P} taki sam moment bezwładności, jak ciało dane.

Poprowadźmy jeszcze przez środek ciężkości, albo raczej przez środek masy ciała ^{*)}, płaszczyznę \mathbf{P}_0 równoległą do \mathbf{P} , i oznaczmy przez z_0 odległość pierwszej od drugiej, a przez ζ_1, ζ_2, \dots , odległości punktów m_1, m_2, \dots od \mathbf{P}_0 . Oczywiście $z = \zeta + z_0$, i $z^2 = \zeta^2 + z_0^2 + 2z_0\zeta$, albo

$$mz^2 = m\zeta^2 + mz_0^2 + 2z_0m\zeta.$$

Utwórzmy takie równania dla wszystkich elementów ciała i dodajmy je stronami. Wypadnie

$$\Sigma m z^2 = \Sigma m \zeta^2 + \Sigma m z_0^2 + \Sigma 2m z_0 \zeta.$$

Drugi wyraz prawej strony $= z_0^2 \Sigma m = M z_0^2$, a wyraz trzeci $= 2z_0 \Sigma m \zeta$. Lecz $\Sigma m \zeta$ jest to tak zw. moment statyczny, czyli

^{*)} Środek masy i środek ciężkości nie są synonimami, ponieważ jednak w zakresie zjawisk mechanicznych, z którymi mamy do czynienia na powierzchni ziemi, środek masy jest zawsze środkiem ciężkości, nie będę przeto nadal czynił różnicy pomiędzy tymi terminami, posługując się przeważnie drugim.

moment pierwszego rzędu, względem płaszczyzny P_0 , a ze statyki wiadomo, że moment taki względem płaszczyzny, przechodzącej przez środek masy, jest zerem. Będzie więc

$$\Sigma m z^2 = \Sigma m \zeta^2 + M z_0^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Twierdzenie, zawarte w tym wzorze, można wypowiedzieć tak: aby otrzymać moment bezwładności względem płaszczyzny P , trzeba do momentu względem płaszczyzny równoległej, przechodzącej przez środek ciężkości, dodać moment masy ciała, skoncentrowanej w środku ciężkości, względem P .

Oczywiście ze wszystkich płaszczyzn równoległych najmniejszy moment odpowiada płaszczyźnie, przechodzącej przez środek ciężkości.

Równanie (1) można jeszcze napisać w postaci $M k^2 = M k_0^2 + M z_0^2$, gdzie k_0 oznacza ramię bezwładności względem płaszczyzny P_0 ; zatem

$$k^2 = k_0^2 + z_0^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

97. Moment względem osi. Niech będzie znowu ciało sztywne i jakaś prosta z . Odległości elementów $m_1, m_2 \dots$ od z oznaczmy przez $r_1, r_2 \dots$. Iloczyn $m r^2$ zowie się momentem bezwładności elementu m względem osi z , a $\Sigma m r^2$ momentem bezwładności ciała względem tejże osi.

Jeżeli $M k^2 = \Sigma m r^2$, to k nazywa się ramieniem bezwładności ciała względem osi z . Gdybyśmy rozłożyli masę ciała na powierzchni prostego cylindra, którego osią jest prosta z , a promień jest równy k , to taka warstwa cylindryczna miałaby względem z taki sam moment bezwładności, jak ciało dane.

Pomiędzy momentami względem prostych i płaszczyzn zachodzi prosty związek. Poprowadźmy przez oś z dwie płaszczyzny P_x i P_y , tworzące kąt prosty, i niech x, y oznaczają odległości elementu m od tych płaszczyzn. Oczywiście $r^2 = x^2 + y^2$, albo

$$m r^2 = m x^2 + m y^2.$$

Takie równanie odpowiada każdemu elementowi; sumując je, otrzymamy

$$\Sigma m r^2 = \Sigma m x^2 + \Sigma m y^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Znaczy to, że moment bezwładności względem osi jest równy sumie momentów względem dwóch płaszczyzn, przechodzących przez tę oś i prostopadłych do siebie.

Oznaczając przez k_x i k_y ramiona bezwładności ciała względem P_x i P_y , znajdziemy, że

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (2).$$

Poprowadźmy przez środek ciężkości ciała prostą ζ równoległą do z . Odległość pomiędzy prostymi z i ζ oznaczmy przez x_0 , a momenty bezwładności względem nich odpowiednio przez I , I_0 . Poprowadźmy prócz tego trzy płaszczyzny, a mianowicie płaszczyznę Q , przechodzącą przez z i ζ , oraz płaszczyzny P , P_0 , prostopadłe do Q i przechodzące odpowiednio przez z i ζ . Momenty bezwładności ciała względem płaszczyzn Q , P , P_0 oznaczmy odpowiednio przez K , L , L_0 . W myśl tylko co dowiedzionego twierdzenia

$$I = K + L \quad \text{i} \quad I_0 = K + L_0.$$

Rugując stąd K , otrzymamy $I = I_0 + L - L_0$. Lecz według twierdzenia, które poznaliśmy w paragrafie poprzedzającym $L - L_0 = -Mx_0^2$, a zatem

$$I = I_0 + Mx_0^2 \quad (2).$$

Pragnąc otrzymać moment bezwładności względem osi z , trzeba do momentu względem prostej, przechodzącej przez środek ciężkości i równoległej do z , dodać moment masy ciała, skoncentrowanej w środku ciężkości, względem z .

Ze wszystkich prostych równoległych oczywiście najmniejszy moment odpowiada tej, która przechodzi przez środek ciężkości.

Oznaczając przez k_0 ramię bezwładności ciała względem osi z_0 , przekształćmy równanie (2) na

$$k^2 = k_0^2 + x_0^2 \quad (3).$$

98. Moment względem punktu. Momentem bezwładności ciała względem punktu O nazywamy $\sum mr^2$, gdzie m_1, m_2, \dots oznaczają masy elementów, a r_1, r_2, \dots ich odległości od O . Jeżeli $Mk^2 = \sum mr^2$, to k zowie się ramieniem bezwładności względem O . Gdybyśmy całą masę ciała rozłożyli na powierzchni kuli, której środkiem jest punkt O , a promień jest równy k , to moment bezwładności takiej warstwy kulistej względem O byłby równy momentowi ciała.

Obierzmy O za początek prostokątnego układu współrzędnych i oznaczmy przez x, y, z współrzędne elementu m .

Oczywiście $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, albo

$$mr^2 = mx^2 + my^2 + mz^2.$$

Sumując wszystkie takie równania, otrzymamy

$$\boxed{\Sigma mr^2 = \Sigma mx^2 + \Sigma my^2 + \Sigma mz^2} \quad (1),$$

Σmx^2 jest to moment bezwładności względem płaszczyzny yz i t. d., a zatem twierdzenie, zawarte w (1), wypowiemy tak: moment bezwładności względem punktu jest równy sumie momentów bezwładności względem trzech płaszczyzn, przechodzących przez ten punkt i prostopadłych do siebie.

Ostatnie równanie przekształca się łatwo na

$$k^2 = k_{yz}^2 + k_{zx}^2 + k_{xy}^2. \quad (2),$$

gdzie k_{yz} , k_{zx} , k_{xy} oznaczają ramiona bezwładności względem płaszczyzn yz , zx , xy .

Oznaczmy moment bezwładności ciała względem punktu O przez I , momenty względem płaszczyzn yz , zx , xy przez I_{yz} , I_{zx} , I_{xy} i wreszcie momenty względem prostych x , y , z przez I_x , I_y , I_z .

Na zasadzie (1) w paragrafie poprzedzającym napiszemy

$$I_x = I_{yz} + I_{zx}, \quad I_y = I_{xz} + I_{xy}, \quad I_z = I_{yx} + I_{zx}.$$

Gdy dodamy te równania stronami, to wypadnie

$$I_x + I_y + I_z = 2(I_{yz} + I_{zx} + I_{xy})$$

lub

$$I_x + I_y + I_z = 2I \quad (3),$$

gdyż według (1) $I_{yz} + I_{zx} + I_{xy} = I$.

99. Wyznaczanie momentów bezwładności. Przy pomocy twierdzeń powyższych wyznaczmy momenty lub ramiona bezwładności kilku ciał, z którymi będziemy mieli do czynienia w dalszym ciągu. We wszystkich rozważanych przypadkach należy uważać ciała za jednorodne.

Sztaba. Naprzód wyznaczmy moment bezwładności cienkiej prostej sztaby o długości

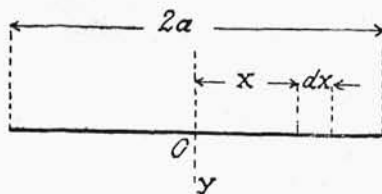


Fig. 54.

2a względem prostej y , przechodzącej przez środek ciężkości O i prostopadłej do sztaby, albo względem punktu O , bo w danym przypadku jest to wszystko jedno.

Dzielimy sztabę na nieskończenie małe elementy dx ; masa takiego elementu jest równa μdx , gdzie μ oznacza masę jednostki długości. Moment bezwładności jednego elementu względem O wynosi $\mu x^2 dx$, a zatem moment bezwładności sztaby

$$I = \int_{-a}^a \mu x^2 dx = \frac{2\mu a^3}{3}.$$

Ponieważ masa sztaby $= 2\mu a$, przeto na ramię bezwładności otrzymamy wzór

$$\left[k^2 = \frac{a^2}{3} \right]$$

Kwadrat ramienia bezwładności względem końca sztaby =

$$= \frac{a^2}{3} + a^2 = \frac{4a^2}{3}.$$

Płyta prostokątna. Wyznamy ramię bezwładności cienkiej płyty prostokątnej o podstawie $2a$ i wysokości $2b$ względem prostej x , przechodzącej przez środek ciężkości O i równoległej do podstawy. W tym celu dzielimy płytę na nieskończenie wąskie paski prostokątne, prostopadłe do x . Pasek taki możemy uważać za sztabę o długości $2b$, a zatem kwadrat jego ramienia bezwładności

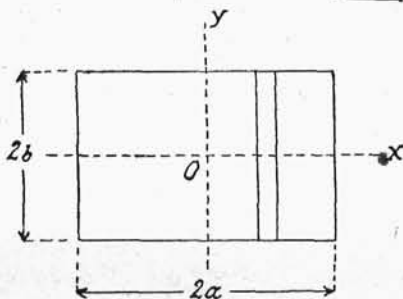


Fig. 55.

$$\left[k_x^2 = \frac{b^2}{3} \right]$$

Gdybyśmy masę paska skoncentrowali w jednym punkcie w odległości k_x od x , to moment bezwładności całego ciała względem tej prostej nie uległ by zmianie. Z tego wynika, że k_x jest również ramieniem bezwładności płyty względem osi x .

Kwadrat ramienia bezwładności względem osi y , przechodzącej przez O i równoległej do wysokości, będzie oczywiście

$$\left[k_y^2 = \frac{a^2}{3} \right]$$

Można uważać, że k_x i k_y są ramionami bezwładności płyty względem płaszczyzn, przechodzących odpowiednio przez proste x , y i prostopadłych do płaszczyzny płyty, a zatem

$k_x^2 + k_y^2 = \frac{a^2 + b^2}{3}$ będzie kwadratem ramienia bezwładności względem osi, przechodzącej przez O i prostopadłej do płaszczyzny płyty.

Prosty cylinder kołowy. Wyznamy moment bezwładności względem osi cylindra. W tym celu dzielimy cylinder na nieskończenie cienkie warstwy cylindryczne powierzchniami cylindrycznymi współśrodkowymi z powierzchnią cylindra. Promień jednej z nich niech będzie równy r , a grubości dr ; w takim razie masa jej wynosi $2\pi rhdr \cdot \mu$, gdzie h oznacza wysokość cylindra, a μ masę jednostki objętości. Moment bezwładności takiej warstwy względem osi jest oczywiście równy $2\pi rhdr \cdot \mu \cdot r^2$, a moment całego cylindra

$$I = \int_0^a 2\pi \mu h r^3 dr = \frac{\pi \mu h a^4}{2},$$

gdzie a oznacza promień cylindra.

Ponieważ masa cylindra wynosi $\pi \mu h a^2$, przeto

$$\left[k^2 = \frac{a^2}{2} \right]$$

Wyznamy jeszcze ramię bezwładności k_1 względem prostej, przechodzącej przez środek ciężkości i prostopadłej do osi cylindra. Poprowadzimy przez nią dwie płaszczyzny P_x i P_y , jedną prostopadłą do osi cylindra, a drugą przez tę oś, i wyznaczmy względem nich ramiona bezwładności k_x i k_y .

Możemy uważać, że cylinder składa się ze sztab o długości h , równoległych do osi, czyli prostopadłych do płaszczyzny P_x . Kwadrat ramienia bezwładności każdej sztaby względem tej płaszczyzny $= \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{h^2}{12}$, oczywiście i $k_x^2 = \frac{h^2}{12}$.

Ramiona bezwładności względem wszystkich płaszczyzn, przechodzących przez oś, są równe, a suma kwadratów ramion względem takich dwóch płaszczyzn nawzajem prostopadłych, jest równa k^2 , a zatem $k_y^2 = \frac{k^2}{2} = \frac{a^2}{4}$.

Ostatecznie znajdziemy, że

$$k_1^2 = k_x^2 + k_y^2 = \frac{3a^2 + h^2}{12}.$$

Stożek prosty. Naprzód wyznaczmy moment bezwładności względem osi. W tym celu dzielimy stożek na nieskończenie ciężkie warstwy płaszczyznami prostopadłymi do osi. Odległość jednej z nich od wierzchołka niech będzie równa y , grubość dy , promień zaś wynosi $y \tan \alpha$, gdzie 2α oznacza kąt wierzchołkowy. Warstwę tę możemy uważać za cylinder, zatem masa jej $= \pi y^2 \tan^2 \alpha dy \cdot \mu$, a ponieważ kwadrat ramienia bezwładności $= \frac{y^2 \tan^2 \alpha}{2}$, przeto moment bezwładności warstwy względem osi $= \frac{\pi y^4 \tan^4 \alpha dy \cdot \mu}{2}$, a moment szukany

$$I = \int_0^h \frac{\pi \mu \tan^4 \alpha y^4 dy}{2} = \frac{\pi \mu \tan^4 \alpha \cdot h^5}{10}.$$

Oznaczmy jeszcze przez a promień podstawy; w takim razie $\tan \alpha = \frac{a}{h}$, i

$$I = \frac{\pi \mu a^4 h}{10}.$$

Masa stożka wynosi $\frac{\pi \mu a^2 h}{3}$, a zatem

$$\boxed{k^2 = \frac{3a^2}{10}}.$$

Wyznamy jeszcze ramię bezwładności k_1 względem prostej, przechodzącej przez środek ciężkości i prostopadłej do osi stożka, a w tym celu wyznaczmy naprzód moment względem płaszczyzny, poprowadzonej przez wierzchołek prostopadłe do osi. Moment bezwładności warstwy wyżej określonej $= \pi y^2 \tan^2 \alpha dy \cdot \mu \cdot y^2$, moment stożka $= \int_0^h \pi \mu \tan^2 \alpha y^4 dy = \frac{\pi \mu \tan^2 \alpha h^5}{5}$, a kwadrat ramienia bezwładności $\frac{3h^2}{5}$, gdyż objętość $= \frac{\pi h^3 \tan^2 \alpha}{3}$. Odległość wierzchołka od środka ciężkości, jak wiadomo ze statyki, wynosi $\frac{3h}{4}$, a zatem kwadrat ramienia bezwładności względem płaszczyzny, poprowadzonej przez środek ciężkości prostopadłe do osi, będzie $\frac{3h^2}{5} - \left(\frac{3h}{4}\right)^2 = \frac{3h^2}{80}$.

Znajdziemy z łatwością, jak w przypadku cylindra, że

kwadrat ramienia bezwładności względem płaszczyzny, przechodzącej przez oś, $= \frac{3a^2}{10} : 2 = \frac{3a^2}{20}$, a zatem

$$k_1^2 = \frac{3a^2}{20} + \frac{3h^2}{80} = \frac{12a^2 + 3h^2}{80}.$$

Kula. Chodzi tu o ramię bezwładności k względem średnicy, lecz naprzód wyznaczymy moment bezwładności względem środka. W tym celu dzielimy kulę na nieskończenie cienkie warstwy powierzchniami kulistymi, współśrodkowymi z daną. Niech promień jednej z takich warstw będzie r , a grubość dr . Objętość wyniesie $4\pi r^2 dr$, a masa $4\pi r^2 dr \cdot \mu$. Oczywiście moment bezwładności warstwy względem środka $= 4\pi r^2 dr \cdot \mu \cdot r^2$, a moment kuli $= \int_0^a 4\pi \mu r^4 dr = \frac{4\pi \mu a^5}{5}$, gdzie a oznacza promień.

Kwadrat ramienia bezwładności względem środka równa się $\frac{4\pi \mu a^5}{5} : \frac{4\pi \mu a^3}{3} = \frac{3a^2}{5}$.

Kwadrat ramienia bezwładności względem płaszczyzny, przechodzącej przez środek $= \frac{3a^2}{5} : 3 = \frac{a^2}{5}$, i zatem *wzgl. środka*

$$k^2 = \frac{a^2}{5} \cdot 2 = \frac{2a^2}{5}.$$

inercji

W przykładach niżej podanych chodzi o momenty bezwładności linii, pól i brył. Należy zawsze uważać, że te linie, pola i bryły są równomiernie okryte lub wypełnione masą.

Prz. 1. Wyznaczyć kwadrat ramienia bezwładności okręgu koła o promieniu a względem osi, przechodzącej przez środek i prostopadłej do płaszczyzny koła, a także względem średnicy. Odp. a^2 i $\frac{a^2}{2}$.

Prz. 2. Wyznaczyć ramię bezwładności równoległoboku o wysokości h względem prostej, przechodzącej przez środek i równoległej do podstawy. Odp. $k^2 = \frac{h^2}{12}$.

Dzieląc pole równoległoboku na wąskie paski równoległe do podstawy, dowiedziemy łatwo, że moment jego jest równy momentowi prostokąta, posiadającego tę samą podstawę i wysokość.

Prz. 3. Wyznaczyć ramię bezwładności trójkąta o wysokości h względem podstawy. Odp. $k^2 = \frac{h^2}{6}$.

Dopełniamy trójkąt do równoległoboku. Momenty bezwładności

obydwóch trójkątów względem prostej, przechodzącej przez środek i równoległej do podstawy są równe, zatem moment jednego jest równy połowie momentu równoległoboku. Stąd przejdziemy przy pomocy twierdzenia z par. 97 do momentu (lub ramienia) względem osi równoległej przez środek ciężkości i wreszcie do momentu względem podstawy. Równie łatwo można wyznaczyć ramię zapomocą całkowania.

Prz. 4. Wyznaczyć ramię bezwładności trójkąta $A_1A_2A_3$ względem prostej, przechodzącej przez A_3 w odległości a_1 , a_2 od wierzchołków A_1 , A_2 . Odp. $k^2 = \frac{a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2}{6}$.

Moment bezwładności trójkąta $A_1A_2A_3$ będzie oczywiście równy różnicy momentów trójkątów BA_2A_3 i BA_1A_3 , gdzie B oznacza przecięcie prostej danej z A_1A_2 .

Prz. 5. Wyznaczyć ramię bezwładności tarczy kołowej o promieniu a względem stycznej. Odp. $k^2 = \frac{5a^2}{4}$.

Prz. 6. Wyznaczyć ramię bezwładności płyty półkolistej o promieniu a , względem prostej, przechodzącej przez środek ciężkości i równoległej do podstawy. Odp. $k^2 = a^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \right)$.

Prz. 7. Wyznaczyć ramiona bezwładności pola elipsy względem dużej osi, małej osi, a także względem prostej, przechodzącej przez środek i prostopadłej do płaszczyzny krzywej. Odp. Kwadraty szukanych ramion wynoszą odpowiednio $\frac{b^2}{4}$, $\frac{a^2}{4}$, $\frac{a^2+b^2}{4}$, gdzie $2a$ i $2b$ oznaczają długości osi dużej i małej.

Ze względów symetrii wynika, że wyrażenia na ramiona bezwładności względem osi muszą być symetryczne względem a i b . Moment względem dużej osi daje się łatwo wyznaczyć bez całkowania. Uważamy elipsę za rzut koła, położonego w płaszczyźnie, przechodzącej przez tę oś i nachylonej do płaszczyzny elipsy pod kątem $\alpha = \arccos \left(\frac{b}{a} \right)$. Elementowi dS pola koła, położonemu w odległości y od osi, odpowiada element $dS \cos \alpha$ elipsy, położony w odległości $y \cos \alpha$. Z tego wynika, że moment bezwładności elipsy jest $\cos^3 \alpha$ razy większy od momentu koła.

Prz. 8. Wyznaczyć ramiona bezwładności łuku kołowego o długości $2a\alpha$ (promień koła $= a$) względem średnicy, przechodzącej przez środek łuku, a także względem prostej, przechodzącej przez środek ciężkości i prostopadłej do płaszczyzny koła. Odp. $\frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right)$, $a^2 \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \right)$.

Prz. 9. Granicę cienkiej płyty stanowi parabola $y^2 = 4px$ i prosta

prostopadła do osi paraboli, przeprowadzona w odległości c od wierzchołka. Wyznaczyć ramiona bezwładności względem osi i względem stycznej w wierzchołku. Odp. $\frac{4cp}{5}, \frac{3c^2}{7}$.

Prz. 10. Wyznaczyć ramię bezwładności półkuli o promieniu a względem stycznej w wierzchołku. Odp. $\frac{13a^2}{20}$.

Prz. 11. Wyznaczyć ramię bezwładności elipsoidy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ względem osi x . Odp. $\frac{b^2 + c^2}{5}$.

Prz. 12. Wyznaczyć ramię bezwładności paraboloidy obrotu, w której promień podstawy $= b$, względem osi obrotu. Odp. $\frac{b^2}{3}$.

Prz. 13. Wyznaczyć ramiona bezwładności lemniskaty ($r^2 = a^2 \cos 2\varphi$) względem obydwóch osi. Odp. Kwadraty szukanych ramion względem osi przecinającej pole krzywej i nie przecinającej są $\frac{a^2}{8} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} \right)$, i $\frac{a^2}{8} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{4}{3} \right)$.

Najlepiej będzie wyznaczyć naprzód moment względem bieguna czyli węzła, następnie względem osi nie przecinającej i z tego obrać moment względem drugiej. Pole lemniskaty (obydwóch pętlic) $= a^2$.

Prz. 14. Wyznaczyć ramię bezwładności sześciennego pudełka o cienkich ścianach i krawędzi a względem krawędzi. Odp. $\frac{7a^2}{9}$.

100. Osi główne. Niech będzie ciało sztywne, jakakolwiek płaszczyzna P i w tej płaszczyźnie jakikolwiek punkt O . Skierujmy uwagę na te proste, które w płaszczyźnie P przechodzą przez punkt O , czyli na pęk promieni O . Każdej z tych prostych odpowiada pewien moment bezwładności ciała. Wyróżnimy z pośród nich dwie, a mianowicie tę, której odpowiada moment największy, i tę, której odpowiada moment najmniejszy. Nazwiemy je osiami największego i najmniejszego momentu punktu O w płaszczyźnie P . Zobaczymy, jaki kąt tworzą te proste.

W tym celu obieramy O za początek układu prostokątnego, a P za płaszczyznę xy . W takim razie oś z będzie prostopadła do P . Oznaczmy przez I_x, I_y, I_z, I momenty bezwładności ciała względem prostych x, y, z , oraz względem

punktu O . Według (3) w par. 98 $I_x + I_y + I_z = 2I$, a zatem

$$I_x + I_y = 2I - I_z.$$

Wyobraźmy sobie teraz, że układ współrzędnych obraca się około osi z , ale ciało i płaszczyzna P pozostają w spokoju. Podczas tego ruchu I_x i I_y się zmieniają, ale suma ich pozostaje stałą, gdyż ani I ani I_z nie ulegają zmianom. Z tego wynika, że gdy I_x osiągnie wartość największą, to I_y przybierze wartość najmniejszą, to znaczy, gdy oś x zajmie położenie osi największego momentu, to oś y zajmie właśnie położenie osi najmniejszego momentu. Tak więc osi największego i najmniejszego momentu tworzą kąt prosty.

Zwróćmy teraz uwagę na wszystkie proste, które przechodzą w przestrzeni przez O , czyli na snop promieni O . Wyróżnimy znowu z pośród tych prostych dwie, którym odpowiadają momenty największy i najmniejszy. Nazwiemy je osiami największego i najmniejszego momentu punktu O i oznaczmy przez a i b . Są one również osiami największego i najmniejszego momentu punktu O w płaszczyźnie ab , a zatem w myśl wyżej dowiedzionego twierdzenia są do siebie prostopadłe.

Poprowadźmy jeszcze trzecią prostą c prostopadłą do płaszczyzny ab . Będzie ona oczywiście osią największego momentu w płaszczyźnie bc i osią najmniejszego momentu w płaszczyźnie ca . Te trzy proste a , b i c nazywają się osiami głównymi punktu O , a jeżeli O jest środkiem ciężkości, to osiami głównymi ciała.

Osi główne odgrywają ważną rolę w dynamice ciała sztywnego. Stanowią one właśnie ten szkielet dynamiczny ciała, o którym była wzmianka w par. 95.

101. Moment odśrodkowy. Niech będzie ciało sztywne i prostokątny układ współrzędnych. Nazywamy *momentem odśrodkowym* albo *momentem dewiacyjnym* ciała względem osi x , y sumę $m_1x_1y_1 + m_2x_2y_2 + \dots$, czyli Σmxy . Również Σmyz i Σmzx nazywają się momentami odśrodkowymi względem y , z i z , x .

Moment odśrodkowy posiada ten sam wymiar, co i momenty bezwładności, a mianowicie ML^2 , jest to więc także moment drugiego rzędu, czyli rodzaj momentu bezwładności; jednak pod pewnym względem rodzaj ten różni się zasadniczo od innych.

Moment bezwładności względem płaszczyzny, zawiera współrzędne elementów tylko w drugich potęgach, a zatem jest on zawsze dodatni. To samo dotyczy momentów względem prostej i punktu. Tymczasem moment odśrodkowy zawiera współrzędne w pierwszych potęgach, może więc być ujemny a także równy zeru. Okażemy zaraz na przykładzie, że ten ostatni przypadek jest możliwy.

Przypuśćmy, że ciało posiada płaszczyznę symetrii, a mianowicie *mechaniczną płaszczyznę symetrii*. Znaczy to, że dwa elementy, symetryczne geometrycznie względem owej płaszczyzny, posiadają prócz tego jednakowe masy. Obierzmy osi x i y w płaszczyźnie symetrii, i zwróćmy uwagę na dwa jakiegokolwiek elementy symetryczne o masach m . Jeżeli jeden z nich posiada współrzędne x, y, z , to drugi $x, y, -z$, zatem moment odśrodkowy jednego względem y, z będzie myz , a drugiego $-myz$. Z tego wynika, że moment odśrodkowy całego ciała względem osi y, z jest równy zeru, i toż samo dotyczy momentu względem z, x .

et Momenty odśrodkowe cienkiej jednorodnej płyty względem y, z i z, x są oczywiście zerami, jeżeli oś z jest prostopadła do płaszczyzny płyty, i początek leży na płycie.

Powróćmy do przypadku ogólnego. Oznaczmy współrzędne środka ciężkości ciała przez x_0, y_0, z_0 i poprowadźmy przez ten punkt nowe osi współrzędnych ξ, η, ζ równoległe do poprzednich. Jeżeli współrzędne elementu m w dawnym układzie są x, y, z , a w nowym ξ, η, ζ , to

$$x = \xi + x_0, \quad y = \eta + y_0, \quad z = \zeta + z_0,$$

$$xy = \xi\eta + x_0\eta + y_0\xi + x_0y_0,$$

$$mxy = m\xi\eta + mx_0\eta + my_0\xi + mx_0y_0.$$

Albo Sumując wszystkie takie równania, otrzymamy

$$\Sigma mxy = \Sigma m\xi\eta + x_0\Sigma m\eta + y_0\Sigma m\xi + Mx_0y_0.$$

Lecz $\Sigma m\eta$ i $\Sigma m\xi$ są zerami, jako momenty statyczne ciała względem płaszczyzn, przechodzących przez środek ciężkości, a zatem

$$\Sigma mxy = \Sigma m\xi\eta + Mx_0y_0.$$

Tak więc moment odśrodkowy ciała względem osi x, y jest równy sumie momentu ciała względem osi równoległych, przecho-

dzących przez środek ciężkości, oraz momentu masy ciała, skoncentrowanej w środku ciężkości, względem x , y .

Toż samo dotyczy osi y , z i z , x .

Prz. 1. Wyznaczyć moment odśrodkowy prostokąta o masie M i bokach a , b względem boków. Odp. $\frac{Mab}{4}$.

Prz. 2. Wyznaczyć moment odśrodkowy ćwiartki koła o masie M i promieniu a względem promieni granicznych. Odp. $\frac{Ma^2}{2\pi}$.

102. Moment bezwładności w funkcji kątów kierunkowych. Niech będzie znowu ciało sztywne i prostokątny układ współrzędnych. Momenty bezwładności względem osi oznaczmy przez I_x , I_y , I_z , a momenty odśrodkowe przez I_{xy} , I_{yz} , I_{zx} . Niech będzie prócz tego prosta u , przechodząca przez początek i tworząca z osiami współrzędnych kąty α , β , γ . Mamy wyznaczyć moment bezwładności I danego ciała względem tej prostej u .

Dajmy na to, że jeden z elementów ciała o masie m zajmuje położenie $A(x, y, z)$, a odległość jego AB od u niech będzie równa r . Oczywiście

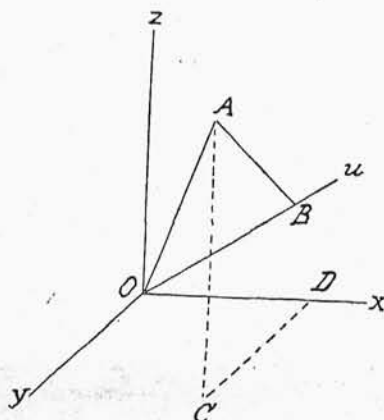


Fig. 56.

$$r^2 = OA^2 - OB^2 \quad \dots \quad (1).$$

$OA^2 = x^2 + y^2 + z^2$, a OB jest rzutem odcinka OA albo wieloboku $ODCA$ na prostą u . Boki tego wieloboku są odpowiednio równe x , y , z i tworzą z u kąty α , β , γ , a zatem $OB = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$. Wprowadzając te wartości do (1), otrzymamy

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2.$$

Ponieważ $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, możemy więc napisać $r^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2$ czyli $r^2 = (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + (z^2 + x^2) \cos^2 \beta + (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma - 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2zx \cos \gamma \cos \alpha$.

Mnożymy to przez m i sumujemy takie równania dla wszystkich elementów. Wypadnie