

$$\delta v = \frac{P}{m} dt;$$

znak = wyraża tu znowu zgodność co do wielkości i kierunku. Z równania tego wynika, że

$$\delta(mv) = P dt;$$

znaczy to, że *przyrost elementarny ilości ruchu jest zgodny co do wielkości i kierunku z popędem elementarnym siły*.

W twierdzeniu tem zawiera się tak zw. zasada ilości ruchu w postaci różniczkowej. Możemy uważać, że w ciągu każdego elementu czasu siła  $P$  wytwarza nową ilość ruchu, która dołącza się geometrycznie do dotychczasowej ilości ruchu punktu materalnego. Jeżeli na punkt materalny działa większa liczba sił, to każda z nich wytwarza w czasie  $dt$  przyrost ilości ruchu, równy jej popędowi, i wszystkie te przyrosty dodają się geometrycznie do poprzedniej ilości ruchu punktu.

Oczywiście

$$d(mv_x) = P_x dt,$$

t. j. *przyrost elementarny ilości ruchu w dowolnym kierunku jest równy popędowi elementarnemu siły w tymże kierunku*.

Można byłoby nadać zasadzie powyższej postać całkową, ale nie przyniosło by to wyraźnej korzyści.

**89. Wektor  $G$ .** Zasada ilości ruchu jest szczególnie użyteczna w tym razie, gdy mamy do czynienia nie z jednym, lecz z większą liczbą punktów materalnych.

Niech będą punkty materalne  $m_1, m_2 \dots$  posiadające w danej chwili szybkości  $v_1, v_2 \dots$ . Mówimy, że punkty te tworzą układ punktów materalnych. Obrawszy dowolnie w przestrzeni punkt  $O$  (nazwiemy go *środkiem redukcji*), utwórzmy układ wektorów, posiadających początek w  $O$  i zgodnych z ilościami ruchu punktów  $m_1, m_2 \dots$  zarówno pod względem wielkości, jak i kierunku.

Mamy teraz wektory  $m_1 v_1, m_2 v_2 \dots$ , posiadające wspólny początek, możemy przeto wyznaczyć ich wypadkową. Oznaczmy ją literą  $G$  i będziemy nazywali *ilością ruchu układu*  $m_1, m_2 \dots$ , lub krócej *wektorem  $G$* . Oczywiście ani wielkość ani kierunek wektora  $G$  nie zależy od położenia środka redukcji.

Z biegiem czasu wektor  $G$  zmienia się co do wielkości i kierunku, i ze zmian tych można wyciągać pewne wnioski,

dotyczące ruchu układu. Można by porównać ten wektor do wskazówki przyrządu, sygnalizującego pewne zmiany, które zachodzą w układzie punktów. Zobaczymy, jaki wpływ wywierają na wektor  $G$  siły, działające na różne punkty układu.

Przypuśćmy więc, że na punkt  $m$ , należący do układu, działa siła  $P$ . Wytworzy ona w czasie  $dt$  przyrost geometryczny  $\delta(mv)$  ilości ruchu punktu  $m$ , równy jej popędowi elementarnemu  $Pdt$ . Oczywiście taki sam przyrost otrzyma składowa  $mv$  wektora  $G$ , i taki sam przyrost otrzyma sam wektor  $G$ . Tak więc każda siła, działająca na którykolwiek punkt układu, wytwarza co  $dt$  sek. pewien przyrost wektora  $G$ , i te wszystkie przyrosty dołączają się geometrycznie do dotychczasowej wartości  $G$ . W ten sposób zmienia się ten wektor z biegiem czasu.

Siły, działające na różne punkty układu, można podzielić na dwie kategorie, siły zewnętrzne i siły wewnętrzne. Zewnętrzną nazywamy siłę, która pochodzi od punktu materialnego lub ciała, nie należącego do układu. Jeżeli np. układ porusza się w polu sił, i ciało, które to pole wytwarza, nie zostało zaliczone do układu, to siły pola uważamy za zewnętrzne.

Wewnętrznymi nazywamy te siły, które jedne z punktów układu wywierają na drugie. Tak np. siły przyciągania, istniejące pomiędzy punktami układu, są wewnętrzne. Albo przypuśćmy, że punkty  $m_1$  i  $m_2$  są połączone lekkimi niciami. Możemy powiedzieć, że naprężenie nici, działające na punkt  $m_1$ , jest to siła, którą punkt  $m_2$  wywiera na  $m_1$  za pośrednictwem nici, i odwrotnie, a zatem naprężenia nici są siłami wewnętrznymi.

Siły wewnętrzne występują zawsze parami. Jeżeli punkt  $m_1$  wywiera pewną siłę na  $m_2$ , to  $m_2$  wywiera na  $m_1$  siłę równą i odwrotną. Oczywiście takie dwie siły wytworzą w czasie  $dt$  przyrosty równe i odwrotne wektora  $G$ , a suma takich przyrostów jest zerem. Z tego wynika, że siły wewnętrzne nie wywierają wpływu na wektor  $G$ . Wektor ten może się zmieniać co do wielkości i kierunku tylko pod działaniem sił zewnętrznych.

Twierdzenie to posiada bardzo doniosłe znaczenie; jemu właśnie zasada ilości ruchu zawdzięcza swą ogromną użyteczność.

Jeżeli na układ punktów materialnych żadne siły ze-

wewnętrzne nie działają, to układ taki nazywa się *izolowanym*. Ilość ruchu układu izolowanego jest stała co do wielkości i kierunku.

**90. Siła żywa układu.** Zasada ilości ruchu posiada rozleglejszy zakres zastosowań, niż zasada siły żywej. Jest to następstwem okoliczności następującej. Ilość ruchu układu punktów materialnych, jak widzieliśmy w paragrafie poprzedzającym, nie zależy od sił wewnętrznych układu, ale twierdzenie analogiczne, dotyczące siły żywej, byłoby niesłuszne.

Weźmy układ  $m_1, m_2, \dots$ , który rozważaliśmy w par. poprzedzającym. Suma sił żywych wszystkich punktów, czyli  $\sum \frac{mv^2}{2}$ , nazywa się *siłą żywą układu*. Siła żywa każdego punktu otrzymuje w czasie  $dt$  przyrost równy sumie prac elementarnych wszystkich sił, działających na ten punkt, a zatem siła żywa układu otrzyma w tymże czasie przyrost, równy sumie prac elementarnych sił, działających na różne punkty układu.

W wytwarzaniu siły żywej biorą tu udział zarówno siły wewnętrzne, jak i zewnętrzne.

Przypuśćmy np., że punkty  $m_1$  i  $m_2$  wywierają na siebie nawzajem siły  $P$  i  $P$  równe i odwrotne. Według par. 83 siły te wykonają razem w czasie  $dt$  pracę  $Pdr$ ; gdzie  $dr$  oznacza przyrost odległości pomiędzy punktami w tymże czasie; powstanie zatem nowa ilość siły żywej, równa tej pracy, a więc wogóle różna od zera. Jak ta nowowytworzona siła żywa podzieli się pomiędzy punkty  $m_1$  i  $m_2$ , to zależy od różnych innych okoliczności, ale w każdym razie suma sił żywych tych punktów, a więc i siła żywa całego układu otrzyma przyrost, dodatni lub ujemny, równy tej pracy elementarnej.

Siły wewnętrzne tylko w tym razie nie wywierają wpływu na siłę żywą układu, gdy wszystkie  $dr$  są zerami, czyli gdy odległości pomiędzy punktami się nie zmieniają. Mówimy w tym razie, że układ jest *szttywny*. Do sprawy tej powrócimy jeszcze w dynamice ciał sztywnych i zobaczymy, że tam nabiera ona pierwszorzędного znaczenia.

Jeżeli odległości pomiędzy punktami układu nie są stałe, a pragniemy zastosować do badania ruchu zasadę sił żywych, to musimy wprowadzić do rachunku siły wewnętrzne, a ponie-

waż siły te są zwykle nieznane, powiększymy więc tym sposobem liczbę niewiadomych i utrudnimy sprawę.

Stosując zasadę siły żywej należy być bardzo ostrożnym, gdyż łatwo tu wpaść w błędy. Jako ilustrację do tej uwagi przytoczymy przykład, który można uważać za typowy.

Przypuśćmy, że układ składa się z dwóch punktów materialnych  $m_1$  i  $m_2$ , leżących na gładkiej płaszczyźnie poziomej i połączonych tak zwaną „nicią nierozciągalną“ czyli niesprężystą o długości  $l$ . Odległość pomiędzy punktami jest, dajmy na to, znacznie mniejsza od  $l$ , a zatem nic leży luźno. Nadajmy punktowi  $m_1$  szybkość  $v$ , skierowaną według linii, łączącej obydwie punkty, w stronę od  $m_2$ . Dopóki nic się nie wyprostuje, punkt  $m_1$  będzie się poruszał, jak gdyby był zupełnie swobodny, ze stałą szybkością  $v$ , a całkowita siła żywa układu będzie wciąż równa  $\frac{m_1 v^2}{2}$ . Po wyprostowaniu nici obydwie punkty będą biegły z jednakową szybkością, np.  $u$ , a siła żywa wyniesie  $\frac{(m_1 + m_2) u^2}{2}$ . Chodzi teraz o to, czy te siły żywe są równe.

Ponieważ możemy uważać, że siły zewnętrzne nie istnieją (siły ciężenia równoważą się stale z reakcją płaszczyzny), przeto odpowiedź na postawione pytanie zależy od tego, czy siły wewnętrzne, t. j. naprężenia nici, wykonały jaką pracę, różną od zera. Narzuca się samo przez się rozumowanie następujące.

Przed wyprostowaniem nici siły wewnętrzne nie istniały, bo naprężenie jej było zerem; po wyprostowaniu naprężenie mogło być duże, ale odległość pomiędzy punktami nie mogła się zmieniać, skoro nic jest „nierozciągalna“, a zatem i wówczas, według par. 83 praca sił wewnętrznych nie mogła być różna od zera. Z tego wynika, że siła żywa układu po wyprostowaniu nici powinna być taka sama, jak przed wyprostowaniem.

Wniosek taki byłby zupełnie mylny. W rozumowaniu powyższem założyliśmy w milczeniu, że całe zjawisko składa się z dwóch okresów; w pierwszym porusza się tylko punkt  $m_1$  z szybkością  $v$ , w drugim obydwie punkty z szybkością  $u$ . Przejście od jednego okresu do drugiego odbywa się w jednej chwili („chwili“ w znaczeniu, wyjaśnionem w par. 14); w jednej chwili

szybkość punktu  $m_1$  z  $v$  spada do  $u$ , i szybkość punktu  $m_2$  od zera przeskakuje do  $u$ .

Takiego skutku nie mogłaby wywołać żadna siła skończona dowolnie wielka; trzeba by tu mówić o siłach i przyspieszeniach nieskończenie wielkich, t. j. używać wyrazów, którym w naturze nie odpowiada nic realnego. Z drugiej strony nic posiada wytrzymałość ograniczoną i zrywa się, gdy napężenie dojdzie do pewnej określonej granicy. Przy wyżej opisanym przebiegu zjawiska napężenie z pewnością przekroczyłoby ową granicę, a zatem nic musiałoby się zerwać. Skoro to nie nastąpiło, to przebieg zjawiska musiał być inny.

Oczywiście pomiędzy pierwszym okresem i drugim istnieje jeszcze okres przejściowy. Trwa on niezmiernie krótko, ale w każdym razie przejście nie odbywa się w jednej chwili. W ciągu tego okresu przejściowego szybkość punktu  $m_1$  stopniowo spada do  $u$ , a szybkość punktu  $m_2$  stopniowo wzrasta do  $u$ , a zatem pierwsza jest wciąż większa od drugiej. Z tego wynika, że nic musi się wydłużać, a więc nie jest nierozciągalna.

Przyjmując, że nic jest nierozciągalna przypisywaliśmy jej właściwość, której żadne ciało w naturze nie posiada, i to doprowadziło do mylnego wniosku. Każda nici, czy sznur, rozciąga się pod działaniem sił. Jeżeli te siły są małe, to nici zwykła (niesprężysta) wydłuża się nieznacznie; w wielu przypadkach możemy to wydłużenie pominąć, i wówczas mówimy o nici nierozciągalnej. W danym razie siły są duże, gdyż przyspieszenia punktów w okresie przejściowym są bardzo wielkie. Z tego wynika, że wydłużenie nici jest stosunkowo znaczne i wywiera wpływ zasadniczy na przebieg zjawiska.

Tak więc w okresie przejściowym odległość pomiędzy punktami się zmienia, a zatem praca naprężeń nici nie jest zerem. Okres ten trwa wprawdzie bardzo krótko, ale ponieważ siły są duże, przeto praca całkowita może być znaczna; nie mamy więc prawa zakładać, nawet w przybliżeniu, że siła żywa pozostaje bez zmiany. Zobaczmy zaraz, że istotnie siła żywa się zmienia.

Siły wewnętrzne, działające w okresie przejściowym, nie wywrą wpływu na ilość ruchu układu; ilość ta w pierwszym okresie wynosi  $m_1 v$ , a w drugim  $(m_1 + m_2)u$ , a zatem

$$m_1 v = (m_1 + m_2) u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

skąd 
$$u = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}.$$

Z tego wynika, że w okresie drugim siła żywa układu wynosi  $\frac{m_1^2 v^2}{2(m_1 + m_2)}$ , a więc zmniejszyła się w okresie przejściowym o

$$\frac{m_1 v^2}{2} - \frac{m_1^2 v^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 v^2}{2} \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Jeżeli np.  $m_2 = m_1$ , to układ traci połowę siły żywej.

Prz. 1. Dwa jednakowe punkty masy, połączone nicią nierozciągalną, leżą na gładkim stole. Jeden z nich otrzymał szybkość  $v$ , i w chwili wyprostowania nici punkty zajmują położenia  $A_1$  i  $A_2$ . Wyznaczyć wykreślnie szybkości  $u_1$  i  $u_2$  tych punktów po wyprostowaniu.

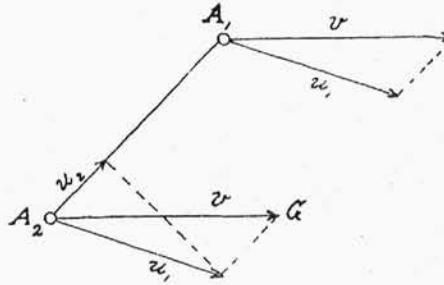


Fig. 51.

Ponieważ masy punktów są równe, możemy przeto wyrażać ilości ruchu tymi samymi odcinkami, co i szybkości. Należy skorzystać jeszcze i z tej okoliczności, że po wyprostowaniu nici ruch punktów będzie taki, jak gdyby należały do układu sztywnego. Załączony rysunek zawiera rozwiązanie.

Prz. 2. Masa  $m$  jest połączona sznurami z dwiema masami  $m_1$ ; sznury te przechodzą przez bloki, urządzone na jednym poziomie w odległości  $2a$ , a masa  $m$  pozostaje w spokoju na linii bloków, w środku pomiędzy nimi. Jak głęboko zatrzyma się masa  $m$ , gdy pozwolimy jej spadać?

Rozważamy układ, złożony ze wszystkich trzech mas. Przyrost jego siły żywej jest równy sumie prac sił ciężenia. Masa  $m$  zatrzyma się w odległości  $\frac{4mm_1 a}{4m_1^2 - m^2}$  od linii bloków.

Prz. 3. Sznur bez końca o długości  $2l$  przechodzi przez dwa gładkie poziome kołki, leżące na jednym poziomie. Na sznur są na-

wleczone dwie paciórki o masach  $m$  i  $M$ . Pierwszą z nich podnosimy do punktu środkowego linii kołków i następnie pozwalamy jej spadać. Jaką powinna być odległość pomiędzy kołkami, aby paciórki doszły tylko do spotkania. Odp.  $\frac{(3M+m)(M-m)l}{(M+m)^2}$ .

Prz. 4. Do końców sznura, przechodzącego przez blok, są przywiązane ciężary  $M$  i  $m$ . Z nich większy  $M$  spoczywa na podłodze, a mniejszy  $m$  wisi na pewnej wysokości nad podłogą. Ciągnąc za sznur po stronie ciężaru  $M$  podnosimy  $m$  jeszcze o  $h$  wyżej. Jak wysoko uniesie się  $M$  po wyswobodzeniu sznura?

Przed samem wyprężeniem sznura ciężar  $m$  posiada szybkość  $\sqrt{2gh}$ . Pojem następuje szarpnięcie, z którego zawsze wynika strata siły żywej. Po wyprężeniu sznura obydwaj ciężary posiadają szybkość  $v$ ; ze względu na wzmiarkowaną stratę nie mamy prawa do wyznaczenia tej szybkości stosować zasady sił żywych, natomiast nadaje się tu zasada ilości ruchu.

W okresie przejściowym, t. j. podczas wyprężania sznura, ciężar  $m$  stracił ilość ruchu  $m(\sqrt{2gh}-v)$ , a  $M$  zyskał  $Mv$ . W tym okresie na ciężary działały przede wszystkim naprężenia sznura; były to siły zmienne i bardzo wielkie. Prócz tego działały jeszcze siły ciężenia, oraz w pierwszej chwili reakcja podłogi na  $M$ ; są to siły stosunkowo małe i w okresie przejściowym, trwającym niezmiernie krótko, nie mogą wywrzeć wyraźnego wpływu na ilości ruchu ciężarów, możemy je przeto pominąć.

Przyjmujemy, że blok jest zupełnie gładki, a sznur doskonale giętki, a zatem naprężenia w obydwóch końcach sznura są jednakowe. Wytwarzają one w okresie przejściowym równe ilości ruchu, a zatem  $m(\sqrt{2gh}-v)=Mv$ . Stąd znajdziemy  $v$ . Do wyznaczenia wysokości żądanej możemy zastosować zasadę sił żywych. Wypadnie  $\frac{m^2h}{M^2-m^2}$ .

Prz. 5. Dwie jednakowe masy  $M$  są przyłączone do końców sznura maszyny Atwooda i początkowo pozostają w spokoju w odległości  $2a$  jedna od drugiej. Na jedną z mas kładziemy płytkę dodatkową o masie  $m$ . Masy  $M$  przechodzą jednocześnie przez nieruchome pierścienie, urządzone na jednym poziomie, przyczem pierwsza pozostawia na pierścieniu swą płytkę dodatkową, gdy druga jednocześnie zabiera z pierścienia taką samą inną płytkę. Wyznaczyć szereg kolejnych odchyień mas  $M$  od poziomu pierścieni. Odp.  $\left(\frac{2M}{2M+m}\right)a$ ,  $\left(\frac{2M}{2M+m}\right)^2a$ , ....

Prz. 6. Trzy jednakowe punkty  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , połączone nierozciągalną nicią tak, że  $AB=BC$ , leżą na gładkim stole na linii prostej, i nie jest wyciągnięta. Nadajemy jednocześnie punktom skrajnym  $A$  i  $C$  szybkości  $v$  prostopadłe do nici; jaką szybkość będzie miał każdy



punkt przed samą chwilą spotkania tych punktów skrajnych? Odp.

Punkt środkowy  $\frac{2v}{3}$ , skrajne  $\frac{v\sqrt{7}}{3}$ .

W tym razie nie zmieni się ani ilość ruchu ani siła żywa. Oznaczmy przez  $u$  szybkość punktu  $B$  i przez  $w$  składową szybkości punktu  $A$  w kierunku prostopadłym do  $AB$ , czyli szybkość  $A$  względem  $B$ , w chwili,

o którą chodzi. W takim razie będzie  $2mv=3mu$  i  $\frac{3mu^2}{2} + \frac{2mw^2}{2} = \frac{2mv^2}{2}$ .

Prz. 7. Punkt materyalny o masie  $M$  obiega koło na gładkiej płaszczyźnie poziomej, będąc przywiązany do środka nierozciągalną nicią. W pewnej chwili  $M$  uderza o inny punkt materyalny o masie  $m$ , pozostający dotychczas w spoczynku. Punkty zlepiają się i dalej obiegają razem to samo koło. W jakim stosunku zmieni się naprężenie nici? Odp. Stosunek nowego naprężenia do poprzedniego  $= \frac{M}{M+m}$ .

Prz. 8. Kula dęta o masie  $m$  leży na płaszczyźnie poziomej i zawiera punkt materyalny o takiej samej masie. Punkt ten jest przywiązany sprężystą nicią do najwyższego punktu  $A$  kuli i nicią nierozciągalną do najniższego punktu. Normalna długość nici górnej  $=a$ , obecna długość  $=a+c$ . W pewnej chwili niec dolna pękła, punkt  $m$  dobiegł do  $A$  i przyłgnął tam do kuli; zauważono przytem, że kula podskoczyła o  $h$  w górę. Wyznaczyć współczynnik sprężystości nici górnej. Odp.  $\frac{2mga(a+c+4h)}{c^2}$ .

Interesująca w tem zagadnieniu jest kwestya taka: przed zerwaniem nici ilość ruchu układu, złożonego z kuli i punktu, jest zerem, po zerwaniu ilość ta w kierunku pionowym wzrasta; chodzi o to, jakie siły zewnętrzne wytwarzają tę ilość ruchu. Na układ działają tylko dwie siły zewnętrzne, a mianowicie siła ciężenia i reakcja płaszczyzny. Oczywiście nowe ilości ruchu mogą powstawać tylko dzięki przewadze drugiej nad pierwszą, należy więc rozważyć, jak zmienia się reakcja po zerwaniu nici.

Prz. 9. Na gładkim poziomym stole leżą dwa punkty materyalne  $M$  i  $m$ , połączone nicią nierozciągalną. Niec przechodzi przez gładki pierścień  $O$ , przymocowany do stołu i jest wyciągnięta, a początkowa odległość  $M$  od  $O$  jest równa  $c$ . Jaki tor będzie obiegał punkt  $M$ , otrzymawszy szybkość prostopadłą do kierunku nici  $OM$ . Odp. Obracwszy  $O$  za biegun i pierwotne położenie nici  $OM$  za oś biegunową, znajdziemy równania ruchu  $r^2 = A^2 t^2 + c^2$  i  $\varphi = \frac{v_0}{A} \arctan \frac{At}{c}$ , gdzie

$$A = \frac{Mv_0^2}{M+m}. \text{ Równanie toru będzie } r = \frac{c}{\cos\left(\varphi \sqrt{\frac{M}{M+m}}\right)}.$$

Prz. 10. Trzy jednakowe punkty materyalne, pomiędzy którymi istnieje odpychanie wprost proporcjonalne do odległości (współcz.



proporc. =  $k$ ), leżą na gładkiej płaszczyźnie poziomej i są połączone równymi nierozciągalnymi niciami. Przecinamy jedną z nici; jaką szybkość kątową będą miały nici pozostałe, gdy kąt pomiędzy nimi stanie się równym  $\vartheta$ ? Odp.  $\omega^2 = \frac{3k(1-2\cos\vartheta)}{2(2+\cos\vartheta)}$ .

Należy tu przedewszystkiem zdać sobie sprawę z tego, jaki będzie ruch punktu średniego. Ilość ruchu całego układu się nie zmienia, a zatem suma rzutów ilości ruchu wszystkich trzech punktów, np. na kierunek szybkości punktu średniego, pozostaje zerem. Natomiast siła żywa przybiera przyrosty, i przyrost całkowity jest równy pracy, wykonanej przez siły odpychania; praca ta daje się łatwo wyznaczyć.

Prz. 11. Dwa jednakowe punkty masy  $A$ ,  $B$  są połączone nierozciągalną nicią o długości  $l$ . Punkt  $A$  leży na gładkim stole, nie jest wyciągnięta prostopadłe do brzegu, a punkt  $B$  wysuwamy tuż po za brzeg stołu. Wyznaczyć promień krzywizny toru punktu  $A$  zaraz po zejściu tegoż ze stołu.

Rozważamy ruch układu w dwóch chwilach, bezpośrednio poprzedzającej zejście punktu  $A$  ze stołu i zaraz następnej. Ilości ruchu układu w kierunkach pionowym i poziomym w tych chwilach różnią się znikomo mało, a z tego wyniknie, że szybkości punktów w drugiej wynoszą  $\frac{1}{2}\sqrt{5gl}$  i  $\sqrt{gl}$ . Szukany promień krzywizny =  $\frac{5\sqrt{5}}{12}l$ .

Prz. 12. Dwa jednakowe punkty masy  $A$  i  $B$  są połączone nicią o długości  $a$ , której środek  $C$  jest umocowany na gładkim poziomym stole. Punkty krążą około  $C$  w tę samą stronę z jednakowymi szybkościami, a kąt  $ACB$  jest prosty. W pewnej chwili wyslobadzamy punkt  $C$ ; wyznaczyć promienie krzywizny torów punktów  $A$ ,  $B$

zaraz po wypreżeniu nici. Odp.  $\frac{5\sqrt{5}a}{4}$  i  $\infty$ .

Prz. 13. Ciężki jednorodny łańcuch wypełnia cienką gładką rurkę, posiadającą kształt ćwiartki okręgu o promieniu  $a$ ; jeden z promieni granicznych tej ćwiartki jest pionowy, a drugi poziomy. Łańcuch zaczyna spadać ze stanu spoczynku; wyznaczyć szybkość jego w chwili,

gdy górny koniec wychodzi z rurki. Odp.  $\sqrt{\frac{ga(\pi^2+8)}{2\pi}}$ .

Prz. 14. Dwa wiadra o masach  $m_1$ ,  $m_2$  i wysokościach  $h$  wiszą na końcach linki, przerzuconej przez lekki blok, i na dnie pierwszego siedzi żaba o masie  $\mu$ . W chwili, gdy wiadra były w spokoju, żaba podskoczyła pionowo w górę, i zauważono, że dosięgnęła górnego brzegu wiadra. Wyznaczyć bezwzględną wysokość, na którą wzbila się żaba, oraz czas, po którym znalazła się znowu na dnie wiadra.

Odp. Szukana wysokość =  $\frac{2m_1(m_1+m_2)h}{(\mu+m_1+m_2)^2}$ , czas =  $2\sqrt{\frac{(m_1+m_2)h}{m_2g}}$ .

Należy tu rozważyć, jaką szybkość względną posiada żaba w chwili, gdy dochodzi do brzegu.

241/3 **91. Siły chwilowe.** Powróćmy jeszcze do przykładu, który rozważaliśmy w paragrafie poprzedzającym. W okresie przejściowym, trwającym bardzo krótko, nie wywiera na obydwie punkty materialne siły bardzo wielkie. Tego rodzaju siły, bardzo wielkie, lecz trwające bardzo krótko, nazywamy *chwilowymi*.

Siły chwilowe w czasie swego krótkiego trwania zmieniają się zwykle w rozległych granicach. Tak np. w przykładzie naszym siły chwilowe w samym początku okresu przejściowego są zerami, następnie gwałtownie wzrastają w miarę tego, jak nie się wydłuża, i odrazu schodzą znowu prawie do zera, gdy szybkości punktów się wyrównają, czyli z końcem okresu przejściowego \*).

O wielkości takich sił możemy sądzić jedynie ze skutków ich działania, a głównym skutkiem, dającym się łatwo wymierzyć, są zmiany, zachodzące w ilościach ruchu.

W danym razie ilość ruchu punktu  $m_1$  zmniejszyła się o  $m_1v - m_1u$ , czyli otrzymała przyrost  $m_1v - m_1u$ , skierowany do  $m_2$ . Mówimy, że taki właśnie był *impuls* albo *popęd siły chwilowej*, która w okresie przejściowym działała na  $m_1$ . Impuls siły, działającej na  $m_2$ , wynosił oczywiście  $m_2u$  i był skierowany do  $m_1$ .

Suma ilości ruchu punktów  $m_1$  i  $m_2$  nie uległa zmianie, a więc przyrosty tych wektorów musiały być równe i odwrotne; innymi słowy *impulsy sił chwilowych, które wywierają na siebie nawzajem punkty  $m_1$  i  $m_2$ , są równe i odwrotne*. Twierdzenie to odpowiada trzeciemu prawu (akcji i reakcji) Newtona. Zobaczymy zaraz, że jest ono słuszne i w przypadku ogólniejszym.

Przypuśćmy naprzód, że punkt materialny  $m$ , poruszający się z szybkością  $v$  uderzył w nieruchomą przeszkodę, np. w ścianę, w punkcie  $O$  i odbił się od niej z szybkością  $u$ . I tu zetknięcie punktu  $m$  ze ścianą trwało pewien czas, jakkolwiek

\*) Uważamy wciąż nie za zupełnie niesprężystą, jak już było zaznaczone w par. poprzedzającym. Jeżeli nie taka wydłuży się pod działaniem sił, to zachowuje to wydłużenie na stałe i nie kurczy się, gdy siły przestaną działać.

bardzo krótki, i ściana wywierała w tym czasie siłę bardzo wielką, czyli siłę chwilową.

Przed uderzeniem punkt materialny posiadał ilość ruchu  $mv = OA$ , a po uderzeniu  $mu = OB$ , a zatem podczas uderzenia jego ilość ruchu otrzymała przyrost geometryczny  $AB$  albo  $OC$  (par. 50). Odcinek  $OC$  wyraża także co do wielkości i kierunku impuls siły chwilowej.

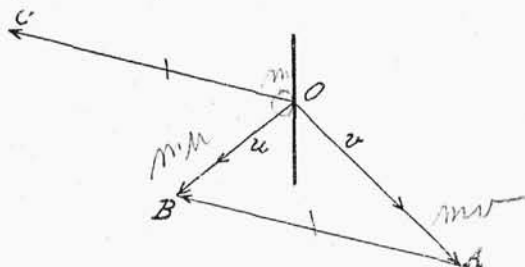


Fig. 52.

Dajmy teraz na to, że nastąpiło uderzenie pomiędzy dwoma punktami materialnymi  $m_1$  i  $m_2$ . Punkty te poruszały się przed samem uderzeniem, przypuśćmy, z szybkościami  $v_1$  i  $v_2$ , a bezpośrednio po uderzeniu z szybkościami  $u_1$  i  $u_2$ . Wyznamy, jak poprzednio, przyrost geometryczny ilości ruchu punktu  $m_1$ , czyli impuls siły chwilowej, którą wywierał punkt  $m_2$  na  $m_1$ , i uczynimy toż samo dla siły chwilowej, którą punkt  $m_1$  wywierał na  $m_2$ . Łatwo się przekonać, że impulsy te są równe i odwrotne.

Siły chwilowe, działające podczas uderzenia, są siłami wewnętrznymi układu, złożonego z punktów  $m_1$  i  $m_2$ , nie mogą więc zmienić wektora  $G$ . Z tego wynika, że ilości ruchu z przed uderzenia, t. j.  $m_1v_1$  i  $m_2v_2$ , posiadają tę samą wypadkową, co ilości ruchu po uderzeniu, czyli  $m_1u_1$  i  $m_2u_2$ . Skoro zaś wypadkowa się nie zmieniła, to przyrosty geometryczne składowych musiały być równe i odwrotne.

Wypada dodać, że i w tym razie siła żywa układu podczas uderzenia, t. j. w okresie, gdy trwa zetknięcie pomiędzy punktami, wogóle ulega zmianie.

**Prz. 1.** Punkt materialny o masie  $m$  jest połączony nierozciągalnymi niciami z dwoma innymi punktami  $m_1$  i  $m_2$ . Punkty te leżały na poziomym gładkim stole, a nici były wyciągnięte prostopadle je-

dna do drugiej. Punkt  $m$  otrzymał uderzenie, zwrócone na zewnątrz owego kąta prostego i skierowane według dwusiecznej. Wyznaczyć stosunek szybkości początkowych punktów  $m_1$  i  $m_2$ . Odp.  $\frac{m+m_2}{m+m_1}$ .

Podczas uderzenia na  $m$  działają trzy siły chwilowe, mianowicie siła uderzenia i dwa naprężenia nici, a zatem wogóle początkowa szybkość tego punktu utworzy z dwusieczną kąt różny od zera. Jednocześnie na  $m_1$  i  $m_2$  działają naprężenia, więc szybkości tych punktów będą skierowane według nici. Siła uderzenia działała w kierunku dwusiecznej, przeto całemu układowi mogła ona nadać tylko ilość ruchu w tym samym kierunku; z tego wynika, że suma rzutów ilości ruchu w wszystkich trzech punktów na dwusieczną zewnętrzną musi być zerem. Należy jeszcze wziąć pod uwagę, że po uderzeniu długości zostają bez zmiany, a więc punkty  $m$  i  $m_1$  (lub  $m$  i  $m_2$ ) poruszają się tak, jakby należały do ciała sztywnego.

Prz. 2. Cztery jednakowe punkty materialne, połączone nierozciągalnymi nićmi o długości  $a$ , tworzą romb  $ABCD$ , w którym kąt ostry  $= 2\alpha$ . Cały ten układ poruszał się na gładkiej płaszczyźnie poziomej z szybkością  $u$  w kierunku większej przekątnej  $AC$ . Wstrzymujemy wierzchołek  $A$ ; z jaką szybkością kątową zaczną się obracać boki  $AB$  i  $AD$ ? Odp.  $\frac{2u \sin \alpha}{a(1+2 \sin^2 \alpha)}$ .

Prz. 3. Trzy punkty materialne  $A, B, C$  o masach  $m, m_1, m_2$ , połączone nierozciągalnymi i wyprostowanymi nićmi,  $AB$  i  $BC$  leżą na gładkim stole, i rozwarty kąt  $ABC = \pi - \alpha$ . Pierwszy otrzymuje impuls  $F$  równoległy do  $CB$ ; wyznaczyć szybkość początkową punktu  $C$ .

Odp.  $\frac{Fm_1 \cos^2 \alpha}{mm_2 \sin^2 \alpha + (m+m_1+m_2)m_1}$ .

Oznaczmy przez  $G$  impuls, który przenosi nić  $AB$ . Początkowa ilość ruchu punktu  $A$  jest wypadkową impulsów  $F$  i  $G$ , a ilość ruchu tego punktu w kierunku  $BA$  wynosi  $F \cos \alpha - G$ , zatem rzut szybkości na ten kierunek  $= \frac{F \cos \alpha - G}{m}$ .

92. **Przykłady.** Niektóre z podanych niżej przykładów, dotyczące ruchu łańcuchów, wymagają pewnych wyjaśnień wstępnych.

Łańcuch jednorodny możemy w przybliżeniu uważać za szereg jednakowych punktów materialnych, połączonych krótkimi, niesprężystymi nićmi. Przypuśćmy, że łańcuch leży na gładkiej płaszczyźnie poziomej. Część jego  $BA = a$  jest wyciągnięta na płaszczyźnie, a część pozostała tworzy stos, leżący na płaszczyźnie w najbliższych okolicach punktu  $B$ . Możemy przyjmować w przybliżeniu, że cały ten stos znajduje się w punkcie  $B$ .

Przyłóżmy do końca  $A$  siłę  $P$ , działającą stale w kierunku  $BA$ . Dopóki łańcuch nie wyprostuje się całkowicie, ruch jego będzie odbywał się w sposób następujący. W każdej chwili dzieli się on na dwie części; część pierwsza, już wyprostowana, posiada szybkość  $v$  w kierunku siły  $P$ , część druga tworzy jeszcze stos w punkcie  $B$  i jest nieruchoma. Co moment nowy element łańcucha przechodzi z części drugiej do pierwszej, przybierając w ciągu niezmiernie krótkiego czasu szybkość  $v$ . Oczywiście powtarza się tu wciąż zjawisko, które rozważaliśmy szczegółowo w paragrafie 90. Element, który właśnie rusza w danej chwili, przebywa okres, który tam nazywaliśmy przejściowym. Z tego wynika, że siła żywa łańcucha będzie zawsze mniejsza od pracy całkowitej, wykonanej przez siłę  $P$ .

Dajmy na to, że w chwili  $t$  część pierwsza ma długość  $x$ , a zatem ilość ruchu, czyli wektor  $G$ , całego łańcucha wynosi  $\mu xv$ , gdzie  $\mu$  oznacza masę jednostki długości (wymiar  $ML^{-1}$ ). W czasie  $dt$  ta ilość ruchu wzrośnie o  $d(\mu xv)$ , gdzie zarówno  $x$  jak i  $v$  należy uważać za zmienne. Jediną siłą zewnętrzną, działającą na łańcuch, jest  $P$ , a zatem

$$d(\mu xv) = P dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Jest to równanie zasadnicze, z którego dadzą się wywnioskować różne okoliczności, dotyczące zjawiska. Wyznamy np. naprężenie  $S$ , które panuje w punkcie łańcucha, stanowiącym granicę pomiędzy częścią ruchomą i nieruchomą. Z (1) otrzymamy

$$\mu x dv + \mu v dx = P dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Warto zauważyć, że wyraz  $\mu x dv$  wyraża przyrost ilości ruchu tej części łańcucha, która już się poruszała w chwili  $t$ , a wyraz  $\mu v dx$  jest przyrostem ilości ruchu tego elementu, który ruszył w czasie  $dt$ .

Dzieląc (2) przez  $dt$ , otrzymamy

$$\mu x \frac{dv}{dt} + \mu v^2 = P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3);$$

$\frac{dv}{dt}$  jest to przyspieszenie części ruchomej, której masa wynosi  $\mu x$ , i na którą działają w kierunkach odwrotnych siły  $P$  i  $S$ , a zatem  $\mu x \frac{dv}{dt} = P - S$ . Wprowadzając to do (3), znajdziemy, że

$$S = \mu v^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Do tego samego można dojść bezpośrednio. Pod działaniem siły  $S$  element  $dx$  w czasie  $dt$  przybiera szybkość  $v$ , innemi słowy siła  $S$  w czasie  $dt$  wytwarza ilość ruchu  $\mu v dx$ , zatem  $S dt = \mu v dx$ . Dzieląc przez  $dt$ , otrzymamy znowu (4).

Prz. 1. W rozważonym przykładzie całkowita długość łańcucha  $= l$ . W jakim czasie łańcuch wyprostuje się całkowicie, i ile straci siły żywej, innemi słowy ile wyniesie różnica pomiędzy pracą, wykonaną przez siłę  $P$ , a siłą żywą wyprostowanego łańcucha? Odp. Szukany czas  $= \sqrt{\frac{\mu(l^2 - a^2)}{P}}$ , strata  $= \frac{P(l-a)^2}{2l}$ .

Prz. 2. Gdy w opisanym przykładzie zaczęła działać stała siła  $P$ , to już wyprostowana część łańcucha posiadała pewną szybkość. Jaka powinna być ta szybkość, aby dalszy ruch części wyprostowanej był jednostajny? Odp.  $\sqrt{\frac{P}{\mu}}$ .

Prz. 3. Jednorodny łańcuch o długości  $l$  tworzy stos na samym brzegu stołu. Jeden koniec wysunięto cokolwiek po za brzeg, skutkiem czego łańcuch zaczął się stopniowo zsuwać. Z jaką szybkością zejdzie ze stołu koniec drugi? Odp.  $\sqrt{\frac{2gl}{3}}$ .

Na łańcuch działają tu trzy siły: ciężar części zwisającej, ciężar części pozostałej i reakcja stołu. Dwie ostatnie się równoważą, a zatem tylko pierwsza wywiera wpływ na ilość ruchu całego łańcucha.

Prz. 4. Do końca łańcucha, tworzącego stos na płaszczyźnie poziomej, jest przywiązany pocisk, który waży tyle, co  $a$  metrów łańcucha. Ile metrów łańcucha wzniesie się w górę, gdy nadamy pociskowi szybkość pionową  $\sqrt{2gh}$ ? Odp.  $\sqrt[3]{a^2(3h+a)} - a$ .

Prz. 5. Ciężki łańcuch tworzy stos na poziomym stole; do jego końca jest przywiązany lekki sznur, który przechodzi przez blok, urządzony pionowo nad stołem, i na drugim końcu sznura wisi ciężar, ważący tyle, co  $a$  metrów łańcucha. Ile metrów łańcucha uniesie się nad stołem, gdy wyswobodzimy ciężar? Odp.  $a\sqrt{3}$ .

Prz. 6. Łańcuch, ważący  $Q$ , jest zawieszony za jeden koniec nad stołem, a drugi koniec dotyka stołu. Wyswobodzamy koniec górny; wyznaczyć reakcję, którą stół wywiera na łańcuch w chwili, gdy ostatnie ogniwo dochodzi do stołu. Odp.  $3Q$ .

Prz. 7. Końce łańcucha uczepiono w bardzo blizkich punktach  $A$ ,  $B$  tak, że obydwie części wiszą prawie pionowo. Długość łańcucha  $= 2l$ , a ciężar jednostki długości  $= \kappa$ . Wyswobodzamy koniec  $B$ ; wyznaczyć reakcję w  $A$  w funkcji czasu. Odp.  $\kappa \left( l + \frac{3gl^2}{4} \right)$ .

Prz. 8. Na końcach lekkiego sznura, przechodzącego przez gładki blok, wiszą dwie szale, ważące po  $Q$  kg. Ciężki łańcuch o długości  $a$  i wadze  $q$  wisi nad jedną z szal, prawie dotykając jej końcem dol-



nym. W jakim czasie łańcuch legnie całkowicie na szali, gdy wyswobodzimy koniec górny? Odp.  $\sqrt{\frac{(4Q+q)a}{2gQ}}$ .

Dla obydwóch szal i dla łańcucha, otrzymamy odpowiednio równania

$$d\left(\frac{Q}{g}u\right)=(S-Q)dt,$$

$$d\left(\frac{Q}{g}u\right)=(Q+R-S)dt,$$

$$d[\mu(a-x)gt+\mu xn]=(\mu ga-R)dt,$$

gdzie  $\mu$  oznacza masę jednostki długości łańcucha,  $x$  długość tej części łańcucha, która już leży na szali,  $u$  szybkość szali,  $S$  naprężenie sznura i  $R$  reakcję szali na łańcuch. Dodając równania powyższe, otrzymamy równanie, które daje się łatwo całkować.

Prz. 9. Końce łańcucha  $A$  i  $B$  są umocowane prawie pionowo jeden nad drugim, i łańcuch jest wyprostowany. W pewnej chwili wyswobodzono górny koniec  $A$ ; w  $t_0$  sek. doszedł on do poziomu końca  $B$ , a wówczas wyswobodzono i ten drugi. W jakim czasie łańcuch wyprostuje się znowu? Odp. W  $\frac{3t_0}{4}$  sek. od chwili, w której obydwa końce znalazły się na jednym poziomie.

Prz. 10. Lekki sznur przechodzi przez gładki blok, i do jego końców są przywiązane jednakowe łańcuchy. W pierwszej chwili cały lewy łańcuch leży na podłodze, a  $l$  metr. prawego wznosi się pionowo nad podłogą, i wszystko pozostaje w spokoju. Jaka długość lewego łańcucha będzie wzniesiona nad podłogą w chwili, gdy szybkość osiągnie maksimum? Odp.  $\frac{l \lg 2}{2}$ .

Otrzymamy z łatwością równanie

$$lvdv+v^2dx=g(l-2x)dx,$$

gdzie  $v$  oznacza szybkość, a  $x$  długość lewego łańcucha, wzniesioną nad podłogą. Równanie można całkować, mnożąc przez  $e^{\frac{2x}{l}}$ , albo przy pomocy metody Bernoullego.

Prz. 11. Łańcuch tworzy stos nad samym brzegiem stołu, którego wysokość  $=h$ , a koniec łańcucha zwisa aż do podłogi. Wyznaczyć szybkość, którą osiągnie łańcuch w  $t$  sek., gdy pozwolimy mu swobodnie schodzić ze stołu na podłogę. Odp.

$$\frac{c\left(e^{\frac{ct}{h}}-e^{-\frac{ct}{h}}\right)}{e^{\frac{ct}{h}}+e^{-\frac{ct}{h}}},$$

gdzie  $c=\sqrt{gh}$  oznacza granicę, do której szybkość łańcucha dąży asymptotycznie.



Należy tu rozważać ilość ruchu całego łańcucha. Działa nań siła ciężenia oraz reakcja stołu i podłogi. Dojdziemy bez trudności, że ostatnia przewyższa ciężar części łańcucha, spoczywającej na podłodze, o  $\mu v^2$ .

Prz. 12. Jeden koniec linki 3a długiej jest umocowany tuż obok nieruchomego gładkiego kółka, i część jej  $a$  jest przewleczona przez kółko. Wszystkie trzy części wiszą pionowo i pozostają w równowadze. Zsuwamy cokolwiek na dół część przewleczoną przez kółko; wyznaczyć szybkość linki przed samem zatrzymaniem. Odp.  $\frac{4}{3}\sqrt{ag}$ .

Prz. 13. Otwarty zbiornik, zawierający pewną ilość wody, ustawiono na wózku kolejowym. Wózkowi nadano szybkość  $v_0$  i przyłożono siłę pociągową, która dokładnie równoważy w każdej chwili opory toru i powietrza. W pierwszej chwili masa całego układu była równa  $M_0$ , ale przez otwór w dnie zbiornika wypływa na sekundę masa wody  $\mu$ , a deszcz pionowy przynosi jednocześnie masę  $m$ . Jaka szybkość będzie miał wózek za  $t$  sek.?

Kropki deszczu nie posiadają ilości ruchu w kierunku poziomym, a zatem deszcz nie zmienia ilości ruchu zbiornika; natomiast woda, wypływająca z dna, unosi w czasie  $dt$  ilość ruchu  $\mu v dt$ , a zatem będzie  $d(Mv) = -\mu v dt$ , gdzie  $M$  oznacza masę układu w chwili  $t$ , a  $v$  szybkość. Oczywiście  $M$  jest tu wielkością zmienną. Znajdziemy, że

$$\lg \frac{v}{v_0} = \frac{m}{m-\mu} \lg \frac{M_0}{M_0 + (m-\mu)t}.$$

Wyznaczyć prócz tego  $v$ , gdy  $m=\mu$ .

Prz. 14. W obłokach powstała kulista kropla wody o promieniu  $a$  i zaczęła spadać, przyczem dzięki dalszemu skraplaniu pary wodnej masa kropki wzrasta proporcjonalnie do powierzchni. Wyznaczyć szybkość, którą osiągnie kropla w czasie  $t$ , gdy promień jej stanie się różnym  $r$ . Odp.  $\frac{gt}{4} \left( 1 + \frac{a}{r} + \frac{a^2}{r^2} + \frac{a^3}{r^3} \right)$ .

**93. Moment ilości ruchu.** Niech będzie punkt materialny o masie  $m$ , którego szybkość w chwili  $t$  jest równa  $v$ , a ilość ruchu  $mv$ . Obierzmy jakkolwiek w przestrzeni punkt  $O$  i wyznaczmy moment wektora  $mv$  względem tego punktu  $O$ . Oznaczmy ten moment ilości ruchu literą  $H$ . Posiada on wymiar  $ML^2T^{-1}$ , i jest liczbowo równy podwójnemu polu trójkąta, którego podstawą jest odcinek, reprezentujący  $mv$ , a wierzchołek leży w  $O$ .

Przypuśćmy naprzód, że na  $m$  żadna siła nie działa. W takim razie punkt ten biegnie ze stałą szybkością na prostym torze  $x$ . Oczywiście wektor  $H$ , prostopadły do płaszczyzny, przechodzącej przez  $O$  i  $x$ , nie zmienia się z czasem co

do kierunku; nie zmienia się on również co do wielkości, gdyż pole owego trójkąta jest stałe pomimo ruchu punktu  $m$ .

Przypuśćmy teraz, że na  $m$  działa siła  $P$ . W czasie  $dt$  ilość ruchu otrzyma przyrost geometryczny  $\delta(mv)$ , zgodny co do wielkości i kierunku z  $Pdt$ , a zatem moment ilości ruchu, w chwili  $t+dt$  będzie posiadał dwie składowe, a mianowicie moment wektora  $mv$  i moment wektora  $\delta(mv)$  lub wektora  $Pdt$ . Widzimy, że wektor  $H$  w czasie  $dt$  otrzyma przyrost geometryczny  $\delta H$ , równy momentowi  $Pdt$  względem  $O$ . Lecz moment  $Pdt$  względem  $O$  jest to oczywiście to samo, co moment siły  $P$  względem tego punktu, pomnożony przez  $dt$ .

Tak więc co  $dt$  sekund siła  $P$  wytwarza przyrost geometryczny wektora  $H$ , zgodny co do kierunku z jej momentem względem  $O$ , a co do wielkości  $dt$  razy większy. W ten sposób zmienia się wektor  $H$ .

Użyteczność tych prostych rozważań okażemy na przykładzie następującym. Przypuśćmy, że siła  $P$ , działająca na punkt  $m$ , jest centralna, a środkiem jej niech będzie punkt  $O$ . Moment siły  $P$  względem  $O$  jest stale równy zeru, a zatem wektor  $H$  względem tego samego punktu nie otrzymuje żadnych przyrostów i jest stały co do wielkości i kierunku.

Z tego wynikają bezpośrednio dwa wnioski następujące. Przedewszystkiem oczywistą jest rzeczą, że szybkość punktu  $m$  musi stale pozostawać w płaszczyźnie, przechodzącej przez  $O$  i prostopadłej do  $H$ , a więc ruch pod działaniem siły centralnej, czyli ruch centralny, jest zawsze płaski.

Aby dojść do wniosku drugiego oznaczmy przez  $p$  odległość szybkości  $v$  punktu  $m$  od  $O$ , czyli ramię momentu ilości ruchu. W takim razie  $H = mvp$ , a zatem iloczyn  $vp$ , równy  $\frac{H}{m}$ , jest wielkością stałą. Wyjaśnimy w krótkości znaczenie cynematyczne tego iloczynu.

Przypuśćmy, że w początku rachuby czasu punkt  $m$  zajmował położenie  $A_0$  (fig. 53), w chwili  $t$  położenie  $A$  i w chwili  $t+dt$  położenie  $A_1$ . Oznaczmy pole wycinka  $A_0OA$  przez  $S$ , a pole wycinka  $AOA_1$  przez  $dS$ . Nazywamy  $\frac{dS}{dt}$  szybkością wycinkową punktu  $m$ .

Oczywiście  $dS = \frac{p ds}{2}$ , gdzie  $ds = AA_1$ , a zatem  $\frac{dS}{dt} = \frac{p}{2} \frac{ds}{dt} = \frac{pv}{2}$ . Widzimy, że  $pv$  jest podwójną szybkością wycinkową punktu  $m$ , i drugi wniosek, tylko co otrzymany, wyrazimy tak: *w ruchu centralnym szybkość wycinkowa jest wielkością stałą.*

Powróćmy do przypadku ogólnego, w którym siła  $P$ , działająca na punkt  $m$ , jest jakakolwiek. Poprowadźmy przez  $O$  dowolną prostą  $x$ , i oznaczmy przez  $H_x$  rzut wektora  $H$  na tę prostą. Będzie to moment ilości ruchu względem prostej  $x$  (par. 10).

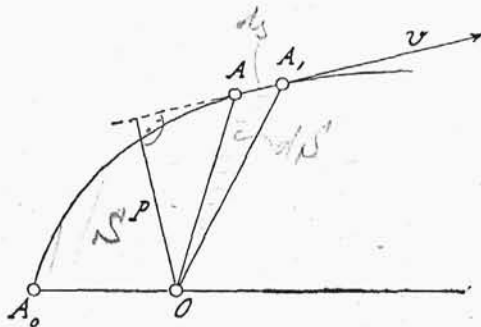


Fig. 53.

Gdy wektor  $H$  otrzyma przyrost geometryczny  $\delta H$ , to rzut  $H_x$  otrzyma przyrost  $dH_x$ , i wiemy, że  $dH_x$  jest rzutem przyrostu  $\delta H$  na prostą  $x$ . Lecz  $\delta H$  jest to moment siły  $P$  względem  $O$ , pomnożony przez  $dt$ , a zatem  $dH_x$  będzie rzutem tego momentu siły na prostą  $x$ , albo jej momentem względem prostej  $x$ , pomnożonym przez  $dt$ .

Tak więc siła  $P$  wytwarza co  $dt$  sek. przyrost wektora  $H_x$ , równy jej momentowi względem  $x$ , pomnożonemu przez  $dt$ .

**94. Wektor  $H$  układu.** Niech będzie układ, złożony z punktów  $m_1, m_2, \dots$ , które w chwili  $t$  posiadają szybkości  $v_1, v_2, \dots$ . Obierzmy dowolnie w przestrzeni środek redukcji  $O$  i wyznaczmy względem niego momenty ilości ruchu wszystkich punktów układu. Oznaczmy je przez  $h_1, h_2, \dots$ . Ponieważ wektory te posiadają wspólny początek, istnieje przeto ich wypadkowa, którą oznaczmy przez  $H$ ; nazywamy ją *momentem ilości ruchu układu względem punktu  $O$* , albo wprost *wektorem  $H$* .

Z biegiem czasu wektor  $H$  zmienia się co do wielkości i kierunku, i zmiany te dają nam ważne wskazania przy badaniu ruchu układu. Wektor ten, podobnie jak wektor  $G$ , można by porównać do wskazówki przyrządu, sygnalizującego pewne wydarzenia w przebiegu zjawiska. Zobaczymy, jaki wpływ na wektor  $H$  wywierają siły, działające na różne punkty układu.

Przypuśćmy więc, że na punkt  $m$  działa siła  $P$ . Wytworzy ona w czasie  $dt$  przyrost geometryczny składowej  $h$ , równy jej momentowi względem  $O$ , pomnożonemu przez  $dt$ . Oczywiście taki sam przyrost otrzyma wypadkowa  $H$ . Tym sposobem każda siła, działająca na układ, wytwarza co  $dt$  sek. nowy przyrost wektora  $H$ .

Dwie siły wewnętrzne, które dwa punkty układu wywierają na siebie nawzajem, są równe i odwrotne, a zatem momenty ich względem  $O$  są także równe i odwrotne. Z tego wynika, że siły takie wytworzą w czasie  $dt$  przyrosty równe i odwrotne wektora  $H$ , czyli w sumie nie wytworzą żadnego przyrostu, a zatem siły wewnętrzne nie wywierają wpływu na wektor  $H$  podobnie, jak na wektor  $G$ .

Wektor  $H$  układu izolowanego jest stały co do wielkości i kierunku.

Poprowadźmy przez punkt  $O$  dowolną prostą  $x$ . Rzut  $H_x$  wektora  $H$  na tę prostą nazywa się momentem ilości ruchu układu względem prostej  $x$ . Jest on równy sumie rzutów składowych  $h_1, h_2 \dots$  czyli sumie momentów ilości ruchu punktów  $m_1, m_2 \dots$  względem prostej  $x$ .

Siła, działająca na jeden z punktów układu, wytworzy oczywiście w czasie  $dt$  przyrost wektora  $H_x$  równy jej momentowi względem  $x$ , pomnożonemu przez  $dt$ . Siły wewnętrzne nie wywierają wpływu na  $H_x$  podobnie, jak i na  $H$ .

Prz. 1. Dwa punkty masy  $A, B$  leżą na gładkim stole i są połączone wyciągniętą niesprężystą nicią, przechodzącą przez gładkie koło  $O$ , umocowane na stole. Masa punktu  $A$  jest dwa razy mniejsza od masy  $B$ , a odległości punktów od  $O$  są równe. Nadajemy punktowi  $A$  szybkość  $v_0$ , skierowaną prostopadłe do nici  $OA$ ; z jaką szybkością dojdzie do kółka punkt  $B$ ? Odp.  $\frac{v_0}{2}$ .

Podczas ruchu ani moment ilości ruchu względem  $O$ , ani siła żywa układu się nie zmieniają, z czego wynikają dwa równania. Dogodnie będzie rozłożyć szybkość punktu  $A$  na składowe  $v_r$  i  $v_\varphi$ .

Prz. 2. Dwa jednakowe punkty masy  $A, B$  leżą na gładkim stole, połączone wyciągniętą niesprężystą nicią o długości  $l$ ; nić ta przechodzi przez gładkie kółko  $O$ , umocowane na stole. Punktowni  $A$  nadano szybkość prostopadłą do  $OA$ , i punkt  $B$  doszedł do kółka właśnie w chwili, gdy nić  $OA$  zatoczyła kąt prosty. Wyznaczyć początkową odległość  $OA$ . Odp.  $l \cos \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ .

Tworzymy dwa równania, jak w przykładzie poprzedzającym; rugując z nich  $\frac{d\varphi}{dt}$ , otrzymamy równanie, które się łatwo całkuje.

Prz. 3. Punkty masy  $A$  i  $B$  na gładkim stole są przyłączone do nierozciągalnej nici  $OAB$ , której koniec  $O$  jest przymocowany do stołu. Masa punktu  $A$  jest dwa razy większa od masy  $B$ , nić jest wyciągnięta, i  $OA=AB$ . Nadajemy punktowi  $B$  szybkość prostopadłą do prostej  $OB$ ; w jakich granicach będzie się zmieniał kąt, zawarty pomiędzy  $AB$  i przedłużeniem  $OA$ ?

Znajdziemy, że szybkość punktu  $A$  jest rzeczywista, jeżeli  $\cos \vartheta (3 - \cos^2 \vartheta) > 0$ , gdzie  $\vartheta$  oznacza kąt, o który chodzi. Drugi czynnik jest zawsze dodatni, a zatem  $\cos \vartheta > 0$ , z czego wynika, że  $\vartheta$  zmienia się od  $-\frac{\pi}{2}$  do  $\frac{\pi}{2}$ . Wyznaczyć prócz tego stosunki szybkości obydwóch punktów w położeniach skrajnych.

Prz. 4. Lekki cylinder o promieniu  $a$  i osi pionowej może się swobodnie obracać około tej osi. Na cylinder są nawinięte w kierunkach odwrotnych dwie nici, których części swobodne leżą wyprężone na gładkich płaszczyznach poziomych, a do końców są przyłączone jednakowe punkty masy. Jeden z punktów, przyłączony do nici, której część wyprostowana posiada długość  $c$ , otrzymuje szybkość  $v_0$  w kierunku prostopadłym do nici. Wyznaczyć długość części wyprostowanej tejże nici po upływie czasu  $t$ . Odp. Kwadrat długości szukanej wynosi  $c^2 + 2av_0t + \frac{v_0^2 t^2}{2}$ .

Prz. 5. Trzy punkty masy o jednakowych masach, osadzone na lekkim sztywnym pręcie na końcach i w środku, leżą na gładkim stole. Jeden z punktów końcowych otrzymał uderzenie w kierunku prostopadłym do pręta; wyznaczyć stosunek szybkości początkowych wszystkich trzech punktów. Odp. 5:2:1.

Szybkość początkowa punktu uderzonego będzie oczywiście prostopadła do pręta, a stąd wynika, że środek chwilowy leży na linii pręta. Prócz tego należy wziąć pod uwagę, że moment siły chwilowej względem punktu, który zajmuje masa uderzona, jest równy zeru, a zatem moment ilości ruchu całego układu względem tego punktu się nie zmieni podczas uderzenia.

Prz. 6. Cztery jednakowe punkty masy  $A_1, A_2, A_3, A_4$  leżą na gładkiej płaszczyźnie poziomej, tworząc połowę sześcioboku forem-

nego; łączą je wyprężone nierozciągalne nici  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$  i  $A_3A_4$ . Punkt  $A_1$  otrzymuje w kierunku  $A_1A_4$  impuls  $F$ ; jaki impuls sznur  $A_2A_3$  przeniesie na punkt  $A_3$ ?

Gdyby ten impuls szukany wyrzucić bezpośrednio na  $A_3$ , to ruch początkowy punktów  $A_3$  i  $A_4$  byłby taki sam, jak obecnie. Dogodnie będzie początkową szybkość każdego punktu rozłożyć na składowe w kierunku  $A_1A_4$  i w kierunku prostopadłym. Wypadnie  $\frac{F}{14}$ .