

43. Układ zerowy. Oś ruchu śrubowego nazywa się także *osią centralną pola szybkości*. Podaję tu jeszcze jeden dowód istnienia osi centralnej; dowód ten, ściśle geometryczny, lepiej może odpowiada charakterowi przedmiotu.

Weźmy w polu szybkości układu sztywnego dowolny punkt A i poprowadźmy przezeń prostopadłe do jego szybkości płaszczyznę A . Płaszczyzna A nazywa się *płaszczyzną zerową punktu A* ; punkt A nazywa się *punktem zerowym płaszczyzny A* . Wszystkie proste, położone w płaszczyźnie i przechodzące przez jej punkt zerowy są zerowe.

Szybkość punktu przecięcia dwóch prostych zerowych jest prostopadła do płaszczyzny tych prostych, a zatem ten punkt przecięcia jest punktem zerowym płaszczyzny prostych.

Każda płaszczyzna posiada punkt zerowy. Aby go wyznaczyć obieramy w płaszczyźnie dwa dowolne punkty i prowadzimy przez nie w płaszczyźnie proste, prostopadłe do szybkości tych punktów. Będą to proste zerowe, i ich punkt przecięcia jest szukanym punktem zerowym.

Tym sposobem w polu szybkości każdemu punktowi odpowiada płaszczyzna, przechodząca przez ten punkt, i każdej płaszczyźnie odpowiada punkt, położony w tej płaszczyźnie. Ogół punktów wraz z ich płaszczyznami zerowymi nazywa się *układem zerowym*. Zobaczmy zaraz, że istnieje prócz tego odpowiedniość pomiędzy prostami pola.

Niech będzie punkt A oraz jego płaszczyzna zerowa A . Poprowadźmy przez A dowolną płaszczyznę B ; przetnie ona płaszczyznę A według prostej zerowej, i na tej ostatniej musi leżeć punkt zerowy płaszczyzny B . Tak więc punkty zerowe wszystkich płaszczyzn, przechodzących przez dany punkt, leżą w jego płaszczyźnie zerowej.

Weźmy w płaszczyźnie A dowolny punkt B ; prosta, łącząca go z A , jest zerowa, a więc leży w płaszczyźnie zerowej punktu B . Płaszczyzny zerowe wszystkich punktów, położonych w danej płaszczyźnie, przechodzą przez jej punkt zerowy.

Weźmy na prostej a dwa dowolne punkty M i N . Ich płaszczyzny zerowe M , N przecinają się, dajmy na to, na prostej b . Poprowadźmy przez a dowolną płaszczyznę; jej punkt zerowy leży na każdej z płaszczyzn M i N , a zatem leży na prostej b . Punkty zerowe wszystkich płaszczyzn, przechodzących przez a ,

leżą na b . Odwrotnie punkty zerowe płaszczyzn, przechodzących przez b , leżą na a , jako na prostej, łączącej punkty M i N . Proste a i b nazywają się *sprzężonemi*.

W polu szybkości każdej prostej odpowiada inna prosta z nią sprzężona. Prosta zerowa zawiera punkt zerowy każdej płaszczyzny, przez nią przechodzącej, a więc jest sprzężona sama ze sobą.

Sprzężone prostych, położonych w jednej płaszczyźnie, przechodzą oczywiście przez punkt zerowy tej płaszczyzny, a sprzężone prostych, przechodzących przez jeden punkt, leżą w płaszczyźnie zerowej tego punktu.

W polu szybkości szczególnie ważną rolę odgrywa punkt zerowy płaszczyzny nieskończenie odległej. Proste, przechodzące przez ten punkt, zowią się *średnicami* pola. Naturalnie wszystkie średnice są równoległe; ich proste sprzężone leżą w płaszczyźnie nieskończenie odległej, a więc są nieskończenie odległe. Odwrotnie każda prosta, sprzężona z prostą nieskończenie odległą, przechodzi przez punkt zerowy płaszczyzny nieskończenie odległej, a więc jest średnicą.

Punkty zerowe płaszczyzn równoległych, t. j. przechodzących przez jedną prostą nieskończenie odległą, leżą na średnicy, sprzężonej z tą prostą. Odwrotnie płaszczyzny zerowe wszystkich punktów średnicy są równoległe, bo przechodzą przez nieskończenie odległą prostą, sprzężoną z tą średnicą. Z tego wynika, że szybkości wszystkich punktów średnicy, jako prostopadłe do owych płaszczyzn, są równoległe.

Szczególnie są ważne płaszczyzny prostopadłe do średnic. Średnica, na której leżą ich punkty zerowe, zawiera oczywiście szybkości swych punktów, a więc jest to oś centralna.

Płaszczyzny równoległe do średnic nazywamy *płaszczyznami średnicowymi*. Płaszczyzna taka przechodzi przez punkt zerowy płaszczyzny nieskończenie odległej, a zatem w tej ostatniej leży jej punkt zerowy, inaczej mówiąc, punkty zerowe płaszczyzn średnicowych są nieskończenie odległe. Odwrotnie każda płaszczyzna, posiadająca punkt zerowy w nieskończoności, przechodzi przez punkt zerowy płaszczyzny nieskończenie odległej, a więc jest średnicowa.

Połączmy linią prostą punkty A , B , wzięte dowolnie odpowiednio na sprzężonych prostych a , b . Punkt B jest zerowym płaszczyzny, przechodzącej przez a i przez a , a zatem prosta AB jest zerowa. Tak więc każda prosta, przecinająca dwie proste sprzężone, jest zerowa.

Niech będzie prosta zerowa m , przecinająca jedną z prostych sprzężonych np. a . Punkt zerowy płaszczyzny, przechodzącej przez a i m , musi leżeć na m i na b , a więc jest ich punktem przecięcia. Z tego wynika, że każda prosta zerowa, przecinająca jedną z prostych sprzężonych, przecina i drugą.

Zastosujmy te twierdzenia do osi centralnej i do prostej z nią sprzężonej. Oznaczmy tę ostatnią literą n . Jest to prosta nieskończenie odległa płaszczyzn, prostopadłych do średnic. Każda prosta zerowa, przecinająca oś centralną, przecina również prostą n , a więc jest prostopadła do osi centralnej. Odwrotnie każda prosta zerowa, prostopadła do osi centralnej, przecina prostą n , a zatem musi przecinać i oś centralną.

Niech będą znowu dwie jakiegokolwiek proste sprzężone a , b , i niechaj m będzie prostą ich najkrótszej odległości. Ta ostatnia jest zerowa, bo przecina dwie proste sprzężone. Poprowadźmy przez a płaszczyznę prostopadłą do m , czyli równoległą do b . Posiada ona nieskończenie odległy punkt zerowy, a zatem jest średnicowa. Widzimy, że prosta m jest prostopadła do płaszczyzny średnicowej, a więc i do osi centralnej; z tego wynika, że prosta m przecina oś centralną. Wszystkie proste najkrótszych odległości par prostych sprzężonych przecinają oś centralną i są do niej prostopadłe.

Prz. 1. Dane są dwie pary prostych sprzężonych; wyznaczyć punkt zerowy jakiegokolwiek płaszczyzny, płaszczyznę zerową jakiegokolwiek punktu i oś centralną pola.

Prz. 2. Mając dwie pary prostych sprzężonych, wyznaczyć sprzężoną z piątą prostą dowolną.

Prz. 3. Okazać, że każde dwie pary prostych sprzężonych leżą na hiperboloidzie jednopowłokowej.

Wynika to stąd, że każda prosta, przecinająca trzy z owych czterech prostych sprzężonych, przecina również i czwartą.

Prz. 4. Dowieść, że charakterystyka płaszczyzny (par. 24, prz.) jest sprzężona z prostopadłą do płaszczyzny w jej punkcie zerowym.

Prz. 5. Charakterystyka płaszczyzny średnicowej jest średnicą pola.

Prz. 6. Dowieść, że obwiednią szybkości punktów charakterystyki jest parabola, której ogniskiem jest punkt zerowy płaszczyzny, a styczną wierzchołkową charakterystyka (par. 33, prz. 5).

Prz. 7. Przez każdy punkt pola przechodzi prosta, prostopadła do swej sprzężonej.

Prz. 8. Charakterystyka płaszczyzny jest rzutem prostokątnym średnicy na tę płaszczyznę.

Prz. 9. Rzuty prostokątne dwóch prostych sprzężonych na dowolną płaszczyznę przecinają się na charakterystyce tej płaszczyzny.

Prz. 10. Krawędź dwuściennego kąta prostego przecina oś centralną i jest do niej prostopadła; okazać, że iloczyn odległości od osi punktów zerowych ścian takich kątów jest dla danego pola wielkością stałą (par. 41, prz. 2).

5/13
+ 44. **Ruch względny układu.** Nieraz już była mowa o ruchu układu względem punktu, lub raczej względem innego układu, zawierającego ów punkt i posiadającego ruch postępowy. Wypada teraz bliżej rozważyć ruch układu względem układu innego, posiadającego ruch jakikolwiek.

Zadanie, które się tu nastręcza, możnaby sformułować tak: dany jest ruch układu S_1 względem układu S_2 , czyli ruch względny, oraz ruch układu S_2 względem układu S_3 (możemy go uważać za nieruchomy), czyli ruch unoszenia, chodzi o wyznaczenie ruchu układu S_1 względem S_3 , czyli ruchu bezwzględnego. Rozważanie nasze zawrą się jednak w ciśniejszych granicach. Będzie nam chodziło nie o ruch wogóle układu S_1 , lecz o jego stan cynematyczny, a więc zadanie, które sobie postawimy będzie takie: dane jest pole szybkości układu S_1 względem S_2 oraz pole szybkości układu S_2 względem S_3 , wyznaczyć pole szybkości układu S_1 względem S_3 .

Sposób rozwiązania takiego zagadnienia narzuca się sam przez się. Weźmy jakikolwiek punkt M układu S_1 , zajmujący w danej chwili punkt A układu S_2 ; przypuśćmy, że szybkość tego punktu M względem S_2 , czyli szybkość względna, wynosi w , a szybkość punktu A , czyli szybkość unoszenia u . Wiemy, że szybkość punktu M względem S_3 , czyli szybkość bezwzględna v , będzie wypadkową szybkości w i u . Możemy zatem wyznaczyć szybkość bezwzględną każdego punktu układu S_1 , a tem samem i szukane pole szybkości.

Tak więc postawione zagadnienie rozwiązuje się przy pomocy dodawania geometrycznego szybkości względnych i szybkości unoszenia. W działaniu tem obydwie szybkości składowe w i u są równouprawnione, i niema potrzeby czynić pomiędzy nimi różnicy. Dzięki tej okoliczności utarł się zwyczaj nazywania ruchów względnego i unoszenia *ruchami składowymi*, a ruchu bezwzględnego *ruchem wypadkowym*. Można zatem zagadnienie nasze sformułować jeszcze tak: dane są składowe pola szybkości, wyznaczyć pole wypadkowe.

Taki sposób mówienia jest dogodny i zupełnie poprawny, ale tylko w tym razie, gdy mamy na widoku stan cynematyczny ciała w pewnej chwili; gdy jednak chodzi o ruch układu w ciągu pewnego okresu, choćby nawet bardzo krótkiego, to niezbędną jest rzeczą odróżniać ruch względny od

ruchu unoszenia. W razie przeciwnym możemy wpaść w ciężkie błędy.

45. Równoległobok szybkości kątowych. Mamy teraz rozważyć z kolei wszelkie możliwe kombinacje różnych rodzajów ruchów składowych.

Gdy ruchy składowe są postępowe, to oczywiście ruch wypadkowy będzie również postępowy, a jego szybkość będzie sumą geometryczną szybkości ruchów składowych. Dotyczy to nie tylko dwóch, ale i dowolnej liczby ruchów składowych. Przypadek ten można uważać za wyczerpany, i przejdziemy od razu do innego, w którym ruchami składowymi są ruchy obrotowe.

Przypuścmy więc, że układ sztywny posiada dwa ruchy obrotowe. Tymczasem rozważymy tylko ten przypadek, gdy

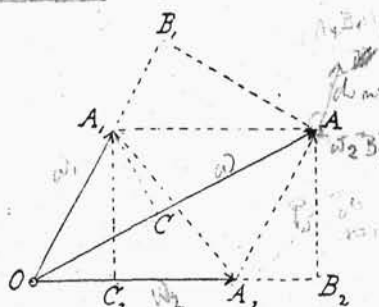


Fig. 29.

osi tych ruchów się przecinają, i przypuścmy, że w chwili rozważanej obydwie leżą w płaszczyźnie papieru. Niech odcinki OA_1 i OA_2 wyrażają szybkości kątowe ω_1 i ω_2 pod względem wielkości i kierunku według umowy, zawartej w par. 26.

Weźmy jakikolwiek punkt P układu, położony, dajmy nam to, w odległościach p_1 i p_2 od osi

OA_1 i OA_2 . Szybkość tego punktu ma dwie składowe: jedna pochodzi z ruchu obrotowego około OA_1 i wynosi $p_1\omega_1$, druga, pochodząca z ruchu około OA_2 , wynosi $p_2\omega_2$. Jeżeli P leży na jednej z osi, to odpowiednia składowa jest zerem; dla punktu O obydwie składowe są zerami, a zatem i szybkość wypadkowa jest zerem.

Z tego wynika, że ruch wypadkowy jest obrotowy, i oś jego przechodzi przez punkt O . Dowiedziemy, że szybkość kątową ruchu wypadkowego wyraża co do wielkości i kierunku przekątnia OA równoległoboku, którego bokami są OA_1 i OA_2 , czyli że szybkość kątowa ruchu wypadkowego jest wypadkową szybkości ruchów składowych.

Obydwie składowe szybkości punktu A są prostopadłe do płaszczyzny papieru. Jedna z nich, pochodząca z ruchu obro-

owego około OA_1 , jest zwrócona w stronę widza i równa $\omega_1 \cdot AB_1$, druga, pochodząca z ruchu około OA_2 , jest zwrócona w stronę odwrotną i wynosi $\omega_2 \cdot AB_2$. AB_1 i AB_2 oznaczają tu odległości punktu A od osi. Lecz iloczyny $\omega_1 \cdot AB_1$ i $\omega_2 \cdot AB_2$ są liczbowo równe podwójnym polom trójkątów AA_1O i AA_2O , a te trójkąty są równe. Z tego wynika, że szybkość wypadkowa punktu A jest równa zeru, a zatem punkt ten leży na osi ruchu wypadkowego.

Zwróćmy teraz uwagę na punkt A_1 . Szybkość jego posiada tylko jedną składową, pochodzącą z ruchu około osi OA_2 . Składowa ta jest odwrócona od widza, a zatem około osi OA układ obraca się dla patrzącego od A do O w kierunku ruchu wskazówki zegara. Tak więc szybkość kątowna ruchu wypadkowego jest zwrócona od O do A . Pozostaje jeszcze wyznaczyć tę szybkość co do wielkości; oznaczmy ją przez Ω .

Szybkość punktu A_1 można wyrazić jako $\Omega \cdot A_1C$, lub $\omega_2 \cdot A_1C_2$, gdzie A_1C i A_1C_2 są odległościami punktu A_1 od OA i OA_2 . Zatem

$$\Omega \cdot A_1C = \omega_2 \cdot A_1C_2.$$

Iloczyn $\omega_2 \cdot A_1C_2$ jest to podwójne pole trójkąta A_1A_2O , a ponieważ trójkąt ten oraz AA_1O mają pola równe, przeto

$$\omega_2 \cdot A_1C_2 = OA \cdot A_1C.$$

Z tych dwóch równań wynika, że $\Omega = OA$, a więc przekątnia OA wyraża szybkość kątowną ruchu wypadkowego zarówno co do kierunku, jak i co do wielkości.

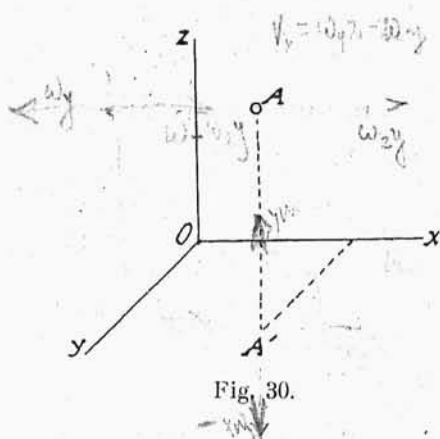
Uważałem za potrzebne podać tu powyższy dowód bezpośredni i poglądowy, należy jednak zwrócić uwagę, że twierdzenie to jest tylko szczególnym przypadkiem twierdzenia ogólnego, które poznaliśmy w par. 11, a mianowicie, że moment wektora wypadkowego jest równy sumie geometrycznej momentów wektorów składowych. Istotnie składowe szybkości punktu P są momentami wektorów ω_1 i ω_2 względem tego punktu (par. 26), a zatem szybkość wypadkowa jest momentem wypadkowego wektora Ω względem P . Z tego wynika bezpośrednio, że ruch wypadkowy układu jest obrotowy o szybkości kątovej Ω .

Gdy układ posiada większą liczbę ruchów obrotowych, i osi tych ruchów przechodzą przez jeden punkt, to ruchem wypadkowym będzie znowu ruch obrotowy, którego szybkość kątowna jest sumą geometryczną szybkości ruchów składowych.

Możemy także rozkładać daną szybkość kątową, jak każdy wektor, na składowe, i można uważać te składowe za szybkości kątowe ruchów składowych. Robimy z tego często użytek, rozkładając szybkość kątową układu na składowe w kierunkach osi współrzędnych i uważając następnie, że w danej chwili układ obraca się jednocześnie około wszystkich trzech osi.

46. **Szybkość punktu.** Wyprowadzimy tu pewne proste wzory, które będą nam nieraz użyteczne w dalszym ciągu, rozwiążemy mianowicie zagadnienie następujące: oś ruchu obrotowego przechodzi przez punkt $O'(\xi\eta\zeta)$, a szybkość kątowa posiada w kierunkach osi współrzędnych składowe $\omega_x, \omega_y, \omega_z$; wyznaczyć szybkość punktu $A(xyz)$.

Oznaczmy szybkość szukaną przez v ; wyznaczmy ją na-przód w tym przypuszczeniu, że $\xi=\eta=\zeta=0$, czyli że oś ruchu obrotowego przechodzi przez początek współrzędnych.



Szybkość punktu A posiada trzy składowe, pochodzące z ruchów obrotowych około osi x, y i z , a rzut tej szybkości na jakąkolwiek prostą jest równy sumie rzutów tych trzech składowych. Wyznamy rzut na oś z . Składowa, pochodząca z ruchu około tejże osi, jest do niej prostopadła, i rzut jej jest zerem, potrzeba więc wyznaczyć tylko rzuty dwóch składowych pozostałych.

Dajmy na to, że układ obraca się tylko około osi x z szybkością kątową ω_x . W takim razie szybkość punktu A' , t. j. rzutu punktu A na płaszczyznę xy , jest skierowana według prostej $A'A$ i równa $y\omega_x$. Temuż samemu jest równy rzut szybkości punktu A na prostą $A'A$, albo na prostą z , gdyż rzuty szybkości punktów A' i A na prostą, łączącą te punkty, muszą być równe.

Zupełnie tak samo znajdziemy, że rzut szybkości drugiej składowej, pochodzącej z ruchu obrotowego około osi y , jest równy $-x\omega_y$. Kładziemy tu znak $-$, bo gdy składowa ω_y jest zwrócona w kierunku dodatnim osi y i współrzędna x jest

dodatnia, to rzut, o którym mowa, ma kierunek ujemny na osi z . Będzie więc

$$v_z = \omega_x y - \omega_y x.$$

Napiszemy analogicznie

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z.$$

Do tych samych wzorów doszlibyśmy, opierając się na tem, że szukana szybkość punktu A jest to moment wektora ω względem A . Wiemy (par. 12, prz. 3), że moment ten jest równy i odwrotny do momentu wektora ω , posiadającego początek w A , względem O .

Mając rzuty szybkości v na osi, znamy tę szybkość pod względem wielkości i kierunku.

W przypadku ogólnym, gdy ξ, η, ζ nie są zerami, wypadnie tylko we wzorach powyższych zamiast x, y, z napisać x', y', z' , czyli współrzędne punktu A w układzie, którego początek leży w O' , a osi są odpowiednio równoległe do x, y, z ; zatem $x' = x - \xi, y' = y - \eta, z' = z - \zeta$.

Prz. 1. Układ obraca się około osi, przechodzącej przez punkt (ξ, η, ζ) , a składowe szybkości w kierunkach osi wynoszą $\omega_x, \omega_y, \omega_z$. Wyznaczyć punkt, w którym oś przecina płaszczyznę xy . Odp. $\frac{\omega_z \xi - \omega_x \zeta}{\omega_z}, \frac{\omega_z \eta - \omega_y \zeta}{\omega_z}$.

Prz. 2. Wyznaczyć w przykładzie poprzedzającym równanie miejsca geometrycznego punktów, których szybkości są równoległe do płaszczyzny xy .

47. **Szybkości kątowe równoległe.** Musimy oddzielnie rozważyć przypadek, w którym osi ruchów składowych są równoległe; podobnie w statyce traktujemy oddzielnie wypadkową sił równoległych.

Przypuśćmy, że obydwie osi ruchów składowych są prostopadłe do płaszczyzny papieru i przecinają tę płaszczyznę w punktach O_1 i O_2 . Będziemy uważali za typowy ten przypadek, w którym obydwie szybkości kątowe mają kierunki zgodne, są np. zwrócone do widza, a zatem obydwie ruchy składowe odbywają się w stronę ruchu wskazówki zegara.

Weźmy w płaszczyźnie papieru jakiegokolwiek punkt P , w odległościach p_1 i p_2 od O_1 i O_2 . Punkt ten posiada szybkości składowe $p_1 \omega_1$ i $p_2 \omega_2$, położone obydwie w płaszczyźnie

papieru, a zatem i szybkość wypadkowa leży w tejże płaszczyźnie. Z tego wynika, że ruch wypadkowy układu jest płaski, czyli obrotowy, i wypada wyznaczyć środek chwilowy.

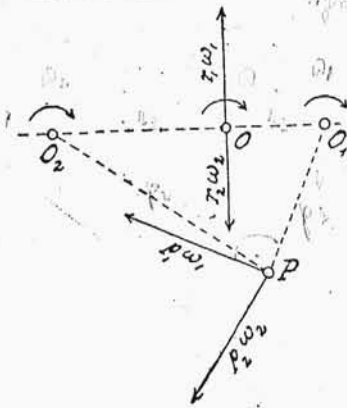


Fig. 31.

Dla środka chwilowego obydwie szybkości składowe powinny mieć kierunki odwrotne, a takie punkty istnieją oczywiście tylko na prostej O_1O_2 . Weźmy na tej prostej jakikolwiek punkt O pomiędzy punktami O_1 i O_2 w odległościach r_1 i r_2 od tychże. Jego szybkość wypadkowa wynosi oczywiście $r_1\omega_1 - r_2\omega_2$. Punkt ten będzie środkiem chwilowym, jeżeli $r_1\omega_1 - r_2\omega_2 = 0$, t. j. jeżeli

$$r_1\omega_1 = r_2\omega_2 \quad (1).$$

Widzimy, że w tym razie środek chwilowy dzieli odcinek O_1O_2 w stosunku odwrotnym do szybkości kątowych składowych.

Punkt O_1 układu posiada tylko jedną szybkość składową, skierowaną na naszym rysunku na dół; z tego wynika, że około punktu O układ obraca się w stronę biegu wskazówki zegarowej, a więc szybkość kątowa ruchu wypadkowego jest zgodna co do kierunku z szybkościami ruchów składowych.

Można uważać, że punkt O_1 obraca się w chwili obecnej około O , albo około O_2 ; stosownie do tego szybkość jego wyrazi się przez Ωr_1 albo przez $\omega_2(r_1 + r_2)$, gdzie Ω oznacza szybkość ruchu wypadkowego. Zatem $\Omega r_1 = \omega_2 r_1 + \omega_2 r_2$, a podstawiając zamiast $\omega_2 r_2$ z równania poprzedzającego $\omega_1 r_1$, otrzymamy

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2 \quad (2),$$

czyli, że szybkość ruchu wypadkowego jest sumą algebraiczną szybkości składowych.

Oznaczmy jeszcze długość odcinka O_1O_2 przez a . Pisząc w (1) $a - r_1$ zamiast r_2 , znajdziemy

$$r_1 = \frac{a\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \quad (3).$$

Ważny jest przypadek szczególny, gdy szybkości kątowe ruchów składowych są równe i odwrotne. Szybkości takie stanowią tak zw. parę szybkości kątowych. Zakładając w (2) i (3) $\omega_1 = \omega$ i $\omega_2 = -\omega$, otrzymamy $\Omega = 0$, a $r_1 = \infty$, z czego można wnioskować, że ruch wypadkowy jest postępowy.

Możemy się o tem przekonać wprost. W tym celu weźmy na prostej O_1O_2 , np. pomiędzy punktami O_1 i O_2 , jakikolwiek punkt A . Znajdziemy, że jego szybkość wypadkowa wynosi $\omega \cdot O_1A + \omega \cdot AO_2 = \omega a$. Tak więc szybkość punktu A nie zależy od jego położenia na prostej O_1O_2 , albo raczej na płaszczyźnie, przechodzącej przez osi ruchów składowych. Szybkości wszystkich punktów tej płaszczyzny są jednakowe, a zatem ruch układu jest postępowy, i szybkość tego ruchu wynosi $a\omega$. Szybkość ta nazywa się nieraz momentem pary szybkości kątowych.

Prz. Szybkości kątowe równoległe ω_1 i ω_2 są stałe co do wielkości i kierunku; pierwsza z nich określa ruch względny, a druga ruch unoszenia. Wyznaczyć obydwie linie środków chwilowych w dwóch przypadkach: (1) gdy kierunki obydwóch szybkości są zgodne, (2) gdy są odwrotne.

48. Szybkość kątowa i szybkość postępową. Przypuśćmy, że ruchami składowymi są postępowy i obrotowy. Naprzód rozważymy ten przypadek szczególny, w którym szybkość postępową jest prostopadła do osi ruchu obrotowego.

Dajmy na to, że oś ta jest prostopadła do płaszczyzny papieru i przecina ją w punkcie O ; szybkość kątową oznaczmy przez ω i przyjmijmy, że jest zwrócona do widza, a szybkość postępową oznaczmy przez v . Punkt P , położony w płaszczyźnie papieru w odległości p od O , posiada szybkości składowe $p\omega$ i v , zawarte w płaszczyźnie papieru, zatem ruch wypadkowy jest płaski, i trzeba wyznaczyć środek chwilowy.

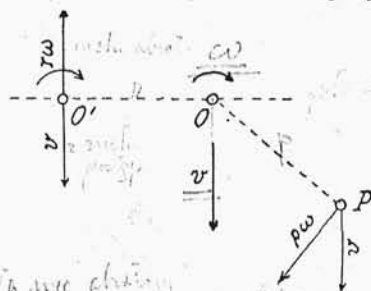


Fig. 32.

Środek ten znajdzie się oczywiście na prostej OO' , poprowadzonej przez O prostopadłe do v , na naszym rysunku po lewej stronie od O , bo tylko tam leżą punkty, których szybkości

składowe mają kierunki odwrotne. Szybkość jakiegoś punktu O' , położonego na owej prostej w odległości r od O , wynosi $r\omega - v$. Punkt ten będzie środkiem chwilowym, jeżeli $r\omega - v = 0$, czyli jeżeli

$$r = \frac{v}{\omega}.$$

Punkt O posiada oczywiście szybkość v , a stąd wynika, że szybkość kątowna ruchu wypadkowego jest skierowana zgodnie z szybkością składową ω . Oznaczmy tę szybkość wypadkową przez Ω ; w takim razie szybkość punktu O można wyrazić przez Ωr , a zatem $v = \Omega r$; z tego wynika, że $\Omega = \omega$.

Tak więc, gdy z ruchem obrotowym łączy się ruch postępowy w kierunku prostopadłym do osi, to skutek jest tylko ten, że ta oś przesuwana się równolegle o $\frac{v}{\omega}$ w płaszczyźnie prostopadłej do szybkości postępowej. Stronę, w którą następuje przesunięcie, można rozpoznać przy pomocy pravidła następującego: zwróćmy prawą dłoń przeciwko szybkości postępowej w taki sposób, aby palce były wyciągnięte w kierunku szybkości kątownej; w takim razie wielki palec wskaże, w którą stronę przesunie się oś. Ale i bez tego pravidła daje się łatwo wyznaczyć nowe położenie osi.

Jeżeli szybkość postępową jest równoległą do kątownej, to oczywiście ruch układu jest śrubowy.

Przypuśćmy teraz, że szybkość postępową v tworzy z osią ruchu obrotowego, którą oznaczmy literą z , jakikolwiek kąt α . Rozkładamy szybkość v na składowe $v \sin \alpha$ i $v \cos \alpha$, z których pierwsza jest prostopadła do osi z , a druga do niej równoległa. Odpowiednio do tego i ruch postępowy układu rozłoży się na dwa ruchy postępowe o szybkościach $v \sin \alpha$ i $v \cos \alpha$. Dodajemy pierwszy z tych ruchów do ruchu obrotowego. Wypadkowym będzie ruch obrotowy, odbywający się z daną szybkością kątowną około osi równoległej do z . Ruch ten wraz z drugim ruchem postępowym daje ruch śrubowy.

Zwróćmy jeszcze uwagę na prostą z , czyli na oś danego ruchu obrotowego. Wszystkie punkty tej prostej posiadają szybkości równe i równoległe, a mianowicie szybkości v . Z paragrafu 43 wiemy, że taka prosta jest średnicą pola szybkości,

a zatem jest równoległa do osi centralnej, czyli do osi wypadkowego ruchu śrubowego; wynika to zresztą bezpośrednio z rozważań poprzedzających.

Niech będzie układ sztywny, poruszający się jakkolwiek. Stosownie do uwagi powyższej możemy ruch ten rozłożyć na dwa ruchy składowe postępowy i obrotowy w sposób następujący. Obieramy dowolnie punkt układu A , posiadający, dajmy na to, w rozważanej chwili szybkość v . Szybkość składowego ruchu postępowego będzie zgodna z v co do wielkości i kierunku, a osią ruchu obrotowego będzie średnica pola z , przechodząca przez A . Szybkość kątowna składowego ruchu obrotowego jest niezależna od obioru punktu A ; jest ona zawsze równa szybkości kątowej, z jaką układ obraca się około osi centralnej.

W dynamice bardzo często rozkładamy w ten sposób ruch ciała, przyczem zwykle punkt A jest środkiem masy.

Prz. 1. Szybkość postępową ruchu śrubowego $= u$, a szybkość kątowną $= \omega$. Dodajemy do tego ruchu ruch obrotowy, którego oś przecina oś centralną pod kątem prostym, a szybkość kątowną $= \omega$. Wyznaczyć oś centralną ruchu wypadkowego i jego obydwie szybkości.

Prz. 2. Szybkość postępową ruchu śrubowego $= u$, a szybkość kątowną $= \omega$. Dodajemy ruch postępowy, którego szybkość v tworzy z osią centralną kąt α . Wyznaczyć oś centralną ruchu wypadkowego i jego obydwie szybkości.

Prz. 3. Układ posiada trzy równe szybkości kątowe ω ; dwie z nich są równoległe i zwrócone w strony odwrotne, a trzecia przecina je pod kątem danym. Wyznaczyć ruch wypadkowy.

Prz. 4. Punkt układu, przebiegający obecnie przez początek współrzędnych O , posiada szybkość, której rzuty na osi wynoszą v_x, v_y, v_z , a rzuty szybkości kątowej na osi są $\omega_x, \omega_y, \omega_z$. Wyznaczyć równania osi centralnej oraz obydwie szybkości ruchu śrubowego. Odp.

Szybkość kątowna ruchu śrubowego $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$, i $\cos \alpha = \frac{\omega_z}{\omega}$,

$\cos \beta = \frac{\omega_y}{\omega}$, $\cos \gamma = \frac{\omega_x}{\omega}$, gdzie α, β, γ są kątami kierunkowymi osi centralnej.

Szybkość postępową u ruchu śrubowego jest równa rzutowi szybkości punktu O na oś centralną, a zatem $u = v_x \cos \alpha + v_y \cos \beta +$

$+ v_z \cos \gamma$ lub $u = \frac{v_x \omega_x + v_y \omega_y + v_z \omega_z}{\omega}$.

Szybkość dowolnego punktu układu $P(xyz)$ posiada składowe w kierunkach osi współrzędnych (par. 46) $v_x + \omega_y z - \omega_z y$, $v_y + \omega_z x - \omega_x z$,

$v_z + \omega_x y - \omega_y x$. Jeżeli P leży na osi centralnej, to szybkość jego $= u$, i te składowe są odpowiednio równe $u \cos \alpha$, $u \cos \beta$, $u \cos \gamma$. Stąd otrzymamy równania osi $\frac{v_x + \omega_y z - \omega_z y}{\omega_x} = \frac{v_y + \omega_z x - \omega_x z}{\omega_y} = \frac{v_z + \omega_x y - \omega_y x}{\omega_z}$.

49. Szybkości kątowe wichrowate. Możemy teraz rozwiązać zagadnienie ogólne: układ posiada n ruchów obrotowych, których osi są położone jakkolwiek, mamy wyznaczyć ruch wypadkowy. Oznaczmy szybkości kątowe tych ruchów przez $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n$ i obierzmy w przestrzeni dowolnie punkt O , który jak w statyce nazwiemy środkiem redukcji.

Poprowadźmy przez ten punkt O prostą z_1 równoległą do osi pierwszego ruchu obrotowego. Możemy uważać, że układ prócz ruchów danych posiada jeszcze dwa ruchy obrotowe około osi z_1 , których szybkości kątowe są równe i odwrotne, gdyż oczywiście ruchy takie są równoważne spoczynkowi, a więc dodając je, nie zmieniamy stanu cynematycznego układu. Szybkości kątowe tych ruchów niech będą ω_1 i $-\omega_1$.

Szybkość $-\omega_1$ tworzy z szybkością pierwszego ruchu danego parę szybkości kątowych, a więc daje ruch postępowy. Tym sposobem rozłożyliśmy pierwszy ruch składowy na ruch postępowy i na ruch obrotowy około osi z_1 , przechodzącej przez O . Uczyńmy toż samo z pozostałymi ruchami składowymi. Otrzymamy n ruchów postępowych oraz n ruchów obrotowych około osi $z_1, z_2 \dots z_n$.

Dodając te wszystkie ruchy postępowe, a następnie wszystkie ruchy obrotowe (możemy to uczynić, gdyż wszystkie osi przechodzą przez środek redukcji), otrzymamy jeden ruch postępowy i jeden ruch obrotowy. Ostatecznie wypadnie ruch śrubowy, którego oś i obydwie szybkości umiemy wyznaczyć.

Prz. Dowieść, że ruch układu sztywnego można rozłożyć na dwa ruchy obrotowe, których osiami będą dwie dowolnie obrane proste sprzężone.

Obierzmy na jednej z tych prostych (oznaczymy ją literą a) dowolny punkt A , który posiada, dajmy na to, szybkość v . Rozkładamy następnie ruch układu na ruch postępowy o szybkości v i na ruch obrotowy; szybkość kątową tego ostatniego oznaczmy przez ω . Rozkładamy wreszcie szybkość ω na dwie składowe ω_1 i ω_2 , z których pierwsza leży na a , a druga jest prostopadła do szybkości postępowej v . Szybkości v i ω_2 są równoważne szybkości kątowej ω_2 na jakiejś prostej b .

Rozłożyliśmy więc ruch układu na dwa ruchy obrotowe; osią jednego z nich jest jedna z obranych prostych, trzeba tylko jeszcze okazać, że oś drugiego jest z nią sprzężona. W tym celu poprowadźmy przez prostą a dowolną płaszczyznę. Przetnie ona prostą b w punkcie B , którego szybkość jest oczywiście prostopadła do owej płaszczyzny, a więc jest to jej punkt zerowy. Z tego wynika, że prosta b jest sprzężona z a .