

cej przez C względem płaszczyzny, przechodzącej przez C i z . Odp.

$$\frac{5[g - \Omega^2(r \sin \alpha - a \cos \alpha) \tan \alpha]}{2a\Omega}$$

Prz. 6. Kulę jednorodną o promieniu a oparto na chropowatym drucie, wygiętym w formę koła o promieniu c i umocowanym w płaszczyźnie poziomej; następnie nadano kuli impuls w kierunku poziomym, skutkiem czego obiega ona drut ze stałą szybkością kątową, i średnica, przechodząca przez punkt zetknięcia, tworzy z pionem

kąt α . Wyznaczyć tę szybkość kątową. Odp. $\frac{5g \tan \alpha}{7c - 5a \sin \alpha}$

Prz. 7. Żyroskóp, złożony z ciężkiego krążka, osadzonego na lekkiej osi, jest zawieszony na nici o długości a ; nić ta jest pryczepiona do osi w odległości h od środka ciężkości żyroskopu, a ramię bezwładności krążka względem osi jest równe k . Krążek wiruje z szybkością kątową ω około osi, a oś pozostaje poziomą. Wyznaczyć kąt, który nić tworzy z pionem. Odp. Szukany kąt α czyni zadość równaniu $k^2 \omega^2 \tan \alpha = (a \sin \alpha \pm h) g h^2$.

133. Trwałość precesyi regularnej. Przypuśćmy, że w urządzeniu, wyobrażonem na fig. 70, ścięgno CD wydłuża się lub skraca, przyczem łożysko D powinno tak przesuwac się na pionie OD , aby ścięgno pozostawało prostopadłem do osi OC . Podczas tego wydłużania lub skracania oczywiście na koniec C osi ciała musiała działać prócz siły R jakaś nowa siła P w kierunku DC lub CD . Gdy już pożądana zmiana długości nastąpiła, usuńmy tę siłę P . Naturalnie zmienił się kąt ϑ , a zatem zmieniła się i siła R . Zbadamy, czy R ze wzrostem kąta ϑ wzrasta, czy maleje.

Naprzód zobaczymy, jak zmieniają się szybkości kątowe ω i Ω , gdy ϑ zmienia się w opisany sposób. Moment siły P względem osi OC jest zerem, a zatem dowiedzimy z łatwością przy pomocy trzeciego równania Eulera, jak w paragrafie poprzedzającym, że szybkość ω pozostaje stałą.

Siła P działała wciąż w płaszczyźnie OCD , podobnie jak siły Q i R , a zatem moment jej względem O był poziomy, i wektor H względem O otrzymywał wciąż przyrosty poziome. Z tego wynika, że koniec tego wektora pozostaje stale w niezmienniej płaszczyźnie poziomej, a więc rzut jego H' na pion OD jest wielkością stałą.

Ponieważ składowe wektora H w kierunkach OC i OA wynoszą odpowiednio $C\omega$ i $A\Omega \sin \vartheta$, otrzymamy przeto

$$C\omega \cos \vartheta + A\Omega \sin^2 \vartheta = H' \quad (1)$$

Równanie to wyraża związek pomiędzy ϑ i Ω . Różniczkując je, otrzymamy

$$\frac{d\Omega}{d\vartheta} = \frac{C\omega - 2A\Omega \cos \vartheta}{A \sin \vartheta} \quad (2).$$

Z drugiej strony z (1) w par. poprzedzającym mamy

$$Rb = (Qa - C\Omega\omega + A\Omega^2 \cos \vartheta) \sin \vartheta \quad (3)$$

a stąd

$$b \frac{dR}{d\vartheta} = -(C\omega - 2A\Omega \cos \vartheta) \sin \vartheta \frac{d\Omega}{d\vartheta} - A\Omega^2 \sin^2 \vartheta + \\ + (Qa - C\Omega\omega + A\Omega^2 \cos \vartheta) \sin \vartheta.$$

Gdy wprowadzimy $\frac{d\Omega}{d\vartheta}$ z (2) i uwzględnimy (3), to wypadnie

$$\frac{dR}{d\vartheta} = -\frac{(2A\Omega \cos \vartheta - C\omega)^2}{Ab} - \frac{A\Omega^2 \sin^2 \vartheta}{b} + \frac{R}{\tan \vartheta}.$$

Gdy zachodzi precesja regularna, to $R=0$ i

$$\frac{dR}{d\vartheta} = -\frac{(2A\Omega \cos \vartheta - C\omega)^2}{Ab} - \frac{A\Omega^2 \sin^2 \vartheta}{b}.$$

Widzimy, że przy tej wartości kąta ϑ , przy której ciało posiada ruch precesji regularnej, $\frac{dR}{d\vartheta}$ jest ujemne; znaczy to, że ze wzrostem kąta ϑ R się zmniejsza i odwrotnie.

Z rozważań powyższych wynika wniosek następujący. Przypuśćmy, że ścięga niema, i że ciało posiada ruch precesji regularnej. Wymierzmy w koniec osi C lekkie uderzenie skierowane do D . Skutkiem tego oś zbliży się cokolwiek do pionu, t. j. kąt ϑ się zmniejszy. Poprzedniej wartości kąta ϑ odpowiadała wartość zero reakcji R , nowej wartości odpowiada wartość większa, t. j. dodatnia. Znaczy to, że pragnąc utrwalić nowe położenie osi w płaszczyźnie OCD , musielibyśmy przyłożyć do C siłę skierowaną do D . Jeżeli pozostawimy ciało samemu sobie, to oś podąży do położenia pierwotnego, przy którym odbywała się precesja regularna.

Gdyby uderzenie nastąpiło w kierunku DC , to siła R przybrałaby wartość ujemną, a więc byłaby zwrócona od D do C , a oś pozostawiona samej sobie, podążyłaby do pionu OD , czyli znowu do położenia pierwotnego.

Ze względu na takie właściwości precesyi regularnej mówi się zwykle, że jest to ruch trwały.

134. Precesya pseudoregularna. Ustawmy w urządzeniu, wyobrażonem na fig. 70, ścięgno CD , ustawmy oś ciała OC pod kątem ϑ_0 do pionu, nadajmy następnie ciału szybkość kątową ω około OC , skierowaną od O do C , jak wskazuje strzałka, i pozostawmy ciało samemu sobie. Pragniemy zbadać ruch dalszy.

Oprócz reakcyi w O na ciało działa jedynie siła ciężenia Q . Z trzeciego równania Eulera wynika, jak wiemy, że rzut całkowitej szybkości kątowej na OC pozostanie i nadal równym ω .

Moment ilości ruchu względem O może przybierać jedynie przyrosty poziome, a zatem rzut jego H' na pion OD będzie stale równy $C\omega \cos \vartheta_0$.

W pierwszej chwili wektor H posiada kierunek OC . Pod działaniem siły Q oś ta zacznie odchyłać się od pionu, i gdyby nie powstał jeszcze jakiś ruch inny, toby rzut H' się zmniejszał. H' zachowa wartość stałą tylko w takim razie, jeżeli jednocześnie z opadaniem OC powstanie na OA odpowiednia składowa wektora H , czyli jeżeli ciało zacznie się obracać około pionu OD z odpowiednią szybkością kątową Ω ; szybkość ta będzie skierowana od O do D , jak wskazuje strzałka.

Gdy oś OC odchyli się od pionu o kąt ϑ , to rzut H' będzie równy $C\omega \cos \vartheta + A\Omega \sin^2 \vartheta$, a zatem

$$C\omega \cos \vartheta + A\Omega \sin^2 \vartheta = C\omega \cos \vartheta_0 \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Wówczas szybkość kątowa ciała będzie miała składowe ω , $\Omega \sin \vartheta$ i $\frac{d\vartheta}{dt}$ na prostych OC , OA oraz na prostopadłej OB do płaszczyzny OCD , a więc siła żywa ciała wyniesie

$$\frac{1}{2} \left[C\omega^2 + A\Omega^2 \sin^2 \vartheta + A \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \right],$$

gdy w pierwszej chwili wynosiła $\frac{C\omega^2}{2}$. Przyrost

$$\frac{1}{2} \left[A\Omega^2 \sin^2 \vartheta + A \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \right]$$

jest równy pracy $Qa(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta)$ siły Q , zatem

$$A\Omega^2 \sin^2 \vartheta + A \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 = 2Qa(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) \quad (2).$$

Równania (1) i (2) określają ruch ciała; aby wytworzyć sobie wyobrażenie o tym ruchu, należy zbadać, jak zmieniają się szybkości kątowne Ω i $\frac{d\vartheta}{dt}$, gdy wzrasta kąt ϑ .

Na fig. 72 O oznacza łożysko dolne osi ciała, a odcinek OM ma wyobrażać stały rzut wektora H na pion, czyli $C\omega \cos \vartheta_0$.

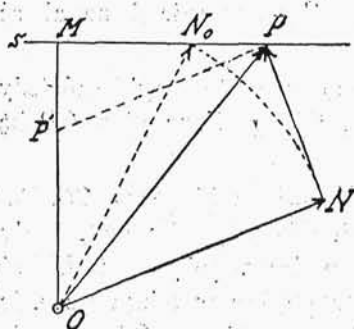


Fig. 72.

Tym sposobem prosta s jest śladem owej płaszczyzny niezmienną, w której pozostaje koniec wektora H ; cały rysunek jest wykonany w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez oś ciała. Przypuśćmy, że oś ta leżała w pierwszej chwili na prostej ON_0 , tworząc z pionem kąt ϑ_0 . W takim razie odcinek ON_0 jest równy $C\omega$ i wyobraża całkowity wektor H w owej chwili co do wielkości i kierunku.

Po pewnym czasie oś odchyliła się o kąt ϑ od pionu i znalazła się na prostej ON . Rzut wektora H na oś pozostał równym $C\omega$, a więc wyobraża go odcinek $ON = ON_0$. Poprowadziwszy przez N prostą prostopadłą do ON , otrzymamy w przecięciu z s punkt P . Odcinek OP wyobraża rzut wektora H na płaszczyznę rysunku, a odcinek NP rzut tego wektora na kierunek prostopadły do ON w tejże płaszczyźnie (OA na fig. 70). Wiemy, że $NP = A\Omega \sin \vartheta$.

Warto zwrócić uwagę, że wektor H nie leży obecnie w płaszczyźnie rysunku, lecz posiada prócz ON i NP jeszcze jedną składową, prostopadłą do tej płaszczyzny i równą $A \frac{d\vartheta}{dt}$.

Poprowadźmy przez P równoległą do ON ; w przecięciu z pionem OM otrzymamy punkt P' . Znajdziemy łatwo, że $OP' = \frac{NP}{\sin \vartheta} = A\Omega$, a więc odcinek OP' jest proporcjonalny do Ω .

Jest rzeczą oczywistą, że punkt P' odsuwa się od O w miarę tego, jak oś ON odchyła się od pionu, a więc szybkość kąto-
wa Ω ze wzrostem kąta ϑ wzrasta *).

Aby zdać sobie sprawę z tego, jak zmienia się szybkość $\frac{d\vartheta}{dt}$, wyznaczmy naprzód skrajne położenia osi OC (fig. 70), czyli te wartości kąta ϑ , przy których oś przestaje odchyłać się od pionu i zaczyna się zbliżać lub odwrotnie. Oczywiście w takim położeniu osi $\frac{d\vartheta}{dt}=0$, a zatem z (2) wypada, że wówczas

$$A\Omega^2 \sin^2 \vartheta = 2Qa (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) \quad (3).$$

Rugując stąd i z (1) szybkość Ω , otrzymamy

$$(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) [C^2 \omega^2 (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) - 2A Q a \sin^2 \vartheta] = 0.$$

Z tego równania wynika przedewszystkiem, że $\frac{d\vartheta}{dt}=0$, gdy $\vartheta = \vartheta_0$, t. j. w położeniu początkowym i wogóle wówczas, gdy oś tworzy z pionem kąt ϑ_0 . Aby otrzymać inne położenia skrajne, należy założyć, że drugi czynnik lewej strony jest zerem. Celem skrócenia rachunku założymy, że $\cos \vartheta = u$, a więc $\sin^2 \vartheta = 1 - u^2$, i że $\frac{C^2 \omega^2}{2A Q a} = 2n$. Wypadnie wówczas

$$u^2 - 2nu + 2n \cos \vartheta_0 - 1 = 0 \quad (4).$$

Wyróżnik tego równania kwadratowego wynosi $n^2 - 2n \cos \vartheta_0 + 1$. Najmniejsza wartość jego wypada w tym razie, gdy $\cos \vartheta_0 = 1$, czyli gdy początkowo oś ciała miała położenie pionowe, lecz i wówczas jest on równy $(n-1)^2$, czyli dodatni. Wnioskujemy stąd, że obydwa pierwiastki równania (4) są rzeczywiste.

Dajmy niewiadomej u wartość -1 , wówczas lewa strona równania przybierze wartość $2n(1 + \cos \vartheta_0)$ oczywiście dodatnią. Następnie dajmy u wartość $\cos \vartheta_0$; po lewej stronie wypadnie $\cos^2 \vartheta_0 - 1$, co jest znowu ujemne. Tak więc, gdy u wzrasta od -1 do $\cos \vartheta_0$, to lewa strona zmienia znak, a więc równanie

*) Można do tego samego dojść łatwo przy pomocy równania (1), wyznaczając $\frac{d\Omega}{d\vartheta}$. Wolałem wyjaśnić rzecz przy pomocy rysunku, gdyż przy tej sposobności czytelnik poznaje, jak zmienia się wektor H .

posiada pierwiastek, zawarty pomiędzy -1 i $\cos \vartheta_0$; innemi słowy szybkość kątowna $\frac{d\vartheta}{dt}$ staje się zerem dla pewnej wartości ϑ , zawartej pomiędzy π i ϑ_0 . Oznaczmy tę wartość przez ϑ_1 .

Przypuśćmy teraz, że u wzrasta dalej, poczynając od $\cos \vartheta_0$. Gdy u przybierze wartość $+1$, to lewa strona stanie się równą $-2n(1 - \cos \vartheta_0)$; jest to ujemne, podobnie jak dla $u = \cos \vartheta_0$, a zatem pomiędzy $\cos \vartheta_0$ i $+1$ niema pierwiastka. Gdy u wzrasta w dalszym ciągu i przekroczy $2n$, to suma dwóch pierwszych wyrazów $u^2 - 2nu$, czyli $u(u - 2n)$, staje się dodatnią, i następnie z dalszym wzrostem u wzrasta nieograniczenie; musi więc ostatecznie cała lewa strona stać się dodatnią. Z tego wynika, że równanie posiada pierwiastek większy od 1 ; nie wchodzi on w rachubę, bo u , czyli $\cos \vartheta$, nie może być większe od 1 .

Tak więc szybkość kątowna $\frac{d\vartheta}{dt}$ staje się zerem dla dwóch położeń osi ciała, a mianowicie gdy ta oś tworzy z pionem kąty ϑ_0 i ϑ_1 . Widzieliśmy, że $\cos \vartheta_1$ zawiera się pomiędzy -1 i $\cos \vartheta_0$, jest więc mniejszy od $\cos \vartheta_0$, a zatem kąt ϑ_1 jest większy od ϑ_0 .

Możemy teraz zdać sobie sprawę z ruchu ciała. W tym celu wyobraźmy sobie kulę, zatoczoną z punktu O promieniem $OC = b$, obierzmy za biegun jej punkt najwyższy i przeprowadźmy na powierzchni dwa równoleżniki, których średnice widać z O odpowiednio pod kątami $2\vartheta_0$ i $2\vartheta_1$; pierwszy z nich leży oczywiście wyżej od drugiego. Otóż ruch punktu C odbywa się na powierzchni kuli pomiędzy tymi równoleżnikami granicznymi. W każdej chwili szybkość punktu C daje się rozłożyć na dwie składowe; jedna v_p w kierunku południka, lub raczej w kierunku stycznej do tegoż, jest równa $b \frac{d\vartheta}{dt}$, druga v_r w kierunku równoleżnika wynosi $b\Omega \sin \vartheta$.

Punkt C wyrusza z pewnego położenia na górnym równoleżniku granicznym w kierunku południka. Szybkość kątowna Ω , a zatem i składowa v_r szybkości liniowej punktu C , powstają dopiero skutkiem odchylenia się od pionu. W dalszym ciągu wzrastają obydwie składowe v_p i v_r , a więc punkt C odbiega

coraz prędzej i coraz dalej od początkowego południka, jak również od górnego równoleżnika granicznego.

Podczas tego ruchu ku dolnemu równoleżnikowi granicznemu składowa v_r wzrasta wciąż. Widać to od razu z fig. 72, na której odcinek NP , równy $A\Omega \sin \vartheta$, jest proporcjonalny do tej składowej v_r . Natomiast składowa v_p wraz z szybkością kątową $\frac{d\vartheta}{dt}$ wzrasta tylko do pewnego maksimum, następnie maleje i staje się zerem, gdy punkt C doszedł do dolnego równoleżnika granicznego. Wówczas punkt C posiada tylko składową v_r szybkości, a więc biegnie w kierunku równoleżnika.

Z rozważań tych wynika, że tor punktu C przecina górny równoleżnik graniczny pod kątem prostym i jest styczny do równoleżnika dolnego.

Oznaczmy przez α kąt, który oś ciała tworzy z pionem w chwili, gdy v_p lub $\frac{d\vartheta}{dt}$ osiąga maksimum. Łatwo się domyśleć, że kąt ten odpowiada precesyi regularnej; znaczy to, że przy ówczesnej wartości Ω zachodziłaby precesya regularna, gdyby nie istniała szybkość $\frac{d\vartheta}{dt}$. Można się o tem przekonać w sposób następujący.

Różniczkując równanie (2) względem t i skracając przez $2 \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dt}$, otrzymamy

$$A\Omega \frac{d\Omega}{d\vartheta} \sin \vartheta + A\Omega \cos \vartheta + A \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = Qa,$$

z (1) zaś wypada

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{C\omega - 2A\Omega \cos \vartheta}{A \sin \vartheta},$$

co już mieliśmy zresztą w par. 133. Wprowadzając to do równania poprzedzającego, znajdziemy

$$C\Omega\omega - A\Omega^2 \cos \vartheta + A \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = Qa. \quad (5).$$

Do tego równania moglibyśmy z łatwością dojść bezpośrednio. W tym celu należy tylko napisać, że przyrost elementarny wektora H jest równy momentowi popędu elementarnego siły Q względem punktu O .

Dajmy w (5) zmiennej ϑ wartość α ; wówczas $\frac{d^2\vartheta}{dt^2} =$
gdyż przy tej wartości $\frac{d\vartheta}{dt}$ osiąga maksimum, i wypadnie

$$\Omega(C\omega - A\Omega \cos \alpha) = Qa.$$

Taki właśnie warunek powinien być spełniony, aby zachodziła precesja regularna; przekonamy się o tem, gdy porównamy to równanie z (2) w par. 132.

Gdy punkt C znajdzie się na dolnym równoleżniku granicznym, to, jak widzieliśmy, porusza się wzdłuż tego równoleżnika. Ruch taki jednak nie może trwać dłużej, bo warunki precesji regularnej nie są tu spełnione. Punkt C przeto zaczyna podnosić się w górę, i ruch przechodzi przez wszystkie fazy, przez które przechodził poprzednio, w porządku odwrotnym. A więc v_r wciąż się zmniejsza, natomiast v_p wzrasta, dopóki C nie dojdzie do równoleżnika precesji regularnej, a potem maleje i staje się zerem na górnym równoleżniku granicznym.

Fig. 73 wyobraża tor punktu C , widziany z góry. Taki ruch pp. Klein i Sommerfeld nazwali *precesją pseudoregularną*.

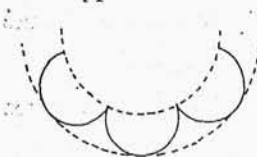


Fig. 73.

Mówimy, że wywołuje ją siła Q . Jeżeli równoleżniki graniczne są zbliżone do siebie, to oko nie dostrzega prawie drobnych wahań osi w kierunku pionowym, i wygląda tak, jak gdyby siła Q wywoływała ruch w kierunku do niej prostym.

Jeżeli oś ciała pozostaje podczas precesji prawie poziomą, to mówi się, że wektor ω goni moment siły Q . Słuszność tej reguły, która bywa nieraz użyteczna, można łatwo sprawdzić przy pomocy fig. 70.

Prz. 1. Ciało pozostaje w precesji pseudoregularnej stosownie do opisu, podanego w tym paragrafie. Wyznaczyć maksimum szybkości kątowej Ω . Odp. $\frac{2Qa}{C\omega}$.

Prz. 2. Obręcz toczyła się wprost od nas na chropowatej płaszczyźnie poziomej i z jakiejś przyczyny pochyliła się cokolwiek na prawo. W którą stronę zboczy ona z linii prostej?

Prz. 3. Względem lotnika propeller aeroplanu, umieszczony na przedzie, obraca się w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówki zegara. Jaki ruch wykona aeroplan w płaszczyźnie pionowej, gdy lotnik, pragnąc skrócić na lewo, zwróci ster w stosowną stronę?

Prz. 4. Oś OC bryły obrotu jest tak osadzona w punkcie O , że mogłaby się około niego obracać w każdym kierunku. Na końcu C oś ta posiada ucho, przez które przechodzi gładki pałak kołowy, umocowany w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez O (fig. 74). Tym sposobem oś OC może się poruszać tylko w tej płaszczyźnie. Ciężar ciała $= Q$, jego momenty bezwładności względem osi obrotu i względem prostopadłej do niej przez O są równe C i A , odległości środka ciężkości S i ucha C od O wynoszą a i b (temu jest także równy promień pałaka). Ustawiamy oś OC pod kątem ϑ_0 do pionu, nadajemy ciału szybkość kątową ω około tejże i pozostawiamy je samemu sobie. Jaki będzie ruch dalszy, i jaką reakcję pałak będzie wywierał na ucho. Odp. Gdy oś utworzy z pionem kąt ϑ , to reakcja wyniesie

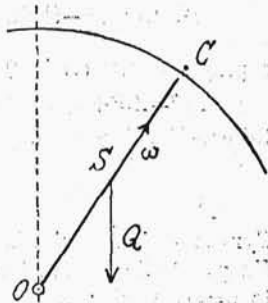


Fig. 74

$$\frac{C\omega}{b} \sqrt{\frac{2Qa(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta)}{A}}.$$

Prz. 5. Puszczono bąk na zupełnie gładkiej płaszczyźnie poziomej. W pierwszej chwili oś była nieruchoma i pochylona. Okazać, że tor ostrza leży pomiędzy dwoma okręgami współśrodkowymi, przecinając wewnętrzny pod kątem prostym i stykając się z zewnętrznym.

Prz. 6. Dwie jednakowe gładkie sztaby AO i OB każda o długości $2a$ są połączone luźno z nieruchomym punktem O , a trzecia taka sama sztaba CD może przesuwac się po nich przy pomocy pierścieni, umocowanych w końcach C , D . Ustawiamy wszystkie sztaby na prostej poziomej tak, aby pierścienie przypadały w środkach sztab AO i OB , a następnie nadajemy temu układowi szybkość kątową ω około pionu. Jaka powinna być ta szybkość, aby sztaba CD nie zsunęła się z dwóch pozostałych. Odp. Powinno być $\omega_0^2 > \frac{2g}{a\sqrt{3}}$.

Kąt ϑ , który sztaby AO i OB tworzą z pionem, zmienia się w pewnych granicach, i znajdziemy, że jego wartość najmniejsza czyni zadość równaniu $6a\omega_0^2 = \frac{g(1+2\sin \vartheta)(1+8\sin^2 \vartheta)}{\sin 2\vartheta}$. Aby sztaba CD

się nie zsunęła, ten graniczny kąt ϑ powinien być większy od 30° , a dla tej wartości ϑ prawa strona powyższego równania jest funkcją wzrastającą. Z tego wynika warunek, podany w odpowiedzi.

Prz. 7. Ciało pozostaje w precesji pseudoregularnej, jak w tekście paragrafu niniejszego. Dowieść, że koniec szybkości kątowej (wypadkowej) zatacza w ciele krzywą płaską, a w przestrzeni nieruchomej krzywą sferyczną, t. j. położoną na kuli, której środek znajduje się na pionie OD (fig. 70). Moznaby te krzywe uważać za podstawy stożków osi chwilowych ruchomego i stałego.

Pierwsza część twierdzenia wynika wprost stąd, że ω jest wielkością stałą. Aby dowieść część drugą obieramy na pionie OD jakikolwiek punkt P w odległości p od O , mierzonej w górę; wyznaczmy odległość r końca szybkości kątovej od tego punktu P . Wypadnie

$$r^2 = (\omega \sin \vartheta - \Omega \sin \vartheta \cos \vartheta)^2 + \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + (\omega \cos \vartheta + \Omega \sin^2 \vartheta - p)^2,$$

a przy pomocy (1) i (2) przekształcimy to z łatwością na

$$Ar^2 = A\omega^2 + 2Qa \cos \vartheta_0 - 2pC\omega \cos \vartheta_0 + Ap^2 + 2[p\omega(C-A) - Qa] \cos \vartheta.$$

Odległość r jest stała, jeżeli $p\omega(C-A) - Qa = 0$, czyli jeżeli

$$p = \frac{Qa}{(C-A)\omega}.$$

Tym sposobem twierdzenie zostało dowiedzione, i wzór ostatni określa położenie środka kuli. Jeżeli $C=A$, czyli jeżeli bąk jest „kulisty“, to $p=\infty$, a więc krzywa jest płaska. Bezpośrednio wynika to z tej okoliczności, że w tym przypadku szczególnym szybkość kątowa leży na linii wektora H i wynosi $\frac{H}{A}$, a zatem rzut jej na pion jest stały.

Prz. 8. Mamy dwa bąki, dla których wielkości Q , a i A są jednakowe, zaś momenty bezwładności względem osi symetrii są odpowiednio równe C i C_1 . Jak należy puścić te bąki, aby ich końce poruszały się zupełnie jednakowo. Odp. Należy ustawić osi pod jednakowymi kątami do pionu i nadać bąkom takie szybkości kątove ω i ω_1 , aby było $C\omega = C_1\omega_1$.

135. Ruch kuli na płaszczyźnie poziomej. Rozważymy tylko pewien przypadek szczególny; założymy mianowicie, że w chwili początkowej kula otrzymała ruch postępowy w dowolnym kierunku oraz ruch obrotowy około dowolnej średnicy poziomej, a dalej działa na nią jedynie siła tarcia. Dajmy na to, że kula posiada masę jednostkową, i że współczynnik tarcia jest równy f . Na fig. 75 widzimy tę kulę w rzucie poziomym. Jej środek O ma w danej chwili szybkość $u = OB$; temu samemu jest równy wektor G . Przypuśćmy, że moment ilości ruchu względem środka jest poziomy i równy H . Szybkość kątowa ω posiada ten sam kierunek i wynosi $\frac{H}{k^2}$, a ponieważ $k^2 = \frac{2a^2}{5}$, przeto $\omega = \frac{5H}{2a^2}$; a oznacza tu promień kuli.

Mając dane powyższe można wyznaczyć szybkość każdego punktu kuli. Szczególnie ważną rolę odgrywa w zjawisku badaniem punkt najniższy A , w którym kula styka się z płaszczyzną poziomą. Na figurze przypada on w tym samym

muje w każdej chwili położenie najniższe, posiada wciąż jeden i ten sam kierunek, a zmienia się jedynie co do wielkości, a mianowicie co dt sekund zmniejsza się o $\frac{7fgdt}{2}$; innemi słowy koniec tej szybkości D zbliża się do A z szybkością $\frac{7fg}{2}$. Jeżeli początkowa szybkość najniższego punktu była równa v_0 , to w czasie $\frac{2v_0}{7fg}$ D dojdzie do A , t. j. szybkość najniższego punktu stanie się zerem, i rozpocznie się nowy, drugi, okres zjawiska.

Siła tarcia jest zawsze odwrotna od szybkości najniższego punktu, a więc w ciągu pierwszego okresu posiada kierunek stały, i środek kuli porusza się tak, jak punkt materialny o masie jednostkowej, na który działa siła fg stała co do wielkości i kierunku, czyli jak poruszałby się pocisk w próżni, gdyby przyspieszenie ziemskie było f razy większe. Z tego wynika, że torem środka jest parabola o osi równoległej do v_0 .

Według doświadczeń Coriolisa współczynnik tarcia pomiędzy bilardem i kulą bilardową wynosi 0,2, jeżeli zatem początkowa szybkość najniższego punktu v_0 była równa 0,5 m, to pierwszy okres trwa wszystkiego $\frac{2v_0}{7fg} = 0,07$ sekundy.

W chwili, gdy szybkość najniższego punktu znika, rozpoczyna się proste toczenie się kuli po płaszczyźnie. Odtąd ruch środka jest prostoliniowy i jednostajny. Można z łatwością wyznaczyć kierunek szybkości ostatecznej środka.

Obierzmy na średnicy pionowej kuli jakikolwiek punkt P w odległości x od O , przyczem kierunek na dół będziemy uważali za dodatni. Szybkość punktu P *) posiada dwie składowe; jedna jest równa i równoległa do u , druga zaś, równa $x\omega$, ma kierunek OC . W ciągu dt sekund obydwie te składowe otrzymają przyrosty w kierunku fg ; przyrost pierwszej wynosi, jak wiemy $fgdt$, a przyrost drugiej musi być w tym samym stosunku do odpowiedniego przyrostu szybkości punktu A , czyli do $\frac{5fgdt}{2}$,

*) Jest tu znowu mowa nie o jednym i tym samym punkcie kuli, lecz zawsze o tym punkcie, który w danej chwili zajmuje położenie P .

jak $x\omega$ do $a\omega = OC$, a zatem jest równy $\frac{5fgxdt}{2a}$. Szybkość wypadkowa punktu P otrzyma w kierunku siły fg przyrost $fg\left(1 + \frac{5x}{2a}\right)dt$.

Jeżeli $1 + \frac{5x}{2a} = 0$, t. j. jeżeli $x = -\frac{2a}{5}$, to ów przyrost jest zerem; innemi słowy ten punkt kuli, który w jakiegokolwiek chwili leży na średnicy pionowej o $\frac{2a}{5}$ wyżej od środka, posiada wówczas szybkość taką samą, jak punkt, który zajmował to położenie w chwili pierwotnej.

Na figurze 75 odcinek OE równy $\frac{2}{5}$ odcinka OC wyobraża drugą składową szybkości punktu P , a OF , ową stałą szybkość wypadkową.

W ciągu drugiego okresu średnica pionowa posiada ruch obrotowy około punktu najniższego, a więc oczywiście ostateczna szybkość środka będzie miała kierunek OF , a co do wielkości wyniesie $\frac{5}{7}$ owej szybkości stałej punktu P .

Prz. 1. Zupełnie chropowata płaszczyzna pozioma obraca się ze stałą szybkością kątową Ω około osi pionowej. W spodku tej osi położono kulę i nadano jej impuls poziomy, skutkiem czego środek otrzymał szybkość v_0 . Wyznaczyć tor bezwzględny środka. Odp. Koło o promieniu $\frac{7v_0}{2\Omega}$.

Niechaj początkowe położenie środka będzie początkiem prostokątnego układu współrzędnych; osi x, y wybieramy w płaszczyźnie poziomej, a mianowicie pierwszą w kierunku szybkości v_0 . Skutkiem początkowego pchnięcia, czy uderzenia, kula otrzymuje ilość ruchu $G_0 = Mv_0$ w kierunku osi x oraz moment ilości ruchu względem środka $H_0 = -\frac{Mk^2v_0}{a}$ w kierunku osi y ; M oznacza w tem masę kuli, a promień i k ramię bezwładności względem średnicy. Dalsze przyrosty wektorów G i H wytwarza pozioma siła tarcia, a zatem przyrosty te są poziome, i obydwa wektory pozostają stale w płaszczyźnie xy . Z tego wynika, że całkowita szybkość kątowa jest zawsze pozioma.

Siła tarcia F wytworzy w czasie dt przyrost Fdt wektora G oraz przyrost $Fadt$ wektora H . Przyrosty te są do siebie prostopadłe, a stosunek pomiędzy ich wielkościami wynosi $\frac{1}{a}$, a więc i całkowity przyrost, jaki otrzyma wektor G w czasie t , jest prostopadły do cał-

kowego przyrostu wektora H i pozostaje doń w tym samym stosunku.

Opierając się na wynikach powyższych, można zadanie rozwiązać w sposób bardzo prosty.

W chwili t środek kuli zajmie położenie (xy) . Składowe szybkości liniowej (bezwzględnej) środka w kierunkach osi oznaczamy przez v_x, v_y , a składowe szybkości kątovej przez ω_x, ω_y . Ponieważ poślizg jest wyłączony, przeto

$$v_x + a\omega_y = -\Omega y, \quad v_y - a\omega_x = \Omega x.$$

Całkowity przyrost wektora G w kierunku osi x , pomnożony przez a , musi być taki sam, jak całkowity przyrost wektora H w kierunku osi y , i odwrotnie. Stąd wynikają dwa inne równania

$$a(Mv_x - G_0) = Mk^2\omega_y - H_0, \quad aMv_y = -Mk^2\omega_x.$$

Rugując z tych czterech równań ω_x, ω_y i całkując, otrzymamy równanie toru

$$\Omega(x^2 + y^2) - 7v_0y = 0.$$

Łatwo okazać, że szybkość środka jest stale równa v_0 .

Prz. 2. Kulę położono na zupełnie chropowatej płaszczyźnie poziomej, a następnie nadano płaszczyźnie ruch obrotowy około osi pionowej z ze stałą szybkością kątową Ω . Początkowa odległość środka kuli od osi z jest równa r . Wyznaczyć tor bezwzględny środka kuli i jego szybkość. Odp. Torem jest koło o promieniu r , a szybkość wynosi $\frac{2r\Omega}{7}$.

Rozumując podobnie, jak w przykładzie poprzedzającym, rozwiążemy zadanie prawie bez rachunku. Znajdziemy naprzód, że wektory G i H tworzą wciąż kąt prosty, a zatem szybkość środka jest równoległa do szybkości najniższego punktu.

