

## X. RUCH PŁASKI CIAŁA SZTYWNEGO.

**123. Równania zasadnicze.** Przypuśćmy, że ruch ciała sztywnego jest wciąż równoległy do płaszczyzny **F**. Będziemy uważali, że płaszczyzna ta przechodzi przez środek ciężkości ciała, i że w niej działają na ciało siły  $P_1, P_2 \dots$ .

Ruch ciała rozłożymy na dwa ruchy składowe, postępowy, odbywający się wciąż z szybkością środka ciężkości i obrotowy około tego środka. Aby wyznaczyć ruch postępowy, czyli ruch środka ciężkości, obieramy w płaszczyźnie **F** prostokątny układ współrzędnych; współrzędne środka ciężkości oznaczymy przez  $x_0, y_0$ , a masę ciała przez  $M$ . W myśl zasady ruchu środka ciężkości otrzymamy

$$M \frac{d^2 x_0}{dt^2} = \Sigma P_x, \quad M \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \Sigma P_y \quad \dots \quad (1).$$

Aby wyznaczyć ruch obrotowy obieramy w płaszczyźnie **F** dowolny punkt  $A$  i prowadzimy przezeń prostą  $u$ , prostopadłą do tej płaszczyzny. Moment ilości ruchu ciała względem  $u$  oznaczmy przez  $H$ . W takim razie

$$dH = \Sigma N dt \quad \dots \quad (2),$$

gdzie  $N$  oznacza moment typowej siły  $P$  względem prostej  $u$ , albo względem punktu  $A$ .

Wektor  $H$  składa się z dwóch części; pierwsza jest zależna tylko od ruchu środka ciężkości, druga tylko od ruchu obrotowego około środka ciężkości. Pierwsza zależy od położenia punktu  $A$ , druga jest jednakowa dla wszystkich punktów płaszczyzny **F**. Dla tego też równanie (2) jest wogóle ważne tylko w takim razie, gdy punkt  $A$  jest nieruchomy. Gdyby punkt  $A$  był ruchomy, gdyby należał np. do ciała, którego ruch badamy, to w czasie  $dt$  pierwsza część wektora  $H$  przy-

brałyby przyrost już skutkiem samej zmiany położenia tego punktu, niezależnie od sił  $P_1, P_2 \dots$  (par. 115).

Możemy jednak obrać  $A$  w środku ciężkości, jakkolwiek punkt ten jest ruchomy. W tym razie pierwsza część wektora  $H$  jest stale równa zeru, a zatem wektor ten przybiera przyrosty tylko dzięki działaniu sił  $P_1, P_2 \dots$ .

Jeżeli  $A$  jest środkiem ciężkości,  $\omega$  oznacza szybkość kątową ciała, a  $k$  ramię bezwładności względem prostej  $u$ , to  $H = Mk^2\omega$ ,  $dH = Mk^2d\omega$ , a zatem

$$Mk^2 \frac{d\omega}{dt} = \Sigma N \dots \dots \dots (3).$$

Równania (1) i (3) określają całkowicie ruch ciała, jeżeli dane są warunki początkowe.

Jeżeli siły  $P_1, P_2 \dots$  sprowadzają się do pary, to środek ciężkości nie posiada przyspieszenia, a zatem ruch jego jest prostoliniowy i jednostajny. Jeżeli suma momentów sił  $P_1, P_2 \dots$  względem środka ciężkości jest równa zeru, to, jak widać z (3),  $d\omega = 0$ , a więc  $\omega$  jest stałe. Jeżeli wreszcie na ciało żadne siły nie działają, to środek ciężkości biegnie w linii prostej ze stałą szybkością  $v$ , a ciało obraca się około środka ciężkości ze stałą szybkością kątową  $\omega$ . Linią stałą środków chwilowych jest w tym razie prosta, a linią ruchomą koło, zatoczone ze środka ciężkości promieniem  $\frac{v}{\omega}$ .

Prz. 1. Jednorodną belkę  $AB$  ustawiono w płaszczyźnie pionowej, opierając koniec  $A$  o gładką pionową ścianę, a koniec  $B$  o gładką pochyłą. Początkowo belka była nachylona do podłogi pod kątem  $\alpha$ , jakie było to nachylenie w chwili, gdy koniec  $A$  przestał dotykać ściany?

Obieramy za osi  $x, y$  przecięcia podłogi i ściany z płaszczyzną pionową, poprowadzoną przez belkę; tworząc wektor  $H$  względem środka belki, otrzymamy

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = R_1, \quad M \frac{d^2y}{dt^2} = R_2 - Mg, \quad Mk^2 \frac{d\omega}{dt} = a(R_1 \sin \vartheta - R_2 \cos \vartheta) \dots (4),$$

gdzie  $x, y$  oznaczają współrzędne środka ciężkości,  $2a$  długość belki, a  $R_1, R_2$  reakcje ściany i podłogi. Do tego mamy

$$x = a \cos \vartheta, \quad y = a \sin \vartheta \dots \dots \dots (5),$$

gdzie  $\vartheta$  oznacza nachylenie belki w chwili  $t$ .

W chwili, gdy koniec  $A$  przestaje dotykać ściany,  $R_1 = 0$ , czyli

$\frac{d^2x}{dt^2}=0$ . Z (5) otrzymamy  $\frac{d^2x}{dt^2}=-a\left(\frac{d\omega}{dt}\sin\vartheta+\omega^2\cos\vartheta\right)$ , a zatem, w chwili, o którą chodzi,

$$\frac{d\omega}{dt}\sin\vartheta+\omega^2\cos\vartheta=0 \quad \dots \quad (6).$$

Wyznamy  $\frac{d\omega}{dt}$  i  $\omega^2$  z (4) i (5). W tym celu rugujemy  $x$ ,  $y$ ,  $R_1$  i  $R_2$ .

Wypadnie  $\frac{4a}{3}\frac{d\omega}{dt}=-g\cos\vartheta$ , a stąd

$$\frac{2a\omega^2}{3}=g(\sin\alpha-\sin\vartheta) \quad \dots \quad (7).$$

Znajdziemy ostatecznie, że belka przestaje opierać się o ścianę, gdy  $\sin\vartheta=\frac{2\sin\alpha}{3}$ .

Równanie (7) można otrzymać bezpośrednio stosując zasadę sił żywych; w takim razie znajdziemy  $\frac{d\omega}{dt}$  zapomocą różniczkowania.

**Prz. 2.** Jednorodna sztaba o masie  $m$  jest oparta końcem  $A$  o gładki stół, a środek jej znajduje się na wysokości  $h$  nad stołem. Z jaką szybkością środek dojdzie do stołu, gdy sztaba zostanie wyswobodzona? Jaką reakcję wywiera stół na koniec  $A$  w chwili, gdy środek dochodzi do stołu? Odp. Szukana szybkość  $=\sqrt{\frac{3gh}{2}}$ , szukana reakcja  $=\frac{mg}{4}$ .

**Prz. 3.** Pręt jednorodny  $AB$  leży w gładkiej kuli o promieniu  $a$ ; ze środka  $O$  widać go pod kątem prostym. Wyznaczyć szybkość, którą należy nadać środkowi  $C$  pręta, aby ten odbył całkowity obrót w płaszczyźnie pionowej, opierając się wciąż końcami o powierzchnię kuli. Odp. Kwadrat szybkości szukanej powinien być większy od  $\frac{ga}{4\sqrt{2}}(6+\sqrt{101})$ .

Jeżeli reakcje w  $A$  i  $B$  nie znikają w żadnym z położeń, to ich wypadkowa  $R$  tworzy wciąż z  $OC$  kąt mniejszy od  $45^\circ$ . Zamiast rozkładać przyspieszenia punktu  $C$  w kierunkach osi współrzędnych, lepiej będzie rozkładać je w kierunku stycznej i normalnej do toru. Dogodniej będzie również brać momenty względem środka kuli, a nie względem środka ciężkości pręta.

**Prz. 4.** Końce sztaby  $AB$  o długości  $2a$  mogą się przesuwac na dwóch gładkich nieruchomych prętach, tworzących górne boki kwadratu, którego przekątnia ma położenie pionowe. Wyznaczyć okres wahań takiego wahadła.

Torem środka  $C$  sztaby jest koło, którego środek  $O$  leży w punkcie przecięcia prętów. Przyspieszenie styczne punktu  $C$  jest równe

$a \frac{d\omega}{dt}$ , gdzie  $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$ , a zatem

$$ma \frac{d\omega}{dt} = -R_1 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \vartheta\right) - R_2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \vartheta\right) - mg \sin \vartheta.$$

Z równania momentów względem  $C$  otrzymamy

$$\frac{ma}{3} \frac{d\omega}{dt} = R_1 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \vartheta\right) + R_2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \vartheta\right),$$

a z tych dwóch równań wynika

$$\frac{4a}{3} \frac{d\omega}{dt} = -g \sin \vartheta.$$

Łatwo można okazać, że jest to równanie ruchu prostego wahadła, którego długość wynosi  $\frac{4a}{3}$ .

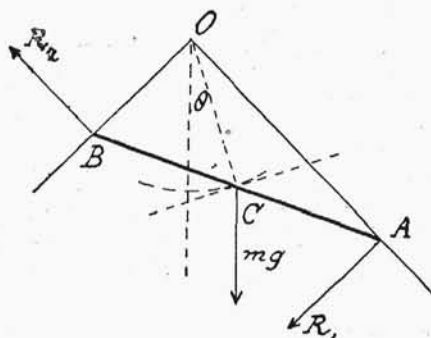


Fig. 64.

Prz. 5. Część sznura jest nawinięta na ciężki cylindryczny bęben, część pozostała ma położenie pionowe, a koniec jest przymocowany do sufitu. Bęben ma takie położenie, że płaszczyzna, poprowadzona przez środek ciężkości prostopadle do osi, przechodzi przez sznur. Jakie przyspieszenie będzie miał ten środek ciężkości, gdy pozwolimy bębnowi spadać? Odp.  $\frac{2g}{3}$ .

Prz. 6. Obręcz kołowa o masie  $m$  wisi na dwóch kołkach, położonych na jednym poziomie; widać je ze środka obręczy pod kątem  $2\alpha$ . Wyznaczyć reakcję, którą jeden z kołków wywiera na obręcz w chwili, gdy drugi zostaje usunięty, w dwóch przypadkach: (1) jeżeli kołki są gładkie, (2) jeżeli są chropowate. Odp.  $mg \cos \alpha$  i  $\frac{mg}{2} \sqrt{1+3 \cos^2 \alpha}$ .

Torem środka obręczy jest w każdym razie koło, i w pierwszej chwili punkt ten posiada tylko przyspieszenie styczne.

Prz. 7. Trzy jednakowe jednorodne sztaby  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  łączą się przegubami w  $B$  i  $C$ , a końce  $A$ ,  $D$  są przymocowane do gładkich pierścieni, nawleczonych na poziomy, nieruchomy pręt. Cały układ pozostaje w płaszczyźnie pionowej i początkowo utrzymujemy pierścienie w takim położeniu, że sztaby  $AB$  i  $CD$  tworzą z prętem kąty  $\alpha$ . Wyznaczyć reakcje pręta w pierwszej chwili po wyswobodzeniu.

Odp.  $\frac{3(2 - \cos^2 \alpha)mg}{2(2 + 3 \cos^2 \alpha)}$ .

Dostatecznem będzie rozważyć ruch sztaby  $AB$ . Torem jej środka jest koło. Wypadnie wprowadzić reakcję w przegubie  $B$ , albo jej składowe poziomą i pionową.

Prz. 8. Na nieruchomej gładkiej kuli spoczywa pierścień z cienkiego drutu. Środek jego leży na średnicy pionowej kuli, a średnicę jego widać ze środka kuli pod kątem  $2\alpha$ . Gdy nieco przesuniemy pierścień z tego położenia równowagi, to będzie on zsuwał się dalej. O jaki kąt obróci się płaszczyzna pierścienia, zanim zacznie on odstawać od powierzchni kuli? Odp. Szukany kąt  $\vartheta$  czyni zadość równaniu  $\sin \alpha \sin(\alpha - \vartheta) = 2(2 - 3 \cos \vartheta) \cos^2 \alpha$ .

Wypadkowa wszystkich reakcji przechodzi w każdej chwili przez środek kuli. Pierścień przestanie dotykać kuli od razu na całym obwodzie z wyjątkiem punktu najwyższego, i wówczas reakcja przechodzi przez ten punkt.

Prz. 9. Na gładkim stole leży gładka kula. Kładziemy na niej ostrożnie prawie na samym wierzchołku drugą kulę taką samą; okazać, że tor środka kuli górnej składa się z łuku eliptycznego oraz łuku parabolicznego, i wyznaczyć kąt, który linia środków tworzy z pionem w chwili, gdy kule przestają się stykać. Odp.  $\arccos(\sqrt{3}-1)$ .

Kąt szukany można krótko wyznaczyć w sposób następujący. Oznaczamy przez  $p$  przyspieszenie kuli dolnej, przez  $\vartheta$  kąt pomiędzy pionem i linią środków, przez  $a$  promień kuli i przez  $R$  reakcję pomiędzy kulami. Znajdziemy bezpośrednio, że  $m \left[ p \sin \vartheta + 2a \left( \frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \right] = mg \cos \vartheta - R$ . W chwili, gdy ustaje zetknięcie  $p=0$  i  $R=0$ . Drugi związek pomiędzy  $\vartheta$  i  $\frac{d\vartheta}{dt}$ , ważny aż do rozejścia się, wynika z zasady sił żywych.

Prz. 10. Dwie jednakowe kule o promieniu  $a$  leżą jedna na drugiej na podłodze, opierając się o ścianę. Powierzchnie kul, podłogi i ściany są gładkie. Skutkiem lekkiego wstrząśnienia kula dolna usunęła się cokolwiek w kierunku prostopadłym do ściany. Jaką szybkość będzie miała ta kula, gdy już ustanie zetknięcie z górną? Odp.

$\frac{4}{3} \sqrt{\frac{ag}{3}}$ .

Prz. 11. Dwie jednakowe sztaby  $AB$ ,  $BC$  są połączone przegubem  $B$  i mogą się poruszać w płaszczyźnie pionowej. Punkt  $A$  jest

nieruchomy, a koniec  $C$  trzymamy na poziomie punktu  $A$  w takim położeniu, że kąt  $ABC$  jest prosty. Każda sztaba waży  $Q$ . Wyznaczyć reakcję, która wystąpi w przegubie  $B$  w chwili wyswobodzenia końca  $C$ . Odp.  $\frac{Q}{8}\sqrt{\frac{5}{2}}$ .

Prz. 12. Kula, ważąca  $Q$ , leży na płaszczyźnie poziomej; jest ona rozcięta płaszczyznami, przechodzącymi przez średnicę pionową, na nieskończenie wielką liczbę działek, które utrzymuje w całości stosowna opaska. O ile zmniejszy się od razu reakcja płaszczyzny, gdy przetniemy opaskę? Odp. Reakcja zmniejszy się o  $\frac{45\pi^2}{2048}Q$ .

W działce lub w klinie kulistym odległość środka ciężkości od krawędzi wynosi  $\frac{3\pi a \sin \alpha}{16\alpha}$ , gdzie  $a$  oznacza promień kuli, i  $2\alpha$  kąt klina

Prz. 13. Kulę jednorodną położono prawie na samym wierzchołku innej kuli nieruchomej i zupełnie chropowatej. Jaki kąt będzie tworzyła z pionem linia środków w chwili, gdy kule przestaną się stykać?

Oznaczmy promienie kul ruchomej i stałej przez  $a$  i  $b$ , szybkość kątową, z którą linia środków obraca się koło środka kuli nieruchomej, przez  $\Omega$  i szybkość kątową kuli ruchomej przez  $\omega$ . najdziemy łatwo, że  $(a+b)\Omega = a\omega$ .

Oznaczamy prócz tego przez  $R$  reakcję normalną, przez  $F$  siłę tarcia, przez  $m$  masę kuli ruchomej i wreszcie przez  $\vartheta$  kąt, który linia środków tworzy z pionem w chwili  $t$ , gdy jeszcze istnieje zetknięcie. Otrzymamy z łatwością następujące równania ruchu kuli:

$$m(a+b)\frac{d\Omega}{dt} = mg \sin \vartheta - F,$$

$$m(a+b)\Omega^2 = mg \cos \vartheta - R,$$

$$\frac{2ma^2}{5} \frac{d\omega}{dt} = Fa.$$

Z pierwszego i ostatniego wypadnie, że  $\Omega^2 = \frac{10g(1 - \cos \vartheta)}{7(a+b)}$ . To samo możnaby otrzymać bezpośrednio przy pomocy zasady sił żywych. Wstawivszy tę wartość w drugie z równań powyższych i zakładając  $R=0$ , znajdziemy, że w chwili rozejścia się kul  $\cos \vartheta = \frac{10}{17}$ .

Prz. 14. Cylinder kołowy o promieniu  $a$ , wirujący około osi z szybkością kątową  $\omega_0$ , położono ostrożnie na podłodze; współczynnik tarcia  $=f$ . Zbadać dalszy ruch cylindra.

Poślizg będzie trwał  $\frac{a\omega_0}{3fg}$  sekund. Od tego czasu cylinder się toczy, i pomiędzy szybkością środka ciężkości a szybkością kątową zachodzi znany związek. W tym okresie siła tarcia jest zerem; wynika

to stąd, że inaczej równania ruchu przy żadnej szybkości nie byłyby spełnione (porów. także par. 112 prz. 1). Szybkość postępową w okresie drugim jest stała i równa  $\frac{a\omega_0}{3}$ .

Prz. 15. Obręcz kołową o promieniu  $a$ , wirującą w płaszczyźnie pionowej około swego środka z szybkością kątową  $\omega_0$ , ustawiono na równi pochyłej stycznie do linii największego spadku, i kierunek szybkości kątowej jest taki, że siła tarcia działa w górę. Zbadać ruch obręczy w przypadku, gdy kąt nachylenia równi jest równy kątowi tarcia  $\varphi$ . Odp. Środek pozostaje w spokoju  $\frac{a\omega_0}{g \sin \varphi}$  sekund, a następnie schodzi na dół z przyspieszeniem  $\frac{g \sin \varphi}{2}$ .

Prz. 16. Kula jednorodna o masie  $M$  leżała na chropowatym stole, gdy w końcu jednej z jej średnic poziomych przymocowano punkt materyalny o masie  $m$ . Jaki powinien być co najmniej współczynnik tarcia pomiędzy stołem i kulą, aby ta zaczęła się toczyć?

Odp.  $\frac{5(M+m)m}{7M^2+17Mm+5m^2}$ .

Rozwiązanie można oprzeć na twierdzeniu, przytoczonym w paragrafie 66. Znaleźliśmy tam, że przyspieszenie tego punktu układu, który jest w danej chwili środkiem chwilowym  $= c\omega$ , gdzie  $c$  oznacza tak zw. szybkość środka chwilowego. W początku ruchu, gdy  $\omega = 0$ , przyspieszenie jest zerem.

Prz. 17. Półkula jednorodna o masie  $M$  i promieniu  $a$  stoi podstawą do góry na płaszczyźnie poziomej. Na podstawie, zupełnie gładkiej, położono punkt materyalny o masie  $m$  w odległości  $c$  od środka. Jaki powinien być co najmniej współczynnik tarcia półkuli o płaszczy-

znę, aby półkula zaczęła się toczyć? Odp.  $\frac{25mac}{26(M+m)a^2+40mc^2}$ .

Prz. 18. Do gładkiej płaszczyzny poziomej jest przybita listwa w kształcie pewnej krzywej, a po jej stronie wklęsłej leży pierścień o promieniu  $a$ , stykając się w punkcie  $A$ . Promień krzywizny listwy jest wszędzie większy od  $a$ , a współczynnik tarcia pierścienia o listwę  $= f$ . Pierścień otrzymuje szybkość w kierunku wspólnej stycznej i zaczyna się toczyć, gdy punkt zetknięcia znalazł się w  $B$ . Wyznaczyć kąt pomiędzy normalnemi do listwy w punktach  $A$  i  $B$ . Odp. Kąt szukany  $= \frac{\lg 2}{f}$ .

Prz. 19. Wewnątrz pustego cylindra o osi poziomej i promieniu  $b$  toczy się inny cylinder o promieniu  $a$ . Wyznaczyć długość prostego wahadła, którego okres wahań jest równy okresowi wahań płaszczyzny, przechodzącej przez osi obydwóch cylindrów (zob. prz. 4). Odp.  $\frac{3(b-a)}{2}$ .

**124. Naprężenia sztab.** Niech będzie sztaba  $AB$ , poruszająca się w jakikolwiek sposób pod działaniem sił. Wyobraźmy sobie, że w pewnej chwili sztaba ta się zerwała lub złamała w punkcie  $C$ . Fakt ten wogóle wywrze wpływ na dalszy ruch części  $AC$  i  $CB$ . Części te będą od owej chwili poruszały się inaczej, niż by się poruszały, gdyby zerwanie nie nastąpiło.

Aby się o tem przekonać przypuśćmy, że sztaba tworzy linię płaską i że porusza się w swej płaszczyźnie, przyczem żadne siły na nią nie działają. W takim razie środek ciężkości porusza się po linii prostej z szybkością stałą, a sztaba obraca się około tego środka ze stałą szybkością kątową. Oczywiście torem środka ciężkości części  $CB$  jest cykloida wydłużona lub skrócona, a szybkość zmienia się co do wielkości i kierunku; gdy sztaba się zerwie w punkcie  $C$ , to ruch tego środka stanie się od razu prostoliniowym i jednostajnym.

Z tego wynika, że przed zerwaniem część  $AC$  wywierała wpływ na ruch części  $CB$ , czyli wywierała na nią pewne siły. Siły te są przyłożone w punktach zetknięcia tych części, t. j. w punktach przekroju  $C$ , i nazywają się zazwyczaj *naprężeniami* w przekroju  $C$ .

Doświadczenie wskazuje, że naprężenia nie mogą przekraczać pewnych granic, zależnych od wielkości przekroju, oraz od materiału sztaby. Gdy naprężenia dochodzą do tych granic, to sztaba się łamie lub zrywa. Każdy mechanizm powinien być tak zbudowany, aby w każdej z jego części podczas biegu naprężenia trzymały się zdala od owych granic, a zatem wyznaczanie naprężeń, powstających podczas ruchu jest sprawą dużej doniosłości w technice.

Rozważymy to zagadnienie jedynie dla tego przypadku, w którym sztaba jest płaska, i ruch jej jest płaski, przyczem mogą na nią działać jakiekolwiek siły w płaszczyźnie ruchu.

Siły, które część  $AC$  wywiera na  $CB$ , dadzą się sprowadzić do siły wypadkowej oraz pary wypadkowej; za środek redukcji obiera się zazwyczaj jeden z punktów przekroju  $C$ . Siłę wypadkową rozkładamy na dwie składowe  $S_t$  i  $S_n$  w kierunku stycznej do sztaby i w kierunku normalnej. Pierwsza nazywa się *siłą rozciągającą*, druga *siłą ścinającą*. Para wypadkowa zowie się *parą zginającą*; moment jej oznaczmy przez  $N$ . Tak



więc zadanie sprowadza się do wyznaczenia sił  $S_n$  i  $S_t$  oraz momentu  $N$ .

Ponieważ ruch sztaby jest znany, możemy przeto wyznaczyć przyspieszenie środka ciężkości części  $CB$ . Przyspieszenie to wywołują oczywiście siły  $S_t$  i  $S_n$  wraz z temi siłami zewnętrznymi, których punkty przyłożenia należą do części  $CB$ . Biorąc rzuty na dwa kierunki, otrzymamy dwa równania, z których dadzą się wyznaczyć niewiadome  $S_t$  i  $S_n$ . Dojdziemy do tego samego, rozważając przyrosty, które przybiera wektor  $G$  części  $CB$ .

Aby otrzymać moment  $N$  wyznaczamy naprzód wektor  $H$  części  $CB$  względem jej środka ciężkości, albo raczej względem prostej, przechodzącej przez ten punkt i prostopadłej do płaszczyzny ruchu. Przyrost elementarny tego wektora wytwarza szukany moment  $N$  oraz momenty sił, działających na  $CB$ , włączając w to znane już naprężenia  $S_t$  i  $S_n$ , względem środka ciężkości  $CB$ . Z równania momentów znajdziemy moment  $N$ .

Przypuśćmy dla przykładu, że sztaba jest prosta, i żadne siły na nią nie działają. Masę jej oznaczmy przez  $M$ , długość przez  $2a$  i szybkość kątową przez  $\omega$ . Przekrój  $C$  obierzmy w odległości  $x$  od końca  $A$ . Znajdziemy, że masa części  $BC$  wynosi  $\frac{M}{2a}(2a-x)$ , a odległość jej środka ciężkości od środka sztaby  $\frac{x}{2}$ .

Wyznaczamy naprzód przyspieszenie środka części  $BC$ . W tym celu rozważamy ruch jego względem środka sztaby. Jest to ruch obrotowy o stałej szybkości kątowej  $\omega$ , a zatem przyspieszenie względne styczne jest zerem; istnieje tylko przyspieszenie normalne, wynoszące  $\frac{x\omega^2}{2}$ . Przyspieszenie unoszenia, a także przyspieszenie Coriolisa są zerami, a zatem przyspieszenie całkowite wynosi  $\frac{x\omega^2}{2}$  i jest skierowane wzdłuż sztaby do jej środka.

Z tego widać, że naprężenie ścinające jest zerem, a rozciągające

$$S_t = \frac{Mx(2a-x)\omega^2}{4a}.$$

Znajdziemy bez trudności, że napężenie to jest największe dla  $x=a$ , czyli w środku sztaby. Wynosi ono tam  $\frac{Ma\omega^2}{4}$ .

Aby wyznaczyć parę zginającą  $N$  rozkładamy ruch części  $BC$  na ruch obrotowy około jej środka i na ruch postępowy. Pierwszy odbywa się ze stałą szybkością kątową, zatem wektor  $H$  nie przybiera żadnych przyrostów, a ponieważ moment siły  $S_t$  względem środka ciężkości części  $BC$  jest równy zeru, przeto i moment  $N$  jest zerem.

Tak więc w sztabie panują jedynie napężenia styczne, a z tego wynika, że opisany ruch mogłaby mieć także wiotka linka, albo łańcuch.

Prz. 1. Sztaba  $OA$  o długości  $2a$  i masie  $M$  może się obracać w płaszczyźnie pionowej około osi poziomej, przechodzącej przez koniec  $O$ . Ustawiamy sztabę poziomo, a następnie pozostawiamy ją samej sobie. Wyznaczyć napężenia w dowolnym punkcie  $P$ .

Oznaczmy odległość  $OP$  przez  $x$ , a środek części  $PA$  przez  $C$ . W takim razie masa części  $AP$  wynosi  $\frac{M}{2a}(2a-x)$ , a  $OC = \frac{x+2a}{2}$ . Gdy sztaba tworzy z poziomem kąt  $\vartheta$ , to

$$\frac{M}{2a}(2a-x) \cdot \frac{x+2a}{2} \omega^2 = S_t - \frac{Mg}{2a}(2a-x)\sin\vartheta,$$

$$\text{ i } \quad \frac{M}{2a}(2a-x) \cdot \frac{x+2a}{2} \frac{d\omega}{dt} = S_n + \frac{Mg}{2a}(2a-x)\cos\vartheta.$$

Z par. 112 wiadomo, że  $\omega^2 = \frac{3g \sin\vartheta}{2a}$  i  $\frac{d\omega}{dt} = \frac{3g \cos\vartheta}{4a}$ , zatem

$$S_t = \frac{Mg \sin\vartheta(2a-x)(3x+10a)}{8a^2}, \quad S_n = \frac{Mg \cos\vartheta(2a-x)(3x-2a)}{16a^2}$$

Dalej  $\frac{M}{2a}(2a-x)k^2 \frac{d\omega}{dt} = -S_n + N$ , gdzie  $k^2 = \frac{(2a-x)^2}{12}$ , a zatem

$$N = \frac{Mgx(2a-x)^2 \cos\vartheta}{16a^2} \cdot (?) ?$$

Zakładając  $\frac{dN}{dx} = 0$ , znajdziemy, że  $N$  osiąga maksimum dla  $x = \frac{2a}{3}$ .

Tak więc największa para zginająca działa w przekroju, odległym od  $O$  o trzecią część długości sztaby. Tutaj też najprawdopodobniej sztaba się złamie. Moment zginający jest największy, gdy  $\vartheta = 0$ ,

czyli gdy sztaba zajmuje jeszcze położenie poziome. Wówczas w owym przekroju niebezpiecznym  $N = \frac{2Mga}{27}$ , a  $S_t = N_n = 0$ .

Prz. 2. Sztywna obręcz kołowa, przecięta w punkcie  $A$ , taczy się na chropowatej płaszczyźnie poziomej. Wyznaczyć to położenie średnicy  $AB$ , w którym moment zginający w przekroju  $B$  obręczy jest największy.

Przypuśćmy, że średnica  $AB$  w rozważanej chwili tworzy z poziomem kąt  $\theta$ , i oznaczmy środek ciężkości górnego półkola, opartego na  $AB$ , przez  $C$ , a środek obręczy przez  $O$ . Szybkość kątowna obręczy jest stała, a zatem przyspieszenie punktu  $C$  wynosi  $OC \cdot \omega^2$  i ma kierunek  $CO$  (prz. 5, par. 60). Wektor  $H$  półkola  $AB$  względem  $C$  nie przybiera przyrostu, a zatem suma momentów sił  $S_t$ ,  $S_n$  (działających w  $B$ ) względem  $C$  wraz z momentem  $N$  jest zerem; wyznaczwszy więc  $S_t$  i  $S_n$ , znajdziemy łatwo moment  $N$ .

Można także wyznaczyć  $N$  bezpośrednio. Wypadkową sił  $S_t$ ,  $S_n$ ,  $mg$  oraz pary  $N$  jest  $m \cdot OC \cdot \omega^2$ , gdzie  $m$  oznacza masę półobwódki  $AB$ ; zatem moment tej ostatniej siły względem dowolnego punktu jest równy sumie momentów sił  $S_t$ ,  $S_n$ ,  $mg$  wraz z momentem  $N$ . Biorąc momenty względem  $B$ , nie wprowadzimy sił  $S_t$  i  $S_n$ .

Moment zginający w  $B$  jest największy, gdy punkt ten leży wyżej od  $A$ , i średnica  $AB$  tworzy z poziomem kąt  $\arctan \frac{2}{\pi}$ .

Prz. 3. Drut  $AB$  zgięty w formie półkola, obraca się około końca  $A$  ze stałą szybkością kątowną na gładkiej płaszczyźnie poziomej. Wyznaczyć punkt  $C$  drutu, w którym działa największy moment gnący. Odp. Kąt centralny  $\varphi$ , odpowiadający łukowi  $AC$ , czyni zadość równaniu  $\tan \varphi = \pi - \varphi$ .

Prz. 4. Sztaba posiada postać części krzywej  $r = a(1 + \cos \varphi)$  a mianowicie części, położonej po jednej stronie osi biegunowej, i obraca się ze stałą szybkością kątowną  $\omega$  około bieguna. Jednostka długości sztaby posiada masę  $\mu$ ; wyznaczyć parę zginającą w punkcie

sztaby, dla którego  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Odp.  $-\frac{12\sqrt{2}\mu\omega^2 a^3}{5}$ .

W tym razie dogodniej będzie wyznaczać szukany moment bezpośrednio, przy pomocy zasady d'Alemberta. Niechaj  $A$  oznacza punkt, o który chodzi, i  $B$  koniec sztaby, położony na osi biegunowej. Na część  $AB$  działają siły rozciągająca i ścinająca w  $A$  oraz para zginająca  $N$ . Równowagę one siły odwrotne do czynnych, t. j. siły odwrotne do normalnych wszystkich elementów tej części. Biorąc momenty względem  $A$ , wyznaczmy  $N$  od razu przy pomocy całkowania.

Prz. 5. Końce sztaby o masie  $M$  muszą pozostawać na dwóch gładkich prostych  $x$  i  $y$ , tworzących kąt prosty. Na sztabę nie działają żadne siły prócz reakcji w końcach, i w pewnej chwili środek

jej posiadał szybkość  $v$ . Wyznaczyć moment zginający w środku w funkcji kąta, który sztaba tworzy z prostą  $x$ . Odp.  $\frac{Mv^2 \sin 2\theta}{4}$ .

Prz. 6. Końce dwóch drutów o jednakowych długościach i masach są przytwierdzone do osi w punktach  $A$  i  $B$ . Jeden drut ma kształt półkola, a drugi ćwiartki okręgu, i obydwie te krzywe są położone w płaszczyznach prostopadłych do osi  $AB$ , która obraca się wraz z drutami z szybkością kątową  $\omega$ . Wyznaczyć stosunek momentów gnących, które wystąpią w końcach  $A$  i  $B$  w chwili gwałtownego zatrzymania układu. Odp.  $\frac{\pi}{4(\pi-2)}$ .

W  $A$  wystąpią siły chwilowe  $S_l$  i  $S_n$  oraz para chwilowa o momencie  $N$ . Siły te zniweczą wektor  $G$  drutu, a para wektor  $H$ ; z tego wynika, że miarą momentu  $N$  jest wektor  $H$ , i szukany stosunek jest równy stosunkowi momentów ilości ruchu (par. 116). Daje się dowieść, że w  $A$  i  $B$  występują większe momenty zginające, niż w innych punktach odnośnych drutów, a zatem odwrotność szukanego stosunku możemy uważać za stosunek odporności obydwóch drutów na złamanie podczas zatrzymywania.