

czyli
$$d\left(\frac{\sin \vartheta}{v}\right) = 0.$$

Z tego wynika, że $\frac{\sin \vartheta}{v}$ jest wielkością stałą. Oznaczmy tę stałą przez $\frac{1}{\sqrt{4ag}}$, a ponieważ $v = \sqrt{2gy}$, gdzie y jest rzędną punktu y , przeto $y = 2a \sin^2 \vartheta$. Wprowadźmy jeszcze kąt $\varphi = 2\vartheta$; w takim razie ostatnie równanie przybierze postać

$$y = a(1 - \cos \varphi).$$

Jest to znane równanie cykloidy, której ostrze leży w punkcie O , a podstawa na osi x , a więc linią najprędszego spadku, czyli *brachistochroną* jest cykloida, której ostrze leży w O , a podstawa jest pozioma.

79. **Tarcie o tor.** Uważaliśmy dotychczas, że reakcja toru na punkt materialny leży w płaszczyźnie normalnej; w rzeczywistości reakcja tworzy zawsze z płaszczyzną normalną kąt różny od zera, innemi słowy oprócz składowej normalnej posiada jeszcze składową styczną, którą nazywamy *siłą tarcia* lub wprost *tarciem*. Punkt materialny jest w ruchu, a zatem tarcie jest całkowicie rozwinięte, kąt φ pomiędzy reakcją i płaszczyzną normalną nazywa się *kątem tarcia*, a $\tan \varphi = f$ współczynnikiem tarcia *).

Pragnąc uwzględnić w rachunku tarcie, musimy zmodyfikować albo raczej dopełnić równania, do których doszliśmy w par. 74. Pozostawimy oznaczenia bez zmiany z tą tylko różnicą, że R ma oznaczać nie reakcję całkowitą, lecz jej składową normalną. W takim razie reakcja styczna, czyli *siła tarcia*, będzie równa fR ; jest ona zawsze skierowana odwrotnie do szybkości, a w punktach, w których szybkość jest zerem, tarcie ma kierunek odwrotny do siły stycznej.

Wprowadzając siłę tarcia, otrzymamy zamiast równań paragrafu 74 następujące:

$$m \frac{dv}{dt} = P_t - fR, \quad \frac{mv^2}{\rho} = P_n + R_n, \quad 0 = P_b + R_b.$$

Wypada uczynić tu pewną uwagę, o której trzeba pamiętać

*) Uważamy tu, że współczynnik tarcia jest niezależny od szybkości, co, jak wiadomo ze statyki, jest słuszne tylko w przybliżeniu.

tać zawsze, gdy w zagadnieniu dynamicznem pragniemy uwzględnić siłę tarcia. Przypuśćmy, że szybkość punktu materialnego się zmniejsza, schodzi do zera w pewnem położeniu A_0 , a następnie zmienia kierunek. Oczywiście siła tarcia w A_0 nie staje się zerem, jeżeli tylko w położeniu tem nie znika reakcja normalna, ale tarcie jest zawsze odwrotne do szybkości, a zatem w A_0 kierunek jego zmienia się na odwrotny. Widzimy, że wektor tarcia zmienia się w owej chwili w sposób nieciągły.

W chwili, gdy punkt materialny przechodzi przez położenie A_0 , pierwsze z trzech równań powyższych przestaje być ważnem, a mianowicie znak wyrazu, zawierającego f , już dalej nie odpowiada przebiegowi zjawiska. Należy więc ułożyć nowe równania stosownie do zmienionych okoliczności.

Jako ilustrację do uwagi powyższej przytoczymy przykład następujący. Przypuśćmy, że punkt materialny musi pozostawać na prostej x , i że przyciąga go nieruchomy punkt C , odległy od x o $OC=h$, a siła przyciągania jest wprost proporcjonalna do odległości. Gdy więc punkt materialny zajmuje położenie P , to działa nań siła $\omega^2 r$, gdzie $r=CP$, a ω^2 oznacza współczynnik proporcjonalności.

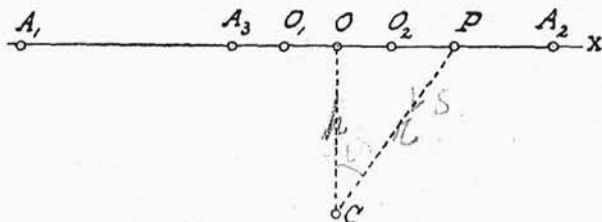


Fig. 49.

Siła styczna jest oczywiście równa $\omega^2 r \sin \vartheta$ i zawsze zwrócona do punktu O , czyli do rzutu punktu C . Siła normalna $= \omega^2 r \cos \vartheta$, gdzie ϑ oznacza kąt OCP . Lecz $r \sin \vartheta = OP = x$, a $r \cos \vartheta = h$, zatem siła styczna $= \omega^2 x$, a normalna $= \omega^2 h$. Widzimy, że siła normalna, a więc i reakcja normalna, są stałe dla wszelkich położań punktu materialnego.

Obierzmy kierunek dodatni toru w prawo na fig. 49, i przypuśćmy, że punkt materialny został odsunięty do położenia A_1 , w lewo od O , i pozostawiony samemu sobie. Pod działaniem siły przyciągania wyruszy on w stronę punktu O ,

a jeżeli tor jest gładki, to

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x^*) \quad (1),$$

z czego wynika, że ruch będzie harmoniczny, i połowa okresu wynosi $\frac{\pi}{\omega}$.

Dajmy teraz na to, że tor jest chropowaty, i oznaczmy współczynnik tarcia przez f . Ponieważ reakcja normalna jest stale równa $\omega^2 h$, przeto siła tarcia będzie stała co do wielkości i równa $f\omega^2 h$. Gdy punkt materialny dąży w kierunku dodatnim, to prócz siły przyciągania działa jeszcze w kierunku ujemnym siła tarcia, a zatem

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x - f\omega^2 h \quad (2).$$

Przenieśmy początek toru do punktu O_1 , którego odcięta niech będzie równa b , i oznaczmy nową odciętą punktu materialnego przez ξ . Będzie więc $x = \xi + b$, i równanie powyższe przekształci się na $\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\omega^2 \xi - \omega^2(b + fh)$. Obierzmy b w taki sposób, aby było $b + fh = 0$, czyli

$$b = -fh.$$

W takim razie równanie przybierze postać

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\omega^2 \xi \quad (3).$$

Widzimy, że ruch jest znowu harmoniczny, ale środkiem jest teraz nie O , lecz inny punkt O_1 , położony w lewo od O w odległości fh . Skrajne położenie przypadnie w punkcie A_2 , którego odległość od O_1 jest równa $A_1 O_1$. Skutkiem tarcia amplituda zmniejszyła się o $2OO_1$, czyli o $2fh$, natomiast półokres i teraz wynosi $\frac{\pi}{\omega}$.

Gdy punkt materialny wyruszy z A_2 w lewo, to kierunek tarcia zmieni się na odwrotny i zamiast równania (2) będzie

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x + f\omega^2 h.$$

*) Założono tu, że punkt materialny posiada masę jednostkową, co wcale nie ogranicza ogólności rozważań.

Postępując, jak poprzednio, znajdziemy, że ruch jest wciąż harmoniczny, ale środek przesunął się do punktu O_2 , położonego w prawo od O w odległości f/h , amplituda skróciła się jeszcze o $2/fh$, a okres pozostał bez zmiany.

W ten sposób ruch będzie trwał w dalszym ciągu. Po każdym wahnięciu prostem amplituda zmniejszy się o $2/fh$, i ostatecznie jedno ze skrajnych położań przypadnie pomiędzy O_1 i O_2 . Wówczas oczywiście siła styczna będzie mniejsza od $f\omega^2h$, czyli mniejsza od granicznej siły tarcia, przyciąganie punktu C nie zdoła przemódz tarcia, i punkt materalny pozostanie w spokoju.

Prz. 1. Prostý pręt, tworzący z poziomem kąt α , wiruje ze stałą szybkością kątową ω około osi pionowej, położonej z nim w jednej płaszczyźnie. Na pręt jest nawleczony ciężki pierścień, i kąt tarcia pomiędzy nimi jest równy φ . Wyznaczyć długość części pręta, na której pierścień może pozostawać w spoczynku względnym. Odp.
$$\frac{g[\tan(\alpha+\varphi)-\tan(\alpha-\varphi)]}{\omega^2 \cos \alpha}.$$

Gdy pierścień znajduje się na końcu szukanego odcinka, to tarcie jest całkowicie rozwinięte. Po tem można poznać ten odcinek.

Prz. 2. Punkt materalny wyszedł z pewnego punktu, leżącego na wewnętrznej stronie powierzchni kołowego cylindra o promieniu a , z szybkością v_0 , styczną do powierzchni i prostopadłą do tworzących. Punkt będzie dalej jedynie pod działaniem reakcyi powierzchni i siły tarcia, a współczynnik tarcia $=f$. W jakim czasie punkt obiegnie cylinder naokoło? Odp. $\frac{a}{fv_0}(e^{2\pi f}-1).$

Prz. 3. Ciężki punkt zsuwa się po okręgu koła, położonego w płaszczyźnie pionowej, poczynając od końca średnicy poziomej. Współczynnik tarcia wynosi $1/2$. W jakim położeniu szybkość punktu będzie największa?

Znajdziemy z łatwością, że

$$a\left(\omega^2 + 2\frac{d\omega}{dt}\right) = g(2\cos\vartheta - \sin\vartheta),$$

gdzie ϑ oznacza kąt, który tworzy z poziomem promień, przechodzący przez punkt ruchomy, a ω szybkość kątową tego promienia. Aby równanie powyższe całkować, mnożymy je przez $e^{\vartheta}d\vartheta$. Wówczas po lewej stronie otrzymamy $ad(\omega^2 e^{\vartheta})$. Po prawej stronie wypadnie wyznaczyć $\int e^{\vartheta}(2\cos\vartheta - \sin\vartheta)d\vartheta$. Można to uczynić krótko w sposób następujący. Daje się przewidzieć, że szukana całka posiada postać $e^{\vartheta}(M\cos\vartheta + N\sin\vartheta) + C$, gdzie M i N oznaczają współczynniki stałe,

które jeszcze trzeba wyznaczyć, a C jest stałą całkowania. Tak więc

$$\int e^{\vartheta} (2 \cos \vartheta - \sin \vartheta) d\vartheta = e^{\vartheta} (M \cos \vartheta + N \sin \vartheta) + C.$$

Różniczkując i porównyując współczynniki $\sin \vartheta$ oraz $\cos \vartheta$, znajdziemy, że $M = \frac{3}{2}$, $N = \frac{1}{2}$.

Największa szybkość odpowiada temu kątowi ϑ , który czyni zadość równaniu $\cos \vartheta - 3 \sin \vartheta + 3e^{-\vartheta} = 0$.

Prz. 4. Ciężki punkt materalny zsuwa się po chropowatej cykloidzie, której podstawa jest pozioma, a wierzchołek zwrócony ku dołowi. Jaki powinien być współczynnik tarcia, aby punkt, wyszedłszy z ostrza bez początkowej szybkości, zatrzymał się w wierzchołku? Odp. Szukany współczynnik f powinien czynić zadość równaniu $f^2 e^{f\pi} = 1$. Niezbędne całki można otrzymać przy pomocy metod, wskazanych w przykładzie poprzedzającym.

Prz. 5. Punkt materalny o masie jednostkowej jest zawarty w prostej chropowatej rurce i podlega działaniu siły centralnej odpychającej, która w odległości r od środka odpychania C wynosi $\frac{\lambda}{r}$.

Współczynnik tarcia $= f$. Punkt wzmiankowany wyruszył z szybkością v_0 z położenia A , stanowiącego rzut środka C na oś rurki; wyznaczyć kąt, który promień wodzący, wyprowadzony z C , utworzy z CA , gdy punkt się zatrzyma. Odp. Szukany kąt czyni zadość równaniu $2\lambda(f\vartheta + \lg \cos \vartheta) = v_0^2$.

80. Opór powietrza. W rozważaniach dotychczasowych pomijaliśmy jeszcze inną siłę, która w warunkach zwykłych działa zawsze na ciała w ruchu, a mianowicie opór powietrza.

Opór powietrza jest pod tym względem podobny do tarcia, że zawsze przeciwdziała ruchowi ciała, gdy jednak tarcie może działać i podczas spoczynku ciała, to opór powietrza występuje tylko podczas ruchu i jest funkcją szybkości.

Pomimo licznych doświadczeń nie zdołano dotychczas wykryć dokładnego i ogólnego związku funkcjonalnego pomiędzy oporem powietrza a wymiarami pocisku, kształtem powierzchni i szybkością, jeżeli jednak szybkość nie jest zbyt wielka, nie przekracza kilkudziesięciu metrów na sek., to otrzymuje się wyniki dość zgodne z rzeczywistością, przyjmując, że dla danego pocisku opór jest proporcjonalny do kwadratu szybkości. Jeżeli szybkość wynosi v , to opór powietrza jest równy κv^2 , gdzie κ oznacza współczynnik proporcjonalności.

Ten współczynnik κ jest dla każdego ciała inny. Zależy on przede wszystkim od wymiarów, a mianowicie w przybli-

zeniu można uważać, że dla ciał podobnych jest proporcjonalny do pola rzutu ciała na płaszczyznę prostopadłą do szybkości; prócz tego zależy on jeszcze w dużym stopniu od kształtu powierzchni.

Opierając się na założeniach powyższych, rozważymy jedno zagadnienie z tej dziedziny, a mianowicie ruch pionowy ciała ciężkiego w powietrzu.

Przypuśćmy, że ciało o masie m zostało wyrzucone z punktu O z szybkością v_0 pionowo w górę. Obieramy początek toru w O i kierunek dodatni w górę; w takim razie wypadnie, że

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - \kappa v^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Będziemy uważali, że współczynnik κ podczas całego ruchu pozostaje bez zmiany.

Założmy

$$c = \sqrt{\frac{mg}{\kappa}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Będziemy nazywali tę wielkość c *szybkością graniczną* ciała ze względów, które wyjaśnią się w dalszym ciągu. Wprowadzając do (1) $\frac{mg}{c^2}$ zamiast κ , otrzymamy

$$c^2 \frac{dv}{dt} = -g(c^2 + v^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Całkując to równanie, znaleźlibyśmy związek pomiędzy szybkością v i czasem t . Ważniejszy jest związek pomiędzy v i przebytą drogą x ; aby go otrzymać, mnożymy ostatnie równanie przez dx i po lewej stronie zamiast $\frac{dx}{dt}$ piszemy v . Wypadnie wówczas

$$\frac{c^2 v dv}{c^2 + v^2} = -g dx.$$

Całkując, znajdziemy

$$\lg \frac{c^2 + v_0^2}{c^2 + v^2} = \frac{2gx}{c^2}.$$

Aby wyznaczyć wysokość h , do której wzbije się ciało, trzeba tylko w równaniu ostatniem założyć $v=0$; wypadnie

$$h = \frac{c^2}{2g} \lg \left(1 + \frac{v_0^2}{c^2} \right).$$

Przypuśćmy dla przykładu, że szybkość początkowa $v_0 = c$. W takim razie $h = \frac{c^2 \lg 2}{2g}$. W próżni ciało wzbiłoby się do wysokości $\frac{c^2}{2g}$, a więc opór powietrza zmniejszył tę wysokość o $\frac{c^2}{2g}(1 - \lg 2)$.

W chwili, gdy ciało osiąga największą wysokość, równanie (1) przestaje być ważnem, gdyż wyraz kv^2 , reprezentujący opór powietrza, już dalej nie odpowiada przebiegowi zjawiska. Szybkość v wchodzi w nim w drugiej potęgę, a więc nie zmienia on znaku pomimo to, że opór powietrza zwraca się do góry. Taka nieciągłość jest możliwa zawsze, gdy na ciało działa siła, proporcjonalna do parzystej potęgi szybkości.

Musimy więc uważać, że od chwili, gdy szybkość się wyczerpała, rozpoczyna się nowe zagadnienie, które potrzeba rozważyć odrębnie od poprzedzającego; obierzemy też inaczej początek toru i kierunek dodatni, aby otrzymać przejrzystsze wyniki, a mianowicie początek umieścimy w punkcie najwyższym, a kierunek dodatni obierzemy na dół. Będzie wówczas

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2,$$

a gdy wprowadzimy szybkość graniczną c według (2), to wypadnie

$$c^2 \frac{dv}{dt} = g(c^2 - v^2) \quad \dots \quad (4).$$

Równanie to wskazuje, że szybkość v nie może przekroczyć szybkości granicznej. Gdyby v doszło do szybkości granicznej, to przyspieszenie stałoby się zerem, i ruch byłby nadal jednostajny, a mianowicie ciało spadałoby z szybkością graniczną. Stąd pochodzi nazwa tej wielkości.

Jeżeli rzucimy ciało pionowo na dół z szybkością większą od c , to przyspieszenie będzie ujemne, a więc szybkość będzie się zmniejszała, znowu dążąc do granicznej.

Całkując równanie (4) podobnie, jak (3), otrzymamy

$$\lg \frac{c^2 - v^2}{c^2} = - \frac{2gx}{c^2},$$

a stąd

$$v^2 = c^2 \left(1 - e^{-\frac{2gx}{c^2}} \right).$$

Równanie to wskazuje, że szybkość ciała zbliża się asymptotycznie do granicznej; pierwsza jest wciąż mniejsza od drugiej, ale różnica z biegiem czasu zaciera się nieograniczenie.

Zobaczmy jeszcze, w jakiej zależności pozostaje szybkość graniczna od rozmiarów ciała. Weźmy dla przykładu kulę o promieniu r , której masa gatunkowa, czyli masa jednostki objętości, jest równa ρ . Masa tej kuli $m = \frac{4\pi\rho r^3}{3}$. Współczynnik κ , jak już mówiliśmy, jest proporcjonalny do rzutu ciała na płaszczyznę prostopadłą do szybkości, a więc w tym razie $\kappa = \lambda\pi r^2$, gdzie λ oznacza nowy współczynnik proporcjonalności. Podstawiając to w (2), znajdziemy

$$= \sqrt{\frac{4\rho gr}{3\lambda}}.$$

Widzimy, że c jest proporcjonalne do $r^{1/2}$. Tem możnaby wytłumaczyć fakt, że drobne kropelki mgły a także cząsteczki pyłu spadają bardzo wolno. Ich szybkość graniczna dzięki drobnym rozmiarom jest bardzo mała.

Prz. 1. Ciało zostało wyrzucone z punktu O pionowo w górę z szybkością v_0 , a powróciło do O z szybkością v . Dowieść, że $\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_0^2} = \frac{1}{c^2}$.

Prz. 2. Punktowi materialnemu, który musi pozostawać na gładkim poziomym torze nadano szybkość początkową v_0 i pozostawiono go samemu sobie. Wyznaczyć szybkość w funkcji drogi a także równanie ruchu, uwzględniając opór powietrza. Odp. $v = v_0 e^{-\kappa x}$, $x = -\frac{1}{\kappa} \lg(1 + v_0 \kappa t)$, widzimy, że szybkość asymptotycznie schodzi do zera.

81. Wymiary. Długość, czas i masę nazywamy wielkościami prostymi i będziemy je tu dla krótkości oznaczali odpowiednio literami L , T i M . Można powiedzieć, że w pewnym sensie wszystkie inne wielkości, z którymi mamy do czynienia w mechanice, są złożone z tych wielkości prostych.

Tak np. liczbę, wyrażającą pole figury, otrzymujemy jako iloczyn dwóch liczb, z których każda wyraża pewną długość, albo, mówiąc krócej, jako iloczyn dwóch długości. Mówi się również, że wymiarem pola jest długość w potęgę drugiej, czyli L^2 . Tym sposobem wymiar objętości będzie L^3 .

Szybkość $\frac{ds}{dt}$ otrzymujemy jako iloraz liczby, wyrażającej

pewną długość ds , przez inną liczbę, wyrażającą czas dt , lub jako iloraz długości przez czas, a zatem wymiar szybkości = $\frac{L}{T} = LT^{-1}$.

Przyspieszenie, np. $\frac{d^2s}{dt^2}$, w tem samym znaczeniu, jest ilorazem długości przez drugą potęgę czasu, a zatem wymiar przyspieszenia = $\frac{L}{T^2} = LT^{-2}$.

Siła jest równa iloczynowi masy przez przyspieszenie, a więc jej wymiar = MLT^{-2} .

Kąt mierzymy stosunkiem łuku do promienia, a zatem wymiar = $\frac{L}{L} = L^0 = 1$. Mówimy, że kąt wyraża się liczbą bez wymiaru, albo że jest to liczba oderwana. Każda funkcja liczby oderwanej, np. \lg , \sin , jest liczbą oderwaną.

Szybkość kątowna $\frac{d\theta}{dt}$ jest ilorazem kąta $d\theta$ przez czas dt , a więc wymiar będzie $\frac{1}{T} = T^{-1}$.

Pole pewnej figury może wyrażać się tą samą liczbą, co długość pewnego odcinka; np. pole może zawierać 3 m², a odcinek 3 m. Pomimo to niedorzecznie byłoby twierdzić, że pole jest równe odcinkowi, również niedorzecznie byłoby mówić o sumie pola i odcinka, jakkolwiek możemy wyznaczyć sumę obydwóch liczb. Z tego wynika, że znakami =, + i - wolno łączyć tylko wielkości, posiadające jednakowe wymiary.

Tak np. nie mogą być połączone żadnym z tych znaków wyrazy mv i P , gdzie m oznacza masę, v szybkość i P siłę, bo wymiar pierwszego = MLT^{-1} , a drugiego MLT^{-2} .

Regule powyższej powinien w mechanice czynić zadość wynik każdego rachunku, a także sam rachunek w każdej ze swych faz. Jeżeli tylko wykryjemy gdziekolwiek wykroczenie przeciwko regule, to możemy być pewni, że do rachunku zakradł się błąd.

Może nie będzie od rzeczy zwrócić uwagę na pewne wyjątki pozorne. Przypuśćmy np., że chodzi o wyznaczenie podstawy prostokąta, którego wysokość jest równa jednostce, a pole polu innego prostokąta o wysokości a i podstawie b . Oczywiście



ście szukana podstawa $x=ab$. Wygląda tak, jak gdyby wielkość o wymiarze L była równa wielkości o wymiarze L^2 . Paradoks ten jest następstwem skróconego sposobu pisania. Powinno być $x=\frac{ab}{1}$, i ta jednostka w mianowniku posiada wymiar L .

Inne odstępstwa pozorne od reguły mogą pochodzić stąd, że wyrażamy wektory zapomocą odcinków, i niekiedy w rachunku oznaczamy tą samą literą wielkość wektora i długość odcinka. Tak np. jeżeli punkt ruchomy (xyz) posiada szybkość v , to mówimy, że koniec szybkości posiada współrzędne $x+v_x$ i t. d. Oczywiście v_x oznacza w tym razie nie składową szybkości, lecz długość odcinka i posiada wymiar L . Na wyjątek tego rodzaju zwróciliśmy już uwagę w par. 23.

Można nieraz rozwiązać zagadnienie mechaniczne, postępując się wyłożonem tu prawidłem; przykłady następujące ilustrują tę metodę.

Prz. 1. Punkt ruchomy, posiadający przyśpieszenie wciąż skierowane do punktu O i odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości, wyruszył z odległości a od O ze stanu spoczynku i doszedł do O w czasie t . Wyznaczyć zależność czasu t od odległości a .

Oznaczmy przez κ współczynnik proporcjonalności pomiędzy przyśpieszeniem i odwrotnością kwadratu odległości. Oczywiście t może być funkcją tylko tego współczynnika κ i odległości a . Gdy rozwiniemy tę funkcję w szereg według potęg tych zmiennych, to otrzymamy sumę wyrazów typu $A\kappa^p a^q$, gdzie A oznacza pewien czynnik oderwany a p i q wykładniki jeszcze nieznanne, a zatem

$$t=\Sigma A\kappa^p a^q \dots \dots \dots (1).$$

Wymiar lewej strony jest równy T ; taki sam powinien być wymiar strony prawej. Współczynnik κ , podzielony przez kwadrat długości, oznacza przyśpieszenie, zatem wymiar tego współczynnika wynosi $L^3 T^{-2}$, a wymiar prawej strony $=(L^3 T^{-2})^p L^q = L^{3p+q} T^{-2p}$. To będzie równe T , jeżeli

$$3p+q=0, \quad -2p=1.$$

Z tych równań wynika, że $p=-\frac{1}{2}$ i $q=\frac{3}{2}$.

Otrzymaliśmy dla p i q po jednej wartości, a zatem prawa strona równania (1) składa się tylko z jednego wyrazu, i

$$t=A\kappa^{-1/2} a^{3/2}.$$

Tak więc czas t jest proporcjonalny do drogi w potęgę $3/2$.

Prz. 2. Dowieść, że jeżeli w przykładzie poprzedzającym przyśpieszenie jest proporcjonalne do odległości, to czas t nie zależy od a .

Prz. 3. Wyprowadzić zapomocą metody powyższej zależność

okresu wahań prostego wahadła od długości l , masy m i przyśpieszenia ziemskiego g .

Wypadnie, że szukany okres $= A\sqrt{\frac{l}{g}}$, gdzie współczynnik A może zależeć od amplitudy.

Prz. 4. Tarcza cylindryczna o promieniu a i masie m może się swobodnie obracać około swej osi. Jakie przyśpieszenie kątowe $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)$ nada jej styczna do niej siła P ? Odp. $\frac{AP}{ma}$. Zobaczmy w dalszym ciągu, że $A=2$.