

**57. Przyspieszenie styczne i normalne.** W par. 51 widzieliśmy, jak rozkłada się pochodna geometryczna wektora w kierunku tego wektora i w kierunku prostopadłym. Pierwszą z tych składowych nazwaliśmy styczną, drugą normalną.

Przyspieszenie jest pochodną geometryczną szybkości, a jego składowa styczna, czyli *przyspieszenie styczne*, leży na jednej prostej z szybkością, t. j. na stycznej do toru; składowa normalna, czyli *przyspieszenie normalne*, leży na normalnej, a mianowicie na głównej normalnej, bo przyspieszenie zawiera się w płaszczyźnie ściśle stycznej. Będziemy oznaczali te składowe przyspieszenia przez  $p_t$  i  $p_n$ .

Przypuśćmy, że w punkcie  $A$  toru i w chwili  $t$  szybkość punktu była równa  $v$ ; według wzmiarkowanego paragrafu

$$p_t = \frac{dv}{dt} \quad (1),$$

a  $p_n = v \frac{d\vartheta}{dt}$ , gdzie  $d\vartheta$  oznacza kąt pomiędzy szybkością w  $A$  a szybkością w punkcie nieskończenie bliskim  $A_1$ , albo pomiędzy stycznymi w tych punktach. Jeżeli  $\rho$  oznacza promień krzywizny toru w  $A$ , i  $ds$  element toru  $AA_1$ , to  $d\vartheta = \frac{ds}{\rho}$ , a za-

tem  $p_n = \frac{v}{\rho} \cdot \frac{ds}{dt}$ , a ponieważ  $\frac{ds}{dt} = v$ , więc

$$p_n = \frac{v^2}{\rho} \quad (2).$$

Wzory (1) i (2) wyprowadzimy jeszcze w inny sposób. Przypuśćmy, że ruch punktu jest płaski, i że prosta  $t$  jest styczną do toru w  $A$ , a  $n$  normalną. Rozkładamy przyspieszenie  $p$

na  $p_x$  i  $p_y$ ; rzut przyspieszenia na dowolny kierunek jest równy sumie rzutów tych składowych, a zatem będzie

$$p_t = p_x \cos \vartheta + p_y \sin \vartheta$$

$$p_n = p_y \cos \vartheta - p_x \sin \vartheta,$$

gdzie  $\vartheta$  oznacza kąt pomiędzy styczną i osią  $x$ .

Gdy podstawimy  $p_x = \frac{d^2x}{dt^2}$ ,

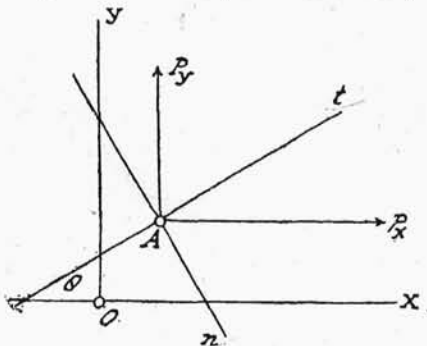


Fig. 36.

$p_y = \frac{d^2y}{dt^2}$ ,  $\cos\vartheta = \frac{dx}{ds}$ ,  $\sin\vartheta = \frac{dy}{ds}$ , to wypadnie

$$p_t = \frac{d^2x \, dx + d^2y \, dy}{dt^2 ds} \quad \dots \quad (3)$$

$$p_n = \frac{d^2y \, dx - d^2x \, dy}{dt^2 ds} \quad \dots \quad (4)$$

Wiemy, że  $v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}$ , różniczkując znajdziemy, że  $\frac{d^2x \, dx + d^2y \, dy}{dt^2} = v \, dv$ . Skutkiem tego (3) przekształci się na

$$p_t = \frac{v \, dv}{ds}, \text{ lecz } ds = v \, dt, \text{ zatem } p_t = \frac{dv}{dt}.$$

$$\text{Wiemy dalej, że } \rho = \frac{ds^2}{d^2y \, dx - d^2x \, dy}, \text{ a zatem } \frac{d^2y \, dx - d^2x \, dy}{ds} = \frac{ds^2}{\rho} \text{ i } p_n = \frac{ds^2}{\rho \, dt^2} = \frac{v^2}{\rho}.$$

Przyjmowaliśmy w tym dowodzie, że ruch punktu jest płaski. Jeżeli torem jest krzywa przestrzenna, to jednak możemy uważać, że w czasie  $dt$  ruch odbywa się w płaszczyźnie ściśle stycznej do toru, a więc jest płaski. Z tego wyciągamy wniosek, że dowód powyższy jest ważny ogólnie.

Zobaczmy teraz, jakie znaczenie posiadają te składowe przyspieszenia  $p_t$  i  $p_n$ . W tym celu założmy, że wciąż  $p_t = 0$ ,

czyli  $\frac{dv}{dt} = 0$ . Z równania tego wynika, że szybkość jest stała pod względem wielkości. Można więc powiedzieć, że dzięki przyspieszeniu stycznemu szybkość zmienia się co do wielkości.

Założmy następnie, że  $p_n = 0$ , czyli  $\frac{v^2}{\rho} = 0$ . Szybkość  $v$  nie jest zerem, bo mówimy o punkcie w ruchu, a zatem  $\frac{1}{\rho} = 0$ ; z tego wynika, że torem punktu jest linia prosta. Możemy więc znowu powiedzieć, że dzięki przyspieszeniu normalnemu szybkość zmienia się co do kierunku.

N. 56. Prz. 1. Pocisk został wyrzucony z szybkością początkową  $v_0$  pod kątem  $\alpha$ . Wyznaczyć promień krzywizny toru w punkcie najwyższym. Odp.  $\frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}$ .

Prz. 2. Torem punktu jest łańcuchowa, której parametr  $= a$ . Szybkość w wierzchołku była równa  $c$ , a przyspieszenie tworzy wciąż

jednakowe kąty ze styczną i normalną. Wyznaczyć szybkość i przyspieszenie w funkcji kąta  $\vartheta$ , który styczna tworzy z kierownicą. Odp.

$$v = ce^{\vartheta}, \quad p = \frac{\sqrt{2} c^2 e^{2\vartheta} \cos^2 \vartheta}{a}.$$

Prz. 3. Torem punktu jest cykloida, przyspieszenie jest wciąż skierowane prostopadle do podstawy, i wiadomo, że punkt przybywa do wierzchołka z szybkością  $c$ . Wyznaczyć przyspieszenie w funkcji promienia krzywizny.

Rozkładając przyspieszenie na składowe styczną i normalną, otrzymamy  $\frac{dv}{dt} = -p \cos \frac{\vartheta}{2}$  i  $v^2 = 4ap \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ , gdzie  $a$  oznacza promień koła tworzącego i  $\vartheta$  kąt, o który się to koło obróciło. Z tego wypadnie  $v = \frac{c}{\sin \frac{\vartheta}{2}}$  i  $p = \frac{64a^3 c^2}{\rho^4}$ .

Prz. 4. Punkt obiega cykloidę, w której promień koła tworzącego  $= a$ , przyczem styczna do toru obraca się ze stałą szybkością kątową  $\omega$ . Wyznaczyć przyspieszenie. Odp.  $v = \omega \rho$ , i  $p = 4a\omega^2$ .

Prz. 5. Odwijamy nić z koła o promieniu  $a$ , utrzymując ją w naprężeniu, przytem promień, przechodzący przez punkt zetknięcia, obraca się ze stałą szybkością kątową  $\omega$ . Wyznaczyć przyspieszenie końca nici i okazać, że odcinek, łączący ten koniec z punktem, położonym na owym promieniu w odległości średnicy koła od środka, wyraża przyspieszenie w odpowiedniej skali co do wielkości i kierunku.

Prz. 6. Punkt posiada przyspieszenie równoległe do osi  $y$  i proporcjonalne do kwadratu promienia krzywizny toru, a przebiegając przez początek układu  $O$ , posiadał szybkość  $v_0$ , skierowaną według osi  $x$ ; promień krzywizny toru w  $O$  wynosi  $a$ . Wyznaczyć równanie toru.

Należy zastosować oczywiste związki

$$p_y \frac{dx}{ds} = \frac{v^2}{\rho}, \quad p_y \frac{dy}{ds} = \frac{dv}{dt}.$$

Z pierwszego wynika, że  $\rho = \frac{av}{v_0}$ , a z drugiego, że  $v = v_0 e^{\frac{y}{a}}$ . Wstawi-

wszy  $v = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt}$ , otrzymamy przez całkowanie równanie szukane  $y = -a \lg \cos\left(\frac{x}{a}\right)$ . Krzywa ta jest symetryczna względem osi  $y$  i posiada asymptoty  $x = \frac{\pi a}{2}$ ,  $x = -\frac{\pi a}{2}$ .

Prz. 7. Przyspieszenie punktu ruchomego  $A$  posiada dwie składowe, przechodzące przez stałe punkty  $O_1$ ,  $O_2$  i odwrotnie proporcjonalne do odległości od tych punktów; współcz. proporcjonalności  $= k$ .

Tor przechodzi przez środek  $O$  odcinka  $O_1O_2$ , szybkość jest stała co do wielkości, i  $O_1O_2=2a$ . Wyznaczyć tor punktu i szybkość.

Oczywiście  $p_t=0$ , czyli  $p_x \frac{dx}{ds} + p_y \frac{dy}{ds} = 0$ , co się przekształci łatwo na  $\frac{\cos \vartheta_1 dx + \sin \vartheta_1 dy}{r_1} + \frac{\cos \vartheta_2 dx + \sin \vartheta_2 dy}{r_2} = 0$ , gdzie  $r_1, r_2$  oznaczają promienie wodzące  $O_1A$  i  $O_2A$ , a  $\vartheta_1, \vartheta_2$  kąty, które te promienie tworzą z osią  $x$ . Licznik pierwszego ułamka jest to rzut łuku elementarnego  $ds$  na  $r_1$ , a zatem  $=dr_1$ , tak samo licznik drugiego  $=dr_2$ , otrzymamy zatem  $r_1 r_2 = a^2$ . Równanie to wskazuje, że torem jest lemniskata.

Przyspieszenie  $p = \frac{2kr}{a^2}$ , gdzie  $r$  oznacza promień  $OA$ . Aby wyznaczyć szybkość stosujemy wzór na  $p_n$  do punktu przecięcia toru z osią  $x$  (promień krzywizny wyznaczaliśmy w prz. 7 par. 37, gdzie jednak oznaczenia są odmienne). Wypadnie  $v^2 = \frac{4k}{3}$ .

**58. Współrzędne biegunowe.** Gdy równania ruchu są dane we współrzędnych biegunowych, a pragniemy wyznaczyć przyspieszenie, to wyznaczamy  $y$  naprzód rzuty jego na promień wodzący i na prostą  $u$ , prostopadłą do promienia, jak to czyniliśmy dla szybkości (par. 17).

Rzuty te oznaczmy przez  $p_r$  i  $p_\varphi$ . Każdy z nich jest oczywiście równy sumie rzutów składowych  $p_x$  i  $p_y$  na odpowiednią prostą, a więc będzie

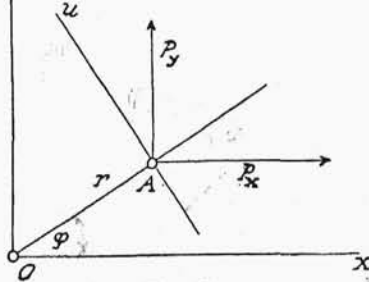


Fig. 37.

$$p_r = p_x \cos \varphi + p_y \sin \varphi$$

$$+ p_\varphi = -p_x \sin \varphi + p_y \cos \varphi,$$

albo

$$p_r = \frac{d^2x \cos \varphi + d^2y \sin \varphi}{dt^2} \dots \dots \dots (1)$$

$$p_\varphi = \frac{-d^2x \sin \varphi + d^2y \cos \varphi}{dt^2} \dots \dots \dots (2).$$

Aby wzory te przekształcić odpowiednio do celów naszych, różniczkujemy dwa razy równania  $x=r \cos \varphi$  i  $y=r \sin \varphi$ , uważając przytem zarówno  $r$ , jak i  $\varphi$  za funkcje zmiennej  $t$ . Wypadnie

$$d^2x = \cos \varphi d^2r - 2 \sin \varphi d\varphi dr - r \cos \varphi d\varphi^2 - r \sin \varphi d^2\varphi \dots (3)$$

$$d^2y = \sin \varphi d^2r + 2 \cos \varphi d\varphi dr - r \sin \varphi d\varphi^2 + r \cos \varphi d^2\varphi \dots (4).$$

Mnożąc (3) przez  $\cos \varphi$ , a (4) przez  $\sin \varphi$  i dodając, znajdziemy, że licznik prawej strony (1) jest równy  $d^2r - r d\varphi^2$ , a zatem

$$p_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \quad \dots \quad (5).$$

Pomnóżmy następnie (3), (4) odpowiednio przez  $-\sin \varphi$ ,  $\cos \varphi$  i dodajmy; znajdziemy, że licznik prawej strony (2) jest równy  $2d\varphi dr + r d^2\varphi$ , a zatem

$$p_\varphi = 2 \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} + r \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \dots \quad (6).$$

Wzorowi temu nadamy jeszcze inną postać. Oczywiście

$p_\varphi = \frac{1}{r} \left( 2r \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + r^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right)$ , a to, co stoi w nawiasie, jest pochodną od  $r^2 \frac{d\varphi}{dt}$ , zatem

$$p_\varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) \quad \dots \quad (7).$$

Mając równania ruchu  $r = f(t)$  i  $\varphi = g(t)$ , możemy przy pomocy wzorów powyższych wyznaczyć  $p_r$  i  $p_\varphi$ , a gdy mamy te składowe, to mamy i przyspieszenie  $p$  co do wielkości i kierunku.

Prz. 1. Równania ruchu punktu są  $r = ae^{\omega t}$ ,  $\varphi = \omega t$ ; wyznaczyć przyspieszenie. Odp. Przyspieszenie jest prostopadłe do promienia wodzącego i równe  $2\omega^2 r$ .

§ 4. Prz. 2. Punkt  $A$  obiega koło o promieniu  $a$ , przyczem przyspieszenie jest skierowane do stałego punktu  $O$ , położonego na obwodzie. Wyznaczyć przyspieszenie w funkcji promienia wodzącego  $OA = r$ . Odp. Obieramy  $O$  za biegun, a średnicę za oś biegunową;  $p_\varphi = 0$ , a zatem  $r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C$ , gdzie  $C$  jest stałą dowolną.  $p = p_r = -\frac{8C^2 a^2}{r^5}$ .

Prz. 3. Torem punktu jest elipsa, a przyspieszenie jest wciąż zwrócone do jej ogniska  $F$ ; okazać, że jest ono odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości od  $F$ .

Jeżeli  $F$  obierzemy za biegun, a wielką oś elipsy za oś biegunową, to równanie toru będzie  $r = \frac{b^2}{a - c \cos \varphi}$ . Można skrócić rachunek, wprowadzając zamiast  $r$  nową zmienną  $u = \frac{1}{r}$ .

Prz. 4. Przyspieszenie punktu ruchomego  $M$  jest wciąż skierowane do stałego punktu  $O$  i równe  $\frac{k^2}{r^3}$ , gdzie  $r$  oznacza odległość  $OM$ , a  $k^2$  jest współczynnikiem proporcjonalności. Punkt  $M$  wyruszył z położenia  $A$ , odległego o  $a$  od  $O$  z szybkością  $\frac{k}{a}$ , tworzącą z  $OA$

kąt  $45^\circ$ . Wyznaczyć tor punktu  $M$ . Odp. Równanie toru  $r = ae^{\frac{\varphi}{2}}$ , jeżeli  $AO$  jest osią biegunową, a  $O$  biegunem.

Prz. 5. Punkt posiada stałą szybkość  $a\omega$ , a jego promień wodzący  $r$ , wyprowadzony ze stałego bieguna  $O$ , obraca się z szybkością kątową  $\frac{r\omega}{a}$ . Wyznaczyć tor i przyspieszenie. Odp. Torem jest lemniskata, a przyspieszenie  $= 3\omega^2 r$ .

**59. Ruch względny.** Z kolei rzeczy wypada teraz rozwiązać zagadnienie takie: dany jest ruch punktu  $M$  względem układu  $S$ , a także ruch układu  $S$  względem innego układu, który uważamy za nieruchomy; chodzi o wyznaczenie przyspieszenia punktu  $M$  w ruchu bezwzględnym.

Przypuśćmy, że w chwili  $t$  punkt  $M$  zajmuje punkt  $A$  układu  $S$ . Szybkość bezwzględna  $v$  punktu  $M$  posiada dwie składowe, a mianowicie szybkość unoszenia  $u$  i szybkość względną  $w$ . Zobaczmy, jakie przyrosty każda z tych składowych przybierze w ciągu następnego okresu  $dt$ .

W chwili  $t + dt$  punkt  $M$  zajmie nowy, nieskończenie bliżki, punkt układu  $S$ , np. punkt  $B$ , który posiada już obecnie szybkość, różniącą się od szybkości punktu  $A$ , czyli od  $u$ , o nieskończenie mały przyrost geometryczny  $\delta u_1$ . Gdy więc  $M$  przechodzi z  $A$  do  $B$ , to jego szybkość unoszenia musi przede wszystkim przybrać ten przyrost  $\delta u_1$ .

Jeżeli ruch układu  $S$  jest postępowy, to szybkości punktów  $A$  i  $B$  nie różnią się ani co do wielkości, ani co do kierunku, a więc w tym przypadku  $\delta u_1 = 0$ .

Lecz w ciągu  $dt$  sek. szybkość punktu  $B$  się zmieni, a mianowicie przybierze nieskończenie mały przyrost geometryczny, który oznaczmy przez  $\delta u_2$ . Oczywiście szybkość unoszenia punktu  $M$  przybierze i ten przyrost  $\delta u_2$ . Szybkości nieskończenie bliskich punktów  $A$  i  $B$  różnią się nieskończenie mało co do wielkości i kierunku, a różnice pomiędzy wielkościami oraz kierunkami przyrostów, które te szybkości przybiorą w ciągu czasu  $dt$ , są nieskończenie małymi wyższych rzędów. Z tego wynika, że możemy  $\delta u_2$  uważać także za przyrost szybkości punktu  $A$  w czasie  $dt$ .

Zobaczmy teraz, jakie przyrosty przybierze szybkość względna  $w$ . Tor względny punktu  $M$  przechodzi przez punkty  $A$  i  $B$ , i szybkość względna w chwili  $t$  posiada kierunek ele-

mentu  $AB$ . Element ten jest ruchomy i w chwili  $t+dt$  zajmie w przestrzeni jakieś nowe położenie  $A'B'$  nierównoległe do  $AB$ . Oczywiście więc skutkiem tego przesunięcia szybkość względna w punkcie  $M$  zmieni kierunek, czyli przybierze przyrost geometryczny  $\delta w_1$ ; jest to przyrost nieskończenie mały, bo odchylenie elementu  $AB$  od pierwotnego położenia jest nieskończenie małe.

Jeżeli ruch układu  $S$  jest postępowy, to prosta  $A'B'$  jest równoległa do  $AB$ , i  $\delta w_1 = 0$ .

Szybkość względna  $w$  przybierze jeszcze inny przyrost, pochodzący stąd, że szybkość ta zmienia się pod względem wielkości, i że tor względny posiada pewną krzywiznę. Przyrost ten oznaczmy przez  $\delta w_2$ . Jest on równy zeru, jeżeli ruch względny punktu  $M$  jest prostoliniowy i jednostajny.

W chwili  $t+dt$  szybkość bezwzględna punktu  $M$  będzie sumą geometryczną szybkości  $u$  i  $w$  oraz tych wszystkich przyrostów, które składowe te otrzymały w okresie  $dt$ . Wypadkową szybkości  $u$  i  $w$  jest szybkość  $v$ , a wypadkową przyrostów  $\delta u_1, \delta u_2, \delta w_1, \delta w_2$  oznaczmy przez  $\delta v$ . Oczywiście  $\delta v$  jest to przyrost geometryczny, który w czasie  $dt$  otrzymała szybkość bezwzględna  $v$ , a zatem przyspieszenie punktu  $M$  w ruchu bezwzględnym, czyli przyspieszenie bezwzględne, ma kierunek tego przyrostu  $\delta v$  a co do wielkości jest równe  $\frac{\delta v}{dt}$ .

Jest rzeczą równie oczywistą, że to przyspieszenie posiada cztery składowe; kierunki ich są zgodne z kierunkami owych czterech przyrostów, a wielkości wynoszą

$$\frac{\delta u_1}{dt} = p_1, \quad \frac{\delta u_2}{dt} = p_2, \quad \frac{\delta w_1}{dt} = q_1, \quad \frac{\delta w_2}{dt} = q_2.$$

Składowe  $p_1$  i  $q_1$  nazwiemy tymczasem przyspieszeniami Coriolisa. Mają one pewną ważną wspólną właściwość: obydwie są równe zeru, gdy ruch unoszenia jest postępowy, bo w takim razie przyrosty  $\delta u_1$  i  $\delta w_1$  są zerami. Z tego wynika, że gdyby do ruchu, który układ  $S$  posiada istotnie, dołączył się jeszcze jakiś ruch postępowy, to przyspieszenia Coriolisa nie uległyby zmianie. Przy wyznaczaniu tych przyspieszeń nie potrzeba zwracać uwagi na ruch postępowy układu  $S$ . Z okoliczności tej skorzystamy w dalszym ciągu.

Składowa  $p_2$  jest to po prostu przyspieszenie punktu  $A$ , t. j. tego punktu układu  $S$ , który zajmuje obecnie punkt  $M$ . Nazwiemy ją przyspieszeniem unoszenia.

Składowa  $q_2$  jest to przyspieszenie punktu  $M$  w ruchu względnym. Nazwiemy ją przyspieszeniem względnym.

**60. Przyspieszenie Coriolisa.** Jeżeli znamy ruch układu  $S$ , to możemy wyznaczyć przyspieszenie punktu  $A$ , t. j. przyspieszenie unoszenia  $p_2$  punktu  $M$ . Jeżeli znamy ruch względny punktu  $M$ , to możemy wyznaczyć jego przyspieszenie względne  $q_2$ . Chodzi więc tylko o to, jak się wyznacza obydwa przyspieszenia Coriolisa.

Rozwiążemy to zagadnienie naprzód w pewnym przypadku szczególnym. Założymy mianowicie, że układ  $S$  jest płaski i porusza się w swej płaszczyźnie, i że w tej samej płaszczyźnie porusza się punkt  $M$ .

Rozłożmy ruch układu  $S$  na dwa ruchy składowe, na ruch postępowy o szybkości punktu  $A$  i na ruch obrotowy około punktu  $A$ . Pierwszy z tych ruchów nie wywiera wpływu na przyspieszenie Coriolisa, możemy więc pominąć go całkowicie i uważać, że układ  $S$  obraca w chwili obecnej około punktu  $A$  z szybkością kątową, dajmy na to,  $\omega$ .

Tak więc obecnie punkt  $M$  zajmuje nieruchomy punkt  $A$  i posiada szybkość względną  $w$ . Za  $dt$  sek.  $M$  dojdzie do punktu  $B$ , leżącego na linii tej szybkości w odległości  $w dt$  od  $A$ . Szybkość punktu  $B$  wynosi obecnie  $w dt \cdot \omega$ , i temu właśnie jest równy przyrost szybkości  $\delta u_1$ , a przyspieszenie  $p_1 = w\omega$ . Oczywiście szybkość punktu  $B$  jest prostopadła do szybkości względnej  $w$  i zwrócona w tę stronę, w którą dąży koniec szybkości względnej  $w$  skutkiem obrotu układu  $S$  około punktu  $A$ .

W czasie  $dt$  układ  $S$  obróci się około  $A$  o kąt  $\omega dt$ , i o tyle zmieni się kierunek szybkości względnej  $w$ . Koniec jej zatoczy łuk  $\omega dt \cdot w$ . Możemy ten nieskończenie krótki łuk uważać za przyrost geometryczny szybkości  $w$ , czyli za  $\delta w_1$ , a zatem drugie przyspieszenie Coriolisa  $q_1 = w\omega$  i posiada oczywiście ten sam kierunek, co i pierwsze.

Widzimy, że  $p_1$  i  $q_1$  są zgodne co do kierunku i wielkości; wypadkowa ich, równa  $2w\omega$ , jest prostopadła do szybkości względnej punktu  $M$  i zwrócona w tę stronę, w którą dąży koniec tej szybkości skutkiem ruchu obrotowego układu  $S$  około



punktu  $A$ . W dalszym ciągu będzie mowa tylko o tej wypadkowej, i ją właśnie będziemy nazywali *przyśpieszeniem Coriolisa*.

Przy pomocy twierdzeń powyższych można od razu napisać wzory na  $p_r$  i  $p_\varphi$ , czyli na przyśpieszenie punktu w kierunku promienia wodzącego i w kierunku prostopadłym, wzory, które w par. 58 otrzymaliśmy, jako wynik dość długiego rachunku.

Uważamy, że promień wodzący obraca się z szybkością kątową  $\frac{d\varphi}{dt}$  około bieguna  $O$ , a punkt  $M$  wędruje po promieniu wodzącym z szybkością względną  $\frac{dr}{dt}$ . Przyśpieszenie bezwzględne punktu  $M$  posiada składowe następujące:

(1) Przyśpieszenie unoszenia, t. j. przyśpieszenie tego punktu  $A$  promienia wodzącego, w którym znajduje się obecnie punkt  $M$ . Torem punktu  $A$  jest koło o promieniu  $OA = r$ , a szybkość wynosi  $r \frac{d\varphi}{dt}$ . Przyśpieszenie jego rozłożymy od razu na składowe w kierunku  $OA$  i w kierunku prostopadłym do  $OA$ , czyli na składową normalną i styczną. Pierwsza jest równa  $-\frac{1}{r} \left( r \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = -r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2$ ; kładziemy znak  $-$ , gdyż składowa ta jest zwrócona do bieguna. Składowa styczna  $= \frac{d}{dt} \left( r \frac{d\varphi}{dt} \right) = r \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ , bo promień  $r$  jest dla punktu  $A$  wielkością stałą.

(2) Przyśpieszenie względne jest oczywiście równe  $\frac{d^2r}{dt^2}$  i skierowane według toru względnego, czyli promienia wodzącego.

(3) Przyśpieszenie Coriolisa, prostopadłe do szybkości względnej, czyli do promienia wodzącego, i równe  $2 \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dr}{dt}$ .

Zebrawszy wszystkie składowe w kierunku promienia wodzącego oraz w kierunku prostopadłym, otrzymamy wzory, znane już z par. 58.

Prz. 1. Tarcza okrągła o promieniu  $a$  obraca się około środka ze stałą szybkością kątową  $\omega$ , a brzegiem tarczy biegnie punkt  $M$  ze stałą szybkością względną  $w$ . Wyznaczyć przyśpieszenie bezwzględne punktu  $M$ . Odp. Przyśpieszenie to jest skierowane do środka tarczy

*Terme*

i równe  $(a\omega + 2w)\omega + \frac{w^2}{a}$ . Jaka powinna być szybkość względna, aby przyspieszenie było równe zeru?

63 Prz. 2. Sztaba obraca się około swego końca z szybkością kątową stałą. Z końca tego wyszedł punkt  $M$  z początkową szybkością równą zeru i wędruje po sztabie ze stałym przyspieszeniem  $p$ . Wyznaczyć przyspieszenie bezwzględne, które posiadał punkt  $M$  w chwili, gdy tworzyło ze sztabą kąt  $45^\circ$ . Odp.  $4p(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ .

64 Prz. 3. Układ  $S$  obraca się około punktu  $O$  ze stałą szybkością kątową  $\omega$ , a szybkość względna w punkcie  $M$  jest stała co do wielkości. Jaki powinien być tor względny punktu  $M$ , aby jego przyspieszenie bezwzględne było stale skierowane do punktu  $O$ ? Odp. Koło o promieniu  $\frac{w}{2\omega}$ , położone dowolnie, albo koło o promieniu dowolnym, za-  
toczone z  $O$ .

65 Prz. 4. Punkt  $M$  posiada ruch harmoniczny na prostej  $x$ ; środkiem tego ruchu jest punkt  $O$ , okres wynosi  $\frac{2\pi}{\omega}$ , a amplituda  $2a$ . Prosta  $x$  jest ruchoma, a mianowicie obraca się około  $O$  z szybkością kątową  $\omega$ . Dowieść, że koniec przyspieszenia bezwzględnego punktu  $M$  zatacza około niego okrąg o promieniu  $2a\omega^2$ . Prócz tego wyznaczyć tor bezwzględny punktu  $M$ .

Prz. 5. Tarcza okrągła toczy się po linii prostej ze stałą szybkością kątową  $\omega$ . Wyznaczyć przyspieszenie punktu tarczy, odległego od środka o  $r$ . Odp. Wynosi ono  $r\omega^2$  i jest skierowane do środka (zob. prz. 3 par. 53).

Prz. 6. Koło o promieniu  $a$  toczy się po prostej  $x$ ; w danej chwili środek  $O$  posiada szybkość  $v$  oraz przyspieszenie  $p$ , i koło styka się z prostą  $x$  w punkcie  $A$ . Wyznaczyć przyspieszenie punktu  $B$ , położonego tak na obwodzie, że kąt  $AOB = \vartheta$ . Odp.  $p_x = \frac{v^2}{a} \sin \vartheta + p(1 - \cos \vartheta)$ ,  $p_y = \frac{v^2}{a} \cos \vartheta + p \sin \vartheta$ .

61. Przypadek ogólny. Dajmy na to, że układ  $S$  posiada ruch obrotowy około osi  $z$ , i szybkość względna punktu  $M$  jest równoległa do tej osi. Punkty  $A$  i  $B$  układu  $S$ , które  $M$  zajmuje w chwilach  $t$  i  $t + dt$ , leżą na równoległej do osi, a zatem posiadają szybkości równe i równoległe. Z tego wynika, że przyrost  $\delta u_1$  szybkości unoszenia i przyspieszenie  $p_1$  są zerami. W czasie  $dt$  szybkość względna, jako równoległa do osi, nie zmieni kierunku skutkiem ruchu unoszenia, a zatem przyrost szybkości względnej  $\delta w_1$  i przyspieszenie  $q_1$  są także zerami.

Tak więc w tym przypadku przyspieszenie Coriolisa jest równe zeru.

Rozważymy teraz przypadek ogólny. Przypuśćmy, że układ  $S$  posiada ruch śrubowy; oś oznaczmy przez  $z$ , a szybkości postępową i kątową przez  $u$  i  $\omega$ . Przypuśćmy jeszcze, że szybkość względna  $w$  punktu  $M$  tworzy w rozważanej chwili z osią  $z$  kąt  $\vartheta$ .

Ruch postępowy układu, jako nie mający wpływu na przyspieszenie Coriolisa, możemy pominąć całkowicie, będziemy więc uważali, że układ posiada tylko ruch obrotowy około osi  $z$ .

Szybkość  $w$  rozłożymy na dwie składowe w kierunkach równoległym i prostopadłym do osi  $z$ ; są one odpowiednio równe  $w \cos \vartheta$  i  $w \sin \vartheta$ . Gdyby istniała tylko pierwsza, to przyspieszenie Coriolisa byłoby zerem, a więc przyspieszenie to jest od niej niezależne, i możemy ją również pominąć.

Tym sposobem sprowadziliśmy przypadek ogólny do przypadku szczególnego, który rozważyliśmy już w paragrafie poprzedzającym.

Poprowadźmy przez obecne położenie punktu  $M$  płaszczyznę  $A$ , prostopadłą do  $z$  i przecinającą tę prostą w punkcie  $O$ . Wyznaczając przyspieszenie Coriolisa, możemy uważać, że płaski układ  $S$  obraca się w płaszczyźnie  $A$  około punktu  $O$ , i że w tejże płaszczyźnie porusza się punkt  $z$  szybkością względną  $w \sin \vartheta$ . Przyspieszenie Coriolisa wynosi zatem  $2w\omega \sin \vartheta$ , leży w płaszczyźnie  $A$ , jest prostopadłe do składowej  $w \sin \vartheta$  i zwrócone w tę stronę, w którą dąży koniec tej składowej skutkiem ruchu obrotowego około obecnego położenia punktu  $M$ ; jest ono także prostopadłe do szybkości względnej  $w$  i do osi  $z$ .

**62. Dowód analityczny.** Przytaczam jeszcze piękny dowód analityczny twierdzenia o przyspieszeniu w ruchu względnym, zapożyczony z dzieła E. Villié „Traité de Cinématique”. Może być, że dla niektórych czytelników dowód ten będzie łatwiejszy od poprzedniego. Mimochodem poznamy także dowód analityczny twierdzenia o równoległoboku szybkości.

Przystąpimy od razu do przypadku najogólniejszego.

Niech więc będzie sztywny układ  $S$ , poruszający się jakkolwiek. Obieramy dwa układy współrzędnych, jeden nieruchomy, początek jego oznaczmy przez  $O$ , a osi przez  $x, y, z$ , drugi należący do układu  $S$  i poruszający się wraz z nim; początek tego drugiego oznaczmy przez  $A$ , a osi przez  $\xi, \eta, \zeta$ .

Niech współrzędne punktu  $A$  w układzie nieruchomym będą  $x_0, y_0, z_0$ , a kosynusy kątów, które osi  $\xi, \eta, \zeta$  tworzą z osiami nieruchomymi, odpowiednio  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ . Wszystkie te dziewięć wielkości zmieniają się podczas ruchu układu  $S$ , są to więc funkcje czasu. Niech będzie jeszcze punkt  $M$ , poruszający się jakkolwiek względem układu  $S$ . Współrzędne tego punktu w układzie nieruchomym oznaczmy przez  $x, y, z$ , a w ruchomym przez  $\xi, \eta, \zeta$ .

Oczywiście współrzędna  $x$  jest równa sumie rzutów odcinków  $OA$  i  $AM$  na oś  $x$ , a ponieważ ten drugi odcinek można uważać za sumę geometryczną odcinków  $\xi, \eta, \zeta$ , zatem  $x$  jest sumą rzutów odcinków  $OA, \xi, \eta, \zeta$  na oś  $x$ . Wynikają stąd następujące wzory przejścia od układu stałego do ruchomego.

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta \\ y &= y_0 + b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta \\ z &= z_0 + c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1).$$

Różniczkując te równania względem  $t$ , otrzymamy

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + \frac{da_1}{dt}\xi + \frac{da_2}{dt}\eta + \frac{da_3}{dt}\zeta + a_1\frac{d\xi}{dt} + a_2\frac{d\eta}{dt} + a_3\frac{d\zeta}{dt} \dots \dots (2),$$

oraz dwa równania analogiczne.

Oznaczmy  $\frac{dx}{dt}$  przez  $\dot{v}_x$ , sumę pierwszych czterech wyrazów prawej strony przez  $u_x$ , sumę trzech wyrazów pozostałych przez  $w_x$  i wprowadzimy oznaczenia analogiczne do dwóch równań następnych. Otrzymamy

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= u_x + w_x \\ \dot{v}_y &= u_y + w_y \\ \dot{v}_z &= u_z + w_z. \end{aligned}$$

Oczywiście  $\dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{v}_z, u_x, u_y, u_z, w_x, w_y, w_z$  są odpowiednio rzutami na osi nieruchome pewnych wektorów  $\dot{v}, u, w$ , z których pierwszy jest wypadkową dwóch pozostałych. Zobaczymy, jakie znaczenie cynematyczne posiadają te wektory.

Pierwszy z nich  $\dot{v}$  jest oczywiście szybkością bezwzględną punktu  $M$ . Aby wykryć rolę wektora  $u$  oznaczmy przez  $B$  ten punkt układu  $S$ , który obecnie zajmuje punkt  $M$ . Współrzędne punktu  $B$  w obydwóch układach są takie same, jak współrzędne punktu  $M$ , z tą jedynie różnicą, że tu  $\xi, \eta, \zeta$  są stałe. Znajdziemy więc składową szybkości punktu  $B$  w kierunku osi  $x$ ,



zakładając w (2), że  $\frac{d\xi}{dt}$ ,  $\frac{d\eta}{dt}$ ,  $\frac{d\zeta}{dt}$  są zerami; wypadnie  $u_x$ . Z tego wynika, że  $u$  jest szybkością punktu  $B$ , czyli szybkością unoszenia punktu  $M$ .

Przypuśćmy teraz, że układ  $S$  jest nieruchomy, a zatem  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  i wszystkie kosynusy kierunkowe są stałe, a ich pochodne są zerami. Zakładając to w (2), przekonamy się, że w tym razie składowe szybkości w kierunkach osi stałych są odpowiednio równe  $w_x$ ,  $w_y$ ,  $w_z$ , a więc  $w$  jest to szybkość punktu  $M$  względem układu  $S$ , uważanego za nieruchomy, czyli szybkość względna. Jest to i skądinąd oczywiste. Pochodne  $\frac{d\xi}{dt}$ ,  $\frac{d\eta}{dt}$ ,  $\frac{d\zeta}{dt}$  są to składowe szybkości względnej punktu  $M$  w kierunkach osi  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ; tworzą one z osią  $x$  kąty, których kosynusy są odpowiednio równe  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , a zatem suma trzech ostatnich wyrazów w (2) jest równa rzutowi szybkości względnej punktu  $M$  na oś  $x$ .

Dowiedliśmy więc twierdzenie, że szybkość bezwzględna punktu  $M$  jest wypadkową szybkości względnej i szybkości unoszenia.

Aby otrzymać twierdzenie o przyspieszeniu różniczkujemy (2) względem  $t$ . Wypadnie

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_0}{dt^2} + \frac{d^2a_1}{dt^2}\xi + \frac{d^2a_2}{dt^2}\eta + \frac{d^2a_3}{dt^2}\zeta + a_1\frac{d^2\xi}{dt^2} + a_2\frac{d^2\eta}{dt^2} + a_3\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \\ + 2\left(\frac{da_1}{dt}\cdot\frac{d\xi}{dt} + \frac{da_2}{dt}\cdot\frac{d\eta}{dt} + \frac{da_3}{dt}\cdot\frac{d\zeta}{dt}\right) \dots \dots \dots (3). \end{aligned}$$

Oznaczmy lewą stronę przez  $p_x$ , sumę czterech pierwszych wyrazów prawej strony przez  $q_x$ , sumę trzech dalszych wyrazów przez  $r_x$ , a wyrażenie w nawiasie przez  $s_x$ . Uczyniwszy to samo w dwóch równaniach pozostałych, otrzymamy

$$\begin{aligned} p_x &= q_x + r_x + 2s_x \\ p_y &= q_y + r_y + 2s_y \\ p_z &= q_z + r_z + 2s_z. \end{aligned}$$

Z tego wynika, że wektor  $p$  jest wypadkową wektorów  $q$ ,  $r$  i  $2s$ .

Rozumując, jak poprzednio, dojdziemy z łatwością, co oznaczają wektory  $p$ ,  $q$  i  $r$ . Pierwszy jest to przyspieszenie bezwzględne punktu  $M$ , drugi jest przyspieszeniem punktu  $B$ , czyli

przyśpieszeniem unoszenia punktu  $M$ , trzeci przyśpieszeniem względnym punktu  $M$ . Pozostaje jeszcze zbadać, co to jest wektor  $s$ .

Obieramy taki punkt  $C$  układu  $S$ , aby odcinek  $AC$  co do wielkości i kierunku był zgodny z szybkością względną w punkcie  $M$ . Współrzędne punktu  $C$  w układzie ruchomym będą  $\frac{d\xi}{dt}$ ,  $\frac{d\eta}{dt}$ ,  $\frac{d\zeta}{dt}$ , a współrzędne w układzie nieruchomym oznaczmy przez  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ . Oczywiście

$$x_1 = x_0 + a_1 \frac{d\xi}{dt} + a_2 \frac{d\eta}{dt} + a_3 \frac{d\zeta}{dt}$$

i t. d. Aby wyznaczyć szybkość punktu  $C$  różniczkujemy te równania, pamiętając, że pochodne  $\frac{d\xi}{dt}$ ,  $\frac{d\eta}{dt}$ ,  $\frac{d\zeta}{dt}$  są tu wielkościami stałymi. Otrzymamy

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + \frac{da_1}{dt} \cdot \frac{d\xi}{dt} + \frac{da_2}{dt} \cdot \frac{d\eta}{dt} + \frac{da_3}{dt} \cdot \frac{d\zeta}{dt},$$

a zatem

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + s_x$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + s_y$$

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{dz_0}{dt} + s_z.$$

Tak więc szybkość punktu  $C$  posiada dwie składowe; jedna z nich jest zgodna co do wielkości i kierunku z szybkością punktu  $A$ , a druga z wektorem  $s$ .

Rozłóżmy ruch układu  $S$  na dwa ruchy składowe, postępowy i obrotowy. Szybkość ruchu postępowego niech będzie zgodna co do wielkości i kierunku z szybkością punktu  $A$ ; w takim razie oś  $n$  ruchu obrotowego przechodzi przez ten punkt  $A$ . Jest rzeczą jasną, że wyżej wymienione składowe szybkości punktu  $C$  pochodzą odpowiednio z tych ruchów postępowego i obrotowego. Dzięki tej okoliczności możemy wyrazić składową  $s$  w sposób następujący.

Oznaczmy szybkość kątową ruchu obrotowego przez  $\omega$ , a kąt, który tworzy odcinek  $AC$ , lub szybkość względną  $w$ , z osią  $n$  przez  $\vartheta$ . W takim razie odległość punktu  $C$  od osi  $n$  wynosi  $w \sin \vartheta$  i  $s = w \omega \sin \vartheta$ . Tak więc trzecia składowa przy-

śpieszenia bezwzględnego punktu  $M$  jest równa  $2w\omega\sin\vartheta$  i oczywiście jest ona prostopadła do osi ruchu obrotowego, lub śrutowego, a także do szybkości względnej. Wszystko to jest zgodne z wynikami, do których doszliśmy w paragrafach poprzedzających.

Prz. Ciało biegnie wzdłuż południka ziemskiego z szybkością stałą  $w$ . Przy jakiej szybkości  $w$  przyśpieszenie bezwzględne ciała jest niezależne od szerokości geograficznej, i ile wynosi przyśpieszenie w tym razie? Odp.  $w = \frac{a\omega}{\sqrt{2}}$ , gdzie  $a$  oznacza promień ziemski, a  $\omega$  szybkość kątową ziemi; inaczej  $w = 336$  metrów na sekundę. Przyśpieszenie  $= \frac{3a\omega^2}{2}$ .