

III. PRZYŚPIESZENIE PUNKTU.

50. Przyrost geometryczny. Musimy teraz cofnąć się do rozdziału wstępnego, aby dopełnić w pewnym kierunku podane tam krótkie wiadomości o wektorach.

Wyobraźmy sobie jakikolwiek wektor $P = OA$, który z biegiem czasu zmienia się co do wielkości i kierunku, ale którego początek O jest nieruchomy. Powiemy, że wektor P jest funkcją czasu. Koniec A wektora $P = f(t)$ zakreśla w przestrzeni pewną linię.

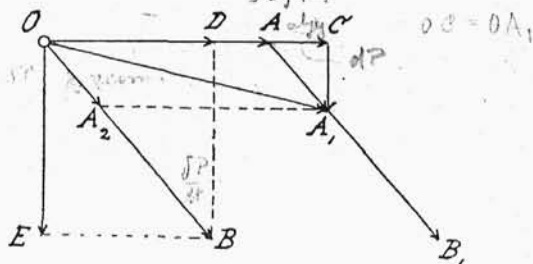


Fig. 33.

Przypuśćmy, że w chwili t był on w A , a w chwili t_1 w A_1 . Rozłóżmy wektor OA_1 na dwie składowe, z których jedną niech będzie OA ; drugą jest, dajmy na to, OA_2 . Aby otrzymać nową wartość OA_1 wektora P , trzeba do poprzedniej wartości OA dodać geometrycznie OA_2 , możemy więc powiedzieć, że wektor P w czasie $t_1 - t$ otrzymał przyrost geometryczny OA_2 albo AA_1 , gdyż odcinki AA_1 i OA_2 są równe i jednakowo skierowane.

Należy odróżniać przyrost geometryczny od przyrostu algebraicznego. Odmierzmy od O na prostej OA długość OC równą OA_1 ; otrzymamy odcinek AC , którego długość wyraża przyrost algebraiczny wektora P w czasie $t_1 - t$.

Jeżeli wektor P zmieniał się tylko pod względem wielkości, zachowując kierunek poprzedni, to przyrost geometryczny jest równy przyrostowi algebraicznemu. Jeżeli wektor P zmienił się jedynie co do kierunku, zachowując poprzednią wielkość, to przyrost algebraiczny jest zerem, gdy przyrost geometryczny jest różny od zera.

Niech będzie jeszcze w przestrzeni jakakolwiek prosta nieruchoma x . Rzut wektora P na tę prostą oznaczmy przez P_x , a rzuty punktów będziemy oznaczali literami oryginałów, kreskując je dla odróżnienia.

W chwili t rzut wektora P na prostą x wynosił $O'A'$, a w chwili t_1 $O'A'_1$. Przyrost rzutu wynosi $A'A'_1$ i jest oczywiście równy rzutowi przyrostu geometrycznego AA_1 .

51. Pochodna geometryczna. Przypuśćmy teraz, że okres $t_1 - t$ jest nieskończenie krótki; oznaczmy go przez dt . W takim razie OA_1 (fig. 33) różni się nieskończenie mało od OA zarówno co do wielkości, jak i kierunku. Przyrost AC nazwiemy teraz *przyrostem elementarnym algebraicznym* i oznaczmy przez dP , a przyrost OA_2 lub AA_1 będziemy nazywali *przyrostem elementarnym geometrycznym*, oznaczając go dla odróżnienia od poprzedniego przez δP .

Jeżeli wektor P zmienia się tylko co do wielkości, to $\delta P = dP$, jeżeli zaś P zmienia się tylko co do kierunku, to $dP = 0$.

Wprowadzimy teraz nowy wektor, zgodny co do kierunku z elementarnym przyrostem geometrycznym, a co do wielkości równy $\frac{\delta P}{dt}$. Wektor ten nazywa się *po pochodną geometryczną wektora P* ; reprezentuje go odcinek OB lub AB_1 , zawierający $\frac{\delta P}{dt}$ obranych jednostek długości.

Oczywiście pochodną geometryczną można uważać za szybkość końca wektora P . Z drugiej strony i szybkość każdego punktu ruchomego jest *po pochodną geometryczną*. Połączmy mianowicie ruchomy punkt A z dowolnie obranym nieruchomym punktem O i uważajmy promień wodzący OA za wektor. Pochodna geometryczna tego wektora będzie oczywiście szybkością punktu A .

Jeżeli wektor P zmienia się tylko co do wielkości, to po-

chodna geometryczna posiada kierunek wektora P , albo odwrotny, i jest równa $\frac{dP}{dt}$.

Rzut elementarnego przyrostu geometrycznego na prostą x jest oczywiście przyrostem elementarnym algebraicznym wektora P_x , a zatem wynosi dP_x , a rzut pochodnej geometrycznej jest równy $\frac{dP_x}{dt}$, gdyż rzuty odcinków, położonych na jednej prostej, są proporcjonalne do oryginałów.

Elementarny przyrost geometryczny AA_1 , jak każdy wektor, możemy rozkładać na wektory składowe. Szczególnie użyteczny bywa rozkład w kierunku OA i w kierunku prostopadłym do OA . Aby otrzymać te składowe prowadzimy z punktu A_1 prostopadłą do OA , ponieważ jednak kąt A_1OA jest nieskończenie mały, możemy więc za prostopadłą uważać łuk A_1C koła, zatoczonego z O promieniem $OA_1 = P + dP$. Z tego wynika, że składowa $AC = dP$, a składowa $CA_1 = (P + dP)d\vartheta$, gdzie $d\vartheta$ oznacza nieskończenie mały kąt A_1OA . Odrzucając nieskończenie małą drugiego rzędu $dP \cdot d\vartheta$, otrzymamy $CA_1 = Pd\vartheta$. Składowa AC nazywa się elementarnym przyrostem promiennym, a składowa CA_1 elementarnym przyrostem stycznym.

Stosownie do tego i pochodna geometryczna OB posiada składowe OD i OE w kierunku OA i w kierunku prostopadłym do OA . Pierwsza nazywa się składową styczną, a druga składową normalną. Z podobieństwa trójkątów OBE i ACA_1 wynika, że składowa styczna jest równa $\frac{dP}{dt}$, a składowa normalna $P \frac{d\vartheta}{dt}$.

Jeżeli szybkość punktu ruchomego uważamy za pochodną geometryczną promienia wodzącego, to owe dwie składowe są znanymi nam z par. 17 składowymi szybkościami w kierunku promienia wodzącego i w kierunku prostopadłym.

Na wstępie do tych rozważań w paragrafie poprzedzającym zrobiliśmy wyraźne zastrzeżenie, że punkt O , czyli początek wektora P , jest nieruchomy. Zastrzeżenie to nie ma w sobie nic istotnego i miało jedynie na celu pewne uproszczenie sprawy. Jeżeli punkt O jest ruchomy, to wszystkie wyniki powyższe zachowują całą swą moc obowiązującą z tą tylko dro-

bną zmianą, że pochodna geometryczna wektora P nie jest szybkością bezwzględną jego końca, lecz szybkością końca względem początku O .

Gdyby twierdzenie to nie było dla kogo oczywiste od pierwszej chwili, to można się o słuszności jego przekonać w sposób następujący. Wyobraźmy sobie inny wektor Q zgodny w każdej chwili co do wielkości i kierunku z wektorem P , ale posiadający początek w punkcie nieruchomym. Wektory P i Q przybierają w każdym okresie przyrosty jednakowe, a zatem i ich pochodne geometryczne są wciąż równe i równoległe, również rzuty tych wektorów i ich przyrostów na dowolną prostą są równe. Z tego wynika, że wywody powyższe, dotyczące przyrostów i pochodnych geometrycznych, są w jednakowym stopniu ważne dla obydwóch wektorów.

Prz. Pochodna geometryczna wektora jest wciąż doń prostopadła; okazać, że wektor zmienia się tylko co do kierunku.

15/12/52. **Przyspieszenie.** Szybkość, którą punkt ruchomy posiada w chwili obecnej, wskazuje, jakie położenie zajmie on w chwili następnej. Jeżeli szybkość jest równa v , to wiadomo, że po upływie dt sek. punkt ruchomy znajdzie się na linii tej szybkości w odległości vdt od położenia obecnego. Nie wiemy wszakże, jaki będzie wówczas stan cynematyczny punktu, czyli jaka będzie jego nowa szybkość. Określa to inny wektor, zwany przyspieszeniem.

Przyspieszenie jest to geometryczna pochodna szybkości, innymi słowy przyspieszenie jest to wektor, pod względem kierunku zgodny z elementarnym przyrostem szybkości, a pod względem wielkości równy stosunkowi tego przyrostu do dt . Oczywiście przyspieszenie leży w płaszczyźnie, przechodzącej przez dwie nieskończenie bliskie styczne do toru, czyli w płaszczyźnie ściśle stycznej do toru.

Oznaczmy przyspieszenie punktu ruchomego w chwili obecnej przez p i przypuśćmy, że jest ono-znane. W takim razie wiemy, że w ciągu następnego okresu dt szybkość otrzyma przyrost geometryczny pdt . Dodając ten przyrost geometrycznie do szybkości obecnej, otrzymamy szybkość, którą będzie miał punkt w chwili następnej.

Gdy szybkość zmienia się tylko co do wielkości, t. j. gdy ruch punktu jest prostoliniowy, to przyspieszenie posiada kie-

runek zgodny z szybkością, albo odwrotny. Jest ono w tym razie równe $\frac{dv}{dt}$, a ponieważ $v = \frac{dx}{dt}$, gdzie x oznacza odległość punktu ruchomego od początku toru, przeto przyspieszenie $= \frac{d^2x}{dt^2}$. Jeżeli torem punktu nie jest linia prosta, to kierunek przyspieszenia wogóle różni się od kierunku szybkości.

Rzut przyspieszenia p punktu ruchomego na dowolną prostą x jest równy $\frac{dv_x}{dt}$, gdzie v_x oznacza rzut szybkości punktu na tę prostą, albo szybkość rzutu (par. 15). Ponieważ torem rzutu jest prosta, przeto $\frac{dv_x}{dt}$ jest przyspieszeniem rzutu, a więc *rzut przyspieszenia punktu na dowolną prostą jest przyspieszeniem rzutu punktu na tej prostej*.

Prz. Definiujemy przyspieszenie, jako szybkość końca wektora v względem początku jego. Opierając się na tej definicji dowieść, że rzut przyspieszenia na dowolną prostą jest równy przyspieszeniu rzutu.

Rzut szybkości końca wektora v na prostą x będzie $\frac{d(x+v_x)}{dt}$; biorąc pod uwagę, że rzut ten jest równy sumie rzutów szybkości składowych, otrzymamy wynik żądany.

53. Wyznaczanie przyspieszeń. Przypuśćmy, że mamy dane równania ruchu punktu, a mianowicie

$$x=f(t), \quad y=g(t), \quad z=h(t);$$

pragniemy wyznaczyć przyspieszenie co do wielkości i kierunku.

Óznacmy szukane przyspieszenie przez p , a jego rzuty na ośi przez p_x, p_y, p_z . Pierwszy z tych rzutów jest równy przyspieszeniu rzutu punktu na oś x , a to przyspieszenie jest równe $\frac{dv_x}{dt}$ albo $\frac{d^2x}{dt^2}$, możemy je więc wyznaczyć z pierwszego równania ruchu; p_y, p_z wyznaczmy tak samo z równań pozostałych. Będzie więc

$$p_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad p_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad p_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Mając te rzuty, znajdziemy

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2},$$

$$i \quad \cos \alpha = \frac{p_x}{p}, \quad \cos \beta = \frac{p_y}{p}, \quad \cos \gamma = \frac{p_z}{p}.$$

gdzie α, β, γ oznaczają kąty kierunkowe przyspieszenia.

Jeżeli ruch punktu odbywa się w płaszczyźnie xy , to $p_z = 0, \cos \gamma = 0$,

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}, \quad \tan \alpha = \frac{p_y}{p_x}.$$

~~Prz. 1.~~ Równania ruchu punktu są $x = a \cos \omega t, y = a \sin \omega t$; wyznaczyć przyspieszenie.

Wiemy z prz. 2 w par. 16, że torem punktu jest koło, po którym punkt biegnie ze stałą szybkością $a\omega$. Różniczkując dane równania, otrzymamy $p_x = -a\omega^2 \cos \omega t$, i $p_y = -a\omega^2 \sin \omega t$, a zatem $p = a\omega^2$. Widzimy, że co do wielkości przyspieszenie jest stałe; $\tan \alpha = \frac{y}{x}$, z czego wynika, że przyspieszenie ma kierunek promienia, a znaki w p_x i p_y wskazują, że jest ono zwrócone do środka.

~~Prz. 2.~~ Punkt biegnie ze stałą szybkością c linią łańcuchową o parametrze a . Wyznaczyć przyspieszenie. Odp. $p = \frac{ac^2}{y^2}$ i jest skierowane według normalnej wewnątrz krzywej.

Należy tu skorzystać ze znanych związków pomiędzy a, y, s i ϑ , gdzie s oznacza łuk krzywej, a ϑ kąt pomiędzy styczną i osią odciętych. Znajdziemy w takim razie łatwo, że $v_x = \frac{ac}{y}, v_y = \frac{cs}{y}$.

~~Prz. 3.~~ Koło o promieniu a toczy się po linii prostej, przyczem szybkość środka jest stała i równa c . Wyznaczyć przyspieszenie punktu, położonego na obwodzie. Odp. Z równań ruchu znajdziemy, że $p = \frac{c^2}{a}$ i jest skierowane do środka koła.

~~Prz. 4.~~ Punkt P biegnie do stałego punktu O z szybkością αx^n , gdzie α jest stałe, a $x = OP$. Wyznaczyć przyspieszenie. Odp. Przyspieszenie jest odwrócone od O i $= \alpha^2 n x^{2n-1}$.

~~Prz. 5.~~ Ruchoma styczna do paraboli $y^2 = 4px$ przecina oś y w punkcie B , a oś x w C . Szybkość punktu B jest stała i równa v . Wyznaczyć przyspieszenie punktu C . Odp. $\frac{2v^2}{p}$. Należy skorzystać z okoliczności, że OC jest równe odciętej punktu zetknięcia.

~~Prz. 6.~~ Punkt obiega cykloidę $x = a(\vartheta - \sin \vartheta), y = a(1 - \cos \vartheta)$; przyspieszenie jego jest wciąż równoległe do osi odciętych i wynosi p_0 , gdy $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Wyznaczyć przyspieszenie w funkcji ϑ . Odp. $\frac{p_0(1 - \cos \vartheta)}{\sin^3 \vartheta}$.

Ponieważ $\frac{d^2y}{dt^2}=0$, przeto $\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=-\cot\vartheta \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$. Całkując, znajdziemy

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{k}{\sin\vartheta}, \text{ gdzie } k \text{ oznacza stałą całkowania.}$$

~~Prz.~~ 7. Ruch punktu jest centralny; znaczy to, że przyspieszenie przechodzi stałe przez nieruchomy punkt O . Dowieść, że torem jest krzywa płaska.

Otrzymamy odrazu

$$p_x = \frac{px}{r}, \quad p_y = \frac{py}{r}, \quad p_z = \frac{pz}{r},$$

gdzie (xyz) są współrzędnymi punktu ruchomego, a r promieniem wodzącym. Z tego zaś wynikają równania

$$xp_y - yp_x = 0, \quad yp_z - zp_y = 0, \quad zp_x - xp_z = 0.$$

Pierwsze, czyli $x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} = 0$ można napisać w postaci $\frac{d}{dt} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = 0$, a zatem będzie

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = C, \quad y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = A, \quad z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} = B,$$

gdzie A, B, C oznaczają wielkości stałe. Ostatecznie otrzymamy $Ax + By + Cz = 0$, a więc punkt ruchomy pozostaje w płaszczyźnie, przechodzącej przez O .

54. Ruch jednostajnie przyspieszony. Okażemy na kilku przykładach, jak się rozwiązuje zagadnienie odwrotne, w którym dane jest przyspieszenie punktu oraz pewne inne okoliczności, dotyczące ruchu, a chodzi o wyznaczenie równań ruchu. Zaczniemy od ruchu prostoliniowego.

Przypuśćmy więc, że torem punktu jest prosta x , a zatem szybkość i przyspieszenie leżą na tej prostej. Założymy dalej, że przyspieszenie p jest stałe; ruch nazywa się w tym razie jednostajnie przyspieszonym. Prócz tego przypuścimy, że w początku rachuby czasu punkt znajdował się w odległości x_0 od początku toru O i posiadał szybkość v_0 .

Niech x oznacza odległość punktu ruchomego od O w chwili t . W takim razie będzie

$$\frac{d^2x}{dt^2} = p \quad \dots \quad (1).$$

Oczywiście całka tego równania drugiego rzędu będzie funkcją całkowitą drugiego stopnia zmiennej t , a więc będzie miała

postać $x = At^2 + Bt + C$. Podstawiając tę funkcję w nasze równanie, znajdziemy, że jest ona całką tylko w tym razie, gdy $A = \frac{p}{2}$, a zatem

$$x = \frac{pt^2}{2} + Bt + C. \quad (2).$$

Jest to całka ogólna, a współczynniki B i C są stałymi całkowania.

Oczywiście $C = x_0$; stałą B wyznaczymy w sposób następujący. Różniczkując (2), otrzymamy szybkość

$$\frac{dx}{dt} = pt + B.$$

W chwili $t = 0$ szybkość ta wynosiła v_0 , a zatem $B = v_0$. Ostatecznie szukane równanie ruchu będzie takie:

$$x = \frac{pt^2}{2} + v_0 t + x_0.$$

Jeżeli $v_0 = 0$ i $x_0 = 0$, to $x = \frac{pt^2}{2}$. Tak np. gdy ciało ciężkie

wychodzi z punktu O , położonego niezbyt daleko od powierzchni ziemi, ze stanu spokoju i spada w próżni, to, jak wiadomo z badań doświadczalnych, przyspieszenie jego jest prawie stałe i wynosi $g = 9,81$ w metrach i sekundach. Jest to tak zwane *przyspieszenie ziemskie*. Równanie ruchu takiego ciała, jeżeli możemy je uważać za punkt, będzie $x = \frac{gt^2}{2}$.

N 41. Prz. 1. Pociąg wyszedł ze stacyi, biegł minutę ze stałym przyspieszeniem, następne $2\frac{1}{2}$ minuty ze stałą szybkością, a ostatecznie 30 sekund ze stałym opóźnieniem i zatrzymał się na stacyi następnej. Odległość pomiędzy stacyami wynosi $3\frac{1}{4}$ klm. Wyznaczyć owo przyspieszenie opóźnienie i szybkość stałą. Odp. 3600; 7200; 60 klm./godz.

N 42. Prz. 2. Pociąg, idąc ze stałym przyspieszeniem p , przechodził przez dwa następujące po sobie przystanki z szybkościami v_1 i v_2 .

Wyznaczyć odległość pomiędzy przystankami. Odp. $\frac{v_2^2 - v_1^2}{2p}$.

N 43. Prz. 3. Dwie łódki na wyścigach ruszyły z szybkościami v_1, v_2 , płynęły z przyspieszeniami p_1, p_2 i bieg skończył się nierozegraną.

Wyznaczyć odległość mety od startu. Odp. $\frac{2(v_1 - v_2)(v_1 p_2 - v_2 p_1)}{(p_1 - p_2)^2}$.

N 44. Prz. 4. Punkty A i B wyruszyły jednocześnie z początku współrzędnych; pierwszy biegnie po osi x ze stałym przyspieszeniem p , a drugi po osi y ze stałą szybkością v . Wyznaczyć obwódnię prostą

AB. Odp. Parabola $y^2 = -\frac{8v^2}{p} x$.

N. 45 Prz. 5. Pociski A i B pozostawały początkowo na jednym pionie i AB było równe h . Jednocześnie A zaczyna swobodnie spadać, a B zostaje wyrzucony pionowo w górę. Spotkanie nastąpiło w tym samym miejscu, z którego wybiegł B ; wyznaczyć jego szybkość początkową.

Odp. $\sqrt{\frac{gh}{2}}$.

N. 46 Prz. 6. Z działa, wymierzonego pionowo w górę, dano dwa strzały w odstępie t sek.; początkowa szybkość pocisków wynosi v_0 . Kiedy nastąpi spotkanie pomiędzy pociskami? Odp. Po upływie $\frac{2v_0 - gt}{2g}$.

55. Ruch prosty harmoniczny. Przypuśćmy znowu, że punkt porusza się na prostej x , a przyspieszenie jest wciąż skierowane do punktu O , i wprost proporcjonalne do odległości od O . Współczynnik proporcjonalności oznaczmy przez ω^2 i punkt O obierzmy za początek współrzędnych. W początku rachuby czasu punkt ruchomy znajdował się, dajmy na to, w odległości x_0 od O , i posiadał szybkość v_0 .

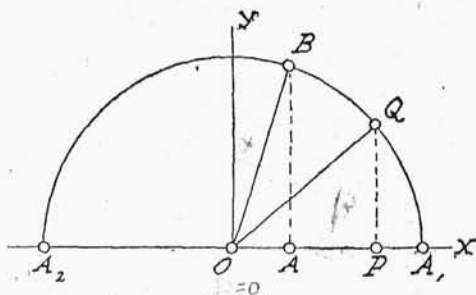


Fig. 34.

W chwili t punkt ruchomy znajdzie się np. w położeniu P po stronie dodatniej od O , a szybkość jego niech będzie odwrócona od O . Szybkość ta się zmniejsza, a zatem równanie różniczkowe ruchu posiada postać

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Jest to tak zw. równanie liniowe drugiego rzędu. Całkę jego można napisać w postaci

$$x = a \sin(At + \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Różniczkując dwa razy, otrzymamy $\frac{d^2x}{dt^2} = -A^2 a \sin(At + \alpha)$

czyli $\frac{d^2x}{dt^2} = -A^2x$. Z tego wynika, że (2) jest całką (1), jeżeli $A = \omega$. Tak więc całka ogólna będzie

$$x = a \sin(\omega t + \alpha) \quad (3),$$

gdzie a i α są stałymi całkowania. Z warunków początkowych wynikają dwa równania

$$x_0 = a \sin \alpha \quad \text{ i } \quad v_0 = a\omega \cos \alpha.$$

Z równań tych dają się wyznaczyć a i α , można więc te stałe uważać za znane.

Ruch punktu, odbywający się według równania (3), nazywa się *ruchem prostym harmonicznym*; odgrywa on ważną rolę w fizyce i technice.

Możemy zdać sobie łatwo sprawę z tego szczególnego rodzaju ruchu w sposób następujący. Wyobraźmy sobie, że około punktu O obraca się odcinek OB o długości a z szybkością kątową ω , i że w chwili $t=0$ tworzył on z osią y kąt α . Łatwo sprawdzić, że (3) jest równaniem ruchu rzutu końca tego odcinka na oś x .

Z tego wynika, że dany punkt ruchomy oscyluje pomiędzy skrajnymi położeniami A_1 i A_2 , w których koło, zatoczone z O promieniem a , przecina oś x . Długość $A_2A_1 = 2a$ nazywa się amplitudą ruchu harmonicznego.

Dajmy na to, że w chwili t punkt ruchomy zajmował położenie P ; z równania (3) wynika, że po upływie $\frac{2\pi}{\omega}$ sekund punkt powróci do położenia P , z taką samą szybkością, jaką miał poprzednio. Czas $\frac{2\pi}{\omega}$ nazywa się *okresem*, kąt α *fazą*, a punkt O *środkiem* ruchu harmonicznego.

Z zagadnieniem powyższem wiąże się ściśle następujące. Punkt A_2 jest w ruchu prostym harmonicznym względem środka A_1 , a punkt A_1 jest również w ruchu prostym harmonicznym względem nieruchomego środka O . Równania tych ruchów są odpowiednio $x_2 = a_2 \sin(\omega t + \alpha_2)$ i $x_1 = a_1 \sin(\omega t + \alpha_1)$. Wyznaczyć równanie ruchu bezwzględnego punktu A_2 .

Dane ruchy harmoniczne nazywają się *składowymi*, a ruch szukany wypadkowym. Wypada zwrócić uwagę, że obydwa ruchy składowe mają tu okresy równe.

Za początek współrzędnych obierzemy punkt O , i odciętą punktu A_2 oznaczmy przez x . Oczywiście

$$x = x_1 + x_2, \quad \text{czyli} \quad x = a_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + a_2 \sin(\omega t + \alpha_2).$$

Rozwijając obydwie funkcje trygonometryczne, otrzymamy

$$x = (a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2) \sin \omega t + (a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2) \cos \omega t \quad (1).$$

Równanie to daje się przekształcić w sposób następujący. Wprowadzamy dwie nowe wielkości a i α takie, aby było

$$a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 = a \cos \alpha, \quad a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 = a \sin \alpha \quad (2).$$

Będzie więc $x = a(\sin \omega t \cos \alpha + \cos \omega t \sin \alpha)$, czyli

$$x = a \sin(\omega t + \alpha).$$

Widzimy, że ruch wypadkowy jest także harmoniczny o tym samym okresie.

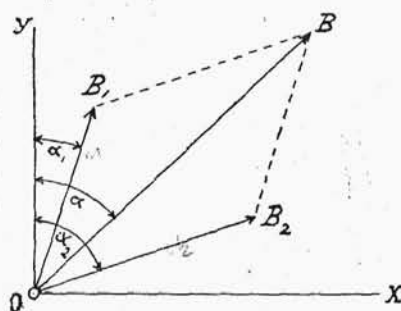


Fig. 35.

Poprowadźmy z punktu O odcinki OB_1 , OB_2 , odpowiednio równe a_1 , a_2 i tworzące z osią y kąty α_1 , α_2 , a następnie wyznaczmy wypadkową OB wektorów OB_1 , OB_2 . Wypadkowa ta będzie równa a i utworzy z osią y kąt α . Wynika to stąd, że rzut jej na oś y jest równy sumie rzutów składowych,

a ta według (2) jest równa $a \cos \alpha$; podobnie rzut OB na oś x jest równy $a \sin \alpha$.

Gdy wektor OB obraca się około O z szybkością kątową ω , to ruch rzutu jego końca na oś x jest właśnie ruchem szukanym. W podobny sposób można połączyć dowolną liczbę ruchów harmonicznych, i zawsze ruch wypadkowy otrzymamy, jako ruch rzutu końca wektora wypadkowego.

Prz. 1. Jakie powinny być amplitudy i fazy ruchów harmonicznych składowych, aby szybkość ruchu wypadkowego była zerem? Mówimy w tym razie, że zachodzi interferencja.

Szybkość będzie wciąż zerem, jeżeli $\alpha = 0$, a w takim razie z (2) wynika, że $\tan \alpha_1 = \tan \alpha_2$ i $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi$, bo α_1 i α_2 nie mogą być równe.

Prz. 2. Jaką szybkość posiada punkt, pozostający w ruchu prostym harmonicznym, gdy odległość jego od środka jest równa x . Odp. $\pm \omega \sqrt{a^2 - x^2}$.

Prz. 3. Dany jest trójkąt $A_1 A_2 A_3$; kąt A_3 jest prosty, a boki $A_1 A_3$,

$A_2 A_3$ równe. W A_1 znajdował się punkt ruchomy w spoczynku; przyciągają go wierzchołki A_1, A_2, A_3 , a udzielane przyspieszenia są wprost proporcjonalne do odległości (współcz. proporc. = k^2). Wyznaczyć tor punktu i okres wahań. Odp. Okres wahań = $\frac{2\pi}{k\sqrt{3}}$.

56. Ruch pocisku w próżni. Rozważymy ruch pocisku, wyrzuconego w przestrzeni pozbawionej powietrza, jako przykład ruchu na torze krzywym. Przypuśćmy więc, że pocisk, który uważamy za punkt, wybiegł z punktu O z szybkością początkową v_0 , tworzącą z poziomem kąt α . Wiadomo z doświadczenia, że pocisk posiada stałe przyspieszenie g , skierowane pionowo na dół, a zatem szybkość otrzymuje tylko przyrosty pionowe, i ruch odbywa się w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez linię szybkości początkowej. W płaszczyźnie tej obierzemy płaski układ współrzędnych. Początkiem będzie punkt O , a osią odciętych prosta pozioma. Kierunek dodatni osi rzędnych obierzemy w górę.

Rzuty przyspieszenia na osi x i y są odpowiednio 0 i $-g$, a zatem równania różniczkowe ruchu będą

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

Za początek rachuby czasu obieramy tę chwilę, w której pocisk wybiegał z O ; wówczas współrzędne jego były zerami, a szybkość miała składowe w kierunkach osi $v_0 \cos \alpha$ i $v_0 \sin \alpha$. Całkując powyższe równania różniczkowe i uwzględniając te warunki początkowe, otrzymamy z łatwością równania ruchu

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \quad (1).$$

Rugując z tych równań t , otrzymamy równanie toru

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \quad (2).$$

Jest to oczywiście parabola; przecina ona oś y tylko w jednym punkcie zwykłym, a mianowicie w O , a więc oś jej jest równoległa do osi y , czyli pionowa.

Jeżeli pocisk przetnie po raz drugi oś x w punkcie A , to odległość OA nazywa się doniosłością rzutu albo doniosłością strzału. Zakładając w (2) $y=0$, znajdziemy, że

$$OA = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (3).$$

Doniosłość będzie największa, gdy wyrzucimy pocisk pod kątem 45° , gdyż w tym razie $\sin 2\alpha = 1$. Ta największa doniosłość wynosi $\frac{v_0^2}{g}$.

Przypuśćmy, że chodzi o to, aby przy danej szybkości początkowej v_0 pocisk upadł w odległości a od O . Jaki kierunek należy nadać pociskowi w O ? Z (3) znajdziemy, że w takim razie $\sin 2\alpha = \frac{ga}{v_0^2}$. Równaniu temu czynią zadość dwie wartości kąta 2α mniejsze od π ; jeżeli jedna wynosi φ , to druga $\pi - \varphi$. Wogóle zatem istnieją dwa kierunki, czyniące zadość postawionemu żądaniu. Tworzą one z poziomem kąty $\frac{\varphi}{2}$ i $\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$, innymi słowy jeden z nich jest tak nachylony do poziomu, jak drugi do pionu. Dwusieczna kąta pomiędzy tymi kierunkami tworzy z poziomem kąt 45° .

1) Postawimy zagadnienie ogólniejsze: pod jakim kątem należy wyrzucić pocisk z O , nadając mu szybkość v_0 , aby trafić w dany punkt $P(xy)$? Tor punktu powinien przejść przez P , a zatem w (2) trzeba uważać x, y za wielkości znane, a α za wielkość szukaną. Gdy zamiast $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$ napiszemy $1 + \tan^2 \alpha$, to równanie to przybierze postać

$$gx^2 \tan^2 \alpha - 2v_0^2 x \tan \alpha + gx^2 + 2v_0^2 y = 0 \quad (4).$$

Jest to równanie drugiego stopnia względem $\tan \alpha$, a więc posiada dwa pierwiastki rzeczywiste lub urojone. W przypadku pierwszym postawionemu warunkowi czynią zadość dwa kąty różne; powiemy, że punkt P jest osiągalny pod dwoma kątami. W przypadku drugim punkt P jest wcale niedosiegalny.

Tak więc punkty płaszczyzny pionowej, którą przebiega pocisk, dzielą się na osiągalne i niedosiegalne. Na granicy leżą oczywiście punkty, które są osiągalne, ale tylko pod jednym kątem. Jeżeli P jest takim punktem granicznym, to pierwiastki równania (4) są równe, a zatem (xy) czynią zadość równaniu $v_0^4 x^2 - gx^2(gx^2 + 2v_0^2 y) = 0$, albo

$$g^2 x^2 + 2v_0^2 gy - v_0^4 = 0.$$

Jest to równanie krzywej granicznej, zwanej *linią bezpieczeństwa*; krzywa ta jest parabolą, której oś leży na osi y .

Wyrzucając z O pociski pod różnymi kątami, ale z jedną i tą samą szybkością początkową v_0 , otrzymamy całą sieć torów parabolicznych. Żaden z tych torów nie przecina krzywej granicznej, bo w razie przeciwnym punkty osiągalne leżałyby po obydwóch stronach granicy. Z tego widać, że parabola graniczna jest obwiednią owej sieci.

Należy dodać, że ruch pocisku w przestrzeni wypełnionej powietrzem, wogóle różni się od ruchu pocisku w próżni. Różnica jest tem większa, im większą powierzchnię posiada pocisk w stosunku do wagi, i im większą nadano mu szybkość początkową. Teoria powyższa jest w przybliżeniu zgodna ze zjawiskiem, zachodzącym w atmosferze, gdy pociskiem jest np. pełna kula działowa, a szybkość początkowa nie przenosi 150 do 200 metrów na sekundę. Ale rzućmy jakieś ciało bardzo lekkie, np. balonik kauczukowy, wypełniony wodorem; ruch takiego pocisku w powietrzu nie będzie wcale przypominał ruchu parabolicznego, który poznaliśmy w tym paragrafie. Niewiele wspólnego z naszą teorią posiada także ruch pocisku ciężkiego, który otrzymał bardzo wielką szybkość początkową.

Aby mniej więcej unaocnić rozmiary zachodzącej tu różnicy przytoczymy przykład pocisku, wystrzelonego z nowoczesnego karabinu. Początkowa szybkość takiego pocisku wynosi około 700 metrów na sekundę, a zatem w próżni przy $\alpha = 45^\circ$ doniosłość strzału według wzoru (3) byłaby bliska 50 kilometrów. W powietrzu osiąga się doniosłość największą, strzelając pod kątem trzydziestu kilku stopni, i ta największa doniosłość nie dochodzi pięciu kilometrów.

Prz. 1. Z punktu O wyrzucono wielką liczbę pocisków pod różnymi kątami, nadając wszystkim szybkość początkową v_0 ; wyznaczyć miejsce geometryczne, które zajmą pociski po czasie t . Odp. Równaniami szukanego miejsca geometrycznego będą (1), jeżeli uznamy t za wielkość stałą, a α za parametr zmienny. Miejscem tem jest koło o promieniu $v_0 t$; środek jego leży w punkcie $\left(0, -\frac{gt^2}{2}\right)$. Z biegiem czasu koło to się rozszerza, a jednocześnie środek spada, jak ciało ciężkie.

Prz. 2. Wyznaczyć miejsce geometryczne ognisk torów parabolicznych pocisków, wyrzuconych z O z szybkością początkową v_0 .

Styczna do paraboli jest dwusieczną kąta pomiędzy średnicą

i promieniem wodzącym, a z tego wynika, że promień wodzący punktu O tworzy z osią x kąt $2\alpha - \frac{\pi}{2}$. Mając równanie osi paraboli, otrzymamy z łatwością współrzędne ogniska $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$, $y = -\frac{v_0^2 \cos 2\alpha}{2g}$. Są to równania parametryczne koła, którego środek leży w O , a promień $= \frac{v_0^2}{2g}$.

Prz. 3. Wyznaczyć kierownicę toru pocisku, którego szybkość początkowa $= v_0$. Odp. Jest to prosta pozioma, położona na wysokości $\frac{v_0^2}{2g}$ nad O . Wysokość ta nie zależy od α , a zatem tory wszystkich pocisków, wyrzuconych z O z szybkością początkową v_0 , mają kierownicę wspólną.

Prz. 4. Dwa pociski A i B znajdowały się na jednym poziomie. Pocisk A otrzymał szybkość poziomą w kierunku B , i jednocześnie B zaczął spadać. Dowieść, że pociski te się spotkają.

Prz. 5. Z punktu O wyrzucono jednocześnie trzy pociski A_1, A_2, A_3 . Okazać, że płaszczyzna $A_1A_2A_3$ pozostaje równoległą do pewnej płaszczyzny stałej.

Gdyby nie istniało przyspieszenie ziemskie, to pociski biegłyby po liniach prostych z otrzymanymi szybkościami v_1, v_2, v_3 , i po t sek. byłoby $OA_1 = v_1 t$, $OA_2 = v_2 t$, $OA_3 = v_3 t$. Oczywiście podstawa zmiennej piramidy $OA_1A_2A_3$ pozostawałaby równoległą do płaszczyzny stałej. Można uważać, że dzięki przyspieszeniu ziemskiemu cała ta podstawa posiada obok tego ruchu jeszcze ruch postępowy.

Prz. 6. Człowiek idzie z szybkością u obwodem koła o promieniu a i rzuca piłkę, trzymając rękę na wysokości h nad ziemią. Jaką szybkość względną w powinna mieć co najmniej piłka, aby upaść w środku okręgu. Odp. $w^2 = u^2 - gh + g\sqrt{a^2 + h^2}$.

Jeżeli czas biegu piłki ma być t , to $w^2 = \frac{a^2 + h^2}{t^2} + \frac{g^2 t^2}{4} + u^2 - gh$; w będzie najmniejsze, gdy $t^2 = \frac{2\sqrt{a^2 + h^2}}{g}$.

Prz. 7. Na płaskim zboczu, tworzącym z poziomem kąt α , stoi fort o wysokości h . Na szczycie fortu ustawiono działo, którego pociski otrzymują szybkość początkową v_0 . Wyznaczyć pole zbocza, które można ostrzeliwać z działła. Odp. $\frac{\pi(2gh \cos^2 \alpha + v_0^2)v_0^2}{g^2 \cos^3 \alpha}$.

Obieramy za początek współrzędnych szczyt fortu, za oś z prostą pionową, a za oś y prostą równoległą do płaszczyzny zbocza. Można ostrzeliwać część zbocza zawartą wewnątrz paraboloidy obrotu $g^2(x^2 + y^2) + 2v_0^2 gz - v_0^4 = 0$. Rzut poziomy tej części jest kołem o promieniu $\frac{v_0 \sqrt{2gh \cos^2 \alpha + v_0^2}}{g \cos \alpha}$.

150. Prz. 8. Strzelec stoi w odległości a od pionowej ściany, a początkowa szybkość pocisku jego strzelby wynosi v_0 . Wyznaczyć granicę pomiędzy punktami ściany dosięgalnymi i niedosięgalnymi. Odp.

Parabola, której parametr (odległość ogniska od kierownicy) $= \frac{v_0^2}{g}$,

a ognisko leży pod poziomem strzelca na głębokości $\frac{a^2 g}{2v_0^2}$.

✓ 51. Prz. 9. Dowieść, że punkt przecięcia stycznej do toru pocisku z dowolnym pionem porusza się na tym pionie podczas biegu pocisku z przyspieszeniem ziemskim.

Najdogodniej będzie obrać za początek współrzędnych punkt O , w którym dany pion przecina parabolę, i za początek rachuby czasu chwilę, w której pocisk przebiegał przez O .

✓ 52. Prz. 10. Z punktu O wybiegła jednocześnie pewna liczba pocisków. Prowadzimy z jakiegoś punktu, położonego pionowo nad O styczne do torów. Dowieść, że pociski przebiegały jednocześnie przez punkty zetknięcia.

Prz. 11. Z punktów, leżących na jednym pionie w odległości h jeden od drugiego, wybiegają jednocześnie dwa pociski z szybkościami v_0 ; kierunki szybkości są tak dobrane, że pociski się spotykają. Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów spotkania. Odp. Gdy obierzemy dolny punkt za początek, to równanie szukanego miejsca będzie

$$y = \frac{h}{2} - \frac{g(h^2 + 4x^2)}{8v_0^2}.$$

53. Prz. 12. Pocisk wybiega w kierunku poziomym z najwyższego punktu kuli o promieniu a . Jaka powinna być szybkość początkowa, aby pocisk nie dotknął powierzchni kuli? Odp. Powinna być większa od \sqrt{ag} .

54. Prz. 13. Punkt ruchomy wyszedł z punktu O , położonego na danej prostej x , z szybkością v_0 , tworzącą z ową prostą kąt α , i posiada przyspieszenie prostopadłe do x , zwrócone do tej prostej i wprost proporcjonalne do odległości; współczynnik proporcjonalności $= \omega^2$.

Wyznaczyć tor. Odp. Równania ruchu $x = v_0 \cos \alpha \cdot t$, $y = \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega} \sin \omega t$,

a więc torem jest sinusoida.

55. Prz. 14. Rzuty przyspieszenia punktu na osi x i y są odpowiednio równe $-a$ i a , a gdy punkt przebiegał przez początek układu, to szybkość jego v_0 była skierowana według osi x . Wyznaczyć położenie,

w którym punkt poruszał się najwolniej. Odp. $\left(\frac{3v_0^2}{8a}, \frac{v_0^2}{8a} \right)$.

Prz. 15. Punkt wyszedł z położenia A na osi y z szybkością v_0 równoległą do osi x i posiada przyspieszenie równoległe do osi y i proporcjonalne do szybkości; współcz. proporc. $= k$. Wyznaczyć tor.

Odp. Katenoida, której parametr $= \frac{v_0}{k}$.