

**5. Suma geometryczna.** W zakres mechaniki wchodzi zagadnienia, w których mamy pewną liczbę wektorów oraz innych danych, a chodzi o wyznaczenie nowego wektora, czyniącego zadość pewnym określonym warunkom. Zagadnienia tego rodzaju dają się często sprowadzić do pewnych działań typowych, które mamy właśnie poznać.

Niech będą dwa wektory  $P=OA$  i  $Q=OB$ , mające wspólny początek  $O$ . Mogą to być wektory związane z punktem  $O$ , albo wektory związane z prostymi  $OA$  i  $OB$ , albo wreszcie wektory swobodne. Wyznaczamy nowy wektor  $R$  w sposób następujący. Prowadzimy z końca  $A$  wektora  $P$  odcinek  $AC$  równy i równoległy do  $OB$ . Otóż początkiem wektora  $R$  ma być punkt  $O$ , a końcem punkt  $C$ .

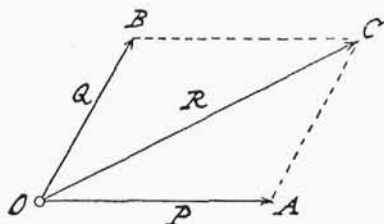


Fig. 1.

Wyznaczanie takiego wektora  $R$  nazywa się *addowaniem geometrycznym*, a wektor  $R$  nazywamy *sumą geometryczną*, albo *wektorem wypadkowym*, albo wreszcie wprost *wypadkową* wektorów  $P$  i  $Q$  a te dwa ostatnie *wektorami składowymi* wektora  $R$ . Piszemy symbolicznie

$$R = P + Q.$$

W równaniu tem znaki  $=$  i  $+$  mają inne znaczenie niż w algebrze zwykłej, czyli w algebrze skalarów.

Z figury wynika bezpośrednio, że moglibyśmy również otrzymać wektor  $R$ , prowadząc z punktu  $B$  odcinek  $BC$  równy i równoległy do  $OA$ , a zatem wektory składowe są równouprawnione, i w sumie  $P+Q$  porządek składników nie odgrywa żadnej roli. Wyrazimy to symbolicznie, pisząc

$$P + Q = Q + P.$$

Wektor wypadkowy  $R$  można także wyznaczyć, jako przekątną równoległoboku, zbudowanego na wektorach składowych.

Niech teraz będą trzy wektory  $P_1, P_2, P_3$ , posiadające wspólny początek  $O$  i położone jakkolwiek w przestrzeni (a więc niekoniecznie w jednej płaszczyźnie). Wyznaczamy nowy wektor  $R$  w sposób następujący. Z końca  $A_1$  wektora  $P_1$  prowa-

dzimy odcinek  $A_1A_2$  równy i równoległy do wektora  $P_2$ , a następnie z punktu  $A_2$  prowadzimy odcinek  $A_2A_3$  równy i równoległy do  $P_3$ . Początkiem szukanego wektora  $R$  ma być  $O$ , a końcem  $A_3$ . Wektor  $R$  zowie się sumą geometryczną, albo wektorem wypadkowym wektorów  $P_1, P_2, P_3$ , które nazywają się składowymi. Piszemy

$$R = P_1 + P_2 + P_3.$$

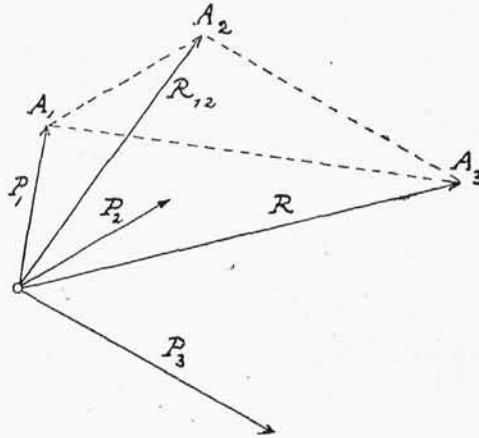


Fig. 2.

Aby więc otrzymać wektor wypadkowy należy utworzyć wielobok  $OA_1A_2A_3$ , którego boki są odpowiednio równoległe do wektorów składowych.

Łatwo się przekonać, że porządek, w którym następują po sobie te boki, nie wywiera wpływu na wynik ostateczny. Z figury 2 widać, że  $R = R_{12} + P_3$ , gdzie  $R_{12} = P_1 + P_2$ . Lecz otrzymalibyśmy tę samą sumę  $R_{12}$ , prowadząc z końca wektora  $P_2$  odcinek równy i równoległy do  $P_1$ , a więc zamiana pomiędzy bokami  $OA_1$  i  $A_1A_2$  nie wywiera wpływu na sumę ostateczną.

Można również uczynić zamianę pomiędzy bokami  $A_1A_2$  i  $A_2A_3$ , czyli pomiędzy składnikami  $P_2, P_3$ , co nie wpłynie na sumę  $R$ . Oczywiście odcinek  $A_1A_3$  jest równy i równoległy do sumy wektorów  $P_2, P_3$ , którą oznaczmy przez  $R_{23}$ , a zatem  $R$  można uważać za sumę wektorów  $P_1$  i  $R_{23}$ ; lecz otrzymalibyśmy odcinek  $A_1A_3$ , równy i równoległy do  $R_{23}$ , prowadząc naprzód z  $A_1$  odcinek równy i równoległy do  $P_3$ , a na-

stępnie z końca tego odcinka odcinek równy i równoległy do  $P_2$ .

Powiemy krótko, że suma geometryczna  $P_1 + P_2 + P_3$  nie zależy od porządku składników.

Tak samo zupełnie tworzy się suma geometryczna czterech, pięciu i więcej wektorów, i sumy te nie zależą również od porządku składników.

Jeżeli wszystkie wektory składowe są położone na jednej prostej, to i wektor wypadkowy będzie leżał na tejże prostej i będzie równy sumie algebraicznej wektorów składowych. Tak więc sumę algebraiczną możemy uważać za szczególny przypadek sumy geometrycznej.

Często bardzo wypada rozwiązywać zagadnienie odwrotne: dany jest wektor  $R$ , wyznaczyć pewną liczbę wektorów  $P_1, P_2, \dots$ , dla których  $R$  jest sumą geometryczną, czyli, innymi słowy, rozłożyć wektor  $R$  na wektory składowe  $P_1, P_2, \dots$ . Mogą być przytem postawione jeszcze inne warunki, którym szukane wektory składowe mają czynić zadość.

Wszystkie te działania są znane ze statyki, gdzie stosujemy je do sił i par.

O sumie geometrycznej dwóch wektorów może być mowa tylko w tym razie, gdy wektory te posiadają wspólny początek. Z tego wynika, że wektory związane z punktami mają sumę geometryczną tylko w tym razie, gdy te punkty leżą razem; wektory związane z prostymi posiadają sumę, gdy te proste przechodzą przez jeden punkt, albo leżą w jednej płaszczyźnie; wektory swobodne zawsze mają sumę.

*Przykład.* Punkt ruchomy ma doznać kolejno przesunięć  $p_1, p_2, \dots$ . Okazać, że ostateczne położenie punktu ruchomego nie zależy od porządku, w którym się te przesunięcia odbędą.

**6. Rzuty wektorów.** W mechanice często mamy do czynienia z prostokątnymi rzutami wektorów na płaszczyznę i proste. Rzut taki możemy zawsze uważać za wektor, którego początek i koniec są odpowiednio rzutami początku i końca wektora rzucanego czyli oryginału.

Niech będą wektory  $P_1, P_2, \dots$ , posiadające wspólny początek  $O$ , lecz położone jakkolwiek w przestrzeni (fig. 2). Utwórzmy wielobok  $OA_1A_2 \dots$  i wyznaczmy wektor wypadkowy  $R$ . Obierzmy następnie dowolną płaszczyznę rzutów i zbudujmy

rzut całej figury na tej płaszczyźnie. Części składowe rzutu będziemy oznaczali temi samemi literami, co odpowiednie części oryginału, kreskując je dla odróżnienia.

Ponieważ rzuty prostokątne dwóch odcinków równych i równoległych są równe i równoległe, przeto odcinek  $A_1'A_2'$  będzie równy wektorowi  $P_2'$  i równoległy do niego, odcinek  $A_2'A_3'$  będzie równy i równoległy do  $P_3'$  i t. d. Stąd wynika, że wektor  $R'$  będzie sumą geometryczną wektorów  $P_1', P_2' \dots$ . A zatem rzut wektora wypadkowego na płaszczyznę jest sumą geometryczną rzutów wektorów składowych.

Uczyńmy teraz rzut tej samej figury (2) na dowolnie obraną oś rzutów. Na osi tej będziemy odróżniali kierunek dodatni od ujemnego, jak się to dzieje w geometryi analitycznej. Jeżeli rzut wektora jest zwrócony w stronę dodatnią, to będziemy go uważali za dodatni, w razie przeciwnym za ujemny.

Widać bezpośrednio z figury, że  $R'$  co do wielkości i znaku równa się sumie algebraicznej odcinków  $O'A_1', A_1'A_2', \dots$ , gdzie porządek liter określa znak, który składnikowi przypisać należy. Jeśli np. punkt  $A_2'$  leży po stronie dodatniej punktu  $A_1'$ , to odcinek  $A_1'A_2'$  uważamy za dodatni, w razie przeciwnym za ujemny.

Lecz  $O'A_1' = P_1'$ , odcinek  $A_1'A_2'$  jest równy co do wielkości i zgodny co do kierunku z  $P_2'$  i t. d., a zatem rzut wektora wypadkowego na oś jest równy sumie algebraicznej rzutów wektorów składowych.

Twierdzeniu temu nadamy postać równania algebraicznego. W tym celu zawrzemy naprzód umowę następującą. Jeżeli mamy dwie proste, na których odróżniamy kierunki, to za kąt pomiędzy nimi będziemy uważali ten z dwóch kątów przyległych, którego obydwie boki biegną od wierzchołka.

Oznaczmy teraz przez  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_r$  kąty pomiędzy wektorami  $P_1, P_2, \dots R$  i osią rzutów. W takim razie rzuty tych wektorów na oś będą zarówno co do wielkości bezwzględnej, jak i znaku, odpowiednio równe  $P_1 \cos \alpha_1, P_2 \cos \alpha_2, \dots R \cos \alpha_r$ , i twierdzenie powyższe wyrazi się tak:

$$R \cos \alpha_r = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \dots$$

lub krócej

$$R \cos \alpha_r = \Sigma P \cos \alpha.$$

**7. Metoda analityczna sumowania.** Na drugim twierdzeniu paragrafu poprzedzającego jest oparta metoda analityczna wyznaczania wektora wypadkowego.

Mamy więc wyznaczyć pod względem wielkości i kierunku wektor wypadkowy danych wektorów  $P_1, P_2 \dots$ , posiadających wspólny początek  $O$ . Obierzmy  $O$  za początek prostokątnego układu współrzędnych  $xyz$ , i oznaczmy odpowiednio przez  $(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1), (\alpha_2 \beta_2 \gamma_2) \dots$  kąty, które dane wektory tworzą z osiami, czyli ich kąty kierunkowe. Szukany wektor wypadkowy oznaczmy przez  $R$ , a jego rzuty na osi przez  $R_x, R_y, R_z$ . Na zasadzie wzmiankowanego twierdzenia będzie

$$R_x = \Sigma P \cos \alpha, \quad R_y = \Sigma P \cos \beta, \quad R_z = \Sigma P \cos \gamma$$

i

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

Oznaczmy jeszcze przez  $(\alpha_r \beta_r \gamma_r)$  kąty kierunkowe wektora  $R$ . Znajdziemy, że

$$\cos \alpha_r = \frac{R_x}{R}, \quad \cos \beta_r = \frac{R_y}{R}, \quad \cos \gamma_r = \frac{R_z}{R}.$$

Mając  $R, \alpha_r, \beta_r$  i  $\gamma_r$ , znamy wektor wypadkowy co do wielkości i kierunku.

**8. Rzut trójkąta.** W dalszym ciągu będzie użyteczne pewne twierdzenie geometryczne, które przytoczymy na tem miejscu.

Niech będzie trójkąt  $ABC$  i jego rzut  $A'B'C'$  na jakąkolwiek płaszczyznę  $F$ . Oznaczmy przez  $S$  i  $S'$  pola oryginału i rzutu, a przez  $\alpha$  kąt pomiędzy płaszczyzną trójkąta i płaszczyzną  $F$ . Dowiedzimy, że

$$S' = S \cos \alpha.$$

Rozważmy naprzód przypadek szczególny, gdy jeden z boków trójkąta, np.  $AB$ , jest równoległy do  $F$ . Jeżeli  $CD$  jest wysokością oryginału, to  $C'D'$  jest wysokością rzutu, i  $S' = \frac{1}{2} A'B' \cdot C'D'$ . Lecz  $A'B' = AB$  i  $C'D' = CD \cos \alpha$ , zatem  $S' = \frac{1}{2} AB \cdot CD \cos \alpha$ , co było do dowiedzenia.

Przypuśćmy teraz, że trójkąt  $ABC$  ma położenie jakiegokolwiek. Poprowadźmy przez wierzchołek  $A$  płaszczyznę równoległą do  $F$ ; przetnie ona bok  $BC$  w punkcie  $D$ , i prosta  $AD$  będzie równoległa do  $F$ . Oznaczmy teraz przez  $S_1$  i  $S_2$  pola trójkątów  $ABD$  i  $ACD$ , a przez  $S'_1$  i  $S'_2$  pola ich rzutów. Na zasadzie powyższego będzie  $S'_1 = S_1 \cos \alpha$  i  $S'_2 = S_2 \cos \alpha$ . Dodając

lub odejmując te dwa równania i uwzględniając  $S_1 \pm S_2 = S$  oraz  $S_1' \pm S_2' = S'$ , otrzymamy związek żądany.

Twierdzenie powyższe daje się bardzo łatwo uogólnić. Przypuśćmy naprzód, że  $S$  i  $S'$  są odpowiednio polami dowolnego wieloboku płaskiego i jego rzutu na płaszczyznę  $F$ . Wielobok możemy podzielić na trójkąty; stosując dowiedzione twierdzenie do każdego z nich i dodając otrzymane równania, otrzymamy znowu  $S' = S \cos \alpha$ .

Gdy granicę figury płaskiej stanowi linia krzywa, to możemy uważać taką figurę za wielobok o nieskończenie krótkich bokach, a zatem twierdzenie nasze rozciąga się do wszystkich figur płaskich.

Prz. 1. Opierając się na tem, że każdą elipsę można uważać za prostokątny rzut koła, dowieść, że pole elipsy  $= \pi ab$ .

Prz. 2. Pole figury płaskiej jest równe  $S$ , a pole jej rzutów na płaszczyzny współrzędnych układu prostokątnego są  $S_x, S_y, S_z$ . Okazać, że  $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$ .

Prz. 3. Dane są w układzie prostokątnym punkty  $A_1(x_1 y_1 z_1), A_2(x_2 y_2 z_2), A_3(x_3 y_3 z_3)$ ; wyznaczyć objętość czworościanu  $OA_1A_2A_3$ .

Niech  $BA_1$  będzie wysokością czworościanu, ( $\alpha\beta\gamma$ ) jej kątami kierunkowymi i  $S$  polem trójkąta  $OA_2A_3$ . Możemy uważać  $BA_1$  za sumę geometryczną składowych  $BO, x_1, y_1, z_1$ . Biorąc rzuty na  $BA_1$ , otrzymamy  $BA_1 = x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma$ , a szukana objętość

$$V = \frac{1}{3} S (x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma), \text{ lub } V = \frac{1}{3} (x_1 S_x + y_1 S_y + z_1 S_z).$$

Pola  $S_x, S_y, S_z$  wyznaczają się w sposób znany. Wynikowi można nadać postać

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

**9. Moment względem punktu.** W teorii wektorów obok dodawania zasadniczą rolę odgrywają dwa działania inne. Wynikiem jednego z nich jest wektor, zwany *iloczynem wektorowym*, a wynikiem drugiego skalar, zwany *iloczynem skalarnym*. Działania te wyłożymy jedynie w tej postaci, w której będą nam potrzebne w dalszym ciągu; nie będziemy nawet używali powyższych nazw ogólnych, posługując się zamiast tego nazwami *moment* i *praca*, używanymi częściej w mechanice. Działanie pierwsze rozważymy na tem miejscu, o drugim będzie mowa w jednym z rozdziałów następnych.

Niech będzie wektor  $P=AB$ , związany z punktem lub prostą, i niech będzie prócz tego punkt  $O$ . Poprowadźmy przez  $O$  prostą, prostopadłą do płaszczyzny  $OAB$ . Gdy spojrzymy z jakiegoś punktu  $C$  tej prostej na płaszczyznę  $OAB$ , to zobaczymy, że wektor  $P$  jest, dajmy na to, zwrócony w tę stronę, w którą posuwa się koniec wskazówki zegarowej, obracającej się około punktu  $O$ . Gdybyśmy patrzyli na  $OAB$  z innego punktu tejże prostej, położonego po odwrotnej stronie płaszczyzny, to dla nas zwrot wektora  $P$  byłby odwrotny do biegu wskazówki zegarowej.

Odetnijmy od punktu  $O$  w stronę  $C$   $Pp$  umówionych jednostek długości, gdzie  $p$  oznacza odległość wektora  $P$  od punktu  $O$  i nazywa się *ramieniem momentu*; innemi słowy odmierzymy na  $OC$  w odpowiedniej skali podwójne pole trójkąta  $OAB$ . Otrzymamy wektor, związany z punktem  $O$  i posiadający początek w  $O$ ; wektor ten zowie się *momentem wektora  $P$  względem punktu  $O$* .

Krótko mówiąc, *moment wektora  $P$  względem  $O$  jest to wektor prostopadły do płaszczyzny, zawierającej  $O$  i  $P$ , zwrócony w tę stronę, z której widać  $P$  w kierunku biegu wskazówki zegarowej, a pod względem wielkości równy iloczynowi z wektora  $P$  przez ramię*.

Oczywiście moment ani pod względem kierunku ani wielkości nie zależy od położenia wektora  $P$  na prostej  $AB$ .

Jeżeli punkt  $O$  leży na  $AB$ , to moment jest równy zeru.

Niech będą wektory  $P_1, P_2 \dots$

(typowy wektor  $P$ ), położone w jednej płaszczyźnie, np. w płaszczyźnie rysunku, i posiadające wspólny początek  $A$ . Ich wektor wypadkowy oznaczmy przez  $R$ . Niech będzie prócz tego w tejże płaszczyźnie jakikolwiek punkt  $O$ . Obierzemy  $O$  za początek prostokątnego układu współrzędnych; oś  $z$  obierzemy prostopadłe do płaszczyzny rysunku, a oś  $y$  poprowadzimy przez punkt  $A$ . Oczywiście momenty wszystkich wektorów  $P_1, P_2 \dots R$  leżą na osi  $z$ ; przypisujemy im znaki  $+$  lub  $-$  stosownie do tego,

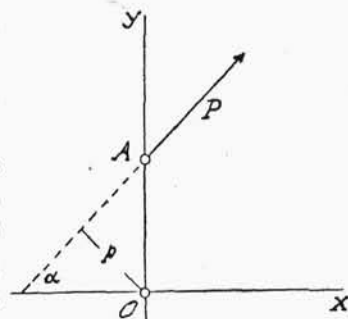


Fig. 3.

czy są zwrócone w stronę dodatnią czy ujemną tej osi. Oznaczmy jeszcze przez  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \varphi$  kąty, które wektory  $P_1, P_2 \dots R$  tworzą odpowiednio z osią  $x$ , a przez  $p_1, p_2 \dots r$  ich odległości od  $O$ . Biorąc rzuty na oś  $x$ , otrzymamy

$$R \cos \varphi = \Sigma P \cos \alpha.$$

Mnożymy następnie obydwie strony tego równania przez  $OA$ , a gdy uwzględnimy, że  $OA \cos \alpha = p$  i  $OA \cos \varphi = r$ , to wypadnie

$$Rr = \Sigma Pp.$$

Równanie to wyraża twierdzenie następujące: *moment wektora wypadkowego wektorów, położonych w jednej płaszczyźnie, względem punktu tejże płaszczyzny jest równy sumie algebraicznej momentów wektorów składowych.*

Twierdzenie to jest przypadkiem szczególnym twierdzenia ogólniejszego, które poznamy w jednym z paragrafów następnych.

Prz. 1. Twierdzenie powyższe dowiedliśmy, zakładając, że wektory  $P_1, P_2 \dots$  mają wspólny początek; dowieść, że twierdzenie jest ważne i w tym razie, gdy wektory  $P_1, P_2 \dots$  są związane z prostymi, położonymi w jednej płaszczyźnie, lecz nie przechodzącymi przez jeden punkt.

Prz. 2. Wektor  $P$  leży w płaszczyźnie  $F$ ; okazać, że końce momentów jego względem wszystkich punktów płaszczyzny  $F$  leżą na innej płaszczyźnie, przechodzącej przez  $P$  i nachylonej do  $F$  pod kątem, którego tangens jest liczbowo równy  $P$ .

Prz. 3. Dane są momenty wektora względem trzech punktów  $A, B, C$ , nie leżących na jednej prostej. Momenty te są prostopadłe do płaszczyzny  $ABC$ . Wyznaczyć (wykreślić) wektor pod względem wielkości i położenia.

Prz. 4. Sumy momentów układu płaskiego wektorów związanych z prostymi względem trzech punktów, położonych w płaszczyźnie układu nie na jednej prostej, są równe. Okazać, że sumy momentów względem wszystkich innych punktów tejże płaszczyzny są równe. W tym razie wektor wypadkowy leży w nieskończoności, i układ sprowadza się do pary wektorów.

Prz. 5. Punkty  $A_1, A_2, A_3$  leżą w odległościach  $p_1, p_2, p_3$  od prostej, z którą związany jest dany wektor  $P$  (wszystko w jednej płaszczyźnie), a wysokości trójkąta  $A_1A_2A_3$  wynoszą odpowiednio  $h_1, h_2, h_3$ . Rozłożyć wektor  $P$  na trzy składowe, położone na bokach trójkąta.

Odp. Szukane składowe będą  $\frac{Pp_1}{h_1}, \frac{Pp_2}{h_2}, \frac{Pp_3}{h_3}$ .



**10. Moment względem prostej.** Niech będzie wektor  $P=AB$ , związany z punktem lub prostą, i jakakolwiek prosta  $z$ . Obierzmy na niej dowolny punkt  $C$ , i wyznaczmy względem niego moment  $M$  wektora  $P$ . Przypuśćmy, że  $M$  tworzy z prostą  $z$  kąt  $\gamma$ ; w takim razie rzut  $N$  momentu na prostą  $z$  jest równy  $M\cos\gamma$ . Dowiedzimy, że rzut ten jest niezależny od położenia punktu  $C$  na prostej  $z$ .

W tym celu poprowadźmy dowolnie płaszczyznę  $F$ , prostopadłą do prostej  $z$ ; przetnie ona tę prostą w punkcie  $O$ . Jeżeli rzutami punktów  $A, B$  na  $F$  są punkty  $A', B'$ , to rzutem trójkąta  $ABC$  będzie trójkąt  $A'B'O$ , przy każdym położeniu punktu  $C$  na prostej  $z$ .

Podwójne pole trójkąta  $ABC$  jest równe  $M$ , i płaszczyzna  $ABC$  tworzy z  $F$  kąt  $\gamma$  (płaszczyzny te są odpowiednio prostopadłe do boków kąta  $\gamma$ ) a zatem podwójne pole trójkąta  $A'B'O = M\cos\gamma = N$ . Znaczący to, że rzut  $N$  jest dla punktów prostej  $z$  wielkością stałą.

Ten rzut  $N$  momentu  $M$  zowie się *momentem wektora  $P$  względem osi  $z$* . Jest to wektor związany z prostą  $z$  i oczywiście równy co do wielkości i kierunku momentowi wektora  $P'=A'B'$  względem punktu  $O$ .

Znajdziemy jeszcze dla wektora  $N$  pewne wyrażenie, które bywa często użyteczne.

Dajmy na to, że  $CD=p$  jest najkrótszą odległością pomiędzy prostymi  $AB$  i  $z$ , i że  $D'$  jest rzutem punktu  $D$ . Ponieważ prosta  $CD$  jest równoległa do płaszczyzny rzutów, przeto  $OD'=CD=p$ . Prosta  $OD'$ , jako prostopadła do  $AB$  i  $D'D$  jest prostopadła do płaszczyzny rzucającej prostej  $AB$ , a więc i do  $A'B'$ . Z tego wynika, że  $OD'$  jest ramieniem wektora  $P'$ , i  $N=P'p$ . Oznaczmy jeszcze przez  $\vartheta$  kąt pomiędzy  $P$  i  $z$ ; w takim razie kąt pomiędzy  $P$

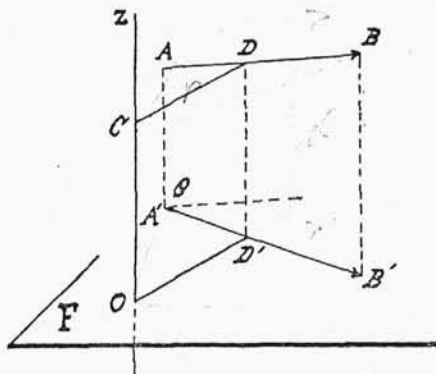


Fig. 4.

i  $P'$  będzie  $\frac{\pi}{2} - \vartheta$  i  $P' = P \sin \vartheta$ . Ostatecznie otrzymamy

$$N = Pp \sin \vartheta.$$

Moment wektora  $P$  względem prostej  $z$  jest równy zeru, (1) jeżeli  $p=0$ , t. j. jeżeli proste  $z$  i  $AB$  się przecinają, i (2) jeżeli  $\vartheta=0$ , t. j. jeżeli proste  $z$  i  $AB$  są równoległe. Wogóle moment wektora względem osi jest zerem, jeżeli wektor i oś leżą w jednej płaszczyźnie.

**11. Moment wypadkowy.** Niech będą wektory  $P_1, P_2 \dots$ , i ich wypadkowa  $R$ , i niech będzie prócz tego jakąkolwiek prosta  $z$ . Prowadzimy, jak poprzednio, płaszczyznę  $F$ , prostopadłą do  $z$  i przecinającą tę prostą w punkcie  $O$ . Rzut  $R'$  wektora  $R$  na  $F$  będzie wypadkową rzutów  $P_1', P_2' \dots$  wektorów  $P_1, P_2 \dots$ . Ponieważ wektory  $P_1', P_2' \dots$  tworzą układ płaski, przeto moment wektora wypadkowego  $R'$  względem punktu  $O$  będzie równy sumie algebraicznej momentów wektorów składowych  $P_1', P_2' \dots$ ; innymi słowy moment wektora  $R$  względem  $z$  jest równy sumie momentów wektorów  $P_1, P_2 \dots$  względem  $z$ . Wogóle *moment wektora wypadkowego względem osi jest równy sumie momentów wektorów składowych*.

Weźmy teraz ten sam układ wektorów  $P_1, P_2 \dots R$  i jakikolwiek punkt  $O$ . Wyznamy względem  $O$  momenty  $M_1, M_2 \dots$  wektorów  $P_1, P_2 \dots$  oraz moment  $N$  wektora  $R$ . Ponieważ  $M_1, M_2 \dots$  są to wektory, posiadające wspólny początek, możemy przeto wyznaczyć ich wektor wypadkowy; oznaczmy go przez  $N'$ . Dowiedzimy, że  $N$  i  $N'$  nie różnią się ani pod względem wielkości ani kierunku.

W tym celu poprowadźmy przez  $O$  trzy osi współrzędnych  $x, y, z$ . Rzut wektora  $N'$  na oś  $x$  jest równy sumie rzutów wektorów  $M_1, M_2 \dots$ . Lecz rzuty momentów  $M_1, M_2 \dots$  na oś  $x$  są momentami wektorów  $P_1, P_2 \dots$  względem tejże, a suma ich w myśl twierdzenia poprzedzającego jest równa momentowi wypadkowej  $R$  względem  $x$ , czyli rzutowi momentu  $N$  na tę prostą. Stąd wynika, że rzuty wektorów  $N$  i  $N'$  na oś  $x$  muszą być równe, a ponieważ toż samo dotyczy dwóch osi pozostałych, przeto wektory  $N$  i  $N'$  nie mogą się różnić pod żadnym względem.

Dowiedliśmy więc twierdzenie takie: *moment wektora wy-*

ypadkowego względem dowolnego punktu jest równy sumie geometrycznej momentów wektorów składowych względem tegoż punktu. Rozumie się, wyraz „równy” oznacza tu zgodność co do wielkości i kierunku.

Twierdzenie, które poznaliśmy w par. 9, jest oczywiście szczególnym przypadkiem twierdzenia powyższego.

Prz. 1. Dane są wektory  $P$  i  $P'$  równe, równoległe i zwrócone w strony przeciwne, czyli para wektorów. Okazać, że suma momentów tych wektorów względem wszystkich punktów przestrzeni jest jednakowa i co do wielkości i co do kierunku.

Należy obrać prostokątny układ współrzędnych, którego początek leży w dowolnym punkcie przestrzeni, a jedna z osi jest prostopadła do płaszczyzny pary, i wyznaczyć sumy momentów względem każdej osi.

Prz. 2. Momenty wypadkowe układu wektorów względem trzech prostych, przechodzących przez punkt  $O$  i nieleżących w jednej płaszczyźnie, są zerami, dowieść, że moment wypadkowy względem  $O$  jest zerem.

Prz. 3. Momenty wypadkowe układu wektorów względem trzech punktów, nie leżących na jednej prostej, są zerami; dowieść, że moment wypadkowy względem każdego innego punktu jest zerem.

Prz. 4. Moment wypadkowy czterech wektorów względem dowolnego punktu jest zerem; okazać, że te wektory leżą na hiperboloidzie jednopowłokowej.

**12. Analityczne wyrażenie momentu.** W prostokątnym układzie współrzędnych dany jest początek  $A(xyz)$  wektora  $P$ , oraz rzuty  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$  tego wektora na osi. Pragniemy wyznaczyć moment  $M$  wektora  $P$  względem początku  $O$ .

Uczynimy tu naprzód pewną uwagę ogólną, dotyczącą obioru układu współrzędnych. Spójrzmy z jakiegoś punktu osi  $z$  (fig. 5), położonego po stronie dodatniej od  $O$ , na tę część płaszczyzny  $xy$ , która leży pomiędzy stronami dodatnimi osi  $x$  i  $y$ . Wskazówka zegarka, leżącego na tej płaszczyźnie tarczą do nas, posuwałaby się od osi  $x$  ku

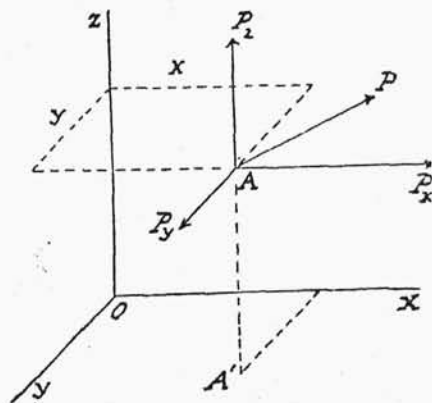


Fig. 5.

osi  $y$ . Powiemy, że oś  $y$  następuje po osi  $x$  w kierunku ruchu wskazówki zegarowej. Tak samo oś  $z$  następuje po osi  $y$ , i oś  $x$  po osi  $z$ . W taki sposób będziemy zwykle obierali osi współrzędnych w przestrzeni.

Na załączonym rysunku mamy wyobrażony ten przypadek, w którym wszystkie wielkości dane, t. j.  $x, y, z, P_x, P_y, P_z$  są dodatnie.

Wyznamy naprzód rzuty  $M_x, M_y, M_z$  szukanego momentu  $M$  na osi współrzędnych, czyli momenty wektora  $P$  względem osi. W tym celu rozkładamy wektor  $P$  na trzy składowe w kierunkach osi. Oczywiście składowe te są równe danym rzutom  $P_x, P_y, P_z$ .

$M_z$ , czyli moment wektora  $P$  względem osi  $z$ , jest równy sumie momentów wektorów  $P_x, P_y, P_z$ . Moment pierwszego jest równy  $-yP_x$  (znak  $-$ , gdyż moment ten jest zwrócony w kierunku ujemnym osi  $z$ ), moment drugiego wynosi  $xP_y$ , i wreszcie moment trzeciego jest równy zeru. Zatem wypadnie

$$M_z = xP_y - yP_x.$$

Tak samo znajdziemy

$$M_x = yP_z - zP_y,$$

$$M_y = zP_x - xP_z,$$

a

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

Dalej otrzymamy  $\cos \alpha = \frac{M_x}{M}$ ,  $\cos \beta = \frac{M_y}{M}$ ,  $\cos \gamma = \frac{M_z}{M}$ , gdzie  $\alpha, \beta, \gamma$  oznaczają kąty kierunkowe momentu  $M$ .

Jeżeli mamy wyznaczyć moment wektora  $P$  nie względem początku  $O$ , lecz względem jakiegoś innego punktu  $O'(\xi\eta\zeta)$ , to we wzorach powyższych wypadnie zamiast  $x, y, z$  napisać  $x', y', z'$ , czyli współrzędne punktu  $A$  w układzie, którego początek leży w  $O'$ , a osi są odpowiednio równoległe do  $x, y, z$ ; zatem  $x' = x - \xi$ ,  $y' = y - \eta$ ,  $z' = z - \zeta$ .

Prz. 1. Układ współrzędnych obrano w taki sposób, że oś  $y$  następuje po osi  $x$  w kierunku odwrotnym do biegu wskazówki zegara. Okazać zapomocą rysunku, że w tym razie  $M_z = yP_x - xP_y$  z odpowiednimi zmianami w  $M_x$  i  $M_y$ .

Prz. 2. Wektor  $P$  tworzy z osiami kąty  $90^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $45^\circ$ , a początek jego leży w punkcie  $(a, a, 0)$ . Wyznaczyć moment względem  $O$ . Odp.

$$M = Pa\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \beta = \cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Prz. 3. Początek wektora  $P$  leży w początku współrzędnych, a składowe jego w kierunkach osi wynoszą  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$ . Wyznaczyć moment wektora  $P$  względem punktu  $A(xyz)$ .

Składowa szukanego momentu w kierunku osi  $z$  jest równa sumie momentów wektorów  $P_x$ ,  $P_y$  względem prostej  $A'A$ , równoległej do  $z$ . Wypadnie  $yP_x - xP_y$  i t. d. Szukany moment jest równy lecz odwrotny do momentu wektora  $P$ , posiadającego początek w  $A$ , względem  $O$ .



nr 121