

on względem rurki w spoczynku, a także napężenie w końcu nieruchomym. Odp. $\frac{\tan ak}{k}$, $\frac{\mu\omega^2}{k^2} \cdot \frac{1-\cos ak}{\cos ak}$, gdzie $k=\omega\sqrt{\frac{\mu}{E}}$.

Obierzmy na sznurze dowolny punkt P i oznaczmy przez x długość części OP w stanie naturalnym, a przez y w stanie rozciągniętym. Możemy uważać y za funkcję zmiennej niezależnej x . W punkcie P napężenie $S=E\frac{dy-dx}{dx}$, a stąd $\frac{dS}{dx}=E\frac{d^2y}{dx^2}$. Z drugiej strony $\mu dx \cdot y\omega^2 = -dS$, zatem $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\mu\omega^2}{E} y$.

Prz. 21. Punkty materyalne A i B są połączone nierozciągalną nicią; pierwszy leży na stole, a drugi zwisa o h niżej od brzegu. Współczynnik tarcia pomiędzy pierwszym i stołem $=f$. Punkt A miał właśnie ruszyć, gdy punktowi B udzielono szybkość poziomą. Wyznaczyć promień krzywizny toru punktu B w położeniu początkowym. Odp. $(1+f)h$.

74. Ruch na torze przepisany. Dotychczas mówiliśmy o ruchu punktu swobodnego, t. j. takiego, który z każdego położenia mógłby ruszyć dowolnym torem, gdyby tylko przyłożyć doń odpowiednią siłę. Rozważymy teraz ruch punktu, zmuszonego pozostawać na pewnym określonym torze, np. ruchu kulki, zawartej w sztywnej rurce, albo ruchu paciórki, nawleczonej na sztywny drut. Tymczasem będziemy pomijali tarcie punktu o tor (o ściany rurki albo o powierzchnię drutu), innemi słowy będziemy uważali tor za doskonale gładki.

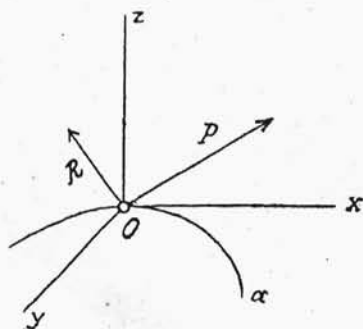


Fig. 45.

Przypuśćmy więc, że punkt materyalny o masie m musi pozostawać na torze α , i że działa nań siła P . W chwili t punkt m zajmuje na torze położenie O .

Obieramy układ współrzędnych w sposób następujący. Początkiem będzie punkt O , osią x styczna do toru, kierunek dodatni w stronę szybkości, osią y główna normalna w stronę środka krzywizny; dyspozycja ta określa również stosownie do przyjętej umowy (par. 12) i oś z . Oczywiście płaszczyzna xy jest ściśle styczna do krzywej α , a oś z jest binormalną tej krzywej.

Rola mechaniczna ciała, które zmusza punkt materialny do pozostawania na krzywej α , albo które tworzy tor α (np. rurki lub drutu), polega tylko na tem, że wywiera ono na punkt materialny pewną reakcję. Jeżeli uwzględnimy tę reakcję w rachunku, to możemy zapomnieć o istnieniu owego ciała, t. j. uważać punkt m za swobodny.

Oznaczmy reakcję toru przez R ; ponieważ tor jest gładki, przeto leży ona w płaszczyźnie normalnej, czyli w płaszczyźnie yz .

* Rzuty siły P na osi x, y, z oznaczmy odpowiednio przez P_t, P_n i P_b ; rzut reakcji R na oś x jest zerem, a dwa rzuty pozostałe oznaczmy przez R_n i R_b . Przyspieszenie leży w płaszczyźnie xy , i rzuty jego na osi będą odpowiednio $\frac{dv}{dt}, \frac{v^2}{\rho}, 0$, gdzie v oznacza szybkość punktu, a ρ promień krzywizny toru w punkcie O . Tym sposobem otrzymamy następujące trzy równania:

$$m \frac{dv}{dt} = P_t, \quad \frac{mv^2}{\rho} = P_n + R_n, \quad 0 = P_b + R_b.$$

Związki te są ważne dla każdej chwili; trzeba tylko uważać, że w każdej chwili następnej rzuty są brane na styczną, normalną główną i binormalną w tym punkcie toru, który wówczas zajmuje punkt materialny, a nie na osi, obrane pierwotnie. Jeżeli tor jest płaski, i siła P działa w jego płaszczyźnie, to $P_b = R_b = 0$ i R_n oznacza reakcję całkowitą.

Równania powyższe określają całkowicie ruch punktu, jeżeli dane jest jeszcze położenie jego i szybkość w pewnej chwili. Można z nich także wyznaczyć reakcję toru R .

Rurka może wywierać na zawarty w niej punkt materialny reakcję w każdym kierunku w płaszczyźnie normalnej; toż samo dotyczy drutu z nanizaną paciorką. W innych razach kierunek reakcji toru musi czynić zadość pewnym warunkom. Wyobraźmy sobie np., że kulka porusza się nie w rurce, lecz w żłobie lub rowku. Oczywiście reakcja nie może tu przekroczyć granic pewnego kąta w płaszczyźnie normalnej.

Albo przypuśćmy, że torem jest skrawek kołowej powierzchni cylindrycznej, czyli obręcz kołowa, a punkt materialny znajduje się po stronie wewnętrznej. Oczywiście reakcja może tylko działać na promieniu obręczy w kierunku środka.

Równania powyższe są ważne tylko dopóty, dopóki określony przez nie kierunek reakcji czyni zadość postawionym warunkom. Jeżeli znajdziemy, że w pewnym miejscu reakcja wyszła ze wskazanych granic, to wnioskujemy, że dalszy ruch na przepisany torze był niemożliwy, a zatem punkt materialny tor ten opuścił. Dalszy ruch punktu odbywa się już w innych warunkach, a zatem i równania ruchu będą inne.

Prz. 1. Punkt materialny został wprowadzony w ruch na gładkim torze, i dalej już żadna siła nań nie działała. Okazać, że szybkość punktu pozostaje stałą co do wielkości, i że reakcja toru jest proporcjonalna do krzywizny.

Prz. 2. Punkt materialny, który musi pozostawać na okręgu, jest przyciągany do jednego z punktów tego okręgu z siłą odwrotnie proporcjonalną do piątej potęgi odległości. Okazać, że reakcja toru jest stała co do wielkości.

Prz. 3. Dwa jednakowe punkty materialne umieszczono w dwóch gładkich, prostych rurkach, przecinających się pod kątem prostym. Punkty się przyciągają i ruszają ze stanu spoczynku. Okazać, że dojdą one jednocześnie do punktu przecięcia rurek, jakiegokolwiek jest prawo przyciągania.

Obieramy rurki za osi współrzędnych, współrzędne punktów materialnych w chwili t oznaczamy przez $(x, 0)$ i $(0, y)$, a kąt który prosta łącząca tworzy z osią x przez ϑ . Będzie wówczas

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -P \cos \vartheta, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -P \sin \vartheta.$$

Z tego otrzymamy łatwo $x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$, czyli $d \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = 0$; ostatecznie $y = Cx$, gdzie C jest stałą całkowania. Gdy więc $x=0$, to i $y=0$.

Prz. 4. Paciórka o masie m jest nawleczona na drut, tworzący koło o promieniu a . W początku paciórka pozostawała w spoczynku w położeniu A , gdy drut zaczął się obracać ze stałą szybkością kątową ω około punktu O , położonego na przeciwnym końcu średnicy przez A . Wyznaczyć reakcję drutu na paciorkę w funkcji odległości r od O . Odp. $R = \frac{m\omega^2 r (3r - 4a)}{2a}$.

Oznaczamy łuk od A do położenia paciorki w chwili t przez $a\vartheta$ i jej szybkość względną przez $a\Omega$. Przyspieszenie bezwzględne paciorki posiada składowe następujące: 1) przyspieszenie unoszenia $r\omega^2$, 2) dwa przyspieszenia względne $a\Omega^2$ oraz $a \frac{d\Omega}{dt}$ i 3) przyspieszenie Coriolisa $2a\Omega\omega$. Biorąc rzuty na promień koła i styczną, otrzymamy równania

$$R = m(a\Omega^2 + r\omega^2 \cos \frac{\vartheta}{2} - 2a\Omega\omega), \quad a \frac{d\Omega}{dt} + r\omega^2 \sin \frac{\vartheta}{2} = 0.$$

Początkowa szybkość względna $= 2a\omega$, a całkując drugie z równań powyższych, otrzymamy $\Omega = 2\omega \cos \frac{\vartheta}{2} = \frac{\omega r}{a}$. Kiedy paciórka dojdzie do O ?

Prz. 5. Punkt materalny, przywiązany do końca nici nawiniętej na koło, jest odpychany od środka koła z siłą wprost proporcjonalną do odległości; współcz. proporcjonalności $= k$. Początkowo punkt znajdował się na obwodzie koła w spoczynku; wyznaczyć naprężenie nici, gdy już odwinie się długość s . Odp. $2ks$.

Prz. 6. Punkt materalny P może poruszać się wewnątrz gładkiej rurki, posiadającej postać okręgu, którego środkiem jest punkt O . Rurka wiruje ze stałą szybkością kątową około punktu O , którego odległość od C wynosi jedną trzecią promienia rurki, i punkt P wyruszył z takiego położenia w rurce, że obiega cały okrąg. Wyznaczyć takie położenie punktu P , w którym reakcja rurki jest zerem.

Na punkt P działa jedynie reakcja rurki. Biorąc rzuty na styczną do rurki, otrzymamy $\frac{\Omega^2 a \sin \vartheta}{3} = \frac{d\omega}{dt}$, gdzie Ω oznacza szybkość kątową rurki, a jej promień, ϑ kąt OCP i ω szybkość kątową, z którą punkt P obiega rurkę. Całkując, znajdziemy $\omega^2 = \frac{2\Omega^2}{3} (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta)$. Punkt P obiega cały okrąg, a więc ϑ zmienia się od ϑ_0 do $2\pi + \vartheta_0$; aby podczas tego ω pozostawało wciąż rzeczywistym, ϑ_0 musi być zerem. W położeniu szukanem $\cos \vartheta = 1/3$.

Prz. 7. Paciórka P o masie m jest nawleczona na gładki drut kołowy o promieniu a . Paciórkę przyciąga punkt Q , krążący po kole współśrodkowem o promieniu b ze stałą szybkością kątową ω , i siła przyciągania wynosi $\mu \cdot PQ$. Szybkość paciórki była równa zeru, gdy punkty O (t. j. wspólny środek kół), P i Q leżały na jednej prostej. Przy jakim kącie POQ reakcja drutu na paciórkę jest największa?

Biorąc rzuty na normalną i styczną, otrzymamy równania

$$\frac{mv^2}{a} = R + \mu(a - b \cos \vartheta), \quad m \frac{dv}{dt} = \mu b \sin \vartheta,$$

gdzie R oznacza reakcję drutu, ϑ kąt POQ i v szybkość paciórki. W pierwszym z tych równań mamy reakcję R w funkcji v i ϑ , a drugie określa związek pomiędzy v i ϑ . Z równań tych wynika, że R osiąga maksimum, gdy $\sin^2 \frac{\vartheta}{2} = \frac{5ma\omega^2}{36\mu b}$.

75. Spadek na torze przepisany. Rozważymy oddzielnie przypadek, w którym ciało porusza się na gładkim torze przepisany pod działaniem siły ciężenia. Układ współrzędnych obierzemy inaczej, niż w paragrafie poprzedzającym. Początek możemy wziąć dowolnie, a oś z skierujemy pionowo na dół.

Przypuśćmy, że punkt o masie m wyruszył z położenia $A_0(x_0y_0z_0)$ z szybkością v_0 , a w chwili t znalazł się w położeniu $A(xyz)$; szybkość jego była wówczas równa v , a reakcja toru R tworzyła z osiami kąty α , β , γ . W takim razie będzie

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= R \cos \alpha \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= R \cos \beta \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= R \cos \gamma + mg. \end{aligned}$$

Mnożymy te równania odpowiednio przez dx , dy , dz i dodajemy stronami.

$$m \frac{dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z}{dt^2} = R(dx \cos \alpha + dy \cos \beta + dz \cos \gamma) + mg dz.$$

Lewą stronę możemy przekształcić na

$$\frac{m}{2} \frac{d(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dt^2} = \frac{m}{2} \frac{d(ds^2)}{dt^2} = \frac{m}{2} d\left(\frac{ds^2}{dt^2}\right)^* = \frac{md(v^2)}{2},$$

gdzie ds oznacza element toru. Współczynnik u R po prawej stronie jest oczywiście równy rzutowi elementu ds na kierunek reakcji R ; lecz reakcja jest normalna do toru, a więc rzut ten jest zerem. Tym sposobem równanie nasze przekształci się na

$$\frac{d(v^2)}{2} = g dz.$$

Całkując w granicach od z_0 do z , otrzymamy

$$v^2 = v_0^2 + 2g(z - z_0).$$

Z równania tego wynika wniosek bardzo ważny, że szybkość punktu w położeniu A nie zależy wcale od kształtu toru A_0A , lecz jedynie od szybkości początkowej v_0 i od $z - z_0$, czyli od różnicy poziomów punktów A i A_0 . Odwrotnie jeżeli punkt materialny wyruszy z A z szybkością v w stronę A_0 , to dojdzie do tego ostatniego z szybkością v_0 .

W przypadku szczególnym, gdy $v_0 = 0$ i $z - z_0 = h$

$$\boxed{v^2 = 2gh.}$$

*) Tu, jak wogóle w mechanice, uważamy t za zmienną niezależną, a więc dt za stałą.

Aby wyznaczyć równanie ruchu, czyli związek pomiędzy drogą, przebytą na torze, i czasem, trzeba mieć dany tor punktu. Przypuśćmy dla przykładu, że torem przepisany jest linia prosta, nachylona do poziomu pod kątem α .

W tym razie siła styczna, jest równa $mg \sin \alpha$, a siła normalna $mg \cos \alpha$. Krzywizna toru jest zerem; z tego wynika, że reakcja toru jest wciąż równa sile normalnej $mg \cos \alpha$.

Ruch punktu jest prostoliniowy i jednostajnie przyspieszony, a mianowicie przyspieszenie wynosi $g \sin \alpha$. Według par. 54 równanie ruchu będzie

$$x = \frac{g \sin \alpha \cdot t^2}{2} + v_0 t + x_0,$$

gdzie v_0 i x_0 oznaczają szybkość i odległość od początku toru w chwili $t=0$.

W przytoczonych niżej przykładach użyto dla krótkości terminu *cięciwa najprędzszego spadku*. Tak nazywa się pewna prosta, przechodząca przez dany punkt A i przecinająca daną linię α ; po niej punkt materialny, który wyruszył z A bez początkowej szybkości, dochodzi w najkrótszym czasie do α pod działaniem siły ciężenia.

Prz. 1. Z punktu A wychodzi wielka liczba prostych we wszelkich kierunkach, i po tych prostych zsuwają się ciężkie punkty materialne, które wyruszyły jednocześnie z A bez początkowej szybkości. Okazać, że w każdej chwili punkty te leżą na kuli, której punktem najwyższym jest A , i wyznaczyć średnicę tej kuli.

Dowodzimy naprzód, że wszystkie punkty, schodzące w płaszczyźnie pionowej przez A , leżą na kole, a stąd już bezpośrednio wynika powyższe twierdzenie. W chwili t średnica kuli wynosi $\frac{gt^2}{2}$.

Prz. 2. Mając dany punkt A i prostą α , wyznaczyć cięciwę najprędzszego spadku.

W płaszczyźnie $A\alpha$ zataczamy koło, styczne do α i posiadające najwyższy punkt w A . Prosta, łącząca punkt A z punktem zetknięcia będzie szukana.

Prz. 3. Punkt A i koło α leżą w jednej płaszczyźnie; wyznaczyć cięciwy najkrótszego i najdłuższego spadku.

Prz. 4. Wyznaczyć miejsce geometryczne punktu, z którego punkty materialne spadają po gładkich prostych do trzech danych punktów A, B, C w jednakowym czasie.

Punkt taki P jest najwyższym punktem kuli, przechodzącej przez punkty dane. Oznaczmy przez O środek koła opisanego na trójkącie ABC i przez a jego promień. Oczywiście wszystkie punkty P leżą

w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez O i prostopadłej do płaszczyzny ABC . Za początek współrzędnych dobrze będzie obrać punkt O , a za oś x dwusieczną kąta pomiędzy prostopadłą do płaszczyzny ABC i prostą poziomą. W takim razie równanie szukanego miejsca będzie $x^2 - y^2 = a^2 \cos \alpha$, gdzie α oznacza kąt pomiędzy płaszczyzną ABC i pionem. Tak więc szukane miejsce geometryczne jest hiperbolą równoramienną.

Prz. 5. Wyznaczyć w płaszczyźnie pionowej krzywą, posiadającą taką własność, że punkt materialny spada po niej od danego punktu O do dowolnego punktu P w tym samym czasie, co i po cięciwie OP .

Punkt O obieramy za biegun, a oś biegunową kierujemy pionowo na dół. Jeżeli w czasie dt punkt przebiegnie element krzywej ds , to $dt = \frac{ds}{\sqrt{2gr \cos \varphi}}$. Wielkości r i s są funkcjami φ , zatem $t = \int_0^\varphi \frac{ds}{\sqrt{2gr \cos \varphi}}$, gdzie α oznacza kąt, który styczna do szukaney krzywej w O tworzy z pionem. Stosownie do warunku

$$\int_0^\varphi \frac{ds}{\sqrt{2gr \cos \varphi}} = \sqrt{\frac{2r}{g \cos \varphi}}.$$

Różniczkując i podstawiając $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$, otrzymamy równanie różniczkowe, którego całką będzie $r^2 = A \sin 2\varphi$. Z tego widać, że krzywa jest lemniskatą, której oś tworzy z pionem kąt 45° .

Prz. 6. Ciężki punkt może się poruszać na okręgu, położonym w płaszczyźnie pionowej. Punktowi temu nadano taką szybkość w położeniu A , że mógłby on dojść do najwyższego punktu B okręgu. W jakim czasie punkt ten dojdzie do położenia P , jeżeli kąt $BOA = \alpha$

i $BOP = \beta$. Odp. $t = \sqrt{\frac{a}{g}} \lg \frac{\tan \frac{\alpha}{4}}{\tan \frac{\beta}{4}}$. Kiedy punkt materialny dojdzie

do B ?

Prz. 7. Punkt materialny, spadając po obręczy, ustawionej w płaszczyźnie pionowej, opuścił ją w punkcie A i pobiegł dalej po paraboli. Dowieść, że obręcz jest kołem krzywizny paraboli w punkcie A .

Prz. 8. Punkt materialny został okręcony na sznurze w płaszczyźnie pionowej około punktu nieruchomego. Dowieść, że suma naprężeń sznura przy dwóch położeniach punktu materialnego na końcach jednej średnicy była dla wszystkich średnic jednakowa.

Prz. 9. Rura ABC wewnątrz gładka stanowi łuk koła o promieniu a , odpowiadający kątowi centralnemu 240° . Rurę ustawiono w płaszczyźnie pionowej, nadając cięciwie AC położenie poziome. Jaką szybkość należy nadać pociskowi w najniższym punkcie B , aby ten odbył całkowity obrót $BACB$. Odp. $5ag$.

Prz. 10. Punkt materialny położono w punkcie A na zewnętrznej stronie gładkiej obręczy kołowej, ustawionej w płaszczyźnie pio-

nowej; promień, przechodzący przez A , tworzy z pionem kąt α . W którym punkcie obrotu punkt materialny z niej zejdzie?

Punkt szukany można poznać po tem, że w nim reakcja obrotu znika. Kosynus kąta, który odpowiedni promień tworzy z pionem,

$$= \frac{2 \cos \alpha}{3}.$$

Prz. 11. W najwyższym punkcie gładkiego kołowego drutu o promieniu r , położonego w płaszczyźnie pionowej, umieszczono paciorkę, nawleczoną na drut. Paciórce nadano szybkość v i jednocześnie wywobodzono drut. Ile razy paciórka obiegnie drut naokoło, zanim ten spadnie o h metrów? Odp.

$$\frac{v}{\pi r} \sqrt{\frac{h}{2g}}.$$

Prz. 12. W trójkącie prostokątnym ABC wierzchołek A kąta ostrego leży pionowo nad wierzchołkiem C kąta prostego. Dwa ciężkie punkty wyszły jednocześnie z A ; jeden z nich podążył przeciwprostokątną AB , a drugi drogą okólną ACB (należy uważać, że w okolicach wierzchołka C przyprostokątne są połączone małym łukiem), i obydwaj doszły jednocześnie do B . Wyznaczyć kąt ABC . Odp. $\arcsin \frac{3}{5}$.

76. Wahadło kołowe. Przypuśćmy, że punkt materialny, na który działa jedynie siła ciężenia, musi pozostawać na krzywej płaskiej, położonej w płaszczyźnie pionowej, symetrycznej względem prostej pionowej i przecinającej tę oś symetrii w punkcie A . Przypuśćmy prócz tego, że punkt A jest najniższym punktem krzywej, i że punkt materialny nie wychodzi po za część toru, zwróconą wypukłością ku dołowi.

Odsuńmy punkt materialny do punktu B_1 , i pozostawmy go samemu sobie. Oczywiście pod działaniem siły ciężenia zacznie on zsuwać się po torze i dojdzie do A z szybkością $\sqrt{2gh}$, gdzie h oznacza wysokość punktu B_1 nad A . Dzięki nabytej szybkości punkt materialny pobiegnie dalej, i szybkość jego wyczerpie się dopiero w punkcie B_2 , położonym o h wyżej nad A , a więc symetrycznym do B_1 . Od tej chwili zjawisko zacznie się powtarzać. Punkt materialny będzie wciąż przebiegał drogę B_1B_2 to w jedną, to w drugą stronę. Ruch taki nazywa się *wahadłowym*, całe urządzenie nazywamy *wahadłem płaskim*, łuk B_1B_2 *amplitudą wahań* i czas, w którym punkt materialny obiega swą drogę w jedną i drugą stronę, *okresem wahań*.

Wogóle okres wahań zależy od amplitudy; im większa jest amplituda, tem dłuższy okres. Możliwe jest wszakże i ta-

kie wahadło, które posiada dla wszelkich amplitud jednakowy okres wahań, którego okres wahań nie zależy od amplitudy. Mówimy, że w tym razie istnieje izochronizm wahań, a wahadło nazywamy izochronicznem.

Dajmy na to, że punkt materyalny w chwili t znalazł się w położeniu P pomiędzy A i B_2 , dąży w stronę B_2 , posiada szybkość v , i że normalna do toru w P tworzy z pionem kąt ϑ . Oczywiście siła styczna wynosi $mg \sin \vartheta$ i ma kierunek od-

wrotny do szybkości. Będzie więc $m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \vartheta$, a jeżeli s oznacza łuk AP , to $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ i

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g \sin \vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Pragnąc znaleźć okres wahań, należy wyrazić $\sin \vartheta$ w fun-
keyi łuku s i wyznaczyć całkę powyższego równania.

Najłatwiej jest urządzić wahadło kołowe, w którym torem punktu materyalnego jest łuk okręgu. W tym celu przywiązujemy ciężarek do końca sznura, którego drugi koniec jest umocowany w punkcie nieruchomym. Gdy odchylimy takie wahadło od położenia pionowego i pozostawimy je samemu sobie, to oczywiście ciężarek będzie obiegał łuk koła, położony w płaszczyźnie pionowej. Jeżeli możemy uważać ciężarek za punkt materyalny, to nazywamy jeszcze wahadło takie prostym.

Oznaczmy długość sznura, czyli długość prostego wahadła przez l . Kąt ϑ we wzorze (1) oznacza tu oczywiście odchylenie sznura od pionu, zatem $\vartheta = \frac{s}{l}$, i w tym razie będzie

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g \sin \left(\frac{s}{l} \right).$$

Całkowanie tego równania prowadzi do całki eliptycznej, ograniczymy się przeto do tego szczególnego przypadku, w którym amplituda jest mała w stosunku do l , tak mała, że nie przekraczając granic dozwolonego błędu, możemy napisać $\frac{s}{l}$ zamiast $\sin \left(\frac{s}{l} \right)$.

Wiadomo, że $\sin \vartheta = \vartheta - \frac{\vartheta^3}{2 \cdot 3} + \frac{\vartheta^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots$. Jeżeli największe

odchylenie wahadła od pionu wynosi 18° , to największa wartość \sin będzie $\frac{\pi \cdot 18}{180} = 0,1 \cdot \pi$. Łatwo obliczyć, że w tym razie drugi wyraz szeregu powyższego nie przenosi $\frac{1}{60}$, a trzeci $\frac{1}{12000}$ pierwszego.

Otrzymamy więc równanie

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{l}s \quad \dots \quad (2).$$

Jest to równanie ruchu harmonicznego, znane już z par. 55; możemy więc powiedzieć, że ruch jest harmoniczny, jakkolwiek torem jest tu okrąg, a nie linia prosta. Oznaczmy okres przez T . Znaleźliśmy w paragrafie wzmiankowanym, że okres jest równy $\frac{2\pi}{\omega}$, ponieważ w danym razie $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, przeto

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \dots \quad (3).$$

Widzimy, że okres nie zależy tu od amplitudy, a zatem wahadło kołowe jest izochroniczne; twierdzenie to jest jednak słuszne tylko dla małych amplitud w granicach dozwolonego błędu.

Prz. 1. Wahadło składa się z ciężaru, uwiązane go na sznurze o długości l . Wiadomo, że sznur ten zrywa się pod działaniem siły równej podwójnej wadze ciężaru; wyznaczyć największą możliwą amplitudę takiego wahadła. Odp. $\frac{2\pi l}{3}$.

Prz. 2. Torem wahadła o masie m jest łańcuchowa, a amplituda jest równa podwójnemu parametrowi. Wyznaczyć reakcję toru w punkcie najniższym. Odp. $mg(2\sqrt{2}-1)$.

Prz. 3. Punkt materialny może się poruszać po łańcuchowej i jest przyciągany do kierownicy z siłą, skierowaną prostopadłe do tej prostej i wprost proporcjonalną do masy punktu i do odległości (współcz. proporc. = k^2). Dowieść, że wahadło takie jest izochroniczne i wyznaczyć okres wahań.

Dojdziemy z łatwością, że $\frac{ds^2}{dt^2} = -k^2s$, co jest dowodem wskazanego twierdzenia. Okres = $\frac{2\pi}{k}$.

Prz. 4. W pewnym punkcie wewnątrz gładkiej rurki, posiadającej kształt pierścienia kołowego i położonej w płaszczyźnie poziomej, są przymocowane końce dwóch jednakowych nici sprężystych.

Naturalna długość każdej nici $= \frac{\pi a}{2}$, naprężenie jest proporcjonalne do wydłużenia i współcz. proporc. $= k$. Nici te naciągnięto wewnątrz rurki w kierunkach odwrotnych i końce swobodne przyczepiono do punktu materialnego o masie m . Następnie punkt ten odchyłono od położenia równowagi o łuk, mniejszy od ćwiartki okręgu, i wypuszczono swobodnie. Okazać, że drgania punktu są izochroniczne i wyznaczyć okres. Odp. $\pi \sqrt{\frac{2m}{k}}$.

Prz. 5. Gładki drut, posiadający kształt okręgu o promieniu a , obraca się w płaszczyźnie poziomej około punktu O ze stałą szybkością kątową Ω . Odległość środka C okręgu od punktu O jest równa b . Wyznaczyć okres drobnych wahań paciorki, nawleczonej na drut.

Odp. $\frac{2\pi}{\Omega} \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Znajdziemy łatwo, że $a \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -b\Omega^2 \sin \vartheta$, gdzie ϑ oznacza kąt, który promień, przechodzący przez paciorkę, tworzy z OC . Zatoczmy z C koło promieniem l , i niech s oznacza łuk tego koła, odpowiadający kątowi ϑ . Tak więc $\vartheta = \frac{s}{l}$, i równanie powyższe przekształci się na $\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{b\Omega^2}{a} \sin \frac{s}{l}$. Możemy tak dobrać l , aby było $\frac{b\Omega^2}{a} = g$, a zatem ruch względny promienia, łączącego paciorkę z C , jest taki, jak ruch sznura wahadła o długości $l = \frac{ag}{b\Omega^2}$.

77. Wahadło cykloidalne. Niech torem wahadła będzie cykloida. Promień koła tworzącego oznaczmy przez a , i dajmy na to, że koło to obróciło się o kąt φ od chwili, gdy punkt P , kreślący cykloidę, przechodził przez wierzchołek A . Normalna PQ tworzy oczywiście z pionem

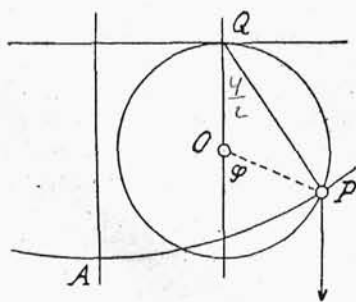


Fig. 46.

kąt $\frac{\varphi}{2}$, a zatem w równaniu (1) paragrafu poprzedzającego należy zamiast ϑ napisać $\frac{\varphi}{2}$, i będzie

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Z geometrii wiadomo, że łuk $AP = s = 4a \sin \frac{\varphi}{2}$ ^{*)}, a zatem $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{s}{4a}$. Wprowadzając to do powyższego równania, otrzymamy

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{gs}{4a}.$$

Jest to znowu równanie ruchu harmonicznego. W tym razie

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{a}}, \text{ a więc okres}$$

$$T = 4\pi \sqrt{\frac{a}{g}}. \quad (1).$$

Widzimy, że okres nie zależy od amplitudy, a zatem wahadło cykloidalne jest dokładnie izochroniczne, innymi słowy, z jakiegokolwiek położenia punkt materialny zaczął spadać po cykloidzie, to zawsze dojdzie do wierzchołka w jednym i tym samym czasie $\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$. Krzywa, posiadająca taką właściwość, nazywa się *tautochroną*.

Izochronizm wahadła cykloidalnego odkrył Huygens (przed r. 1673); on również podał sposób zrealizowania takiego wahadła. W tym celu sporządza się sztywną ramę w kształcie dwóch gałęzi cykloidy, posiadających wspólne ostrze A . Ramę ustawia się w płaszczyźnie pionowej tak, aby podstawa cykloidy była pozioma (fig. 47).

W ostrzu A jest umocowany koniec taśmy AB , dźwigającej w drugim końcu ciężarek B . Jeżeli koło, tworzące obydwie cykloidy, ma promień a , to długość taśmy wynosi $4a$. Gdy owiniemy taśmę na jednej z cykloid, to ciężarek znajdzie się w wierzchołku. Pozostawmy następnie wahadło samemu sobie; taśma zacznie się odwijać, pozostając wciąż wyprężoną, a więc ciężarek będzie obiegał rozwijającą cykloidę; wiadomo z geometrii, że jest to cykloida, równa cykloidom ramy.

^{*)} W podręcznikach zazwyczaj mierzy się łuk cykloidy od ostrza i w takim razie łuk $= 4a \left(1 - \cos \frac{\vartheta}{2}\right)$, gdzie ϑ oznacza kąt, o który obróciło się koło tworzące od chwili, gdy punkt P był w ostrzu. Pragnąc zmierzyć od wierzchołka, trzeba od tego odjąć $4a$ (łuk pomiędzy ostrzem i wierzchołkiem) i na miejsce ϑ postawić $\pi + \varphi$.

Punkt A jest środkiem krzywizny toru ciężarka w wierzchołku C , a koło, zatoczone z A promieniem $4a$, jest kołem krzywizny. Zetknięcie tego koła z cykloidą jest bardzo ścisłe, i na znacznym obszarze, po obydwóch stronach punktu C , można z dobrem przybliżeniem zastąpić łuk cykloidy przez łuk koła.

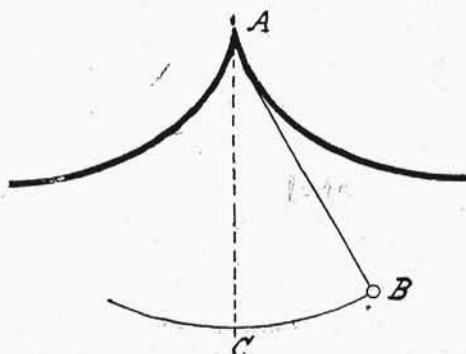


Fig. 47.

Wynika stąd wniosek taki: jeżeli amplituda wahadła kołowego jest mała, to można uważać je w przybliżeniu za cykloidalne, a zatem wahadło kołowe przy małych amplitudach jest izochroniczne. Gdy oznaczmy długość taśmy przez l , to $\alpha = \frac{l}{4}$; podstawiając to we wzorze (1) paragrafu niniejszego, znajdziemy, że okres drobnych wahań wahadła kołowego wynosi $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, co jest zgodne z (3) w par. poprzedzającym.

Prz. 1. Punkt materialny zsuwa się po gładkiej cykloidzie o osi pionowej, wyszedłszy z ostrza bez początkowej szybkości. Wyznaczyć przyspieszenie całkowite co do wielkości i kierunku w położeniu dowolnem. Odp. Przyspieszenie jest skierowane do środka koła tworzącego i równe g .

Prz. 2. Okazać, że punkt materialny w przykładzie poprzedzającym porusza się tak, jakby był przymocowany do obwodu koła tworzącego, a to toczyło się po podstawie cykloidy z szybkością kątową stałą.

Do tego trzeba tylko dowieść, że $\frac{d\vartheta}{dt}$ jest wielkością stałą.

Prz. 3. Po gładkiej cykloidzie, której podstawa jest pozioma, a wierzchołek zwrócony ku dołowi, zsuwają się dwa punkty mate-

ryalne. Obydwa wyszły z ostrza, lecz jeden wyruszył o t sek. wcześniej od drugiego. Za ile sekund od wyruszenia pierwszego nastąpi

spotkanie? Odp. $2\pi\sqrt{\frac{a}{g}} + \frac{t}{2}$.

Prz. 4. Gładki drut o długości l w postaci jednej gałęzi cykloidy ustawiono w płaszczyźnie pionowej tak, że podstawa jest pozioma, a wierzchołek zwrócony ku górze. Na drut nanizano bardzo małych paciórka, które okryły go całkowicie. W pewnej chwili usunięto przeszkody na końcach, i paciórki zaczęły się zsuwać; wyznaczyć łuk cykloidy, który obnaży się w t sekund. Odp.

$$\frac{l \left(e^{t\sqrt{\frac{g}{2l}}} - e^{-t\sqrt{\frac{g}{2l}}} \right)}{e^{t\sqrt{\frac{2g}{l}}} + e^{-t\sqrt{\frac{2g}{l}}}}.$$

Dla jednej paciórki otrzymamy równanie $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{2gs}{l}$; całka ogólna

$s = Ae^{t\sqrt{\frac{2g}{l}}} + Be^{-t\sqrt{\frac{2g}{l}}}$, gdzie A i B oznaczają stałe całkowania.

3/3 78. **Brachistochrona.** Okażemy tu jeszcze inną ciekawą właściwość mechaniczną cykloidy. Naprzód wypada dowieść pewne twierdzenie pomocnicze.

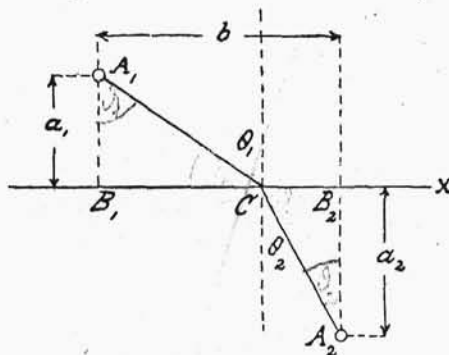


Fig. 48.

Punkt ruchomy wyszedł z punktu A_1 , położonego po jednej stronie prostej x i doszedł do punktu A_2 , położonego po drugiej; ruchy po obydwóch stronach były prostoliniowe i jednostajne, ale szybkość po jednej stronie wynosiła v_1 , a po drugiej v_2 . Dajmy na to, że punktu ruchomy przeciął prostą x w punkcie C , i że drogi A_1C i CA_2 tworzą odpowiednio z prostą x kąty θ_1 i θ_2 . W takim razie całą drogę

od A_1 do A_2 punkt ruchomy odbył w czasie

$$t = \frac{a_1}{v_1 \cos \vartheta_1} + \frac{a_2}{v_2 \cos \vartheta_2} \quad (1).$$

Prócz tego zachodzi związek

$$a_1 \tan \vartheta_1 + a_2 \tan \vartheta_2 = b \quad (2).$$

Znaczenie liter wyjaśnia dostatecznie fig. 48.

Czas t jest funkcją kątów ϑ_1 i ϑ_2 . Jeżeli punkt ruchomy ma w jaknajkrótszym czasie dojść do A_2 , to kąty te powinny być takie, aby było

$$\frac{a_1 \sin \vartheta_1 d\vartheta_1}{v_1 \cos^2 \vartheta_1} + \frac{a_2 \sin \vartheta_2 d\vartheta_2}{v_2 \cos^2 \vartheta_2} = 0.$$

Prócz tego mamy z (2), że

$$\frac{a_1 d\vartheta_1}{\cos^2 \vartheta_1} + \frac{a_2 d\vartheta_2}{\cos^2 \vartheta_2} = 0.$$

Z tych dwóch równań wynika, że

$$\frac{\sin \vartheta_2}{v_2} - \frac{\sin \vartheta_1}{v_1} = 0 \quad (3).$$

Taki warunek powinien być spełniony, aby czas t osiągnął minimum.

Rozwiążemy teraz zagadnienie następujące. Dane są punkty O i A , z których pierwszy leży wyżej od drugiego. Punkt materialny wyszedł z O bez początkowej szybkości i biegnie do A pod działaniem siły ciężenia po gładkim torze przepisanym. Jaki powinien być ten tor, aby czas spadania był jaknajkrótszy? Będziemy uważali, że ruch odbywa się w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez punkty dane.

Obierzemy punkt O za początek współrzędnych; oś x poprowadzimy poziomo a oś y pionowo na dół. Niech będą na szukanej linii trzy punkty nieskończenie bliskie P_1 , P , P_2 . Elementy P_1P i PP_2 tworzą z pionem kąty ϑ i $\vartheta + d\vartheta$, a punkt materialny przebiega je z szybkościami v i $v + dv$.

Droga P_1PP_2 musi być taka, aby punkt materialny doszedł z P_1 do P_2 w czasie jaknajkrótszym, a zatem na zasadzie tylko co dowiedzionego twierdzenia będzie

$$\frac{\sin(\vartheta + d\vartheta)}{v + dv} - \frac{\sin \vartheta}{v} = 0$$

czyli
$$d\left(\frac{\sin \vartheta}{v}\right) = 0.$$

Z tego wynika, że $\frac{\sin \vartheta}{v}$ jest wielkością stałą. Oznaczmy tę stałą przez $\frac{1}{\sqrt{4ag}}$, a ponieważ $v = \sqrt{2gy}$, gdzie y jest rzędną punktu y , przeto $y = 2a \sin^2 \vartheta$. Wprowadźmy jeszcze kąt $\varphi = 2\vartheta$; w takim razie ostatnie równanie przybierze postać

$$y = a(1 - \cos \varphi).$$

Jest to znane równanie cykloidy, której ostrze leży w punkcie O , a podstawa na osi x , a więc linią najprędszego spadku, czyli *brachistochroną* jest cykloida, której ostrze leży w O , a podstawa jest pozioma.

79. **Tarcie o tor.** Uważaliśmy dotychczas, że reakcja toru na punkt materialny leży w płaszczyźnie normalnej; w rzeczywistości reakcja tworzy zawsze z płaszczyzną normalną kąt różny od zera, innemi słowy oprócz składowej normalnej posiada jeszcze składową styczną, którą nazywamy *siłą tarcia* lub wprost *tarciem*. Punkt materialny jest w ruchu, a zatem tarcie jest całkowicie rozwinięte, kąt φ pomiędzy reakcją i płaszczyzną normalną nazywa się *kątem tarcia*, a $\tan \varphi = f$ współczynnikiem tarcia *).

Pragnąc uwzględnić w rachunku tarcie, musimy zmodyfikować albo raczej dopełnić równania, do których doszliśmy w par. 74. Pozostawimy oznaczenia bez zmiany z tą tylko różnicą, że R ma oznaczać nie reakcję całkowitą, lecz jej składową normalną. W takim razie reakcja styczna, czyli *siła tarcia*, będzie równa fR ; jest ona zawsze skierowana odwrotnie do szybkości, a w punktach, w których szybkość jest zerem, tarcie ma kierunek odwrotny do siły stycznej.

Wprowadzając siłę tarcia, otrzymamy zamiast równań paragrafu 74 następujące:

$$m \frac{dv}{dt} = P_t - fR, \quad \frac{mv^2}{\rho} = P_n + R_n, \quad 0 = P_b + R_b.$$

Wypada uczynić tu pewną uwagę, o której trzeba pamiętać

*) Uważamy tu, że współczynnik tarcia jest niezależny od szybkości, co, jak wiadomo ze statyki, jest słuszne tylko w przybliżeniu.