

II. POLE SZYBKOSCI.

21. Układ sztywny. W cynematyce nazywamy ciałem sztywnym, albo układem sztywnym, zbiór punktów ruchomych, któremu przypisujemy tylko dwie właściwości następujące: po pierwsze punkty układu dają się indywidualizować, to znaczy, że mając jakiś punkt dany w jednym z położeniach układu, możemy odróżnić ten punkt i w położeniach innych; powtórę odległość pomiędzy jakimikolwiek dwoma punktami podczas ruchu pozostaje bez zmiany.

Na żadne własności fizyczne układu w cynematyce nie zwracamy uwagi, nie przypisujemy mu nawet zwykle żadnych określonych kształtów i wymiarów; dzięki temu mamy prawo zaliczyć do układu, każdy punkt przestrzeni, jeżeli uznamy to za korzystne.

Badanie ruchu takiego układu może się odbywać w dwóch kierunkach. Przedewszystkiem może chodzić o to, jak się poruszają różne punkty układu w ciągu pewnego okresu. Ruchy te oczywiście pozostają w zależności jedne od drugich, i gdy mamy dostateczną liczbę danych, dotyczących ruchu układu, to powinniśmy być w stanie wyznaczyć położenie dowolnego z jego punktów w każdej chwili badanego okresu.

Tak np. ruch całego układu jest określony, gdy są dane ruchy trzech jego punktów, nie leżących na jednej prostej. Przypuśćmy, że punktami takimi są A_1 , A_2 i A_3 . Weźmy dowolnie czwarty punkt B układu; odległości jego od trzech pierwszych niech będą odpowiednio r_1 , r_2 , r_3 . Pragniemy wyznaczyć położenie punktu B w jakiejś chwili t .

Położenia A_1' , A_2' , A_3' punktów A_1 , A_2 , A_3 w chwili t są znane, bo ruchy tych punktów są dane, a punkt B znajdzie się w punkcie przecięcia trzech kul, zatoczonych z A_1' , A_2' , A_3'

promieniami r_1, r_2, r_3 . Będą wprowadzić dwa takie punkty przecięcia B' i B'' , ale okoliczność ta nie może wywołać wątpliwości, bo z dwóch czworościanów symetrycznych $A_1'A_2'A_3'B'$ i $A_1'A_2'A_3'B''$ jeden tylko jest przystający z czworościanem $A_1A_2A_3B$.

Tym sposobem daje się wyznaczyć położenie punktu B w każdej chwili badanego okresu, a zatem ruch tego punktu jest całkowicie określony. Toż samo dotyczy wszystkich innych punktów układu.

22. Pole szybkości. Drugi kierunek, jaki można nadać badaniom ruchu układu sztywnego, daje się określić, jako badanie stanu cynematycznego układu w pewnej chwili. Powiemy to jeszcze inaczej.

W pewnej chwili każdemu punktowi układu odpowiada wektor szybkości, i te wszystkie wektory razem tworzą tak zwane pole szybkości. Otóż chodzi o zbadanie pola szybkości *).

W rozdziale niniejszym będzie nas głównie zajmowało to zadanie drugie.

Teoria pola szybkości opiera się na następującem twierdzeniu zasadniczem: *rzuty szybkości dwóch punktów układu sztywnego na prostą, łączącą te punkty, są równe*.

Niech będą dwa dowolne punkty układu A i B , posiadające w danej chwili szybkości \underline{u} i \underline{v} , a w niech oznacza szybkość punktu B względem A .

Torem względnym punktu B jest jakaś krzywa sferyczna, t. j. linia, położona na powierzchni kuli, zatóczonej z A promieniem AB , a szybkość w , jako styczna do tej linii, musi być prostopadła do promienia AB .

Szybkość bezwzględna v punktu B jest wypadkową szybkości względnej w i szybkości unoszenia u , a rzut tej wypadkowej na prostą AB

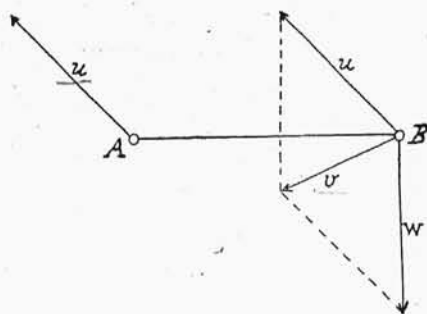


Fig. 9.

*) A także w dalszym ciągu pola przyspieszeń.

jest równy sumie rzutów składowych w i u . Lecz rzut składowej w jest równy zeru, zatem rzuty szybkości u i v są równe.

Twierdzenie to daje się równie łatwo dowieść analitycznie.

Niech będą w prostokątnym układzie współrzędnych dwa punkty $A_1(x_1y_1z_1)$ i $A_2(x_2y_2z_2)$ układu sztywnego; stałą odległość A_1A_2 oznaczmy przez l , a kąty kierunkowe prostej A_1A_2 przez α , β , γ . Wówczas będzie

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l^2.$$

Różniczkujemy to równanie i wprowadzamy $x_1 - x_2 = l \cos \alpha$ i t. d. Wypadnie

$$\frac{dx_1}{dt} \cos \alpha + \frac{dy_1}{dt} \cos \beta + \frac{dz_1}{dt} \cos \gamma = \frac{dx_2}{dt} \cos \alpha + \frac{dy_2}{dt} \cos \beta + \frac{dz_2}{dt} \cos \gamma.$$

Oczywiście lewa i prawa strony tego równania są odpowiednio równe rzutom szybkości punktów A_1 i A_2 na prostą A_1A_2 .

Z twierdzenia powyższego wynika, że szybkości trzech punktów układu, nie leżących na jednej prostej, określają całkowicie stan cynematyczny układu w danej chwili; innemi słowy, gdy mamy dane szybkości u , v , w trzech takich punktów A , B , C , to możemy wyznaczyć szybkość każdego z pozostałych punktów.

Rozumie się, owe szybkości dane nie mogą być całkowicie dowolne. Muszą one same być w zgodzie z twierdzeniem, a więc rzuty szybkości u i v na prostą AB muszą być równe i t. d.

Weźmy naprzód jakiś punkt P , nie leżący w płaszczyźnie ABC . Znamy rzuty szybkości tego punktu na proste PA , PB , PC , gdyż są one odpowiednio równe rzutom szybkości u , v , w na te proste, a tem samem szybkość punktu P jest określona.

Można szybkość tę wyznaczyć w sposób następujący. Prowadzimy z P trzy odcinki równe i równoległe do u , v , w ; końce ich oznaczmy przez A' , B' , C' . Następnie przez te końce przesuwamy płaszczyzny, odpowiednio prostopadłe do prostych PA , PB , PC ; punkt przecięcia tych płaszczyzn będzie końcem szukanej szybkości punktu P .

Mając szybkość punktu P , możemy wyznaczyć szybkość dowolnego punktu Q , położonego w płaszczyźnie ABC , użytku-

jąc w tym celu w wyżej opisany sposób punkt P i dwa z punktów A, B, C .

Powróćmy jeszcze do szybkości punktu P i rozważmy ten przypadek szczególny, gdy szybkości u, v, w są równe i równoległe. W takim razie oczywiście wszystkie trzy punkty, które oznaczyliśmy przez A', B', C' , będą leżały razem w jednym punkcie, i punkt ten będzie końcem szybkości punktu P . Z tego wynika, że szybkość punktu P musi być zgodna z szybkościami punktów A, B, C co do wielkości i kierunku.

Jeżeli szybkości trzech punktów układu, nie leżących na jednej prostej, są zgodne co do wielkości i kierunku, to też samo dotyczy wszystkich punktów układu. Mówimy, że w rozważanej chwili ruch układu jest postępowy.

Jeżeli szybkości trzech punktów układu, nie leżących na jednej prostej, są równe zeru, to cały układ jest w danej chwili nieruchomy.

N 2A. Prz. Dwie sztaby AB i BC , połączone w B zapomocą przegubu poruszają się w płaszczyźnie. Wyznaczyć wykreślnie szybkość przegubu B , mając dane szybkości końców A i C .

23. Ruch prostej. Zobaczymy teraz, jaka zależność istnieje pomiędzy szybkościami punktów prostej a , należącej do układu sztywnego.

Przedewszystkiem w myśl paragrafu poprzedzającego rzuty tych wszystkich szybkości na prostą a są równe. Dajmy na to, że szybkość jednego z punktów prostej a jest do niej prostopadła. Rzut tej szybkości na prostą a jest równy zeru, a zatem i szybkości wszystkich punktów prostej a muszą być do niej prostopadłe. Taka prosta nazywa się prostą zerową.

Również jeżeli na prostej istnieje punkt, którego szybkość jest równa zeru, to szybkości wszystkich innych punktów prostej są do niej prostopadłe, i prosta jest zerową.

Niech będzie jakaś linia l , należąca do układu ruchomego, i inna linia p , stanowiąca miejsce geometryczne końców szybkości punktów linii l . Nazwiemy p linią przewodnią linii l , gdyż l wciąż podąża za p . Wyznaczymy linię przewodnią prostej.

Obierzmy na prostej układu dwa punkty A_1 i A_2 , których współrzędne Kartezjusza oznaczmy przez $(x_1 y_1 z_1)$ i $(x_2 y_2 z_2)$. Weźmy na tej prostej jakikolwiek punkt trzeci $A(xy z)$, którego

stosunek podziału względem A_1, A_2 niech będzie λ^*). W takim razie będzie

$$(1 + \lambda)x = x_1 + \lambda x_2 \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Różniczkujemy to równanie względem t ; zważyć przytem należy, że λ nie zmienia się z biegiem czasu, bo odległości pomiędzy A_1, A_2 i A są stałe. Wypadnie więc

$$(1 + \lambda) \frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + \lambda \frac{dx_2}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Dodając (1) i (2), otrzymamy

$$(1 + \lambda) \left(x + \frac{dx}{dt} \right) = x_1 + \frac{dx_1}{dt} + \lambda \left(x_2 + \frac{dx_2}{dt} \right) \quad . \quad (3) \quad **).$$

Oznaczmy przez (ξ_1, η_1, ζ_1) , (ξ_2, η_2, ζ_2) , (ξ, η, ζ) współrzędne końców szybkości punktów A_1, A_2, A . Oczywiście

$$\xi_1 = x_1 + \frac{dx_1}{dt}, \quad \xi_2 = x_2 + \frac{dx_2}{dt}, \quad \xi = x + \frac{dx}{dt}.$$

Podstawiając to w (3), otrzymamy

$$(1 + \lambda)\xi = \xi_1 + \lambda \xi_2,$$

oraz dwa równania analogiczne

$$(1 + \lambda)\eta = \eta_1 + \lambda \eta_2, \quad (1 + \lambda)\zeta = \zeta_1 + \lambda \zeta_2.$$

Równania te wskazują, że koniec szybkości punktu A leży na prostej, przechodzącej przez końce szybkości punktów A_1 i A_2 , czyli, że *linią przewodnią prostej jest prosta*. Równania tej linii można łatwo otrzymać w postaci zwykłej, rugując z trzech równań ostatnich zmienny parametr λ .



*) Tak nazywa się stosunek $\frac{A_1 A}{A A_2}$, gdzie porządek liter odpowiada kierunkowi odcinka, a więc $A_1 A + A A_1 = 0$ i $A_1 A = -A A_1$. Gdy λ zmienia się od $+\infty$ do $-\infty$, to A obiega całą prostą $A_1 A_2$. Oznaczmy przez B_1, B_2, B rzuty punktów A_1, A_2, A na oś x , to oczywiście $\frac{B_1 B}{B B_2} = \lambda$, czyli $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$. Z tego otrzymamy $(1 + \lambda)x = x_1 + \lambda x_2$, wzór zużytkowany w tekście w dalszym ciągu.

**) $x + \frac{dx}{dt}$ nie jest tu sumą długości i szybkości, bo to nie miałyby sensu. Należy to uważać za sumę odciętej x i rzutu odcinka, wyrażającego szybkość, na oś x , albo sumę dwóch odcinków, z których jeden ma x , a drugi $\frac{dx}{dt}$ jednostek długości.

Prosta ruchoma, zawierająca szybkość jednego ze swych punktów, przecina swą linię przewodnią, i szybkości wszystkich jej punktów leżą w jednej płaszczyźnie. Tak samo się dzieje, gdy szybkość jednego z punktów prostej jest równa zeru.

Z twierdzenia o prostej przewodniej wynika jeszcze jeden ważny wniosek, do którego zresztą prowadzi bezpośrednio intuicja.

Przypuśćmy, że w układzie ruchomym istnieje prosta z , zawierająca szybkości dwóch swych punktów. W takim razie prosta przewodnia leży na z , a zatem ta prosta z zawiera również szybkości wszystkich innych swych punktów. Szybkości te muszą być równe, gdyż są one swymi własnymi rzutami na prostą z . Ruch układu nazywamy w tym razie śrubowym, a prostą z osią ruchu śrubowego.

Jeżeli szybkości owych dwóch punktów prostej z są równe zeru, to i szybkości jej punktów pozostałych są zerami; ruch układu nazywa się w tym razie obrotowym, a prosta z jego osią.

Prz. 1. Dane są w rzutach (poziomym i pionowym) szybkości v_1 i v_2 dwóch punktów A_1 i A_2 , położonych w danej chwili w płaszczyźnie poziomej rzutów. Wyznaczyć szybkość punktu A , danego na A_1A_2 . Odp. Wyznaczamy naprzód prostą przewodnią, następnie prowadzimy z A odcinek równy i równoległy do v_1 lub v_2 , a przez koniec tego odcinka płaszczyznę prostopadłą do A_1A_2 . W przecięciu tej płaszczyzny z prostą przewodnią leży koniec szybkości szukanej.

Prz. 2. Z punktu O , obranego dowolnie w przestrzeni, prowadzimy odcinki równe i równoległe do szybkości punktów prostej ruchomej. Dowieść, że konce tych odcinków leżą na prostej. Odp. Obieramy O za początek układu współrzędnych, i niech będą na prostej ruchomej punkty $A_1(x_1 y_1 z_1)$ i $A_2(x_2 y_2 z_2)$. Rzuty szybkości tych punktów na oś oznaczmy odpowiednio przez $(u_1 v_1 w_1)$, $(u_2 v_2 w_2)$. Weźmy na A_1A_2 jakikolwiek trzeci punkt A , którego stosunek podziału względem A_1, A_2 niech będzie λ , i poprowadźmy z O odcinek równy i równoległy do szybkości punktu A . Znajdziemy łatwo, że współrzędne końca tego odcinka będą

$$\xi = \frac{u_1 + \lambda u_2}{1 + \lambda}, \quad \eta = \frac{v_1 + \lambda v_2}{1 + \lambda}, \quad \zeta = \frac{w_1 + \lambda w_2}{1 + \lambda},$$

a po wyrugowaniu λ otrzymamy równania prostej.

24. Ruch płaszczyzny. Jak linia ruchoma posiada linię przewodnią, tak powierzchnia ruchoma posiada powierzchnię przewodnią. Tak nazywa się miejsce geometryczne końców szybkości punktów, leżących na powierzchni ruchomej.

Dowodziemy łatwo, że powierzchnią przewodnią płaszczyzny jest płaszczyzna. Weźmy na tej powierzchni dwa dowolne punkty B_1 i B_2 ; są one końcami szybkości dwóch punktów A_1 i A_2 płaszczyzny ruchomej, a zatem prosta B_1B_2 jest przewodnią prostej A_1A_2 i musi leżeć całkowicie na powierzchni przewodniej.

Przypuśćmy, że w układzie istnieje płaszczyzna F , zawierająca szybkości trzech swych punktów, nie leżących na jednej prostej. W takim razie płaszczyzna przewodnia leży na płaszczyźnie F , i ta zawiera szybkości wszystkich swych punktów. Weźmy poza płaszczyzną F jakikolwiek punkt układu A , i niech B będzie jego rzutem prostokątnym na F . Szybkość punktu B jest prostopadła do AB , a zatem i szybkość punktu A musi być prostopadła do tej prostej, czyli równoległa do płaszczyzny F . Widzimy więc, że szybkości wszystkich punktów układu są równoległe do płaszczyzny F . Taki ruch układu nazywamy *plaskim*.

Prz. Dowieść, że w płaszczyźnie ruchomej istnieje zawsze prosta, której wszystkie punkty mają szybkości położone w tejże płaszczyźnie. Prosta taka nazywa się *charakterystyką płaszczyzny*.

25. Ruch postępowy. Mówimy, że układ posiada ruch postępowy, gdy szybkości wszystkich punktów jego są równe i równoległe. O tym rodzaju ruchu była już mowa w par. 22; widzieliśmy tam, że gdy trzy punkty, nie leżące na jednej prostej, mają szybkości równe i równoległe, to ruch układu jest postępowy.

Ruch postępowy posiada np. pudło wagonu, przebiegającego prostą linię kolejową. W tym razie ruchy wszystkich punktów są prostoliniowe, ale to nie jest konieczne. Szlaka, która łączy koła wiodące lokomotywy, posiada również ruch postępowy, ale torami punktów (względem pudła lokomotywy) są tu okręgi.

Niech będą dwa punkty A i B układu, którego ruch wciąż jest postępowy. Weźmy pod uwagę położenia ich w chwili t . Po dt sekundach zajmą one położenia A' , B' ; oczywiście nieskończenie krótkie drogi AA' i BB' są równe i równoległe, a zatem i proste AB , $A'B'$ są równoległe. Po upływie nowych dt sek. rozważane punkty zajmą położenia A'' , B'' , i znowu elementy $A'A''$, $B'B''$ będą równe i równoległe, a prosta

chu układu. Prócz tego prowadzimy przez z inną płaszczyznę **B**, należącą do układu i poruszającą się wraz z nim. Dajmy na to, że w chwili t płaszczyzna **B** tworzyła z **A** kąt ϑ , a w chwili $t+dt$ kąt $\vartheta+d\vartheta$. Otóż szybkość kątowna ma być równa $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$.

Jeżeli szybkość kątowna jest stała, to ruch obrotowy nazywa się *jednostajnym*. W tym przypadku z równania $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$ wynika, że $\vartheta = \omega t + C$, gdzie C oznacza stałą całkowania. Jeżeli początek rachuby czasu przypadł w chwili, gdy płaszczyzna **B** przystawała do **A**, to $C=0$ i $\omega = \frac{\vartheta}{t}$.

Mając daną szybkość kątową, znamy położenie osi, wiemy w którą stronę obraca się układ, a prócz tego możemy wyznaczyć szybkość liniową każdego punktu układu. Weźmy dla przykładu punkt P na fig. 10. Szybkość jego v jest prostopadła do płaszczyzny, przechodzącej przez P i z . W czasie dt punkt ten oczywiście przebiegł drogę $r d\vartheta$, gdzie r oznacza jego odległość od osi, a zatem $v = r \frac{d\vartheta}{dt} = r\omega$.

Warto zauważyć, że szybkość liniowa v punktu P jest to moment szybkości kątowej ω względem tego punktu.

Przy rozwiązywaniu wykreślnem zagadnień cynematycznych często bywa użyteczna okoliczność następująca. Dajmy na to, że figura płaska obraca się w swej płaszczyźnie około punktu O z szybkością kątową ω . Szybkość liniowa pewnego punktu A tej figury jest równa $r\omega$, gdzie $r=OA$; dajmy na to, że wyraża ją odcinek AB . Z trójkąta OAB wynika, że $AB = r \tan \vartheta$, gdzie $\vartheta = \angle AOB$, a zatem szybkość kątowna jest liczbowo równa $\tan \vartheta$. Możemy także powiedzieć, że szybkości kątowe wszystkich punktów układu widać z O pod kątem $\arctan \omega$.

Prz. 1. Koło rozpędowe maszyny parowej robi 120 obrotów na min. Wyznaczyć jego szybkość kątową. Odp. 12,56.

Prz. 2. Wyznaczyć szybkość kątową ziemi i wskazać, w którą stronę jest zwrócona na osi ziemskiej NS . Odp. $\omega=0,00007$.

Prz. 3. Dwie proste obracają się około środków O_1 i O_2 , przy czem ich punkt przecięcia obiega okrąg, przechodzący przez te środki. Szybkość kątowna pierwszej prostej $=\omega$; wyznaczyć szybkość kątowną drugiej.

Prz. 4. Prosta a obraca się w płaszczyźnie rysunku około punktu O z szybkością kątową ω . Wyznaczyć kąt, który ta prosta tworzy ze swą linią przewodnią.

Prz. 5. Okrąg o promieniu a obraca się w swej płaszczyźnie około punktu O z szybkością kątową ω . Wyznaczyć linię przewodnią w dwóch przypadkach: (1) gdy O leży w środku, (2) gdy leży na okręgu. Odp. Okrąg o promieniu $a\sqrt{1+\omega^2}$.

Prz. 6. Punkty A i B należą do układu, którego ruch jest obrotowy. W danej chwili punkty te zajmują w układzie prostokątnym położenia (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , a rzuty ich szybkości na osi współrzędnych wynoszą odpowiednio (u_x, u_y, u_z) , (v_x, v_y, v_z) . Wyznaczyć równania osi. Odp. $u_x(x-x_1)+u_y(y-y_1)+u_z(z-z_1)=0$ i $v_x(x-x_2)+v_y(y-y_2)+v_z(z-z_2)=0$.

27. Ruch płaski. Ruch układu nazywamy płaskim, jeżeli szybkości wszystkich punktów są równoległe do pewnej płaszczyzny F . O ruchu takim była już mowa w par. 24. Widzieliśmy tam, że gdy szybkości trzech punktów płaszczyzny F , nie leżących na jednej prostej, są zawarte w tej płaszczyźnie, to ruch całego układu jest płaski.

Poprowadźmy płaszczyznę F' równoległą do F i uważajmy dwa punkty układu A i A' , położone odpowiednio w F i F' na wspólnej prostopadłej do tych płaszczyzn. Po dt sekundach punkty owe będą również leżały w F i F' , gdyż w płaszczyznach tych są zawarte ich szybkości, a zatem odcinek AA' i w nowym położeniu będzie prostopadły do F , czyli równoległy do położenia poprzedzającego. Z tego wynika, że elementy torów, które przebiegną w dt sek. A i A' , są równe i równoległe, a szybkości tych punktów zgodne co do wielkości i kierunku. Jeżeli więc zbadaliśmy stan cynematyczny punktów układu, zawartych w płaszczyźnie F , to znamy stan cynematyczny całego układu.

Powiemy, że punkty układu, zawarte w płaszczyźnie F , tworzą *układ płaski*, i chodzi obecnie o zbadanie ruchu takiego układu płaskiego.

28. Środek chwilowy. Dajmy na tó, że punkty A_1, A_2 układu płaskiego posiadają w danej chwili szybkości v_1, v_2 . Poprowadźmy przez A_1, A_2 proste a_1, a_2 odpowiednio prostopadłe do tych szybkości. Będą to oczywiście proste zerowe, a szybkość ich punktu przecięcia C musi być równa zeru, bo w razie przeciwnym musiałaby być prostopadłą do a_1 i a_2 .

Wzniesmy w punkcie C prostopadłą do płaszczyzny F , czyli w danym razie do płaszczyzny papieru. Wszystkie punkty układu ruchomego, położone na tej prostopadłej, mają szybkości równe zero, a zatem ruch układu jest obrotowy, i osią

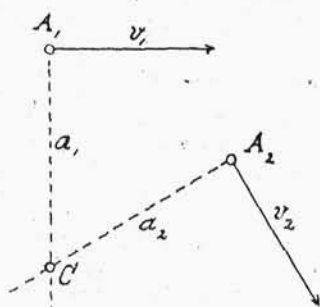


Fig. 11.

jest owa prostopadła. Nazywamy ją *osią chwilową*, a punkt C *środkiem chwilowym*. Przysłowiowy „chwilowy” ma wskazywać, że punkt C tylko w obecnej chwili jest środkiem obrotu. W chwili następnej punkt ten może mieć szybkość różną od zera, a środkiem obrotu będzie jakiś inny punkt układu zajmujący inne położenie.

Szybkości v_1, v_2 są styczne do torów punktów A_1, A_2 , a zatem proste a_1, a_2 są normalnemi. Widzimy więc, że normalne do torów punktów układu, wzniesione w tych punktach, przechodzą wszystkie przez środek chwilowy. Jeżeli więc mamy tory dwóch punktów i mamy dane ich położenia na torach w pewnej chwili, to możemy wyznaczyć środek chwilowy, jako punkt przecięcia normalnych.

Prz. 1. Punkty A, B układu poruszają się na prostych a, b i zajmują w danej chwili położenia dane. Wyznaczyć środek chwilowy. Odp. Szukany środek leży w punkcie przecięcia prostopadłych do a i b w A i B .

Prz. 2. Dwie korby O_1A_1, O_2A_2 obracają się około środków O_1, O_2 , a końce ich są połączone przegubowo sztabą A_1A_2 . Szybkość kątowa korby O_1A_1 jest równa ω_1 ; wyznaczyć szybkość kątową korby O_2A_2 . Odp. Środek chwilowy sztaby A_1A_2 leży w C . Możemy uważać, że punkt A_1 , jako należący do korby, obraca się około O_1 , a jako należący do sztaby około C . Szukana szybkość

$$\text{kątowa } \omega_2 = \frac{\omega_1 \cdot O_1A_1 \cdot CA_2}{CA_1 \cdot O_2A_2}.$$

N. 25. Prz. 3. Torem punktu A układu płaskiego jest okrąg, którego środek leży w O a promień jest równy r , torem zaś punktu B jest prosta, przechodząca przez O (mechanizm kor-

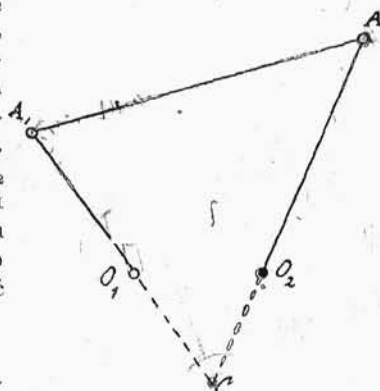


Fig. 12.

bowy). Wyznaczyć szybkość punktu B w funkcji kąta $AOB=\varphi$, oraz szybkości kątowej ω promienia OA . Odp. $\frac{r\omega(r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi})\sin\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}$, gdzie $l=AB$.

29. Ruch prostej w płaszczyźnie. Niech będzie prosta a , należąca do układu płaskiego, i dajmy na to, że w danej chwili środkiem chwilowym jest punkt C , którego odległość CA od a wynosi r . Szybkość punktu A leży na a i jest równa $AB=r\omega$, gdzie ω oznacza obecną szybkość kątową układu.

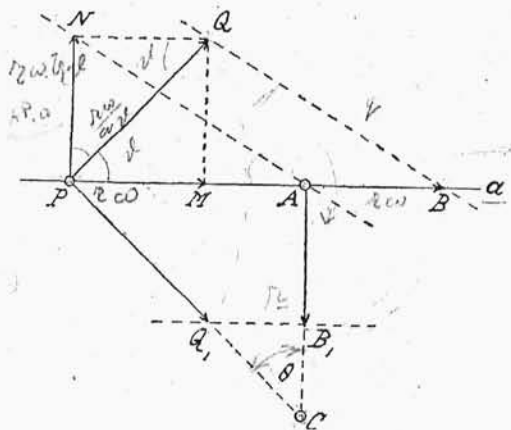


Fig. 13.

Weźmy jeszcze jakiś punkt P prostej a ; jego szybkość

$$PQ = CP \cdot \omega = \frac{r\omega}{\cos\vartheta} \quad (1),$$

gdzie ϑ oznacza kąt ACP . Prosta BQ będzie oczywiście linią przewodnią prostej a .

Rozłóżmy szybkość PQ na dwie składowe w kierunku prostej a i w kierunku prostopadłym. Pierwsza z nich $PM = AB = r\omega$, druga $PN = PQ \sin\vartheta = r\omega \tan\vartheta = AP \cdot \omega$. Gdyby prosta a obracała się około punktu A z szybkością kątową ω , to punkt P miałby właśnie taką szybkość $AP \cdot \omega$. Można powiedzieć, że prosta a posiada dwa ruchy: że przesuwana się w swym własnym kierunku z szybkością $r\omega$, (jest to ruch postępowy) i jednocześnie obraca się około punktu A z szybkością kątową ω .

Gdyby prosta a posiadała tylko ten ruch drugi, to linią

przewodnią byłaby prosta AN . Tworzy ona z a kąt $NAP = \arctan \omega$. Prosta BQ jest równoległa do AN , bo odcinki AB i NQ są równe i równoległe, a zatem tworzy ona również z a kąt $\arctan \omega$ (por. par. 26, prz. 4).

Obróćmy szybkości punktów A i P , albo raczej odcinki AB i PQ około punktów A i P w kierunku ruchu wskazówki zegara o 90° . Powstałe tym sposobem wektory AB_1 i PQ_1 nazwiemy szybkościami skreconemi punktów A i P . Z (1) wynika, że $AB_1 = PQ_1 \cos \vartheta$, czyli że odcinek AB_1 jest rzutem odcinka PQ_1 , a zatem prosta Q_1B_1 jest prostopadła do AC lub równoległa do a . Możemy przeto wygłosić twierdzenie: końce szybkości skreconych punktów ruchomej prostej a leżą na równoległej do tej prostej. Twierdzenie to bywa często użyteczne przy rozwiązywaniu wykreślnem zagadnień cynematycznych.

Rozważymy jeszcze pewien przypadek szczególny. Przypuśćmy, że podczas ruchu układu należąca doń prosta a przechodzi wciąż przez nieruchomy punkt O . Dowiedzimy łatwo, że punkt O odgrywa stale taką rolę, jak na fig. 13 punkt A , czyli że jest on wciąż rzutem środka chwilowego na prostą a .

W tym celu zwróćmy uwagę na ruch punktu O względem układu ruchomego. Oczywiście torem względny jest prosta a , a zatem i szybkość względna leży na a . Szybkość bezwzględna jest równa zeru; a z tego wynika, że szybkość unoszenia musi być równa i odwrotna do szybkości względnej; innemi słowy szybkość tego punktu prostej a , który w danej chwili przebiega przez punkt O , leży na tejże prostej.

Prz. 1. Wykreślić styczną w dowolnym punkcie krzywej, która we współrzędnych biegunowych posiada równanie $r = a\varphi$ (spiralna Archimedes). Odp. Można uważać, że linię tę kreśli punkt prostej, która sunie ze stałą szybkością w swym własnym kierunku i jednocześnie obraca się ze stałą szybkością około bieguna (por. prz. 1 par. 17). Środek chwilowy pozostaje stale w odległości a od bieguna.

Prz. 2. Wykreślić styczną w dowolnym punkcie konchoidy Nikomedesa. Konchoidę kreśli punkt prostej, która wciąż przechodzi przez nieruchomy punkt, i której jeden punkt posiada ruch prostoliniowy.

Prz. 3. Dowieść, że obwiednią szybkości punktów prostej ruchomej jest parabola, której styczną wierzchołkową jest owa prosta, a ogniskiem środek chwilowy.

30. Linie środków chwilowych. Badając ruch układu, odróżniamy punkty jego od punktów przestrzeni nieruchomej.

W danej chwili każdy punkt układu przypada w pewnym określonym punkcie przestrzeni, ale należy uważać, że są to dwa punkty różne, i już w chwili następnej nie będą leżały razem. Dotyczy to zarówno ruchu układu w przestrzeni, jak ruchu układu płaskiego w jego płaszczyźnie.

Wyobraźmy sobie na przykład, że cienka płyta porusza się na nieruchomym stole. Odróżniamy ruchome punkty płyty od nieruchomych punktów stołu. W każdej chwili istnieje środek chwilowy. Jest nim pewien określony punkt płyty, zajmujący podówczas pewien określony punkt stołu. Wogóle z biegiem czasu punkty te się zmieniają. Coraz inny punkt płyty staje się środkiem chwilowym, zajmując coraz nowy punkt stołu.

Tym sposobem z pośród punktów płyty wyróżniamy te, które były lub będą środkami chwilowymi, a z pośród punktów stołu te, które zajmował lub zajmie środek chwilowy.

Miejsce geometryczne punktów układu ruchomego, które były lub będą środkami chwilowymi, nazywamy *linią ruchomą środków chwilowych*; oznaczmy ją literą ρ . Miejsce geometryczne punktów płaszczyzny nieruchomej, które zajmował lub zajmie środek chwilowy, nazywamy *linią stałą środków chwilowych*; oznaczmy ją literą σ . Linia ρ należy do układu ruchomego i porusza się wraz z nim, linia σ jest nieruchoma.

W każdej chwili te dwie linie posiadają wspólny punkt C , ówczesny środek chwilowy. Zobaczymy, że są one styczne w tym punkcie.

W tym celu wyobraźmy sobie punkt M , ruchomy, ale nie należący do układu. Przypuśćmy, że ten punkt M podąża za środkiem chwilowym i w każdej chwili znajduje się właśnie w tym środku. Oczywiście torem bezwzględny punktu M jest linia σ , i do niej jest styczna jego szybkość bezwzględna. Uważajmy teraz ruch punktu M względem układu ruchomego. Torem względnym jest linia ρ , i szybkość względna musi być do niej styczna. Szybkość unoszenia jest zerem, bo szybkość środka chwilowego jest równa zeru. Z tego wynika, że szybkość bezwzględna jest zgodna z względną zarówno co do kierunku, jak i co do wielkości. Widzimy więc, że linie ρ i σ posiadają w punkcie C wspólną styczną, a więc się stykają w tym punkcie.

Z rozważań powyższych wynika jeszcze inny ważny wniosek. Ponieważ szybkość bezwzględna punktu M jest wciąż ró-

ruchu układu płaskiego, zwłaszcza, jeżeli chodzi o tory różnych punktów. W wielu przypadkach, mając linie środków, możemy w sposób bardzo prosty wykreślić tor dowolnego punktu układu.

Przypuśćmy, że krzywa σ na fig. 15 jest linią stałą, a ρ linią ruchomą środków chwilowych. W chwili obecnej krzywe te stykają się w O , i punkt ten jest środkiem chwilowym. Pragniemy wykreślić tor punktu, który obecnie zajmuje położenie A .

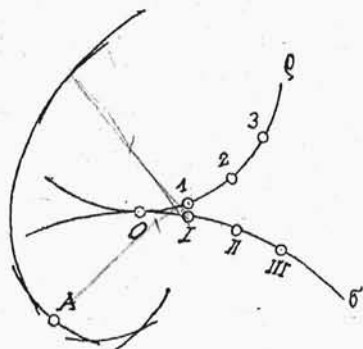


Fig. 15.

Obierzmy na linii σ pewną liczbę punktów I, II, III... Dajmy na to, że umiemy w sposób ścisły lub przybliżony wyznaczyć na linii ρ takie punkty 1, 2, 3..., aby łuki 01 , 12 , 23 ... były odpowiednio równe łukom $0I$, $I II$, $II III$...

Zatoczmy z punktu O okrąg, przechodzący przez A . Okrąg ten będzie zawierał element toru punktu A , bo w chwili obecnej A obraca się około O ; innymi słowy okrąg będzie styczny do toru. Po pewnym czasie punkt 1 znajdzie się w położeniu I i stanie się wówczas środkiem chwilowym; gdy więc z punktu I zatoczmy okrąg promieniem $1A$, to okrąg ten będzie znowu styczny do szukanego toru. Zataczamy następnie okrąg z punktu II promieniem $2A$ i t. d. Obwiednią tych wszystkich okręgów będzie szukany tor punktu A .

~~Prz. 1.~~ Prz. 1. Koło toczy się po linii prostej; wykreślić tor któregośkolwiek punktu układu.

Prz. 2. Prosta toczy się po okręgu; wykreślić tor jednego z punktów tej prostej (rozwijająca koła), a także tor innego punktu, przechodzący przez środek okręgu (spiralna Archimedesesa, por. prz. 2 par. 30).

Prz. 3. Wykreślić przy pomocy metody powyższej epicykloidę, albo hipocykloidę.

32. Wyznaczanie linii środków. Okażemy tu na przykładzie, jak można wyznaczyć obydwie linie środków chwilowych, gdy mamy dostateczną liczbę danych, określających ruch układu.

Dajmy na to, że torami punktów A i B układu są proste a i b , przecinające się w punkcie O (por. prz. 1 par. 28).