

drutu tworzymy obwód trójkąta i w środkach boków osadzamy punkty materialne, każdy o masie $\frac{M}{3}$. Model taki będzie miał z płytą jednakową masę, wspólny środek ciężkości i jednakowe momenty bezwładności względem wszystkich prostych (par. 102, prz. 8); łatwo zrozumieć, że pod względem dynamicznym zastąpi on płytę całkowicie.

Prz. 6. Sztaby OA , AB wirują około osi pionowej, przechodzącej przez O , z szybkością kątową ω , pozostając w jednej płaszczyźnie pionowej i tworząc z osią odpowiednio kąty ϑ i φ . Długości sztab wynoszą a i b , masy m i m_1 . Wyznaczyć moment ilości ruchu względem osi obrotu (par. 102, prz. 7). Odp. $\omega \left[\left(\frac{m}{3} + m_1 \right) a^2 \sin^2 \vartheta + m_1 a b \sin \vartheta \sin \varphi + \frac{m_1}{3} b^2 \sin^2 \varphi \right]$.

115. Ciało jakiegokolwiek. Poznamy tu pewne twierdzenia, bardzo ważne i zupełnie ogólne. W tym celu przekształcimy równania (1), które otrzymaliśmy w par. poprzedzającym dla jakiegokolwiek ciała i dla dowolnego punktu redukcji.

Poprowadźmy przez środek ciężkości ciała nowe osi współrzędnych ξ , η , ζ odpowiednio równoległe do x , y , z . Dla elementu m będzie

$$x = \xi + x_0, \quad y = \eta + y_0, \quad z = \zeta + z_0.$$

Wstawiamy to w wyżej wspomniane równania i wykonywamy przekształcenia zupełnie podobne do tych, które opisaliśmy w par. 110. Wypadnie

$$\left. \begin{aligned} H_x &= \Sigma m \left(\eta \frac{d\zeta}{dt} - \zeta \frac{d\eta}{dt} \right) + M \left(y_0 \frac{dz_0}{dt} - z_0 \frac{dy_0}{dt} \right) \\ H_y &= \Sigma m \left(\zeta \frac{d\xi}{dt} - \xi \frac{d\zeta}{dt} \right) + M \left(z_0 \frac{dx_0}{dt} - x_0 \frac{dz_0}{dt} \right) \\ H_z &= \Sigma m \left(\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} \right) + M \left(x_0 \frac{dy_0}{dt} - y_0 \frac{dx_0}{dt} \right) \end{aligned} \right\} \dots (1).$$

Prawa strona każdego z tych równań zawiera dwa wyrazy; oznaczmy odpowiednio wyrazy, postawione na pierwszym miejscu, przez H'_x , H'_y , H'_z , a wyrazy, stojące na drugim miejscu, przez H''_x , H''_y , H''_z . Pierwsze są momentami ilości ruchu ciała względem osi ξ , η , ζ , a drugie momentami ilości ruchu masy M , skoncentrowanej w środku ciężkości, względem x , y , z . Będzie zatem

$$H_x = H'_x + H''_x, \quad H_y = H'_y + H''_y, \quad H_z = H'_z + H''_z.$$

Wogóle moment ilości ruchu ciała względem prostej jest sumą algebraiczną dwóch składników, a mianowicie momentu ciała względem prostej równoległej, przechodzącej przez środek ciężkości, i momentu masy ciała, skoncentrowanej w środku ciężkości względem prostej danej.

Oznaczmy przez H' i H'' odpowiednio wypadkowe wektorów H_x' , H_y' , H_z' i H_x'' , H_y'' , H_z'' . Oczywiście H' jest momentem ilości ruchu ciała względem środka ciężkości, a H'' momentem masy ciała, skoncentrowanej w środku ciężkości, względem punktu O . Wektor H jest wypadkową momentów H' i H'' .

Tak więc moment ilości ruchu ciała względem punktu jest sumą geometryczną dwóch składowych, a mianowicie momentu ciała względem środka ciężkości i momentu masy ciała, skoncentrowanej w tym środku, względem punktu danego.

Pierwsza z tych składowych jest oczywiście jedna i ta sama dla wszystkich punktów redukcji, druga zależy od położenia punktu redukcji. Jeżeli środek ciężkości jest w spoczynku, to druga składowa jest zerem, a zatem ciało względem wszystkich punktów posiada jednakowe momenty ilości ruchu zarówno co do wielkości, jak i kierunku.

W twierdzeniach powyższych łatwo spostrzedz pewne niedomówienie, które należy uzupełnić, a raczej wyjaśnić. Chodzi o to, że H' jest momentem ilości ruchu w ruchu względnym, a mianowicie w ruchu względem środka masy, bo $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ są składowymi szybkości względnej. Niedomówienie to jest jednak usprawiedliwione, gdyż równie dobrze można uważać H' za moment w ruchu bezwzględnym względem środka masy, lub względem tego punktu przestrzeni nieruchomej, który w danej chwili środek masy zajmuje. Aby się o tem przekonać, należy tylko w wyrażeniach na H_x' , H_y' , H_z' , zamiast $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ podstawić odpowiednio $\frac{d(x-x_0)}{dt}$, $\frac{d(y-y_0)}{dt}$, $\frac{d(z-z_0)}{dt}$. Wypadnie wówczas

$$H_x' = \sum m \left(\eta \frac{dz}{dt} - \zeta \frac{dy}{dt} \right)$$

oraz analogiczne wyrażenia na H_y' i H_z' . Są to oczywiście składowe momentu w ruchu bezwzględnym.

Wypada tu rozważyć pewną kwestję, która przy stosowaniu zasady ilości ruchu, może nieraz wywoływać trudności. Wektor H , wzięty względem punktu *nieruchomego*, może się zmieniać jedynie pod wpływem sił zewnętrznych, działających na ciało. Ale oczywiście może być mowa i o wektorze H (w ruchu bezwzględnym) względem punktu *ruchomego*; czy i wówczas twierdzenie powyższe zachowuje moc obowiązującą?

Weźmy wektor H względem ruchomego punktu A , który w czasie dt przeszedł z położenia A_1 do A_2 . Składowa H' jest w każdej chwili taka sama dla A_1 , jak i dla A_2 , a więc w czasie dt mogła ona się zmienić jedynie pod wpływem sił zewnętrznych, natomiast składowa H'' jest dla A_2 inna niż dla A_1 , a zatem przybrała w czasie dt przyrost już skutkiem tego, że punkt A zmienił położenie, niezależnie od sił zewnętrznych. Z tego wynika, że na pytanie powyższe należy dać odpowiedź przeczącą.

Wyjątkowe stanowisko pod tym względem zajmuje środek masy ciała. Dla niego składowa H'' jest zawsze zerem, a zatem wektor H względem środka masy zmienia się jedynie pod działaniem sił zewnętrznych zupełnie tak samo, jak dla punktu nieruchomego. Jeżeli na ciało żadne siły zewnętrzne nie działają, albo jeżeli układ ciał jest izolowany, to wektor H względem środka masy nie zmienia się ani co do kierunku, ani co do wielkości.

Takim układem izolowanym jest nasz system planetarny. Siły przyciągania, które wywierają na siebie nawzajem słońce, planety i księżyce, są siłami wewnętrznymi. Siły zewnętrzne mogłyby pochodzić jedynie od gwiazd stałych, ale odległości tych ciał od naszego układu są tak olbrzymie, że ich siły przyciągania muszą być nieznaczne, i można ich nie brać w rachubę.

Z tego wynikają dwa wnioski: po pierwsze, że ruch środka masy systemu słonecznego jest prostoliniowy i jednostajny, i po wtóre, że wektor H względem środka masy jest stały co do wielkości i kierunku. Płaszczyzna, poprowadzona przez środek masy prostopadle do wektora H , nazywa się *płaszczyzną niezmienną*.

Wypada jednak zaznaczyć, że wyżej użyte wyrazy „*ruch prostoliniowy i jednostajny*“ i „*stały kierunek*“ dopiero wtedy miałyby znaczenie ściśle określone, gdyby było wskazane, do jakiego układu odnosimy *ruch słońca i planet*.

Wszystkie twierdzenia, które poznaliśmy w paragrafie niniejszym, dotyczą w równej mierze ciała sztywnego, jak i nieszywnego. Wektor H ciała sztywnego względem dowolnego punktu posiada także dwie składowe H' i H'' . Pierwsza z nich pochodzi oczywiście z ruchu kulistego około środka ciężkości, a druga z ruchu postępowego.

Jest to przypadek szczególny pewnego prawie oczywistego twierdzenia ogólnego. *Gdy rozłożymy ruch ciała sztywnego na dwa ruchy składowe, to wektor H względem dowolnego punktu O rozłoży się na dwa wektory składowe, odpowiadające owym ruchom.*

Niechaj v' i v'' będą szybkościami elementu m , pochodzącymi z tych ruchów składowych. W takim razie ilość ruchu tego elementu posiada składowe mv' , mv'' , i moment tej ilości ruchu względem O składa się z momentów wektorów mv' i mv'' ; oznaczmy te momenty odpowiednio przez h' i h'' . Wektor H będzie wypadkową wszystkich h' i wszystkich h'' , albo wypadkową H' i H'' , jeżeli przez H' oznaczmy wypadkową wszystkich h' , a przez H'' wszystkich h'' .

Twierdzenie to daje się z łatwością rozciągnąć do dowolnej liczby ruchów składowych.

Jeżeli rozkładamy ruch ciała sztywnego na ruch kulisty około środka ciężkości i na odpowiedni ruch postępowy, i bierzemy moment ilości ruchu względem środka ciężkości, to składowa, odpowiadająca drugiemu z tych ruchów, jest zerem, a zatem wyznaczamy wektor H , jak gdyby ciało posiadało tylko ruch kulisty około środka ciężkości.

Prz. 1. Okazać, że wektor H dowolnego układu względem punktów prostej równoległej do szybkości środka ciężkości jest stały co do wielkości i kierunku.

Prz. 2. Wektor H względem środka ciężkości jest prostopadły do jego szybkości; wyznaczyć miejsce geometryczne punktów, względem których moment ilości ruchu jest równy zeru.

Prz. 3. Płyta jednorodna obraca się około osi prostopadłej do jej płaszczyzny. Dowieść, że końce wektorów H względem wszystkich punktów tej płaszczyzny leżą w jednej płaszczyźnie.

Obieramy środek ciężkości za początek współrzędnych, oś z prostopadłe do płaszczyzny płyty i oś x przez środek obrotu. W takim razie równanie miejsca geometrycznego końców wektorów H będzie $z = \omega(I + Ma^2)$, gdzie I oznacza moment bezwładności względem osi z , i a odległość osi z od osi obrotu.

Prz. 4. Ciała, tworzące układ, pozostawały początkowo w spokoju; przyciągają się one pomiędzy sobą, lecz poza tem żadne inne siły na nie nie działają. Pod działaniem przyciągania ciała się zeszły, i powstało jedno ciało sztywne. Okazać, że pozostaje ono w spokoju.

Prz. 5. Dwie bardzo cienkie banie kuliste o masach m_1, m_2 mogą się obracać około wspólnego środka. Promienie ich są prawie jednakowe, a zatem stykają się one na całej powierzchni. Udzielamy pierwszej bani szybkość kątową ω_1 około osi, posiadającej w nieruchomym układzie współrzędnych kąty kierunkowe $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, i jednocześnie udzielamy drugiej szybkość ω_2 około osi ($\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$). Około jakiej osi i z jaką szybkością kątową będą wirowały banie, gdy tarcie zniszczy ich ruch względny? Odp. Jeżeli $\omega(\alpha\beta\gamma)$ oznacza szybkość szukaną, to

$$\omega^2 = \frac{m_1^2 \omega_1^2 + m_2^2 \omega_2^2 + 2m_1 m_2 \omega_1 \omega_2 (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2)}{(m_1 + m_2)^2}$$

$$\text{i} \quad \cos \alpha = \frac{m_1 \omega_1 \cos \alpha_1 + m_2 \omega_2 \cos \alpha_2}{(m_1 + m_2) \omega} \text{ i t.d.}$$

Prz. 6. Około planety o masie M obraca się mały księżyc o masie m , pozostając od niej w stałej odległości r . Planeta wiruje z szybkością kątową ω około osi prostopadłej do płaszczyzny drogi księżyca, a jej moment bezwładności względem średnicy $= I$. Wyznaczyć moment ilości ruchu układu względem środka ciężkości, zakładając, że współczynnik proporcjonalności w prawie Newtona $= k$. Odp.

$$I\omega + Mm\sqrt{\frac{kr}{M+m}}.$$

116. Zastosowania. Wektor H stanowi wybitną cechę charakterystyczną ruchu obrotowego i dzięki temu znajduje bardzo rozległe zastosowanie w dynamice ciał sztywnych; wyobrażenie o roli jego mają dać przytoczone niżej przykłady. Na wstępie wypada jeszcze pomówić o działaniu sił chwilowych, jakkolwiek wyjaśnienia, o które chodzi, wynikają w sposób oczywisty z paragrafów poprzedzających.

Dajmy na to, że ciało jakiegokolwiek, pozostające w ruchu lub spokoju, doznało uderzenia lub szarpnięcia, czyli wogóle uległo działaniu siły chwilowej. Chodzi o to, jak zmieni się stan dynamiczny ciała, czyli jakie przyrosty geometryczne otrzymają wektory G i H .

Podczas działania siły chwilowej na ciało działają zazwy-

czaj i inne siły zwykłe, ale całe zjawisko uderzenia lub szarpnięcia ma przebieg tak szybki, że podczas trwania jego siły zwykłe nie mogą wywrzeć na żaden z wektorów wyraźnego wpływu. Z tego wynika, że, rozwiązując podane tu zagadnienie, potrzeba rachować się jedynie z siłą chwilową, wszelkie zaś inne siły możemy pomijać.

Przypuśćmy, że pod działaniem siły chwilowej szybkość środka ciężkości otrzymała przyrost geometryczny u ; w takim razie przyrost geometryczny ilości ruchu ciała, czyli wektora G , wyniesie oczywiście Mu , gdzie M oznacza masę ciała. Temu właśnie jest równy impuls siły chwilowej; oznaczmy go przez F' .

Czas działania siły chwilowej oznaczmy przez τ . W ciągu tego czasu siła zmienia się co do wielkości w bardzo rozległych granicach, ale możemy uważać, że kierunek jej i położenie w przestrzeni nie ulega zmianie. Bierzemy moment ilości ruchu względem punktu O . W czasie dt moment ten otrzyma przyrost $Ppdt$, gdzie P oznacza siłę i p odległość jej od O . Całkowity przyrost wektora H możemy wyrazić w postaci $\int_0^\tau Ppdt$, czyli $p \int_0^\tau Pdt$. Lecz $\int_0^\tau Pdt = F'$, zatem przyrost szukany $= F'p$.

Tak więc przyrost wektora G jest równy impulsowi, a przyrost wektora H momentowi impulsu. Wyraz równy oznacza tu zgodność co do wielkości i kierunku.

Można to wypowiedzieć w nieco odmienny sposób. Przenosimy siłę chwilową do środka redukcji O , wprowadzając odpowiednią parę. Tę ostatnią nazwiemy *parą chwilową*; moment jej jest bardzo wielki, lecz działa przez czas bardzo krótki. Para nie wywrze oczywiście wpływu na wektor G , lecz, wytworzy przyrost wektora H , równy jej momentowi co do wielkości i kierunku. Można także powiedzieć, że miarą momentu pary chwilowej jest wytworzony przez nią przyrost wektora H .

Prz. 1. Gładkie, poziome ramię AB o długości $2a$ i masie M jest w końcu A przymocowane do pionowej osi z , a w B posiada małą nasadę. Na ramieniu może się swobodnie przesuwac ciężarek m , ale nasada w B nie pozwoliłaby mu zejść z ramienia. Początkowo ciężarek jest przywiązany do osi nicią o długości a , i wszystko obraca się z szybkością kątową ω_0 . Jaką szybkość kątową będzie miał układ, gdy nć się zerwie, i ciężarek dojdzie do B ?

Na układ działają reakcje łożysk, w których jest osadzona oś z , oraz siła ciężenia. Momenty tych sił względem osi z są zerami, a zatem moment ilości ruchu względem tej

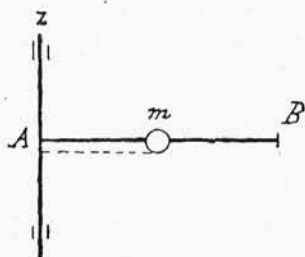


Fig. 60.

osi nie może się zmienić. Będzie więc $Mk^2\omega_0 + ma^2\omega_0 = Mk^2\omega + 4ma^2\omega$, gdzie k oznacza ramię bezwładności ramienia AB względem osi z , a ω ostateczną szybkość kątową. Z tego wypada, że $\omega = \frac{(4M+3m)\omega_0}{4(M+3m)}$.

Znajdziemy z łatwością, że układ stracił $\frac{3(4M+3m)ma^2\omega_0^2}{8(M+3m)}$ siły żywej.

Prz. 2. Kula jednorodna o masie M i promieniu a_0 obraca się z szybkością kątową ω_0 około średnicy. Ile siły żywej straci kula, gdy skutkiem obniżenia temperatury promień skurczy się do długości a ? Odp. $\frac{Ma_0^2\omega_0^2(a^2 - a_0^2)}{5a^2}$.

Prz. 3. Belka o długości $2a$ i masie M może się swobodnie obracać około osi poziomej, przechodzącej przez jej środek ciężkości. Początkowo belka zajmowała położenie poziome i pozostawała w spokoju, gdy na koniec jej spadł pionowo z wysokości h kawałek wilgotnej gliny o masie m i przylgnął. Wyznaczyć szybkość kątową, którą otrzyma belka. Odp. $\frac{3m\sqrt{2gh}}{(M+3m)a}$.

Uważamy układ, złożony z belki i gliny. W niezmiernie krótkim czasie, w którym glina uderza o belkę, moment ilości ruchu tego układu względem osi się nie zmieni, bo występujące podówczas siły chwilowe są jego siłami wewnętrznymi, a moment reakcji osi jest zerem. Wprawdzie podczas uderzenia działa siła zewnętrzna, której moment względem osi nie jest zerem, a mianowicie ciężar gliny, ale wytworzony przez nią w ciągu tak krótkiego okresu przyrost momentu ilości ruchu jest znikomo mały i możemy go pominąć.

Prz. 4. Na szale wagi, z których każda waży Q , spadły jednocześnie ciężary Q_1 i Q_2 z wysokości h_1 i h_2 . Wyznaczyć początkową szybkość szal. Odp. $\frac{(Q_1\sqrt{h_1} - Q_2\sqrt{h_2})\sqrt{2g}}{2Q + Q_1 + Q_2}$.

Prz. 5. Trzy jednakowe sztaby o długości a , połączone gładkimi zawiasami, posiadają ruch postępowy o szybkości v na gładkiej płaszczyźnie poziomej, tworząc linię prostą prostopadłą do tej szybkości. Po jakim czasie spotkają się końce sztab skrajnych, gdy zatrzymamy środek średniej? Odp. $\frac{4a\pi}{9v}$.

Oczywiście wektor H sztaby skrajnej względem zawiasy podczas zatrzymywania średniej nie ulega zmianie.

Prz. 6. Sześcian posiada ruch postępowy na płaszczyźnie poziomej. Nauka o ruchu. 18

mej, przyczem cztery jego krawędzie są prostopadłe do szybkości. Środek przedniej krawędzi, pozostającej na płaszczyźnie, uderza o nieruchomą przeszkodę i zatrzymuje się. Wyznaczyć kierunek uderzenia.

Moment ilości ruchu względem krawędzi zatrzymanej nie ulegnie zmianie, i znajdziemy łatwo, że sześciian zacznie się obracać z szybkością $\frac{3v}{8a}$, gdzie v oznacza szybkość ruchu postępowego i $2a$ długość krawędzi. Przed zatrzymaniem wektor G sześcianu był poziomym i równy mv , po zatrzymaniu wektor ten tworzy z poziomem kąt 45° i wynosi $\frac{3mv\sqrt{2}}{8}$. Składowa pozioma impulsu wynosi $\frac{5mv}{8}$, a pionowa $\frac{3mv}{8}$, a stąd wynika, że kierunek uderzenia tworzy z poziomem kąt $\arctan \frac{3}{5}$.

Prz. 7. Przyzmat prostokątny, którego masa wynosi $3m$, a podstawą jest kwadrat $ABCD$, stoi na płaszczyźnie poziomej i może obracać się około krawędzi CD . Wysokość przyzmatu $= 3a$, bok zaś podstawy $= a$. W środek ściany pionowej nad krawędzią AB uderza punkt materialny o masie m i osiada tam na stałe. Jaka powinna być co najmniej szybkość pozioma tego punktu, aby przyzmat się przewrócił?

Odp. $\frac{\sqrt{53}ag}{3}$.

Prz. 8. Okrągła tarcza obraca się z szybkością kątową ω około punktu A swego obwodu. Wyszobadzamy punkt A i jednocześnie zatrzymujemy inny punkt B obwodu; kąt $AOB = \vartheta$, gdzie O oznacza środek tarczy. Wyznaczyć szybkość kątową tarczy około B . Odp. $\frac{(1+2\cos\vartheta)\omega}{3}$.

Gdzie powinien leżeć punkt B , aby tarcza się zatrzymała?

Prz. 9. Sztaba AB wiruje około końca A . Jak zmieni się siła żywa sztaby, gdy wyswobodzimy A i jednocześnie zatrzymamy B ? Odp. Zmniejszy się poczwórnienie.

Prz. 10. Sześciian wiruje z szybkością kątową ω około przekątnej. Zatrzymujemy jedną z krawędzi, nie przecinających owej przekątnej; wyznaczyć nową szybkość kątową. Odp. $\frac{\omega}{4\sqrt{3}}$.

Prz. 11. Swobodna płyta kwadratowa wiruje około przekątnej z szybkością kątową ω . Zatrzymujemy jeden z wierzchołków, nie leżących na tej przekątnej; wyznaczyć nową szybkość kątową. Odp. $\frac{\omega}{7}$.

Należy przedewszystkiem zdać sobie sprawę z tego, jaki kierunek przybierze nowa oś obrotu, a w tym celu trzeba wyznaczyć wektor H względem wierzchołka, który mamy zatrzymać, nie tylko co do wielkości, ale i co do kierunku. Znajdziemy, że wektor ten leży na

osi głównej wierzchołka, a z tego wynika, że ta sama prosta będzie osią obrotu.

Prz. 12. Tarcza eliptyczna pozostawała w spokoju, gdy wtem końce dużej i małej osi otrzymały odpowiednio szybkości u_1 i u_2 prostopadłe do płaszczyzny tarczy. Wyznaczyć początkową szybkość środka. Odp. $\frac{u_1 + u_2}{6}$.

Możemy uważać, że ruch tarczy został wywołany przez dwa uderzenia jednoczesne, wymierzone prostopadłe do jej płaszczyzny w wierzchołki. Ruch początkowy daje się rozłożyć na ruch postępowy, którego szybkość v jest szukana, i na ruch obrotowy około osi, przechodzącej przez środek i położonej w płaszczyźnie tarczy. Składowe szybkości kątowej w kierunkach osi oznaczamy przez ω_1, ω_2 . Ułożymy teraz z łatwością dwa równania cinematyczne

$$u_1 = v + a\omega_2, \quad u_2 = v + b\omega_1,$$

oraz trzy równania dynamiczne

$$mv = F_1 + F_2, \quad \frac{m\omega_2 a^2}{4} = F_1 a, \quad \frac{m\omega_1 b^2}{4} = F_2 b,$$

gdzie F_1, F_2 oznaczają impulsy uderzeń.

Prz. 13. Płyta trójkątna, pozostająca w spokoju, została uderzona w środek jednego z boków w kierunku prostopadłym do płaszczyzny płyty. Wyznaczyć początkowe położenie osi chwilowej.

Zastępujemy płytę przez trzy punkty masy A, B, C , osadzone w środkach boków (par. 114, prz. 5). Przypuśćmy, że uderzenie zostało wymierzone w A ; w takim razie moment ilości ruchu względem AB jest zerem, a zatem w pierwszej chwili C pozostanie w spokoju. Wynika stąd, że BC jest osią szukaną.

Prz. 14. Płyta trójkątna ABC doznała uderzenia w wierzchołek A w kierunku prostopadłym do jej płaszczyzny. Wyznaczyć początkowe położenie osi chwilowej. Odp. Szukana prosta dzieli każdy z boków AB i AC w stosunku 3:1.

Prz. 15. Dwie jednakowe sztaby AB i CD leżą na gładkiej płaszczyźnie poziomej, tworząc kwadrat $ABCD$, przyczem końce B i C są połączone wypreżonym, nierozciągalnym sznurem. Zapomocą uderzenia, wymierzonego w koniec A w kierunku AD , nadajemy temu końcowi szybkość v . Wyznaczyć szybkość początkową końca D . Odp. $\frac{v}{7}$.

Prz. 16. Dwie jednakowe sztaby AB i BC każda o długości a tworzą linię prostą i biegną na gładkiej płaszczyźnie poziomej z szybkością v prostopadłą do AC . Jakie szybkości kątowe będą miały w pierwszej chwili sztaby, gdy zatrzymamy koniec A ? Odp. $\frac{9v}{7a}$ i $-\frac{3v}{7a}$.

Prz. 17. Zbadać dalszy ruch sztab z przykładu poprzedzającego, a mianowicie wyznaczyć największy kąt pomiędzy nimi oraz stosunek szybkości kątowych w chwili, gdy znowu utworzą linię prostą. Odp. Szukany kąt $= \arccos \frac{2}{3}$, szukany stosunek szybkości sztab AB i BC wynosi $\frac{1}{9}$.

Ruch sztaby BC rozkładamy na postępowy i obrotowy około środka ciężkości, a szybkość środka ciężkości na składowe w kierunku AB i w kierunku prostopadłym. Potrzebne równania otrzymamy, stosując zasadę ilości ruchu i zasadę sił żywych, a także związki cy-nematyczne. W chwili, gdy kąt pomiędzy sztabami osiąga maksimum, to oczywiście ruch ich jest taki, jak gdyby tworzyły jedno ciało sztywne.

Prz. 18. Trzy jednakowe sztaby, połączone przegubami, tworzą na gładkim stole linię prostą. Wymierzamy prostopadle do tej prostej w sam środek impuls F ; wyznaczyć impulsy, które otrzymają sztaby boczne. Odp. $\frac{F}{6}$.

Prz. 19. Trzy jednakowe sztaby, połączone przegubami, tworzy-ły na gładkim stole linię prostą. Sztabom skrajnym nadano szybkości kątowe ω w tę samą stronę około odpowiednich końców średniej. Wy-znaczyć szybkość kątową, którą przybierze średnia w chwili, gdy skrajne utworzą z jej przedłużeniem kąty największe. Odp. $\frac{4\omega}{7}$.

Prz. 20. Trzy jednakowe punkty materialne A , B i C są połą-czone dwoma lekkimi prętami jednakowej długości. Przegub, urządzi-ony w punkcie B , jest początkowo zaciśnięty, kąt ABC wynosi 60° , i ca-ły układ wiruje na gładkiej płaszczyźnie poziomej około swego środ-ka ciężkości. W jakich granicach będzie zmieniał się kąt ABC , jeżeli przegub się rozluźni. Odp. Od 60° do 150° .

Prz. 21. Na gładkim stole leży sztywny kwadrat $ABCD$, zrobio-ny z czterech jednakowych prętów. W wierzchołku A siedzi mucha, której masa jest równa masie jednego pręta, i kwadrat może się swo-bodnie obracać około wierzchołka B . W pewnej chwili mucha zaczy-na wędrować po przecie AD ze stałą szybkością względną v . O jaki kąt obróci się kwadrat, zanim mucha dojdzie do wierzchołka D ?

Moment ilości ruchu względem B będzie wciąż zerem, a stąd wynika, że szybkość kątowa kwadratu $= \frac{6av}{52a^2 + 3v^2t^2}$. Kąt szukany

$$= \sqrt{\frac{3}{13}} \arctan \sqrt{\frac{3}{13}}.$$

Prz. 22. Kółko o masie M i promieniu a może obracać się swo-bodnie około osi poziomej, przechodzącej przez jego środek i prosto-padłej do jego płaszczyzny. W najniższym punkcie kółka siedzi mu-cha o masie m ; w pewnej chwili wyrusza ona po obwodzie i wędru-je z szybkością względną stałą. Jaka powinna być co najmniej ta

szybkość, aby mucha doszła do najwyższego punktu kółka? Odp.

$$2a\sqrt{\frac{mga}{Mk^2+ma^2}}.$$

W tym razie moment ilości ruchu układu względem osi obrotu się zmienia pod działaniem ciężaru muchy; elementarny przyrost jego wynosi $mg \sin \vartheta dt$, gdzie ϑ oznacza kąt pomiędzy promieniem, przechodzącym przez muchę, i pionem.

Prz. 23. Na gładkiej płaszczyźnie poziomej leży płyta o masie M , a na niej stoi człowiek o masie m . Moment bezwładności płyty względem jej środka ciężkości $=I$. O jaki kąt obróci się płyta, gdy człowiek, nie schodząc z niej, zatoczy w przestrzeni linię zamkniętą, zawierającą pole A ? Odp. $\frac{2m(M+m)A}{IM}$.

Dobrze będzie zastosować współrzędne biegunowe, obierając za biegun środek ciężkości układu, złożonego z człowieka i płyty. Jeżeli

$$(r, \varphi) \text{ oznaczają współrzędne człowieka, to } \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = 2A.$$

Prz. 24. Na tarczę poziomą, wirującą swobodnie około osi pionowej, usiadł owad i pełźnie ze stałą szybkością względną, zbliżając się wciąż do osi. Szybkość kątowna tarczy nie zmieniła się w chwili, gdy owad siadał, a dalszy ruch jego jest taki, że ta szybkość pozostaje stałą i nadal. Okazać, że owad dojdzie do osi, zanim tarcza zrobi ćwierć obrotu.

Prz. 25. Obręczka o masie M i promieniu a leży na gładkim stole, a na niej siedzi mucha o masie m . Jaki będzie ruch obręczki, gdy mucha zacznie iść po niej z szybkością względną v ? Odp. Środek obręczki zatacza koło, a obręczka obraca się około tego środka

$$\text{z szybkością kątową } \frac{mv}{(M+2m)a}.$$

Prz. 26. Końce jednorodnego pręta o długości $2a$ mogą się swobodnie poruszać po okręgu koła, którego promień wynosi $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. W środku pręta siedzi owad, którego masa jest równa masie pręta. O jaki kąt obróci się pręt w czasie t , gdy owad pobiegnie po nim ze stałą szybkością względną v . Odp. $\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{vt}{a}$.

Prz. 27. Rurka wewnątrz gładka w postaci koła o promieniu a leży na gładkim stole i może się swobodnie obracać około punktu A obwodu. W rurce w punkcie B na przeciwległym końcu średnicy, przechodzącej przez A , znajdował się punkt materalny o masie dwa razy mniejszej od masy rurki. Rurka była w spokoju, gdy punkt materalny otrzymał szybkość v_0 . Jaką szybkość względną będzie miał

$$\text{ten punkt po przejściu łuku } a\varphi \text{ rurki? Odp. } \frac{2v_0 \cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{4+\sin^2 \varphi}}.$$

Prz. 28. Rurka, zgięta w postaci koła i posiadająca masę nm , spoczywa na gładkiej płaszczyźnie poziomej i zawiera punkt materyalny o masie m . W chwili początkowej rurka jest w spokoju, a punkt materyalny posiada szybkość kątową ω_0 około jej środka. Współczynnik tarcia pomiędzy punktem i rurką jest równy f . Po jakim czasie punkt zatrzyma się w rurce? Odp. $\frac{n+1}{f\omega_0}$.

Prz. 29. Dwie tarcze cylindryczne o masach m_1, m_2 i promieniach a_1, a_2 , położone w jednej płaszczyźnie pionowej, mogą się swobodnie obracać około osi, przechodzących przez ich środki i prostopadłych do owej płaszczyzny. Na obwodach tarcz są umocowane końce wiotkiego, lekkiego pasa, daleko dłuższego niż odległość pomiędzy punktami umocowania. Pas w części spoczywa na obwodach, a w części zwisa pomiędzy tarczami. Nadajemy pierwszej tarczy szybkość kątową ω i pozostawiamy układ samemu sobie. Jakie szybkości katowe będą miały tarcze, gdy pas się wypręży. Odp. $\frac{m_1\omega}{m_1+m_2}$, $\frac{m_1a_1\omega}{(m_1+m_2)a_2}$.

Prz. 30. Na gładkiej płaszczyźnie poziomej leży prosta, wewnątrz gładka rurka o długości $2a$, a w niej prawie w samym środku znajduje się punkt materyalny; masy obydwóch ciał są równe. Rurka otrzymała szybkość kątową ω_0 około środka; z jaką szybkością kątową wyjdzie z niej punkt materyalny? Odp. $a\omega_0\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Prz. 31. Punkt materyalny leży na gładkiej płaszczyźnie poziomej. W tej samej płaszczyźnie znajduje się tarcza okrągła, która może się obracać około osi pionowej, przechodzącej przez środek. Punkt materyalny łączy się z obwodem tarczy sznurem, którego część jest wyprostowana, a część jest nawinięta na tarczę. Promień tarczy jest równy r , a masa dwa razy większa od masy punktu. Nadajemy punktowi szybkość prostopadłą do wyprostowanej części sznura tak, aby ten zaczął się nawijać na tarczę. Jaką długość powinna mieć owa część, aby punkt doszedł do obwodu tarczy, i aby od tej chwili sznur zaczął się odwijać? Odp. $a\sqrt{2}$.

117. Ruch istot żyjących. Jeżeli na istotę żyjącą nie działają żadne siły zewnętrzne, to nie może ona nadać swemu środkowi ciężkości przyspieszenia (par. 109), czyli nie może zmienić swego wektora G . Nie zmieni ona również swego wektora H np. względem środka ciężkości, jeżeli więc pozostawała w spokoju, to nie może nadać swemu ciału ruchu obrotowego. Z tego jednak nie wynika, aby istota taka nie mogła zmienić swego położenia względem środka ciężkości.

Przypuśćmy dla przykładu, że człowiek stoi na zupełnie gładkiej płaszczyźnie poziomej. Działają nań dwie siły zewnętrzne, a mianowicie siła ciężenia i reakcja płaszczyzny, która w tym razie posiada zawsze kierunek pionowy. Momenty tych sił względem osi pionowej są zerami, nie mogą więc one wywierać wpływu na moment ilości ruchu względem tej osi. Człowiek jest zwrócony, dajmy na to, twarzą na północ, a chciałby zwrócić się na wschód. Da się to uskutecznić różnymi sposobami.

Przypuśćmy, że człowiek ten posiada jakiś ciężki przedmiot, np. sztabę. Może on nadać jej nad głową ruch obrotowy względem swego ciała w kierunku od prawej ręki ku lewej, czyli dla patrzącego z góry w stronę odwrotną do biegu wskazówek zegara. Gdyby ciało pozostało przytem w spokoju, to układ, złożony z człowieka i sztaby zyskałby względem środka ciężkości wektor H , skierowany na dół. Jest to niemożliwe, gdyż siły, wywołujące ruch sztaby, są siłami wewnętrznymi układu. Z tego wynika, że ciało musi się zacząć jednocześnie obracać w kierunku odwrotnym, przyczem oczywiście twarz będzie się zwracała w stronę żadaną. Obróciwszy sztabę dostateczną liczbę razy, człowiek mógłby obrócić swe ciało o kąt dowolny.

W braku odrębnego przedmiotu ciężkiego człowiek osiągnie ten sam wynik, czyniąc ruchy analogiczne rękami, głową lub tułowiem.

Opiszemy jeszcze inny sposób. Człowiek wyciąga ręce przed siebie i skręca górną część tułowia w lewo względem dolnej o kąt jaknajwiększy. Jednocześnie dolna część ciała obróci się o pewien kąt w prawo. Następnie człowiek zwiesza ręce wzdłuż ciała i powraca do położenia normalnego. Podczas tego ruchu powrotnego dolna część ciała obróci się znowu o pewien kąt w lewo, lecz o mniejszy, niż poprzednio w prawo, gdyż moment bezwładności górnej części względem osi obrotu się zmniejszył. Wynikiem obydwóch ruchów będzie oczywiście obrót całego ciała o jakiś kąt w prawo. Powtarzając tę czynność dostateczną liczbę razy, człowiek może obrócić się o kąt dowolny.

W podobny sposób postępuje spadający kot, aby odwrócić się łapami do dołu. Wyciąga on prostopadle do ciała przednie

łapy, a kurczy tylne i skręca przednią część tułowia względem tylnej o kąt jaknajwiększy. Następnie kurczy przednie łapy, wyciąga tylne i nadaje ciału ruch odwrotny do poprzedniego, powtarzając tę czynność, dopóki ciało jego nie przybierze żądanego położenia.

Prz. Na jeziorze stoi okrągła tratwa, a na niej znajduje się człowiek. Aby obrócić tratwę około osi pionowej, człowiek obiega ją dookoła. Dowieść, że gdy człowiek się zatrzyma, to tratwa ruszy w kierunku odwrotnym.