

VIII. ZASADY DYNAMIKI CIAŁA SZTYWNEGO.

105. Model ciała. Zasadnicze zagadnienie dynamiki jest następujące: mając dane ciało oraz siły na nie działające, wyznaczyć ruch jego. Widzieliśmy w rozdziale V, jak się rozwiązuje to zagadnienie w przypadku, gdy można uważać ciało za punkt materalny; będziemy usiłowali sprowadzić przypadek ogólny do tego przypadku szczególnego.

W tym celu zbudujemy model ciała, złożony z punktów materalnych. Wyobraźmy sobie dwa układy współrzędnych I i II, zajmujące różne okolice przestrzeni. Do I-go będziemy odnosili dane ciało, które może być jakiegokolwiek, a więc niekoniecznie sztywne, w II-im będziemy budowali model.

Dzielimy ciało na drobne elementy o masach m_1, m_2, \dots . Dla skrócenia będziemy mówili tylko o typowym elemencie m . Każdy z tych elementów posiada pewną objętość różną od zera; jeżeli jednak są one dostatecznie małe, to położenie każdego z nich będzie określone z dokładnością wystarczającą, gdy będą dane współrzędne jednego z jego punktów, np. środka ciężkości. Współrzędne takie będziemy nazywali współrzędnymi elementu.

Niech współrzędne elementu m w układzie I będą x, y, z . Wyznaczamy w układzie II punkt (geometryczny), posiadający takie same współrzędne, i przypisujemy mu masę m . Tym sposobem elementowi m ciała będzie odpowiadał punkt geometryczny o równej masie.

Uczyniwszy to samo dla każdego elementu ciała, otrzymamy rój punktów materalnych, przypominający pod wieloma względami dane ciało. Będzie to właśnie model, o który chodziło. Różni się on od ciała pod tym względem, że punkty jego nie są związane jedne z drugimi, że są to punkty swo-

bodne, gdy tymczasem w danem ciele wszystkie elementy są połączone razem i stanowią jedną całość.

Chodzi teraz o to, aby model i w ruchach naśladował dane ciało. W tym celu nadajemy każdemu punktowi modelu taką szybkość (co do wielkości i kierunku), jaką w chwili danej posiada odpowiedni element ciała. Ale i w przyszłości szybkości te powinny być jednakowe, a więc trzeba starać się o to, aby i przyspieszenia punktów modelu były zgodne z przyspieszeniami elementów ciała. Tak np. składowe przyspieszenia elementu typowego ciała są $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$; otóż trzeba, aby i punkt m modelu posiadał takie przyspieszenia. Osiągniemy ten skutek, przykładając do każdego punktu modelu stosowne siły.

Na dane ciało działa pewna liczba sił, z których każda jest przyłożona do jakiegoś elementu. Przypuśćmy np., że do elementu m jest przyłożona siła P . Przyłożmy takie same siły do odpowiednich punktów modelu, a więc do punktu m przyłożymy siłę P . Będą to siły zewnętrzne modelu.

Przyspieszenia, które skutkiem tego otrzymają punkty modelu, nie będą takie, jak przyspieszenia odpowiednich elementów ciała. Widać to choćby z tego, że np. siła P , działająca na punkt m modelu, udziela tylko jemu jednemu przyspieszenie, gdy tymczasem taka sama siła, działając na odpowiedni element ciała, wywiera wpływ na ruch całego ciała, t. j. udziela przyspieszeń wszystkim innym elementom. Aby więc cel osiągnąć, trzeba jeszcze do punktów modelu przyłożyć inne siły.

Założymy w tym celu, że każdy punkt modelu wywiera siły na punkty pozostałe, że punkty te przyciągają się nawzajem lub odpychają. Będą to siły wewnętrzne i powinny czynić zadość trzeciemu prawu Newtona (akcyi i reakcyi). Jeżeli wszystkich punktów jest n , to na każdy z nich działa $n-1$ sił, a więc wszystkich takich sił wewnętrznych jest $n(n-1)$. Ponieważ jednak siły te występują parami, a siły każdej pary są równe i odwrotne, przeto sił różnych co do wielkości i kierunku będzie wszystkiego $\frac{n(n-1)}{2}$.

Otóż te siły wewnętrzne trzeba dobrać w taki sposób,

aby wraz z zewnętrznymi nadawały punktom modelu przyspieszenia żądane. Zobaczymy, czy jest to rzecz możliwa.

Przypuśćmy, że punkty $m_1, m_2 \dots$ wywierają na m odpowiednio siły $Q_1, Q_2 \dots$, i że kąty kierunkowe tych sił są $(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1), (\alpha_2 \beta_2 \gamma_2) \dots$. Są to również kąty kierunkowe prostych $mm_1, mm_2 \dots$, a więc określa je obecne położenie ciała. Równania ruchu punktu m będą

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = P_x + Q_1 \cos \alpha_1 + Q_2 \cos \alpha_2 + \dots$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = P_y + Q_1 \cos \beta_1 + Q_2 \cos \beta_2 + \dots$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = P_z + Q_1 \cos \gamma_1 + Q_2 \cos \gamma_2 + \dots$$

Każdemu punktowi modelu odpowiadają takie trzy równania, mamy więc wszystkiego $3n$ równań, i wielkości $Q_1, Q_2 \dots$ powinny być tak dobrane, aby czyniły im wszystkim zadość. Będzie to można uczynić różnymi sposobami, jeżeli liczba tych wielkości jest większą od liczby równań.

Warunkowi temu wogóle łatwo uczynić zadość. dzieląc ciało na dostatecznie wielką liczbę elementów, i wówczas model będzie dokładnie naśladował ruch ciała, a więc zamiast badać ruch ciała możemy badać ruch modelu, czyli ruch układu punktów materialnych. Tym sposobem osiągnęliśmy cel zamierzony, ale za to do zadania wszedł cały układ sił wewnętrznych; zobaczymy jednak, że można ich nie wprowadzać do rachunku.

Aby ułatwić sprawę budowaliśmy model w odrębnym układzie współrzędnych, jest to jednak zbyteczne. Ponieważ chodzi tylko o konstrukcję myślową, można przeto zbudować go w tym samym układzie, do którego odnosimy ciało; zajmie on wówczas tę samą przestrzeń, którą zajmuje ciało; można zapomnieć o istnieniu ciała, a myśleć tylko o modelu. Tak też będziemy czynili w dalszym ciągu. Mówiąc o ciele, będziemy mieli na myśli model jego.

Należy dodać, że w tem przedstawieniu rzeczy nie czynimy żadnych hipotez co do wewnętrznej budowy ciała. Nie dotykamy np. pytania, czy materya wypełnia przestrzeń w sposób ciągły, czy też posiada budowę molekularną.

106. Zasada d'Alemberta. W jaki sposób można usunąć siły wewnętrzne ciała z rachunku, wskazał d'Alembert (r. 1742), od niego też rozpoczyna się istnienie dynamiki ciał sztywnych, jako odrębnej gałęzi wiedzy. Wypada jednak zaznaczyć, że twierdzenie, odkryte przez D'Alemberta, czyli tak zwana *zasada d'Alemberta*, dotyczy nie tylko ciał sztywnych. Ma ono znaczenie ogólne; podlegają mu wszystkie ciała, jakie dostrzegamy w przyrodzie.

Niech będzie jakiekolwiek ciało, poruszające się pod działaniem sił P_1, P_2, \dots . Zwrócimy uwagę na pewien element o masę m , albo raczej na odpowiedni punkt modelu. Wypadkową wszystkich sił zewnętrznych, działających na ten element, oznaczmy przez P , wypadkową wszystkich sił wewnętrznych przez Q , a przyspieszenie elementu przez p . Przyspieszenie to nadają elementowi właśnie te siły P i Q , a zatem wypadkowa ich jest równa mp . Nazwiemy tę siłę *mp siłą czynną elementu m* . (rozważmy).

Gdybyśmy przyłożyli do elementu m siłę odwrotną do czynnej, to zrównoważylibyśmy obydwie siły P i Q . Przyłożymy do każdego elementu ciała taką siłę, odwrotną do jego siły czynnej. Oczywiście w ten sposób zrównoważymy wszystkie siły zarówno zewnętrzne, jak i wewnętrzne, i już żaden element nie będzie miał przyspieszenia.

Tak więc obecnie na ciało działają trzy układy sił, a mianowicie: (1) siły zewnętrzne, (2) siły wewnętrzne i (3) siły odwrotne do czynnych; układy te równoważą się nawzajem.

Używamy tu wyrazu „równoważą się” dla krótszego wyśłowienia, lecz należy zauważyć, że wyraz ten posiada w tym razie inne lub przynajmniej obszerniejsze znaczenie, niż w statyce. Te różne siły działają tu na punkty swobodne modelu, a w takim razie w sensie statycznym nie możnaby wcale mówić o równowadze. Tak np. dwie siły, z którymi dwa punkty materialne się przyciągają, lub odpychają, nie równoważą się w sensie statycznym, jakkolwiek działają na jednej prostej, są równe i odwrotne. Mówiąc w tym wykładzie o równowadze, mamy na myśli to jedynie, że suma rzutów sił na każdy kierunek oraz suma ich momentów względem każdej prostej są zerami.

Z owych trzech układów sił, działających na elementy,

ciała, drugi, t. j. siły wewnętrzne, równoważy się sam przez się, gdyż składają go pary sił równych i odwrotnych. Z tego wynika, że dwa układy pozostałe równoważą się nawzajem, mianowicie równoważą w sensie wyżej określonym.

Tak więc *siły zewnętrzne, działające na ciało, równoważą się z siłami odwrotnymi do czynnych*. Jest to właśnie zasada d'Alemberta.

Mówiliśmy już, że zasada ta jest ogólna. Dotyczy ona zarówno ciał sztywnych, jak niesztwnych, a także układów, złożonych z większej liczby ciał, bo każdy taki układ można uważać za jedno ciało niesztwne. Wypada uczynić jeszcze jedną uwagę.

Te siły odwrotne do czynnych, które gdyby działały, to sprowadziłyby równowagę, nazywają się w wielu wykładach mechaniki *siłami bezwładności*. Z punktu widzenia czystej logiki nie można nazwiej tej zrobić żadnego zarzutu; pomimo to jednak nie użyłem jej w tym wykładzie i będę jej unikał również nadal, gdyż wywołała ona wiele nieporozumień, a nawet błędów; zwłaszcza była powodem do całkiem jałowych dyskusji na temat istnienia lub nieistnienia tych sił bezwładności.

Prz. Na punkty materialne m_1 i m_2 , połączone nicią sprężystą, działają odpowiednio siły P_1 i P_2 . Dowieść bezpośrednio, że suma rzutów tych sił na dowolny kierunek oraz suma ich momentów względem dowolnej prostej są równe sumie rzutów i sumie momentów sił czynnych punktów m_1 i m_2 .

107. Przykłady. Okażemy na przykładzie, jak można stosować zasadę d'Alemberta do rozwiązywania zagadnień dynamicznych.

Jednorodna sztaba, wążąca Q , jest połączona z pionową osią z gładkim przegubem O i wiruje około tej osi, tworząc z nią stały kąt α . Wyznaczyć reakcję, którą przegub wywiera na sztabę.

Będziemy rozważali tę chwilę, w której sztaba zajęła położenie w płaszczyźnie rysunku. Obieramy początek układu w przegubie, a za osi x, y, z , prostą poziomą w płaszczyźnie rysunku, prostą prostopadłą do tej płaszczyzny i pion.

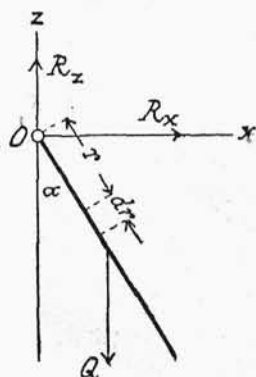


Fig. 58.

Wypada naprzód wyjaśnić, jakie siły zewnętrzne działają na sztabę, oraz jakie tu są siły odwrotne do czynnych. Nie można z góry wskazać kierunku szukanej reakcji przegubu^{*)}, dla tego też rozłożymy ją na trzy składowe R_x , R_y , R_z w kierunkach osi. Gdy wyznaczymy te trzy składowe, to będziemy znali reakcję co do wielkości i kierunku. Prócz tego działa jeszcze siła ciężenia Q , przyłożona w środku sztaby.

Aby wyznaczyć siły odwrotne do czynnych dzielimy sztabę na nieskończenie małe elementy dr . Odległość jednego z nich od O niech będzie równa r . Torem takiego elementu jest koło poziome, którego środek leży na osi, a promień jest równy $r \sin \alpha$. Szybkość jest stała co do wielkości, przeto przyspieszenie styczne jest zerem, a przyspieszenie normalne wynosi $r \sin \alpha \cdot \omega^2$, gdzie ω oznacza szybkość kątową. Siła czynna działa poziomo w płaszczyźnie rysunku w stronę osi, a co do wielkości jest równa $\mu dr \cdot r \sin \alpha \cdot \omega^2$, gdzie μ oznacza masę jednostki długości sztaby. Siła odwrotna do czynnej posiada kierunek odwrotny.

Wyznaczymy sumy rzutów wszystkich sił odwrotnych do czynnych na obrane osi i sumy momentów względem osi y . Suma rzutów na oś x będzie oczywiście

$$\int_0^a \mu \omega^2 \sin \alpha r dr = \frac{\mu \omega^2 a^2 \sin \alpha}{2},$$

gdzie a oznacza długość sztaby. Sumy rzutów na obydwie osi pozostałe są zerami.

Moment siły odwrotnej do czynnej, działającej na element dr wynosi $-\mu dr \cdot r \sin \alpha \cdot \omega^2 \cdot r \cos \alpha$, a suma momentów

$$-\int_0^a \mu \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha r^2 dr = -\frac{\mu \omega^2 a^3 \sin \alpha \cos \alpha}{3}.$$

^{*)} Możemy uważać, że przegub składa się z poziomego czopa, należącego do osi, i ucha, należącego do sztaby. Jeżeli ucho ma się obracać swobodnie około czopa, to jego średnica wewnętrzna musi być cokolwiek większa od średnicy czopa, a zatem ucho styka się z czopem tylko na jednej tworzącej. Reakcja posiada punkt przyłożenia na tej tworzącej i działa na wspólnej normalnej do obydwóch powierzchni. Czop może się stykać z uchem według każdej ze swych tworzących, a zatem może wywierać reakcję w każdym kierunku, prostopadłym do swej osi.

Tworzymy równania równowagi, t. j. bierzemy rzuty na osi oraz momenty względem nich sił zewnętrznych i odwrotnych do czynnych.

$$R_x + \frac{\mu\omega^2 a^2 \sin \alpha}{2} = 0, \quad R_y = 0, \quad R_z - Q = 0$$

$$\frac{Qa \sin \alpha}{2} - \frac{\mu\omega^2 a^3 \sin \alpha \cos \alpha}{3} = 0.$$

W równaniu ostatniem mamy sumę momentów względem osi y ; względem osi pozostałych momenty wszystkich sił są zerami.

Z ostatniego równania wynika, że

$$\omega^2 = \frac{3Q}{2\mu a^2 \cos \alpha}. \quad (1),$$

a zatem będzie

$$R_x = -\frac{3Q \tan \alpha}{4}, \quad R_y = 0, \quad R_z = Q.$$

Widać stąd, że reakcja leży w płaszczyźnie rysunku i tworzy z pionem kąt $-\arctan\left(\frac{3 \tan \alpha}{4}\right)$.

Warto jest jeszcze zwrócić uwagę na równanie (1). Gdy $\alpha = 0$, to $\omega = \sqrt{\frac{3Q}{2\mu a^2}} = \sqrt{\frac{3g}{2a}}$, a zatem tylko przy większych szybkościach kątowych sztaba może być odchylona o kąt różny od zera.

Prz. 1. Dwie lekkie sztaby o długościach a i $2a$ są połączone sztywno w O pod kątem prostym i zaopatrzone na końcach w kule, wążące odpowiednio Q i $\frac{Q}{2}$. Sztaby mogą się obracać około O w płaszczyźnie pionowej i wirują ze stałą szybkością kątową ω około osi pionowej, przechodzącej przez O , przyczem pierwsza tworzy z tą osią stały kąt. Wyznaczyć ten kąt. Odp. Szukany kąt czyni zadość równaniu $\frac{1}{\sin \vartheta} - \frac{1}{\cos \vartheta} = \frac{a\omega^2}{g}$.

Aby nie wprowadzać reakcji w O , należy wziąć moment sił zewnętrznych i odwrotnych do czynnych względem O .

Prz. 2. W zwykłym kołowrocie promień koła $= a$, i promień wału $= b$. Na kole i na wale są nawinięte sznury, dzwigające odpowiednio ciężary P i Q . Wyznaczyć przyspieszenie ciężaru P , uważając masę kołowrotu za znikomo małą. Odp. $\frac{a(aP - bQ)g}{a^2P + b^2Q}$.

Prz. 3. Planeta obraca się około swej osi z tak wielką szybkością kątową, że ciała na jej równiku pozornie nie mają ciężaru. Dowieść, że we wszystkich okolicach powierzchni planety piony przybierają kierunek równoległy do osi.

Prz. 4. Linia kolejowa idzie wzdłuż równoleżnika na szerokości ϑ . Dwa wagony, każdy o masie m bieżą w kierunkach odwrotnych z szybkością v . Wyznaczyć różnicę reakcji, które te wagony wywierają na szyny. Odp. $4m\omega v \cos \vartheta$, gdzie ω oznacza szybkość kątową ziemi.

Prz. 5. Wagon bieżnie na łuku o promieniu r . Wysokość środka ciężkości nad szynami $=h$, i szerokość toru $=a$. Wyznaczyć największą możliwą szybkość wagonu. Odp. $\sqrt{\frac{gar}{h}}$.

Siła odwrotna do czynnej $\frac{Q}{g} \frac{v^2}{r}$, gdzie Q oznacza ciężar wagonu a v szybkość, jest przyłożona w środku ciężkości. Siłami zewnętrznymi są Q i reakcje szyn. Rozkładamy reakcję szyny wewnętrznej na składową poziomą H i pionową N i bierzemy moment względem szyny zewnętrznej. Wypadnie, że $N = \frac{Q}{2a} \left(\frac{v^2 h}{gr} - a \right)$. Jeżeli $\frac{v^2 h}{gr} < a$, to wagon się przewróci, bo szyna nie może wywierać reakcji, skierowanej na dół.

Prz. 6. Soczewka wahadła o masie m jest przywiązana sznurem o długości l do dolnego końca lekkiej pionowej sztaby, prowadzonej bez tarcia w kierunku pionowym. Do górnego końca sztaby jest przywiązany inny sznur, który przechodzi przez mały blok i dźwiga na końcu ciężar o masie m . Wyznaczyć okres małych wahań takiego wahadła.

Stosując zasadę d'Alemberta oddzielnie do soczewki i przeciwwagi i rugując wielkości pomocnicze, otrzymamy równanie

$$l(1 + \cos 2\vartheta) \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} - l \sin \vartheta \cos \vartheta \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 = -2g \sin \vartheta.$$

Pierwsza całka tego równania będzie

$$l\omega^2(1 + \cos 2\vartheta) = 4g(\cos \vartheta - \cos \alpha),$$

gdzie 2α oznacza amplitudę. Ponieważ chodzi o małe odchylenia, możemy przeto podstawić $\cos \vartheta = 1 - \frac{\vartheta^2}{2}$ i $\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$. Odrzuciwszy przytem po lewej stronie $-\frac{\vartheta^2}{2} + \frac{\vartheta^4}{2}$ wobec 2, otrzymamy równanie, które się daje łatwo całkować. Szukany okres $= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$; okres ten jest taki, jak gdyby koniec sznura był przyczepiony do punktu nieruchomego.

Prz. 7. Ciężką kulkę osadzono na lekkim pręcie o długości a , pręt oparto drugim końcem w punkcie O zupełnie chropowatej płaszczyzny poziomej, przyczem tworzył on z pionem kąt $\alpha = 30^\circ$. Nastę-

pnie pozostawiono układ samemu sobie. W jakiej odległości od O kulka upadnie na płaszczyznę? Odp. $\frac{4a}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ruch układu dzieli się na dwa okresy: w pierwszym koniec pręta pozostaje w O i płaszczyzna wywiera nań reakcję R , w drugim kulka porusza się, jak punkt swobodny. Przypuśćmy, że w chwili t pierwszego okresu pręt tworzy z pionem kąt ϑ , i jego szybkość kąto-
wa $=\omega$. Przy pomocy zasady d'Alemberta otrzymamy równania

$$\begin{aligned} R_x + m a \omega^2 \sin \vartheta - m a \frac{d\omega}{dt} \cos \vartheta &= 0, \\ R_y - m g + m a \omega^2 \cos \vartheta + m a \frac{d\omega}{dt} \sin \vartheta &= 0, \\ m a^2 \frac{d\omega}{dt} - m g a \sin \vartheta &= 0, \end{aligned}$$

gdzie R_x i R_y oznaczają składowe poziomą i pionową reakcji R . Z trzeciego równania wyznaczmy $\frac{d\omega}{dt}$ i ω^2 , a następnie z dwóch pierwszych R_x i R_y . Wypadnie, że okres pierwszy się kończy, gdy $\cos \vartheta = \frac{2 \cos \alpha}{3}$.

Przykłady dotychczasowe należały jeszcze do dynamiki punktu; w dwóch następnych mamy do czynienia z ruchem obrotowym brył.

Prz. 8. Cylinder o masie $2m$ może obracać się około osi poziomej. Na jego najwyższej tworzącej leży punkt materyalny o masie m , a współczynnik tarcia pomiędzy punktem i cylindrem $=f$. Odchylamy układ cokolwiek od położenia pierwotnego; o jaki kąt obróci się cylinder, zanim punkt m zacznie się zsuwać?

Ruch układu dzieli się na dwa okresy; w pierwszym punkt m pozostaje w spokoju względem cylindra, i tarcie nie jest całkowicie rozwinięte. Chwilę przejścia do drugiego okresu, w którym punkt jest w ruchu względnym, charakteryzuje ta okoliczność, że tarcie osiąga wartość graniczną, t. j. $F=fN$, gdzie F oznacza siłę tarcia, a N reakcję normalną cylindra na punkt.

Przypuśćmy, że w czasie t pierwszego okresu cylinder obrócił się o kąt ϑ i posiada szybkość kątową ω . Stosując zasadę d'Alemberta do punktu m , otrzymamy

$$\begin{aligned} F + m a \frac{d\omega}{dt} - m g \sin \vartheta &= 0 \\ N + m a \omega^2 - m g \cos \vartheta &= 0. \end{aligned}$$

Stosujemy następnie tę samą zasadę do całego układu, a mianowicie bierzemy momenty wszystkich sił zewnętrznych i odwrotnych do czynnych względem osi cylindra. Wypadnie

$$-\Sigma \mu r^2 \frac{d\omega}{dt} - m a^2 \frac{d\omega}{dt} + m g a \sin \vartheta = 0.$$

W równaniu tem μ oznacza masę typowego elementu cylindra, r jego odległość od osi, a sumowanie rozciąga się na cały cylinder. Oczywiście $\Sigma \mu r^2 \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \Sigma \mu r^2$; lecz $\Sigma \mu r^2$ jest to moment bezwładności cylindra względem osi, a zatem $\Sigma \mu r^2 = Mk^2 = \frac{2nma^2}{2}$. Znajdziemy, że szukaną kąt czyni zadość równaniu $n \sin \vartheta - f(n+3) \cos \vartheta + 2f = 0$.

Prz. 9. Prostokątna deska o masie M może się obracać około osi poziomej, przechodzącej przez środek ciężkości i równoległej do dwóch boków; długość boku prostopadłego do osi $= 2a$. Gdy deska zajmowała położenie poziome i pozostawała w spokoju, położono na niej w odległości c od osi punkt masy m ; współczynnik tarcia punktu o deskę $= f$. Przy jakim nachyleniu deski do poziomu punkt zacznie się zsuwać? Odp. $\arctan \frac{fMa^2}{Ma^2 + 9mc^2}$.

Prz. 10. Łańcuch o długości $2a\beta$ jest zawarty w gładkiej rurce, posiadającej kształt okręgu o promieniu a . Rurka ta wiruje około średnicy pionowej z szybkością kątową ω ; wyznaczyć kąt, który promień, przechodzący przez środek łańcucha, tworzy z osią obrotu, gdy łańcuch pozostaje w spokoju względnym. Odp. $\vartheta = 0$, albo $\cos \vartheta = \frac{g}{a\omega^2 \cos \beta}$. Jeżeli $a\omega^2 \cos \beta$ zawiera się pomiędzy $-g$ i g , to istnieje tylko jedno położenie równowagi względnej.

Prz. 11. Jednorodny łańcuch przechodzi przez dwa gładkie poziome kołki, położone na jednym poziomie. Ogniwa poruszają się z szybkością stałą, przenosząc się ze stosu, położonego pionowo pod lewym kołkiem o h niżej, do stosu, położonego pod prawym kołkiem o $h+b$ niżej, przyczem część łańcucha, zawarta pomiędzy kołkami, nie zmienia postaci. Jaką krzywą tworzy łańcuch pomiędzy kołkami, i jaka jest owa stała szybkość ogniów? Odp. Krzywa jest katenoidą, a szybkość wynosi \sqrt{bg} .

Niechaj S_0 oznacza naprężenie w najniższym punkcie A_0 krzywej, a S w jakimkolwiek punkcie A . Wyznaczamy wypadkową siłę, odwrotnych do czynnych, działających na część $A_0A = s$. Na element ds działa siła normalna $\frac{\mu v^2 ds}{\rho}$ lub $\mu v^2 d\vartheta$, gdzie ρ oznacza promień krzywizny, μ masę jednostki długości, a ϑ kąt, który styczna tworzy z poziomem. Składowa pozioma szukanej siły $= \mu \int_0^{\vartheta} v^2 \sin \vartheta d\vartheta = \mu v^2 (1 - \cos \vartheta)$, a składowa pionowa $\mu \int_0^{\vartheta} v^2 \cos \vartheta d\vartheta = \mu v^2 \sin \vartheta$. Równania równowagi będą

$$S_0 - \mu v^2 (1 - \cos \vartheta) - S \cos \vartheta = 0$$

$$\mu g s + \mu v^2 \sin \vartheta - S \sin \vartheta = 0.$$

Rugując stąd S , otrzymamy

$$s = \frac{S_0 - \mu v^2}{\mu g} \tan \vartheta.$$

Równanie to dowodzi, że szukaną krzywą jest katenoida, której parametr $a = \frac{S_0 - \mu v^2}{\mu g}$ (par. 18, prz. 1).

Można jeszcze łatwo udowodnić, że lewy stos leży na kierunku.

Prz. 12. Na gładkiej płaszczyźnie poziomej umocowano w położeniu pionowym gładką obręcz o masie M . Na obręcz jest nawleczony pierścienek o masie m , przywiązany nicią do punktu najwyższego; nić tę widać ze środka pod kątem α . W pewnej chwili jednocześnie wyswobodzono obręcz i przecięto nić. W jakim stosunku stoi reakcja obręczy na pierścieniu zaraz po wyswobodzeniu do reakcji przed wyswobodzeniem. Odp. $\frac{M \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}$.

108. Równania ruchu. Niech będzie znowu jakiekolwiek ciało, poruszające się pod działaniem sił P_1, P_2, \dots . Obierzmy prostokątny układ współrzędnych i oznaczmy współrzędne elementu m przez x, y, z . Rzut siły czynnej elementu m na oś x jest równy $m \frac{d^2 x}{dt^2}$, a siły odwrotnej do czynnej $-m \frac{d^2 x}{dt^2}$. Suma takich rzutów wyrazi się przez $-\Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2}$, a suma rzutów sił zewnętrznych na tę samą oś przez ΣP_x . Suma rzutów sił odwrotnych do czynnych i zewnętrznych według zasady d'Alemberta musi być zerem, zatem

$$-\Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} + \Sigma P_x = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{czyli} \\ \text{również} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = \Sigma P_x \\ \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2} = \Sigma P_y \\ \Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2} = \Sigma P_z \end{array} \quad (1).$$

Suma momentów sił odwrotnych do czynnych i sił zewnętrznych musi być także zerem. Znajdziemy z łatwością według par. 12, że względem osi z pierwsza wynosi $-\Sigma m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right)$, a druga $\Sigma (x P_y - y P_x)$, a zatem

$$\left. \begin{aligned} \Sigma m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) &= \Sigma (x P_y - y P_x) \\ \Sigma m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) &= \Sigma (y P_z - z P_y) \\ \Sigma m \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right) &= \Sigma (z P_x - x P_z) \end{aligned} \right\} \dots \dots (2).$$

Obydwie grupy równań są ważne dla wszelkich ciał, sztywnych i niesztywnych, ale w przypadku ciała sztywnego te sześć równań określają ruch całkowicie, jeżeli są dane warunki początkowe. Przekonamy się zaraz, że tak jest istotnie.

Obierzmy w ciele sztywnem, którego ruch mamy zbadać, prostokątny układ współrzędnych ξ, η, ζ , związany stałe z tem ciałem i poruszający się wraz z niem. Jeżeli np. ciało jest sześcianem, to układ taki mogą tworzyć trzy krawędzie, wychodzące ze wspólnego wierzchołka. Gdy dane jest położenie tego układu $\xi\eta\zeta$ w układzie nieruchomym xyz , to oczywiście położenie ciała jest całkowicie określone. Ileż do tego potrzeba wielkości niezależnych?

Przedewszystkiem potrzebne są współrzędne początku układu $\xi\eta\zeta$ w układzie xyz ; oznaczmy je przez x_0, y_0, z_0 . Prócz tego potrzeba mieć kąty kierunkowe osi ξ, η i ζ . Kątów tych jest dziewięć, ale nie są one niezależne jedne od drugich. Zachodzą pomiędzy nimi trzy związki typu

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

oraz trzy związki typu

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0;$$

te ostatnie warunkują prostokątność układu. Przy pomocy tych sześciu związków można sześć z owych kątów kierunkowych wyrazić w funkcyach trzech pozostałych. Wypada więc, że są niezbędne tylko trzy kąty kierunkowe, które wraz ze współrzędnymi x_0, y_0, z_0 całkowicie określają położenie układu $\xi\eta\zeta$. Te sześć wielkości są niezależne jedne od drugich i nazywają się *współrzednymi ciała sztywnego*.

Współrzedne każdego elementu ciała w układzie $\xi\eta\zeta$ nie zmieniają się podczas ruchu, i można je uważać za znane, a mając je, możemy wyznaczyć współrzedne tego elementu w układzie xyz w funkcyach owych sześciu współrzędnych ciała. Gdy następnie wstawimy te funkcyje w równania (1) i (2),

to otrzymamy sześć równań, zawierających siedm wielkości zmiennych, a mianowicie sześć współrzędnych ciała oraz zmienną t . Równania te pozwalają wyrazić każdą ze współrzędnych ciała w funkcji t , a zatem określają ruch ciała.

Opisany sposób postępowania byłby wysoce niedogodny, i dla tego też równań (1) i (2) nie używamy do rozwiązywania poszczególnych zagadnień dynamicznych. Są one ważne tylko pod tym względem, że można z nich wyciągnąć pewne wnioski ogólne o ruchu ciał, jak zobaczymy w paragrafach najbliższych.

109. Ruch środka masy. Niech będzie jakiekolwiek ciało, sztywne lub nieszttywne, albo nawet układ złożony z większej liczby ciał. Obierzmy prostokątny nieruchomy układ współrzędnych i oznaczmy współrzędne środka ciężkości ciała, albo układu przez x_0, y_0, z_0 . Wiemy, że $Mx_0 = \sum mx$, gdzie M oznacza masę całkowitą.

Jeżeli ciało się porusza, to x_0 oraz wszystkie x są zmienne, natomiast M i wszystkie m są stałe. Różniczkując to równanie, otrzymamy

$$M \frac{d^2 x_0}{dt^2} = \sum m \frac{d^2 x}{dt^2},$$

oraz dwa analogiczne związki dla y_0 i z_0 .

Przy pomocy tych związków możemy równania (1) paragrafu poprzedzającego przekształcić tak:

$$M \frac{d^2 x_0}{dt^2} = \sum P_x, \quad M \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \sum P_y, \quad M \frac{d^2 z_0}{dt^2} = \sum P_z.$$

Wyobraźmy sobie, że cała masa ciała została skoncentrowana w środku ciężkości, i siły P_1, P_2, \dots , t. j. wszystkie siły zewnętrzne, zostały przeniesione równolegle do tego punktu. Trzy ostatnie równania są właśnie równaniami ruchu takiego wyobraźnego punktu. Możemy więc powiedzieć, że *środek masy ciała, albo układu, porusza się tak, jak gdyby cała masa była w nim skoncentrowana i wszystkie siły zewnętrzne przeniesione doń równolegle*.

Twierdzenie to nazywa się zwykle zasadą ruchu środka masy albo środku ciężkości. Wynika z niego bezpośrednio, że siły wewnętrzne układu nie wywierają wpływu na ruch środka masy, jakkolwiek mogą wywołać ruch poszczególnych części

układu względem tego środka. Podajemy tu parę zwykle przytaczanych ilustracji.

Przypuśćmy, że pocisk wybuchowy został wyrzucony w próżni. Jego środek ciężkości porusza się tak, jak gdyby był swobodnym punktem materalnym, a więc zatacza parabolę. Jeżeli podczas tego ruchu nastąpi eksplozja, to odłamki rozlecą się na wszystkie strony, ale wciąż będzie istniał środek ciężkości wszystkich odłamków. Punkt ten będzie w dalszym ciągu obiegał parabolę, gdyż siły, wywołujące eksplozję, jako wewnętrzne, nie wywarły wpływu na ruch jego. Ruch środka ciężkości ulegnie zmianie dopiero wtedy, gdy pierwszy odłamek upadnie na ziemię; zmiana ta będzie następstwem działania nowej siły zewnętrznej, a mianowicie reakcyi gruntu.

Wyobraźmy sobie, że człowiek znalazł się w przestrzeni, w której żadne siły nań nie działają. Może on poruszać kończynami i głową, ale siły, wywołujące te ruchy, są siłami wewnętrznymi ciała, a zatem nie będzie on w stanie przesunąć swego środka ciężkości.

Gdy istota żyjąca pragnie nadać przyspieszenie swemu środkowi ciężkości, to wywiera siłę na jedno z ciał otaczających; reakcja tego ciała wywołuje pożądane przyspieszenie środka ciężkości.

Przypuśćmy, że człowiek, stojący na podłodze poziomej, chce uczynić krok naprzód. W tym celu wysuwa on naprzód prawą nogę. Gdyby podłoga była doskonale gładka, to środek ciężkości musiałby pozostać w spokoju, gdyż niebyłoby tu żadnej zewnętrznej siły poziomej; a więc lewa noga przesunęłaby się w tył. Na podłodze chropowatej lewa noga również usiłuje przesunąć się w tył, t. j. wywiera na podłogę siłę poziomą, czyli siłę tarcia, a więc skierowaną w tył. Podłoga działa na stopę z siłą równą i odwrotną, skierowaną naprzód; jest to siła zewnętrzna, i pod jej działaniem środek ciężkości otrzymuje przyspieszenie.

Ptāk podczas lotu, poruszając skrzydłami, wywiera siły na otaczające powietrze, a reakcja powietrza nadaje przyspieszenie jego środkowi ciężkości. W podobny sposób ryba porusza się w wodzie.

Para sił, działająca na ciało sztywne, nie może nadać przyspieszenia środkowi ciężkości tego ciała. Jeżeli zatem na

ciało żadne inne siły nie działają, to wynikiem będzie ruch obrotowy około osi, przechodzącej przez środek ciężkości, albo raczej ruch kulisty około tego punktu.

Magnetyzm ziemski wywiera na magnes parę sił, a zatem magnes, umieszczony w magnetycznym polu ziemskim, otrzymuje ruch obrotowy.

Prz. 1. Człowiek stoi na zupełnie gładkim stole; wskazać, w jaki sposób mógłby on zejść na podłogę.

Prz. 2. Przez gładki poziomy kołek przechodzi sznur, na którego końcach wiszą masy M i m . Wyznaczyć przyspieszenie środka ciężkości tych mas, a następnie reakcję, którą kołek wywiera na sznur. Odp. Reakcja = $\frac{4Mmg}{M+m}$.

Prz. 3. Na zupełnie gładkiej podłodze ustawiono w płaszczyźnie pionowej półkolistą tarczę o promieniu a . Tarcza opiera się o podłogę punktem P obwodu, a promień, przechodzący przez P , tworzy z podstawą kąt α . Gdzie się znajdzie w pierwszej chwili środek chwilowy, gdy tarcza zostanie wyswobodzona? Odp. Na pionie, przechodzącym przez P , w odległości $\frac{(3\pi - 4 \sin \alpha)a}{3\pi}$.

Prz. 4. Płaska płyta wisi w płaszczyźnie pionowej na dwóch sznurach pionowych. Gdzie będzie leżał w pierwszej chwili środek chwilowy, gdy jeden ze sznurów się zerwie?

Prz. 5. Nadajemy prostej sztabie położenie pochyłe, opierając jeden koniec o gładką podłogę. Okazać, że gdy wyswobodzimy sztabę, to torem drugiego końca będzie elipsa.

Prz. 6. Trzy jednakowe punkty materialne A, B, C są połączone nierozciągalną nicią tak, że $AB=BC$. Z początku punkt A jest umocowany, a dwa pozostałe krążą koło niego, i nić jest wyprostowana. W jakim stosunku zmieniają się naprężenia obydwóch części nici, gdy wyswobodzimy punkt A ? Odp. W AB naprężenie spadnie do $\frac{1}{3}$, a w BC do $\frac{1}{2}$.

110. Ruch ciała sztywnego. Zastosujemy wyniki, osiągnięte w ostatnich paragrafach, do ciała sztywnego. Ruch jego rozłożymy na ruch postępowy, zgodny z ruchem środka ciężkości, i na ruch kulisty, którego środkiem ma być środek ciężkości. Innymi słowy będziemy rozważali osobno ruch środka ciężkości i ruch ciała względem środka ciężkości.

W tym celu obierzemy dwa układy współrzędnych, jeden nieruchomy xyz i drugi ruchomy $\xi\eta\zeta$. Początkiem drugiego niech będzie środek ciężkości, i układ ten ma brać udział je-