

ruchu układu płaskiego, zwłaszcza, jeżeli chodzi o tory różnych punktów. W wielu przypadkach, mając linie środków, możemy w sposób bardzo prosty wykreślić tor dowolnego punktu układu.

Przypuśćmy, że krzywa  $\sigma$  na fig. 15 jest linią stałą, a  $\rho$  linią ruchomą środków chwilowych. W chwili obecnej krzywe te stykają się w  $O$ , i punkt ten jest środkiem chwilowym. Pragniemy wykreślić tor punktu, który obecnie zajmuje położenie  $A$ .

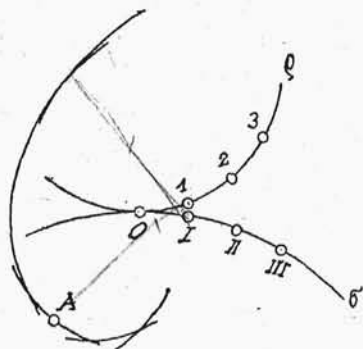


Fig. 15.

Oberzmy na linii  $\sigma$  pewną liczbę punktów I, II, III... Dajmy na to, że umiemy w sposób ścisły lub przybliżony wyznaczyć na linii  $\rho$  takie punkty 1, 2, 3..., aby łuki  $01$ ,  $12$ ,  $23$ ... były odpowiednio równe łukom  $0I$ ,  $I II$ ,  $II III$ ...

Zatoczmy z punktu  $O$  okrąg, przechodzący przez  $A$ . Okrąg ten będzie zawierał element toru punktu  $A$ , bo w chwili obecnej  $A$  obraca się około  $O$ ; innymi słowy okrąg będzie styczny do toru. Po pewnym czasie punkt 1 znajdzie się w położeniu I i stanie się wówczas środkiem chwilowym; gdy więc z punktu I zatoczmy okrąg promieniem  $1A$ , to okrąg ten będzie znowu styczny do szukanego toru. Zataczamy następnie okrąg z punktu II promieniem  $2A$  i t. d. Obwiednią tych wszystkich okręgów będzie szukany tor punktu  $A$ .

~~Prz. 1.~~ Prz. 1. Koło toczy się po linii prostej; wykreślić tor któregośkolwiek punktu układu.

Prz. 2. Prosta toczy się po okręgu; wykreślić tor jednego z punktów tej prostej (rozwijająca koła), a także tor innego punktu, przechodzący przez środek okręgu (spiralna Archimedesesa, por. prz. 2 par. 30).

Prz. 3. Wykreślić przy pomocy metody powyższej epicykloidę, albo hipocykloidę.

**32. Wyznaczanie linii środków.** Okażemy tu na przykładzie, jak można wyznaczyć obydwie linie środków chwilowych, gdy mamy dostateczną liczbę danych, określających ruch układu.

Dajmy na to, że torami punktów  $A$  i  $B$  układu są proste  $a$  i  $b$ , przecinające się w punkcie  $O$  (por. prz. 1 par. 28).



Miejszem geometrycznem takich punktów jest okrąg  $\rho$ , opisany na trójkącie  $ABC$ ; przechodzi on oczywiście również przez punkt  $O$ . Promień okręgu  $\rho$  jest dwa razy mniejszy od promienia okręgu  $\sigma$ .

Zobaczmy teraz, jakie tory obiegają różne punkty układu. Weźmy naprzód jakikolwiek punkt  $M$  okręgu  $\rho$ . Szybkość jego jest prostopadła do  $CM$ , a więc leży na prostej  $OM$ . Skoro szybkość punktu  $M$  jest wciąż skierowana do punktu  $O$ , albo od tego punktu, to torem  $M$  może być tylko prosta  $OM$ . Toż samo dotyczy wszystkich punktów układu, położonych na okręgu  $\rho$ . Torami ich są proste, przechodzące przez  $O$ .

Weźmy teraz jakibądź punkt  $P$ . Poprowadźmy przez niego średnicę koła  $\rho$ . Torami jej końców  $M$  i  $N$  są prostopadłe proste  $OM$  i  $ON$ . Obierzmy te proste za osi  $y$  i  $x$  układu współrzędnych, oznaczmy stałe odcinki  $MP$  i  $NP$  odpowiednio przez  $m$  i  $n$ , a zmienny kąt  $MNO$  przez  $\vartheta$ . Znajdziemy, że

$$x = m \cos \vartheta, \quad y = n \sin \vartheta,$$

gdzie  $x$  i  $y$  oznaczają współrzędne punktu  $P$ . Są to równania parametryczne elipsy, a zatem torem punktu  $P$  jest elipsa, której osi leżą na prostych  $ON$  i  $OM$ .

Prz. 1. Proste  $a$  i  $b$  układu płaskiego przechodzą wciąż odpowiednio przez stałe punkty  $A$  i  $B$ . Wyznaczyć obydwie linie środków chwilowych. Odp. Odcinek  $AB$  widać ze środka chwilowego pod kątem stałym, a zatem linią stałą jest koło  $\sigma$ , przechodzące przez  $A$ ,  $B$  i punkt przecięcia  $O$  prostych  $a$  i  $b$ . Linią ruchomą jest koło, zatoczone z punktu  $O$  promieniem dwa razy większym. Łatwo sprawdzić, że każda prosta układu, przechodząca przez  $O$ , czyli należąca do pęka  $O$ , przechodzi wciąż przez stały punkt, położony na kole  $\sigma$ .

Ruch ten jest jakby odwrotnością ruchu, opisanego szczegółowo w paragrafie niniejszym. Jeżeli tam uznamy dotychczasową płaszczyznę nieruchomą za układ ruchomy, a dotychczasowy układ ruchomy będziemy uważali za płaszczyznę nieruchomą, innemi słowy jeżeli będziemy uważali ruch względny płaszczyzny nieruchomej względem układu ruchomego, to punkty  $A$  i  $B$  (fig. 16) staną się dla nas nieruchomymi, a proste  $a$  i  $b$  ruchomymi, i otrzymamy ruch, o którym mowa w tym przykładzie.

Prz. 2. Dwie jednakowe korby  $MP$  i  $NQ$  (fig. 17) obracają się około punktów  $M$  i  $N$ , a ich końce łączy przegubowo sztaba  $PQ$ , której długość jest równa  $MN$ . Wyznaczyć obydwie linie środków chwilowych. Odp. Są to jednakowe elipsy, których ogniska leżą odpowiednio w  $M, N$  i  $P, Q$ .

Prz. 3. Dwie jednakowe korby  $MP$  i  $NQ$ , jak na fig. 18, obracają się około punktów  $M$  i  $N$ , a ich końce łączy przegubowo sztaba  $PQ=MN$ . Wyznaczyć linie środków. Odp. Jednakowe hiperbole; wykreślić asymptoty.

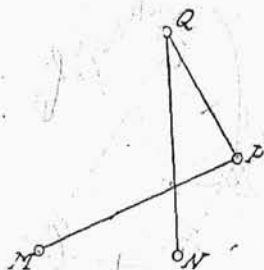


Fig. 17.

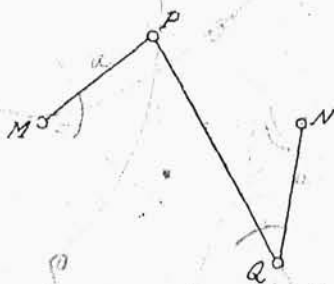


Fig. 18.

Prz. 4. Układ obraca się około punktu  $A$  ze stałą szybkością kątową  $\omega$ , a ten punkt  $A$  biegnie prostą  $a$  ze stałą szybkością  $v$ . Wyznaczyć obydwie linie środków chwilowych. Odp. Punkt układu, położony w odległości  $r$  od  $A$ , posiada szybkość  $r\omega$  względem  $A$  i szybkość unoszenia  $v$ . Środkiem chwilowym będzie taki punkt, którego szybkość bezwzględna  $= 0$ . Linia stałą jest prosta równoległa do  $a$ , a ruchomą koło.

Prz. 5. Punkt  $M$  układu płaskiego obiega spiralną Archimedesą, której biegun leży w  $O$ , i która we współrzędnych biegunowych posiada równanie  $r=a\varphi$ , a prosta  $m$  układu, zawierająca punkt  $M$ , przechodzi wciąż przez  $O$ . Wyznaczyć obydwie linie środków chwilowych. Odp. Linia stałą jest koło o promieniu  $a$ , ruchomą zaś prosta, równoległa do  $m$  (prz. 1 par. 29).

Prz. 6. Punkt  $M$  układu obiega spiralną logarytmiczną, której biegun leży w  $O$ , i która we współrzędnych biegunowych posiada równanie  $r=ae^{\varphi}$ , a prosta  $m$  układu, zawierająca punkt  $M$ , przechodzi wciąż przez  $O$ . Wyznaczyć obydwie linie środków chwilowych. Odp. Linia stałą jest spiralna logarytmiczna, odchylona od danej o  $90^\circ$ , a linią ruchomą prosta, tworząca z  $OM$  kąt  $45^\circ$  (por. prz. 2 par. 17).

Prz. 7. Sztaby  $OA$ ,  $AB$ ,  $BC$ ,  $CO$ , połączone przegubami, tworzą równoległobok; wierzchołek  $O$  jest nieruchomy, a boki  $OA$  i  $OC$  obracają się z szybkościami kątowymi  $\omega_1$  i  $\omega_2$ . Jaki jest tor wierzchołka  $B$ ?

Wyznaczamy obydwie krzywe środków chwilowych dla sztaby  $AB$ , a w tym celu wykreślamy naprzód szybkość punktu  $B$ . Jego szybkość względem punktu  $A$  (lecz nie sztaby  $QA$ ) i szybkość unoszenia są odpowiednio równe  $\omega_2 \cdot OC$  i  $\omega_1 \cdot OA$ , albo  $\omega_2 r_2$  i  $\omega_1 r_1$ , jeżeli  $OA$  i  $OC$  oznaczmy przez  $r_1$  i  $r_2$ . Normalna do toru punktu  $B$  przetnie  $OA$  w punkcie  $D$ ; gdy porównamy trójkąt  $ABD$  z trójkątem szybkości,

to wypadnie, że  $AD = \frac{r_1 \omega_1}{\omega_2}$ , a zatem punkt  $D$  zajmuje położenie stałe na sztabie  $OA$ .

Z tego wynika, że krzywą stałą jest koło o promieniu  $OD$ , ruchomą koło o promieniu  $AD$ . Torem punktu  $B$  będzie epicykloida lub hipocykloida (trochoida) stosownie do tego, czy szybkości kątowe mają kierunki zgodne, czy odwrotne.

Ta sama krzywa powstaje przy toczeniu się innego koła po innym kole stałym. Koła te otrzymamy, wyznaczając środek chwilowy dla sztaby  $BC$ .

**N 32** Prz. 8. Jeden bok ruchomego kąta prostego  $ABC$  przechodzi wciąż przez nieruchomy punkt  $A$ , a punkt  $C$ , położony na drugim boku, pozostaje na nieruchomej prostej  $x$ , przyczem odległość punktu  $A$  od  $x$  jest równa  $BC$ . Wyznaczyć obydwie krzywe środków chwilowych. Odp. Dwie jednakowe parabole.

**33. Obwiednie.** Niech będzie jakaś linia  $\lambda$ , należąca do układu ruchomego, i przypuśćmy, że normalna do tej linii, poprowadzona przez środek chwilowy, przecina ją w punkcie  $A$ . Oczywiście szybkość punktu  $A$  leży na stycznej do  $\lambda$ .

Wyobrazmy sobie teraz punkt  $M$  ruchomy, ale nie należący do układu. Niech ruch jego będzie taki, aby zajmował on wciąż punkt przecięcia linii  $\lambda$  z normalną, przechodzącą przez środek chwilowy, a więc w danej chwili punkt  $A$ . Ten punkt  $M$  zakreśla na płaszczyźnie nieruchomej pewną linię, którą oznaczmy przez  $\mu$ . Dowiedzimy, że linie  $\lambda$  i  $\mu$  są styczne.

W tym celu uważajmy ruch punktu  $M$  względem układu ruchomego. Torem względnym jest linia  $\lambda$ , a zatem szybkość względna jest styczna do tej linii. Szybkość unoszenia, czyli szybkość punktu  $A$ , jest, jak widzieliśmy, również styczna do  $\lambda$ . Skoro obydwie szybkości składowe leżą na stycznej do  $\lambda$ , to na tejże prostej musi leżeć i szybkość wypadkowa, czyli bezwzględna. Lecz torem bezwzględnym punktu  $M$  jest linia  $\mu$ , i szybkość bezwzględna musi być styczna i do tej linii. Widzimy, że linie  $\lambda$  i  $\mu$  mają w  $A$  wspólną styczną, a więc się stykają w tym punkcie.

Linia  $\lambda$  jest w każdej chwili styczna do linii  $\mu$ , a zatem  $\mu$  jest obwiednią wszystkich położen linii  $\lambda$ . Warto zwrócić uwagę, że linia  $\lambda$  nie toczy się po linii  $\mu$ . Szybkość unoszenia jest tu różna od zera, i szybkość względna punktu  $M$  nie jest równa szybkości bezwzględnej.

Z rozważań tych wynika, że wspólna normalna do dowol-

nej linii  $\lambda$ , należącej do układu ruchomego, i do jej obwiedni  $\mu$  przechodzi w każdej chwili przez środek chwilowy.

W paragrafie 29 rozważaliśmy ruch prostej, która wciąż przechodzi przez stały punkt  $O$ , i widzieliśmy, że prostopadła do niej, wystawiona w punkcie  $O$ , przechodzi w każdej chwili przez środek chwilowy. Jest to szczególny przypadek tylko co dowiedzionego twierdzenia. Prosta ruchoma jest w tym razie linią  $\lambda$ , a punkt  $O$  można uważać za zdegenerowaną linię  $\mu$ .

Prz. 33. Torem punktu  $A$  układu płaskiego jest prosta  $m$ , a obwiednią prostej  $a$ , należącej do układu i przechodzącej przez  $A$ , jest koło styczne do  $m$ . Wyznaczyć obydwie krzywe środków chwilowych. Odp. Dwie jednakowe parabole.

Prz. 34. Punkty  $A$  i  $B$  układu płaskiego poruszają się na prostych  $x$  i  $y$ , prostopadłych jedna do drugiej. Wyznaczyć obwiednię prostej  $AB$ . Odp. Obieramy proste  $x, y$  za osi współrzędnych, i oznaczamy przez  $(xy)$  współrzędne punktu zetknięcia prostej  $AB$  z obwiednią. Znajdziemy łatwo, że  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ , gdzie  $a = AB$ . Jest to równanie astroidy.

Prz. 35. Koło o promieniu  $a$  toczy się po prostej  $x$ ; wyznaczyć obwiednię średnicy. Odp. Cykloida, którą zatacza punkt okręgu o promieniu  $\frac{a}{2}$ , toczącego się po prostej  $x$ .

Prz. 36. Boki  $AB$  i  $BC$  ruchomego trójkąta  $ABC$  pozostają styczniowymi odpowiednio do kół  $O_1$  i  $O_2$ . Wyznaczyć obwiednię boku  $CA$ . Odp. Łatwo się przekonać, że normalna do obwiedni szukanej przecina stałą linię środków chwilowych wciąż w jednym i tym samym punkcie, a krzywą, której wszystkie normalne przechodzą przez jeden punkt, jest koło.

Prz. 37. Wierzchołek kąta prostego porusza się na prostej  $y$ , a jeden bok przechodzi wciąż przez punkt  $F$ . Wyznaczyć obwiednię drugiego boku. Odp. Parabola, której ogniskiem jest  $F$ , a styczną wierzchołkową  $y$ .

N 33. Prz. 38. Wierzchołek kąta  $\alpha$  obiega spiralną  $r = ae^{\alpha\theta}$ , a jeden z jego boków przechodzi przez biegun. Wyznaczyć obwiednię drugiego boku.

Łatwo okazać, że styczna do szukanej krzywej tworzy z promieniem wodzącym kąt  $45^\circ$ , a zatem krzywa ta jest taką samą spiralną.

Interesujące są dwa przypadki szczególne. Zakładając  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , znajdziemy, że rozwijaną spiralnej logarytmicznej jest taka sama spiralna (par. 34), a zakładając  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , otrzymamy obwiednię promieni światła, wydawanych przez punkt świecący w biegunie, po odbiciu od spiralnej danej.

**34. Rozwijane i rozwijające.** Niech będzie jakakolwiek krzywa  $\alpha$ . Wyobraźmy sobie układ ruchomy, którego punkt  $M$  obiega tę krzywą, a prosta  $m$ , przechodząca przez  $M$ , jest wciąż do niej normalna. Środek chwilowy będzie oczywiście w każdej chwili leżał na prostej  $m$ . Zbadamy bliżej położenie jego.

Przypuśćmy, że w pewnej chwili punkt  $M$  zajął położenie  $M'$  na  $\alpha$ , a prosta  $m$  położenie  $CM'$ , gdzie  $C$  ma oznaczać ówczesny środek chwilowy. W ciągu następnych  $dt$  sek. cały układ razem z prostą  $m$  obraca się około  $C$ , i w końcu tego okresu  $m$  zajmie położenie  $CM''$ , gdzie  $M''$  oznacza nowe położenie punktu  $M$  na krzywej  $\alpha$ , nieskończenie bliskie do  $M'$ . Tak więc środek chwilowy leży na przecięciu normalnych, poprowadzonych w nieskończenie bliskich punktach krzywej  $\alpha$ . Lecz z drugiej strony wiemy, że takie dwie normalne przecinają się w środku krzywizny krzywej  $\alpha$ ; w danym razie jest to środek krzywizny, odpowiadający punktowi  $M'$ .

Widzimy, że środek chwilowy leży w każdej chwili w środku krzywizny, należącym do tego punktu krzywej  $\alpha$ , który właśnie zajmuje punkt  $M$ . Oczywiście linią ruchomą środków chwilowych jest tu prosta  $m$ , a linią stałą, miejsce geometryczne środków krzywizny krzywej  $\alpha$ . Oznaczmy to miejsce geometryczne literą  $\beta$ .

Możemy teraz powstanie krzywej  $\alpha$  wyobrażać sobie w sposób taki: prosta  $m$  toczy się bez poślizgu po krzywej  $\beta$ , i jeden z punktów tej prostej zatacza krzywą  $\alpha$ .

Można to opisać jeszcze inaczej. Wyobraźmy sobie, że jeden koniec nici nierozciągalnej jest umocowany w jakimś punkcie krzywej  $\beta$ , i że nią opasuje ściśle tę krzywą. Gdy ujmemy za swobodny koniec nici i będziemy ją nawijali na krzywą  $\beta$ , lub odwijali, przyczem nie powinna być wciąż wypięta, to oczywiście ruch wyprostowanej części nici będzie taki sam, jak ruch prostej  $m$ , i jeden z punktów nici zakreśli krzywą  $\alpha$ .

Krzywa  $\beta$  zowie się rozwijaną krzywej  $\alpha$ , a krzywa  $\alpha$  rozwijającą krzywej  $\beta$ . Rozwijana jest obwiednią normalnych rozwijającej.

**35. Szybkość środka chwilowego.** Dajmy na to, że krzywe  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  na fig. 19 są liniami środków chwilowych stałą i ruchomą. Krzywe te stykają się w punkcie  $M$ , który w chwili



obecnej jest środkiem chwilowym. Niech  $\beta_1$  i  $\beta_2$  będą rozwijanymi tych krzywych. Krzywa  $\beta_1$  jest nieruchoma, a  $\beta_2$  należy do układu ruchomego. Wspólna normalna do  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  jest styczną do obydwóch rozwijanych, a punkty zetknięcia  $B_1$  i  $B_2$  są środkami krzywizny linii  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  w punkcie  $M$ .

Wyobraźmy sobie, że  $B_1B_2$  jest częścią środkową nici, której części skrajne opasują krzywe  $\beta_1$  i  $\beta_2$ , a końce są umocowane na tych krzywych. Wykonamy teraz czynność następującą. Za-

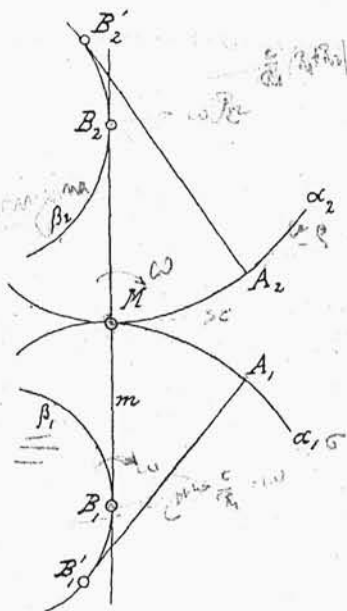


Fig. 19.

trzymujemy układ ruchomy w położeniu obecnym, rozcinaemy nie w punkcie  $M$  i prowadzimy końce po krzywych  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  aż do punktów  $A_1$ ,  $A_2$ , obranych w taki sposób, aby łuki  $MA_1$  i  $MA_2$  były równe. Wyprostowane części nici zajmą teraz położenia  $A_1B_1'$  i  $A_2B_2'$ ; są one normalne do  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  w punktach  $A_1$ ,  $A_2$  i styczne do  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  w  $B_1'$ ,  $B_2'$ . Podczas całej tej czynności nici, jak wiemy, były wyprostowane, odwijając się z krzywych  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ , albo nawijając na nie.

Przymocujmy następnie końce nici w punktach  $A_1$ ,  $A_2$  i przywróćmy układowi ruch dotychczasowy. Krzywa  $\alpha_2$  będzie się toczyła

po  $\alpha_1$ , i po jakimś czasie punkt  $A_2$  znajdzie się w położeniu  $A_1$ , stając się środkiem chwilowym. W owej chwili oczywiście nie  $A_2B_2'$  będzie stanowiła przedłużenie nici  $B_1'A_1$ .

Z tych prostych rozważań wynika, że jeżeli nie rozetniemy nici, to podczas ruchu układu pozostanie ona wciąż w napięciu i będzie się jednocześnie odwijać z krzywych  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ , lub nawijać na nie; zresztą przy innej dyspozycji nie może się nawijać na jedną z nich a odwijać z drugiej. Podczas tego ruchu wyprostowana część nici stanowi wciąż wspólną normalną do obydwóch linii środków chwilowych, a pewien określony jej punkt  $M$  przypada w każdej chwili w środku chwilowym.



Wyniki, do których doszliśmy, wypowiemy jeszcze w inny sposób. Wyobraźmy sobie prostą  $m$  ruchomą, lecz nie należącą do rozważanego układu. Przypuśćmy, że toczy się ona bez poślizgu po krzywej  $\beta_1$ . W takim razie, jak wiemy, pewien punkt  $M$  prostej  $m$  obiega krzywą  $\alpha_1$ . Niech szybkość tego punktu będzie taka, aby w każdej chwili przypadał on w punkcie zetknięcia krzywych  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ , czyli w ówczesnym środku chwilowym.

Uważajmy teraz ruch prostej  $m$  względem układu ruchomego. Z rozważań poprzednich wynika, że w tym ruchu względnym toczy się ona bez poślizgu po krzywej  $\beta_2$ , a punkt  $M$  obiega krzywą  $\alpha_2$ .

O tym punkcie  $M$  prostej  $m$ , który podąża wciąż za środkiem chwilowym, mówiliśmy już w par. 30. Widzieliśmy tam, że szybkość jego względem układu ruchomego jest zgodna z szybkością bezwzględną co do wielkości i kierunku. Szybkość ta nazywa się powszechnie *szybkością środka chwilowego*. Nazwa ta, trudna do zastąpienia, wydaje się w pierwszej chwili niedorzeczną, bo środek chwilowy, jeżeli uważamy go za punkt układu ruchomego, posiada szybkość zero. Oznaczmy tę szybkość punktu  $M$  przez  $c$ . Oznaczmy prócz tego obecną szybkość kątową układu ruchomego przez  $\omega$ , i promienie krzywizny krzywych  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  w  $M$ , czyli  $MB_1$ ,  $MB_2$  na fig. 19 przez  $R_1$ ,  $R_2$ .

Dla prostej  $m$  środkiem chwilowym jest obecnie punkt  $B_1$ , zatem szybkość kątowa tej prostej wynosi  $\frac{c}{R_1}$ , a szybkość punktu  $B_2$  prostej  $m$  będzie oczywiście  $\frac{c}{R_1}(R_1 + R_2)$ . W ruchu względnym środkiem chwilowym prostej  $m$  jest punkt  $B_2$ , zatem szybkość względna tego punktu jest równa zero, a szybkość bezwzględna jest zgodna co do wielkości i kierunku z szybkością unoszenia, czyli z szybkością tego punktu układu, w którym obecnie znajduje się punkt  $B_2$ . Lecz układ obraca się obecnie około środka chwilowego  $M$  z szybkością kątową  $\omega$ , a więc szybkość owego punktu wynosi  $R_2\omega$ . Z tego wynika, że

$$\frac{c}{R_1}(R_1 + R_2) = R_2\omega$$

lub

$$\frac{\omega}{c} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Aby wzór był zupełnie ogólny, będziemy uważali  $R_1, R_2$  za dodatnie, gdy mierzymy je w strony odwrotne od środka chwilowego, czyli, gdy  $B_1$  i  $B_2$  leżą po różnych stronach punktu  $M$ . Jeżeli  $B_1$  i  $B_2$  leżą po jednej stronie, to  $R_1$  i  $R_2$  powinny mieć znaki odwrotne, dobrane w taki sposób, aby wielkość  $\frac{\omega}{c}$  była dodatnia.

Przy pomocy tego wzoru można wyznaczyć szybkość środka chwilowego, mając krzywizny obydwóch linii środków, oraz szybkość kątową układu.  $\omega, R_1, R_2, c!$

24/11 **36. Krzywizny torów.** Na fig. 20  $M$  ma być owym punktem ruchomym, który nie należy do układu, lecz wędruje

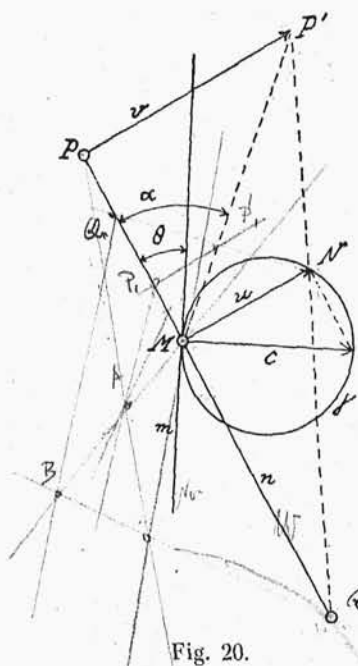


Fig. 20.

wciąż razem ze środkiem chwilowym, a więc  $M$  oznacza również położenie obecnego środka chwilowego; niech  $c$  będzie szybkością punktu  $M$ , albo szybkością środka chwilowego, a  $m$  wspólną normalną do obydwóch linii środków chwilowych. Szybkość  $c$ , jako leżąca na wspólnej stycznej, jest prostopadła do  $m$ . Przypuśćmy, że w chwili obecnej układ obraca się około  $M$  z szybkością kątową  $\omega$ .

Weźmy dowolny punkt układu  $P$ , którego odległość od  $M$  oznaczmy przez  $p$ . Szybkość jego  $v = p\omega$ . Prosta, łącząca koniec  $P'$  szybkości  $v$  z  $M$  jest linią przewodnią prostej  $MP$ ; tworzy ona z  $MP$  kąt  $\alpha = \arctan \omega$  (par. 29).

Wyobraźmy sobie prostą  $n$  ruchomą, lecz nie należącą do układu. Dajmy na to, że jeden jej punkt jest umocowany w punkcie  $P$ , a zatem wędruje torem punktu  $P$  i w każdej chwili posiada z  $P$  wspólną szybkość; w chwili obecnej ta szybkość jest równa  $v$ . Przypuśćmy dalej, że ta prosta  $n$  pozostaje wciąż normalną do toru punktu  $P$ . Z tego wynika, że przechodzi ona wciąż przez środek chwilowy układu,

czyli przez punkt  $M$ , i toczy się bez poślizgu po nieruchomej rozwijanej toru punktu  $P$ .

Zwróćmy uwagę na ruch punktu  $M$  względem prostej  $n$ , albo raczej względem nowego układu, związanego z tą prostą. Torem względnym jest prosta  $n$ , a więc na niej leży szybkość względna; szybkość unoszenia jest prostopadła do  $n$ , jako do prostej zerowej. Gdy rozłożymy szybkość bezwzględną  $c$  w tych dwóch kierunkach, to składowa prostopadła  $u$  będzie szybkością tego punktu prostej  $n$ , który obecnie zajmuje punkt  $M$ .

Połączmy końce  $N$  i  $P'$  szybkości  $u$  i  $v$ . Otrzymamy linię przewodnią prostej  $n$ ; ich punkt przecięcia  $Q$  jest środkiem chwilowym prostej  $n$ , albo środkiem krzywizny toru punktu  $P$ .

Zapomocą tej konstrukcyi (podanej przez W. Hartmanna) można wyznaczyć środek krzywizny dla punktu  $P$ , mając szybkość tego punktu, oraz szybkość środka chwilowego. Rozwiążemy również bez trudności zadanie odwrotne: mając szybkości oraz środki krzywizny torów dwóch punktów, wyznaczyć szybkość środka chwilowego; następnie można już wyznaczyć środek krzywizny dla każdego dalszego punktu układu.

Warto jeszcze zauważyć, że z końca  $N$  składowej  $u$  widać szybkość  $c$  pod kątem prostym, a więc koniec ten leży na obwodzie koła, którego średnicą jest  $c$ . O tem kole wypadnie nieraz mówić w dalszym ciągu; nazwiemy je dla krótkości kołem  $\gamma$ .

Powyższa konstrukcyja środka krzywizny pozwala łatwo uzasadnić pewne twierdzenia rzutowe. Niech będą na prostej  $MP$  przez punktu  $P$  jeszcze punkty  $P_1, P_2 \dots$ . Prowadzimy przez nie promienie prostopadłe do  $MP$ ; w przecięciu z prostą przewodnią  $MP'$  otrzymamy punkty  $P'_1, P'_2 \dots$ . Prowadzimy następnie promienie  $P'_1N, P'_2N \dots$ , które przetną prostą  $MP$  w punktach  $Q_1, Q_2 \dots$ . Punkty  $Q, Q_1, Q_2 \dots$  są środkami krzywizny torów punktów  $P, P_1, P_2 \dots$ .

Mamy teraz na prostej  $MP$  dwa szeregi punktów  $P, P_1, P_2 \dots$  i  $Q, Q_1, Q_2 \dots$ ; każdy z nich jest w perspektywie do szeregu  $P', P'_1, P'_2 \dots$ , a zatem są to szeregi rzutowe. Ich punkty podwójne są połączone w  $M$ . Gdy dany jest ten punkt  $M$  oraz para odpowiadających sobie punktów, np.  $P$  i  $Q$ , to szeregi są określone i możemy łatwo wyznaczyć środek krzywizny toru każdego punktu, danego na prostej  $MP$ .

W tym celu prowadzimy przez  $M$  dowolną prostą i obieramy na niej dwa dowolne punkty  $A$  i  $B$ . Promienie łączące pierwszy z  $P, P_1, P_2 \dots$ , oraz promienie, łączące drugi z  $Q, Q_1, Q_2 \dots$ , tworzą pęki rzutowe; pęki te leżą w perspektywie, bo połączone promienie  $AM$  i  $BM$  odpowiadają sobie. Z tego wynika, że punkty przecięcia odpo-

wiadających sobie promieni leżą na prostej, przechodzącej przez  $M$ . Prosta tę otrzymamy, łącząc  $M$  z punktem przecięcia promieni  $AP$  i  $BQ$ , a następnie już będziemy mogli wyznaczyć dowolną liczbę par punktów.

Prz. 1. Dwie korby  $O_1A_1$  i  $O_2A_2$ , których końce łączy przegubowo sztaba  $A_1A_2$ , obracają się około  $O_1, O_2$ ; wyznaczyć środek krzywizny toru pewnego punktu  $A$ , danego na sztabie, przy danym położeniu mechanizmu.

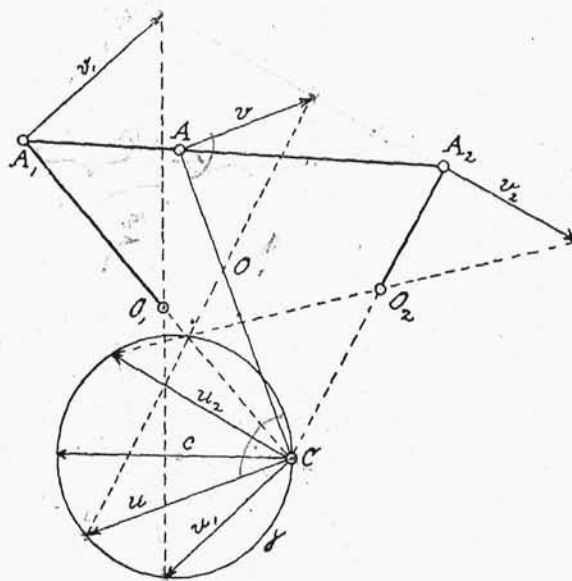


Fig. 21.

Wyznaczamy naprzód środek chwilowy  $C$  i szybkość  $v_1$  punktu  $A_1$ . Szybkość tę powinno być widać z  $C$  pod kątem  $\alpha = \arctan \omega$ ; gdzie  $\omega$  oznacza szybkość kątową sztaby  $A_1A_2$ ; ale oczywiście ani tor punktu układu, ani jego środek krzywizny nie zależą od szybkości kątowej, możemy więc tę szybkość albo kąt  $\alpha$  obrać dowolnie. Środkiem krzywizny toru punktu  $A_1$  jest  $O_1$ , gdy więc połączymy koniec  $v_1$  z  $O_1$ , to otrzymamy linię przewodnią korby  $O_1A_1$ , i na tej linii będzie leżał koniec szybkości  $u_1$ . W danym razie jest to szybkość, którą miałby punkt, należący do korby i zajmujący położenie  $C$ . Tak samo otrzymamy dla punktu  $A_2$  szybkość  $u_2$ . Koło  $\gamma$  przejdzie przez  $C$  i przez końce szybkości  $u_1$  i  $u_2$ . Mając koło  $\gamma$ , znajdziemy już łatwo środek krzywizny  $O$  toru punktu  $A$ .

Prz. 2. Okazać, że w cykloidzie promień krzywizny jest dwa razy większy, niż odległość punktu od środka chwilowego.

Torem środka koła tworzącego jest prosta, środek krzywizny

leży nieskończenie daleko, a zatem składowa  $u$  musi być równa szybkości środka. Korzystając z tego, można odrazu wykreślić koło  $\gamma$ . Dogodnie będzie obrać  $\omega=1$ .

Prz. 3. Punkty  $A$  i  $B$  układu płaskiego poruszają się na prostych  $a$  i  $b$ , tworzących kąt prosty; wyznaczyć wykreślnie środek krzywizny toru dowolnego punktu układu.

Obrawszy dowolnie szybkość środka odcinka  $AB$ , można odrazu wykreślić koło  $\gamma$ .

34. Prz. 4. Wyznaczyć promienie krzywizny w wierzchołkach elipsy, której osi wynoszą  $2a$  i  $2b$ . Odp.  $\frac{a^2}{b}$  i  $\frac{b^2}{a}$ . Elipsę należy tu uważać za tor punktu prostej, której dwa punkty poruszają się na osiach.

Prz. 5. Ruchoma prosta  $m$  przechodzi wciąż przez punkt  $O$ , a jej punkt  $A$  pozostaje wciąż na nieruchomej prostej  $n$ . Odległość punktu  $O$  od  $n$  wynosi  $a$ , i na  $m$  dany jest punkt  $B$  w odległości  $b$  od  $A$ . Wyznaczyć wykreślnie środek krzywizny toru punktu  $B$  dla jakiegokolwiek położenia prostej  $m$  i obrać promień krzywizny, gdy prosta  $m$  jest prostopadła do  $n$ .

Obrawszy  $O$  za początek układu współrzędnych i prostopadłą do  $n$  za oś  $x$ , znajdziemy łatwo równanie linii stałej środków chwilowych, a mianowicie  $y^2=ax$ . Jest to parabola, której wierzchołek leży w  $O$ , a oś na osi  $x$ . Wiadomo, że rzut punktu paraboli na oś i przecięcie stycznej z osią leżą w jednakowych odległościach od wierzchołka; korzystając z tego twierdzenia, wyznaczmy wspólną styczną do krzywych środków chwilowych, a następnie koło  $\gamma$ . Promień krzywizny w szczególnem położeniu wskazanem wynosi  $\frac{(a \pm b)^2}{b}$ .

**37. Koło przegięć.** Na fig. 22 widzimy znowu środek chwilowy  $M$ , wspólną normalną do linii środków  $m$  i koło  $\gamma$ . Poprowadźmy w układzie ruchomym przez środek chwilowy dowolną prostą  $MP$ , tworzącą z  $m$  kąt  $\vartheta$ , i niech  $MP'$  będzie jej linią przewodnią. Prowadzimy następnie przez koniec  $N$  szybkości  $u$  prostą równoległą do  $MP$  i przez punkt  $S'$ , w którym ta równoległa przecina linię przewodnią, prostopadłą  $S'S$  do  $MP$ . Środek krzywizny toru punktu  $S$  leży w przecięciu prostych  $NS'$  i  $MS$ , a więc jest punktem nieskończenie odległym; z tego wynika, że punkt  $S$  przypada obecnie w przegięciu swego toru.

Z figury widać, że  $MS=SS' \cot \alpha = c \cdot \cos \vartheta \cdot \cot \alpha$ , gdzie  $\alpha = \arctan \omega$  oznacza kąt  $PMP'$ . Ostatecznie

$$MS = \frac{c}{\omega} \cos \vartheta.$$