ИЗВѢСТІЯ

ВАРШАВСКАГО

ПОЛИТЕХНИЧЕСКАГО ИНСТИТУТА

ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II.

ВЫПУСКЪ — 1909 г.

ВАРШАВА.
ПЕЧ. ВЪ ТИП. АКЦ. ОБЩ. С. ОРГЕЛЬБРАНДА С-ЕЙ.
1910.

Печатано по опредѣленію Совѣта Варшавскаго Политехническаго Института Императора Николая II.

Директоръ профессоръ *В. П. Амалицкій.*

СОДЕРЖАНІЕ.

Редакторъ профессоръ *И. Р. Брайцевъ.*

ОРДИНАРНЫЙ ПРОФЕССОРЪ ИМПЕРАТОРСКАГО ВАРШАВСКАГО УНИВЕРСИТЕТА, ВАРШАВСКАГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКАГО ИНСТИТУТА

В. А. АНИСИМОВЪ

(1860—1907)

Василій Аѳанасьевичъ Анисимовъ.

НЕКРОЛОГЪ

Д. Д. Мордухай-Болтовского.

Въ періодъ своего бездѣйствія Императорскій Варшавскій Университетъ и Варшавскій Политехническій Институтъ Императора НИКОЛАЯ II потеряли одного изъ наиболѣе энергичныхъ и наиболѣе извѣстныхъ своей научной и педагогической дѣятельностью профессоровъ. 27 Августа 1907 года, послѣ продолжительной и тяжкой болѣзни скончался ординарный профессоръ Варшавскаго Университета и Варшавскаго Политехническаго Института, докторъ Чистой Математики, Василій Аѳанасьевичъ Анисимовъ.

Покойный нѣсколько лѣтъ состоялъ деканомъ Механическаго Отдѣленія Варшавскаго Политехническаго Института, онъ принадлежалъ къ той небольшой группѣ профессоровъ, которая присутствовала, такъ сказать, при самомъ рожденіи Политехникума, которые работали еще въ то время, когда, помѣщаясь во временномъ зданіи, онъ только еще начиналъ оборудоваться, начиналъ расти, чтобы сперва ихъ трудами, а затѣмъ и всей профессорской и преподавательской коллегіи достигнуть того разцвѣта, въ которомъ онъ находился ко времени тѣхъ тяжелыхъ и безпокойныхъ событій, среди шума которыхъ Василій Аѳанасьевичъ неслышно сошелъ въ могилу.

Въ лицѣ В. А. Университетъ и Политехникумъ потеряли одного изъ лучшихъ русскихъ лекторовъ-математиковъ, одного изъ ученыхъ съ тѣмъ широкимъ взглядомъ на науку и съ той особенной способностью ясно и просто и, болѣе того, изящно излагать свои мысли, которыя такъ присущи Московской школѣ математиковъ, изъ которой вышелъ покойный.

В. А. умеръ въ цвѣтущемъ возрастѣ, тяжелая душевная болѣзнь застигла его внезапно во время самаго разцвѣта его плодовитой научной дѣятельности, которую онъ никогда не прекращалъ не смотря на то, что къ дѣятельности педагогической онъ относился не съ меньшимъ увлеченіемъ. Полный неистощимой энергіи и одаренный острымъ и живымъ умомъ, покойный сумѣлъ совмѣстить практическую дѣятельность въ качествѣ декана еще не вполнѣ вставшаго на ноги учебнаго заведенія съ педагогической дѣятельностью и съ неослабѣвающей научной работой.

Начиная съ 1889 по 1905, только два года 1890 и 1895 не отмѣчены научными трудами. 1898-ый годъ, годъ основанія Института, является однимъ изъ наиболѣе плодовитыхъ годовъ.

Неся на своихъ плечахъ наиболѣе трудные университетскіе курсы, просиживая безчисленныя Совѣтскія и Факультетскія засѣданія, гдѣ онъ былъ не молчаливымъ свидѣтелемъ, но однимъ изъ наиболѣе дѣятельныхъ членовъ, обогащая ежегодно науку работами по самымъ разнороднымъ отдѣламъ математики, за развитіемъ которой успѣвалъ слѣдить, Василій Аѳанасьевичъ такимъ образомъ жилъ какой то особенно полной жизнью, жизнь его представляла какое то быстрое горѣніе.

Прекрасно складывавшіяся обстоятельства шли рука въ руку съ его энергіей и способностями.

Василій Аѳанасьевичъ родился 27 февраля 1860 года въ селѣ Климовѣ-Заводѣ, Юхновскаго уѣзда. Родители его были крестьяне, крѣпостные княгини Юсуповой. Дѣтство и юность свои В. А. провелъ въ родномъ селѣ. Грамотѣ обучался онъ вмѣстѣ съ двумя другими своими братьями сначала у сельскаго дьячка, затѣмъ дома у окончившаго курсъ духовной семинаріи; передъ поступленіемъ въ гимназію, обучался въ теченіе 3-хъ мѣсяцевъ въ частномъ пансіонѣ г-жи Денисовичъ въ гор. Вязьмѣ.

Учился В. А. въ теченіе всего гимназическаго курса блестяще, будучи всегда первымъ въ классѣ, причемъ выказывалъ выдающіеся успѣхи не только по Математикѣ, но и по всѣмъ остальнымъ предметамъ безъ исключенія. Особенное вліяніе на В. А. въ гимназіи имѣлъ преподаватель математики А. И. Темпорусовъ, который главнымъ образомъ и побудилъ покойнаго отдаться изученію математики.

Поступивъ затѣмъ на математическое отдѣленіе физико-математическаго факультета Московскаго Университета, онъ его кончилъ черезъ 4 года и, по успѣшномъ прохожденіи курса, онъ былъ оставленъ покойнымъ А. Ю. Давидовымъ для подготовки къ профессорскому званію, при этомъ ему была назначена стипендія 600 руб. въ годъ.

Подъ руководствомъ А. Ю. Давидова покойный готовился къ профессурѣ, состоя въ это время преподавателемъ въ частной гимназіи Креймана въ Москвѣ.

По выдержаніи экзамена на магистра, Университетъ командируетъ въ 1887 г. В. А. за границу, гдѣ онъ слушаетъ лекціи знаменитаго Фукса; руководясь его совѣтами, онъ пишетъ магистерскую диссертацію, которую представляетъ въ 1889 году физико-математическому факультету Московскаго Университета. Съ прекрасными рекомендаціями профессоровъ П. А. Некрасова, Н. Е. Жуковскаго, Н. В. Бугаева, 1-го января 1890 г. В. А. принялъ каѳедру чистой математики въ Варшавскомъ Университетѣ причемъ еще совсѣмъ молодымъ, не имѣя 30 лѣтъ, въ самомъ началѣ своей плодотворной научной дѣятельности.

Его бывшіе учителя въ своихъ рекомендательныхъ письмахъ, указывая на его крупныя педагогическія способности и трудолюбіе, предсказываютъ, что изъ него „въ будущемъ выработается основательный и серьезный ученый."

Предсказанію этому было суждено выполниться. Не смотря на то, что начало преподавательской дѣятельности въ Университетѣ требуетъ въ особенности при отсутствіи приватъ-доцентуры въ Варшавскомъ Университетѣ большой затраты труда, В. А. необычайно быстро вслѣдъ за магистерской подаетъ въ 1892 году докторскую диссертацію и уже 32 лѣтъ отъ роду становится ординарнымъ профессоромъ.

Прекраснымъ доказательствомъ любви покойнаго къ наукѣ является то, что, достигнувъ высшей ученой степени и ординатуры въ сравнительно молодые годы при сравнительно небольшомъ числѣ научныхъ работъ, онъ не почилъ на лаврахъ, а продолжалъ работать, и наиболѣе интенсивная его научная дѣятельность была не до защиты докторской диссертаціи, а послѣ нея, и главнымъ образомъ послѣ нѣкотораго промежутка съ 1896 г. — 1902.

Педагогическая дѣятельность покойнаго началась со средней школы.

Покойный преподавалъ сперва въ нѣкоторыхъ московскихъ гимназіяхъ, затѣмъ, состоя уже экстраординарнымъ профессоромъ Университета, во II-ой Варшавской мужской гимназіи. По словамъ его бывшихъ учениковъ своимъ интереснымъ изложеніемъ онъ въ высокой степени увлекалъ многихъ изъ нихъ и многіе, прежде относившіеся къ математикѣ безъ интереса, затѣмъ становились въ Университетѣ его учениками.

Съ 1 Августа 1898 года, когда открылся Варшавскій Политехническій Институтъ, начинается особенно кипучая дѣятельность покойнаго. 1 Августа онъ назначается, при сохраненіи за нимъ должности профессора Университета, ординарнымъ профессоромъ Варшавскаго Политехническаго Института, съ 11-го Сентября того-же года онъ назначается секретаремъ Института.

Черезъ годъ, въ 1899, онъ членъ Правленія и деканъ механическаго отдѣленія, каковымъ онъ состоитъ до 16 сентября 1903 г.

Главныя и наиболѣе цѣнныя работы покойнаго относятся къ аналитической теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Перу его принадлежитъ первое большое произведеніе по этому отдѣлу Математическаго Анализа на русскомъ языкѣ.

Его магистерская диссертація: „Основанія теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій“ даетъ прекрасное изложеніе всѣхъ наиболѣе существенныхъ результатовъ, относящихся къ такъ называемой Фуксовской теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій. До этой работы въ русской математической литературѣ мы не имѣли ни одного сочиненія, спеціально ей посвященнаго. Работа эта явилась результатомъ глубокаго изученія этой теоріи подъ руководствомъ знаменитаго ея творца Фукса. Даже до настоящаго времени работа эта является настольной книгой для всякаго, ведущаго свои изслѣдованія надъ линейными дифференціальными уравненіями. Самъ Фуксъ въ своемъ письмѣ къ В. А. называетъ эту работу элегантной и интересной.

Уже въ своей магистерской диссертаціи В. А. затрагиваетъ тотъ вопросъ, съ изслѣдованіемъ котораго въ особенности связано имя покойнаго.

Мы говоримъ о такъ называемомъ „предѣльномъ кругѣ Фукса.“

Методъ аналитическаго продолженія функцій, опредѣляемыхъ линейнымъ дифференціальнымъ уравненіемъ, принадлежащій Фуксу, основывается на примѣненіи отображенія одной плоскости комплекснаго перемѣннаго на другую при помощи нѣкоторыхъ раціональныхъ преобразованій.

Въ этой методѣ основной задачей является слѣдующая:

Если

$$F(z) = \frac{P(z)}{z\,Q(z)},$$

гдѣ $P(z)$, $Q(z)$ цѣлыя функціи, то уравненіе

$$\theta(z, z_1) = \frac{F(z) F(z_1)}{z - z_1} = 0$$

будетъ устанавливать нѣкоторое соотвѣтствіе между точками, отвѣчающими z и z_1.

Точкамъ лежащимъ внутри нѣкотораго круга K_r радіуса r съ центромъ въ $z = 0$ будетъ отвѣчать точка z_1, находящаяся внѣ круга K_r, до тѣхъ поръ пока r не превзойдетъ нѣкотораго предѣла R. Кругъ K съ радіусомъ равнымъ R и съ центромъ въ $z = 0$ обладаетъ слѣдующими характерными свойствами:

1) всякой точкѣ z внутри K отвѣчаетъ z_1 внѣ K,

2) точкѣ z окружности K отвѣчаютъ точки z_1 лежащія вообще внѣ K, но между этими z_1 находится одна, или нѣсколько точекъ на окружности K.

Такой кругъ K называется *предѣльнымъ кругомъ, принадлежащимъ къ раціональной функціи* $F(z)$.

Разыскивая радіусъ предѣльнаго круга, Фуксъ приходитъ къ заключенію, что этотъ радіусъ равенъ наименьшему изъ модулей корней уравненія

$$F'(z) = 0.$$

Ошибочность этого результата была впервые замѣчена П. А. Некрасовымъ, которую онъ усмотрѣлъ въ своихъ изслѣдованіяхъ, относящихся къ трехчленнымъ уравненіямъ.

В. А. разыскалъ источникъ этой ошибки.

Въ своей докторской диссертаціи „Предѣльный кругъ Фукса" возвращаясь къ этому вопросу, онъ даетъ средство найти помимо тѣхъ случайныхъ примѣровъ, которыя онъ далъ въ магистерской диссертаціи, безчисленное множество примѣровъ, опровергающихъ правило Фукса. Убѣжденный аргументами Анисимова и Некрасова, которые Анисимовъ повторилъ въ своихъ замѣткахъ на нѣмецкомъ языкѣ, Фуксъ вынужденъ былъ признать неправильность своего правила и замѣнить его другимъ.

Работа Анисимова занимаетъ на ряду съ работами П. А. Некрасова видное мѣсто въ этой полемикѣ. На ряду съ работами П. А. Некрасова она является отвѣтомъ Фуксу, который, признавъ ошибочность своего правила, не измѣняя коренными образомъ его формы, счелъ очень необходимымъ произвести нѣкоторую поправку, замѣнивъ его другимъ аналогичнымъ правиломъ.

Это второе правило Фукса состоитъ въ слѣдующемъ:

„Радіусъ предѣльнаго круга для функціи $F(z)$ равняется наименьшему положительному значенію r удовлетворяющему слѣдующей системѣ уравненій

$$|z_1| = |z_2| = r$$

$$\frac{F(z_1) - F(z_2)}{z_1 - z_2} = 0$$

$$z_1 F'(z_1) + z_2 F'(z_2) = 0.$$

В. А. указываетъ въ своей диссертаціи не только примѣры, противорѣчащіе этому правилу, но указываетъ источники этой ошибочности и доказываетъ необходимость замѣны правила Фукса правиломъ Некрасова.

Въ связи съ этой работой находится и его работа: „О представленіи и продолженіи аналитическихъ функцій.“

Овладѣвъ въ совершенствѣ Фуксовскими методами, изслѣдованія В. А., примѣнилъ ихъ къ изслѣдованію уравненія Рикатти общаго типа

$$y' + Py^2 + Qy + R = 0,$$

которое, какъ извѣстно, подстановкой

$$y = \frac{1}{P} \frac{z'}{z}$$

приводится къ линейному уравненію 2-го порядка

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + S_1 \frac{dz}{dx} + S_2 z = 0$$

а именно къ изслѣдованію условій, чтобы функція, опредѣляемая уравненіемъ Рикатти, имѣла данное число опредѣленныхъ значеній въ неподвижной особенной точкѣ.

Первоначально весь центръ тяжести теоріи дифференціальныхъ уравненій В. А. ставилъ въ аналитической теоріи уравненій, т. е. въ изслѣдованіи аналитическихъ свойствъ, опредѣляемыхъ дифференціальными уравненіями. Въ этомъ отношеніи онъ безспорно находится подъ вліяніемъ французскихъ математиковъ и отчасти Московскаго Университета. Въ этомъ отношеніи его первоначальные взгляды рѣзко расходятся съ направленіемъ Петербургскихъ математиковъ, гдѣ еще съ давнихъ поръ главный интересъ лежалъ не въ аналитической теоріи интегральныхъ функцій, а въ интегрированіи въ конечномъ видѣ.

На интегрированіе въ конечномъ видѣ В. А. смотрѣлъ, какъ на задачу „чисто формальную" или какъ на своего рода подготовительную работу въ иныхъ случаяхъ облегчающую рѣшеніе основной проблеммы, проблеммы изслѣдованія аналитическихъ свойствъ интегральной функціи.

Въ своей работѣ объ уравненіи Рикатти онъ касается вопроса интегрированія его въ конечномъ видѣ, но рѣшенію этого вопроса придаетъ видимо меньше значенія, чѣмъ изслѣдованіямъ той же работы, о которыхъ мы говорили выше и которыя непосредственно примыкаютъ къ его диссертаціямъ.

Но видимо съ годами интересъ его къ интегрированію въ конечномъ видѣ возрастаетъ такъ, что послѣдней его работой, такъ сказать его лебединой пѣснью, является работа, въ тѣсной связи находящаяся съ работой извѣстнаго Петербургскаго математика А. Н. Коркина.

Результаты, полученныя В. А., въ области этого рода изслѣдованій не лишены интереса и иногда весьма изящны по своей формѣ.

Уравненіе

$$\frac{dv_0}{dx} + P_0 v_0^2 + R_0 = 0,$$

по которомъ можетъ быть приведено уравненіе Рикатти общаго типа

$$\frac{dy}{dx} + Py^2 + Qy + R = 0,$$

приводится подстановкой

$$v_0 = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_1^2} \frac{1}{v_1}$$

$$s_1 = \int_{x_0}^{x} P_0 \, dx$$

къ другому того же типа, затѣмъ новое уравненіе аналогичной подстановки къ уравненію опять того же типа и т. д.

При помощи ряда такихъ подстановокъ получается съ одной стороны разложеніе v_0 въ непрерывную дробь:

$$v_0 = \cfrac{1}{s_1 + \cfrac{s_1^{-2}}{\cfrac{1}{s_2} + \cfrac{s_2^{-2}}{\cfrac{1}{s_3} + \ddots + \cfrac{s_i^{-2}}{v_i}}}}$$

съ другой стороны получаются слѣдующія достаточныя условія интегрируемости въ квадратурахъ уравненія Рикатти

$$\frac{P_0}{R_0}\left[\frac{s_2\ s_4\ \ldots.\ s_i}{s_1\ s_3\ \ldots\ s_{i-1}}\right]^4 = const.$$

или

$$\frac{P_0}{R_0}\left[\frac{s_2\ s_4\ \ldots\ s_{i-1}}{s_1\ s_3\ \ldots\ s_i}\right]^4 = const.$$

отсюда уже какъ простое слѣдствіе выводятся условія интегрируемости уравненія Рикатти:

$$y' + a\,y^2 = b\,x^m$$

достаточность которыхъ доказана Д. Бернулли, а необходимость Льювиллемъ.

Въ другой работѣ: „О способахъ интегрированія обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій и т. д.“ переведенной также на нѣмецкій языкъ, В. А. даетъ обобщеніе извѣстнаго типа Лагранжевскихъ уравненій, интегрируемыхъ дифференцированіемъ.

Уравненіе

$$\frac{df}{dx} + y'\,\frac{df}{dy} + y''\,\frac{df}{dy'} = 0, \quad (*)$$

къ которому приводится предложенное уравненіе перваго порядка

$$f\ (x,\ y,\ y') = 0$$

по дифференцированіи будетъ проинтегрировано, если будетъ извѣстенъ (на основаніи принципа послѣдняго множителя) Якобіевъ множитель I, такъ какъ одинъ интегралъ уравненія (*) есть

$$f\ (x,\ y,\ y') = C.$$

Уравненія въ частныхъ производныхъ, опредѣляющія I проинтегрируются, если для I будетъ задана опредѣленная форма.

Каждой изъ этихъ формъ будетъ отвѣчать опредѣленная форма интегрируемаго при помощи квадратуръ уравненія.

Такія формы найдены В. А. для случаевъ

$$I = const.\ \theta(x),\ \theta(y),\ \theta(y'),\ \theta(x, y),\ \theta(x, y'),\ \theta(y, y').$$

Тѣ же методы проводятся и при изысканіи уравненій перваго порядка, интегрируемыхъ дифференцированіемъ при чемъ получаются результаты, представляющіе интересныя обобщенія результатовъ, полученныхъ Якоби для дифференціальныхъ уравненій втораго порядка.

В. А. очень чутко относился ко всѣмъ новымъ теченіямъ въ наукѣ. Всякое сколько нибудь выдающееся произведеніе вызвало въ немъ интересъ и многія изъ новѣйшихъ крупныхъ произведеній находили въ немъ откликъ.

Извѣстныя работы покойнаго А. Н Коркина объ Эйлеровомъ множителѣ, получили тоже отголосокъ въ видѣ небольшой статьи объ Эйлеровомъ множителѣ, помѣщенной въ Математическомъ Сборникѣ за 1905 годъ.

Эта статья представляетъ подробное изслѣдованіе теоремы Эйлера, по которой нули и полюса Эйлерова множителя являются частными рѣшеніями уравненія

$$Mdx + Ndy = 0$$

если только они не служатъ нулями и полюсами $M.\ N.$

В. А. доказалъ, что послѣднее условіе въ нѣкоторыхъ исключительныхъ случаяхъ должно быть дополнено еще другими добавочными условіями.

Покойнымъ въ связи съ его изслѣдованіями по теоріи геодезическихъ кривыхъ былъ также затронутъ вопросъ почти совершенно новый. Въ краткихъ замѣткахъ имъ было указано, что условіе вещественности интеграла уравненій перваго порядка даетъ иногда возможность вывести вмѣсто одного два первыхъ интеграла и по нимъ найти второй.

В. А. замѣчаетъ, что уравненіе

$$f\ (u, v, v' \ldots v^{(n)}) = 0$$

при условіи вещественности (u, v) подстановкой

$$x = u + iv \quad y = u - iv$$

приводится на

$$F\,(x, y, y' \ldots y^{(n)}) = 0.$$

Интегралъ послѣдняго представленный въ видѣ

$$\varphi\,(u, v, v' \ldots v^{(n-1)}) + i\,\psi\,(u, v, v' \ldots v^{(n-1)}) = const.$$

черезъ отдѣленіе вещественной и мнимой части дастъ

$$\varphi\,(u, v, v' .. v^{(n-1)}) = \alpha \quad \psi\,(u, v, v' .. v^{(n-1)}) = \beta$$

гдѣ α, β произвольно постоянная, при этомъ В. А. изслѣдуетъ, когда эти ихъ уравненія формы одного интеграла и когда они даютъ интегралы различныя (Note sur l'intégration des équateurs....).

Покойный одно время съ большимъ увлеченіемъ занимался изслѣдованіями, которыя не могутъ быть отнесены ни къ интегрированію въ конечномъ видѣ, ни къ чисто-аналитической теоріи дифференціальныхъ уравненій, но являются родственными, какъ той, такъ и другой области.

Это — изслѣдованія формы интеграловъ дифференціальныхъ уравненій $y' = f\,(x, y)$ съ опредѣленными аналитическими свойствами $f\,(x, y)$.

В. А. остановился главнымъ образомъ на вопросѣ о формѣ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій съ періодическими коэффиціентами. Прійдя сперва къ невѣрному результату, неправильность котораго была отмѣчена Гильбертомъ, В. А. доказываетъ затѣмъ, что всякое уравненіе перваго метода

$$y' = f\,(x, y)$$

гдѣ $f\,(x, y)$ періодическая функція отъ x, такъ что

$$f\,(x + \omega, y) = f\,(x, y)$$

имѣетъ общій интегралъ типа

$$y = F\left[c\,e^{Ax}, \varphi\,(x)\right]$$

гдѣ

$$\varphi\,(x + \omega) = \varphi\,(x)$$

этому результату элегантному по словамъ Эрмита послѣдній дастъ другое болѣе простое доказательство въ одномъ изъ своихъ писемъ къ В. А.

Избравъ любимой областью изслѣдованія „аналитическую теорію интегральныхъ уравненій В. А. часто отвлекался въ сторону.

Можетъ быть подъ вліяніемъ читаемыхъ въ Политехникумѣ и въ Университетѣ курсовъ Дифференціальной Геометріи онъ время отъ времени возвращался къ геометрическимъ изслѣдованіямъ.

Впрочемъ еще задолго до поступленія въ Университетъ была написана его юношеская работа по Геометріи, помѣщенная въ Математическомъ Сборникѣ. Въ ней онъ доказываетъ рядъ теоремъ относящихся къ кривымъ двоякой кривизны, частью уже извѣстныхъ, такъ напримѣръ равенство произведеній радіусовъ первой и второй кривизны для кривой и ребра возврата ея полярной поверхности, равенство отношенія элементовъ дугъ этихъ двухъ кривыхъ отношенію радіуса соприкасающейся сферы къ радіусу второй кривизны и т. д. Къ этой же темѣ относятся работы помѣщенныя въ 1892 и 1894 году въ Математическомъ Сборникѣ а въ 1898 году въ Извѣстіяхъ Варшавскаго Университета.

Наиболѣе крупной геометрической работой В. А. является работа о геодезическихъ кривыхъ, помѣщенная сперва въ Варшавскихъ Университетскихъ Извѣстіяхъ, а затѣмъ въ Annalles de l'Ecole Normale за 1901 годъ, въ связи съ которой находится рядъ замѣтокъ. Въ этой работѣ В. А доказывается возможность получить во многихъ случаяхъ полный интегралъ дифференціальнаго уравненія геодезическихъ кривыхъ безъ помощи квадратуръ.

Представляя элементъ вещественной поверхности подъ формой

$$4\,\lambda\,dxdy$$

мы будемъ имѣть первый интегралъ дифференціальнаго уравненія геодезическихъ кривыхъ въ формѣ

$$y' = F\,(x, y, C)$$

Полагая

$$x = u + iv, \quad y = u - iv, \quad C = \alpha + i\,\beta$$

мы получаемъ черезъ приравниваніе нулю вещественной и мнимой части два уравненія, исключеніе изъ которыхъ v' даетъ полный интегралъ.

Въ этомъ же мемуарѣ опредѣляются поверхности, имѣющія первый интегралъ дифференціальнаго уравненія геодезическихъ кривыхъ формы

$$v' = \frac{A + B\alpha}{C + D\alpha},$$

α постоянныя и изслѣдуется форма геодезическихъ кривыхъ для этого типа поверхностей.

В. А. отнюдь не принадлежалъ къ узкимъ спеціалистамъ, на всю жизнь обрекшимъ себя на рѣшеніе какого нибудь труднаго и мало подающаго надеждъ на разрѣшеніе вопроса. Можетъ быть, рискуя въ иныхъ случаяхъ оказаться слишкомъ поверхностнымъ, онъ избѣгъ тѣхъ недостатковъ, которыми страдаютъ слишкомъ рьяные и упорные работники въ узкихъ областяхъ и которыя всегда тяжко отзываются въ ихъ педагогической дѣятельности.

Только при этихъ условіяхъ В. А. могъ стать не только ученымъ, но и прекраснымъ педагогомъ, имѣвшимъ въ Университетѣ своихъ учениковъ. Мелкіе его работы даютъ представленіе объ его разносторонности въ области математическаго анализа.

Сюда относится его замѣтка „О теоріи сложенія эллиптическихъ функцій“, работа „О высотахъ наибольшаго освѣщенія“, гдѣ разсматривается извѣстная задача въ обобщенномъ видѣ по замѣнѣ безконечно малой освѣщаемой площади конечными площадями различныхъ формъ, двѣ работы объ опредѣлителяхъ, дающіе возможность вывести необходимыя и достаточныя условія существованія однородной зависимости съ постоянными коэффиціентами между частными интегралами линейнаго дифференціальнаго уравненія.

Наконецъ слѣдуетъ упомянуть о его работѣ: „Къ теоріи безконечныхъ произведеній (Варшавскія Унив. Извѣстія за 1897 г.), въ которой онъ, развивая и продолжая изслѣдованія Прингсгейма, изслѣдуетъ условія безусловной и условной сходимости безконечныхъ произведеній и изслѣдуетъ законы измѣненія значеній условно сходящихся произведеній при перемѣщеніяхъ множителей.

Перу покойнаго принадлежатъ также три печатныхъ курса, выработанныхъ изъ тѣхъ курсовъ, которые онъ многіе годы читалъ въ Университетѣ и въ Политехникумѣ:

Элементы Алгебры дѣйствительныхъ многочленовъ (въ объемѣ програмы Варшавскаго Политехническаго Института), Курсъ Варіаціоннаго Исчисленія и курсъ Теоріи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Лекціи, читаемыя покойнымъ, обладавшимъ при прекрасной дикціи, также умѣньемъ живо и изящно излагать свой предметъ, возбуждали въ студентахъ неослабѣвающій интересъ, и покойный никогда не могъ пожаловаться на малочисленность слушателей.

Среди окончившихъ Варшавскій Университетъ есть много лицъ, изъ которыхъ нѣкоторые теперь состоятъ преподавателями высшихъ учебныхъ заведеній, считающихъ себя учениками В. А. и сохранившихъ о немъ теплое воспоминаніе, сознавая себя обязанными покойному не только за знаніе и любовь къ наукѣ, насаженныя имъ, но также за тѣ жизненныя условія, въ которыя онъ ихъ поставилъ.

Списокъ печатныхъ трудовъ покойнаго:

1. Нѣсколько теоремъ о кривыхъ двойной кривизны и ихъ развертках. Мат. Сб. 1885 г.
2. Основанія теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій. Ученыя записки Императ. Москов. Универс. Отд. Математики. Вып. IX. 1889 г.
3. Замѣчаніе о предѣльномъ кругѣ Фукса. Мат. Сб. XVI. 1891 г.
4. Ueber der Fuchs'schen Leuzkreis. Mat. Annalen B. XV 145—148. 1892 г.
5. Предѣльный кругъ Фукса. Варш. Унив. Извѣстія № 1. 1892 г.
6. О представленіи и продолженіи аналитическихъ функцій. Варш. Унив. Извѣстія № 2, 3. 1892 г.
7. Элементарный выводъ теоремы сложенія для эллиптическихъ функцій pu Вейерштрасса. Варш. Унив. Извѣстія. 1893 г.
8. Къ теоріи кривыхъ двойной кривизны. Мат. Сб. XVII. 1894 г.
9. Къ теоріи параллельныхъ кривыхъ на плоскости. Варш. Унив. Извѣстія. 1894 г.
10. Уравненіе Рикатти общаго вида. Варш. Унив. Извѣстія. 1896 г.
11. Форма интеграловъ дифференціальныхъ уравненій съ періодическими коэффиціентами. Варш. Унив. Извѣстія № 2, 3. 1896 г.
12. Объ одной теоремѣ теоріи опредѣлителей и ея приложеніи къ теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій. Варш. Унив. Извѣстія. № 1, 1—16 стр. 1896 г.
13. О способахъ интегрированія обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій и нѣкоторыя приложенія способа дифференцированія. Варш. Унив. Извѣстія. 1897 г.
14. Къ теоріи безконечныхъ произведеній. Варш. Унив. Извѣстія. 1897 г.

(13 переводъ). Sur les méthodes d'integration des équations différentielles ordinaires et quelques applications de la méthode de difference (переводъ старый 12). Math. Ann. 181—195. 1898 г.

(12 переводъ). Sur une formule nouvelle rélative aux déterminants et son application à la théorie des équations différentielles linéaires. Math. Ann. 51. 388—400. 1898 г.

15. Къ теоріи кривыхъ двоякой кривизны. Варш. Унив. Извѣстія № 3. 1898 г.

16. Къ вопросу о формѣ интеграловъ съ періодическими коэффиціентами. Мат. Сб. XX. 1898 г.

17. О высотахъ наибольшаго освѣщенія на плоскости. Извѣстія Варш. Полит. Инст. за 1898 г.

(17 переводъ). Sur les hauteurs au maximum de l'eclairement des aires données. Bulletin de Darboux 2 serie t. XXIII. nov. 1899.

18. О формѣ интеграловъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій съ періодическими коэффиціентами. Матем. Сб. 1899 г.

19. Выписка́ изъ переписки Эрмита съ Анисимовымъ: о формѣ интеграловъ уравненій съ періодическими коэффиціентами. Мат. Сб. 21. 62—67. 1900 г.

20. Къ вопросу объ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій съ помощью комплексныхъ перемѣнныхъ. Варш. Унив. Извѣстія. IX. 1901 г.

21. Къ теоріи геодезическихъ кривыхъ. Варш. Унив. Извѣстія. № 7. 1901 г.

22. Добавленіе къ статьѣ: „Къ теоріи геодезическихъ кривыхъ. Варшав. Унив. Извѣстія № 7. 1901 г.

(21 переводъ). Sur la théorie des courbes géodesiques. Annales de l'Ecole Normale 18. 371—395. 1901 г.

23. Уравненіе ассимптотъ алгебраическихъ кривыхъ на плоскости. Мат. Сб. т. XXII. 1902 г.

(20 переводъ). Note sur l'intégration des équations différentielles au moyen des variables complexes. Math. Ann. 56. 273—276. 1902 г.

(22 переводъ). Complément au mémoire: „Sur la théorie des courbes géodesiques. Annales de l'Ecole Normale 19. 63—64 1902 г.

24. Элементы Алгебры дѣйствительныхъ многочленовъ. Варшава 1902 г.

25. Курсъ Варіаціоннаго исчисленія. Варшава 1904 г.

26. Научное и художественное творчество. Публичная лекція въ пользу недост. студентовъ. Варшава 1904 г.

27. О необходимыхъ и достаточныхъ условіяхъ, чтобы нули и полюса Эйлерова множителя обыкновеннаго дифференціальнаго уравненія 1-го порядка и первой степени съ алгебраическими коэффиціентами были бы частными рѣшеніями уравненія. Мат. Сбор. 25. 509—534. 1905 г.

28. Курсъ теоріи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій. 1906 г.

Объ одномъ приложеніи изслѣдованіи Бріо и Букэ, относящихся къ дифференціальнымъ уравненіямъ перваго порядка.

Д. Д. Мордухай-Болтовского.

§ 1. Въ нашей работѣ*), относящейся къ интегрированію въ конечномъ видѣ уравненія перваго порядка было доказано, что, если уравненіе перваго порядка имѣетъ рѣшеніе, выражаемое въ конечномъ видѣ при помощи элементарныхъ трансцендентныхъ функціи, то это рѣшеніе должно быть одного изъ слѣдующихъ типовъ:

1) Алгебраическое

2) трансцендентная 1-го класса показательнаго типа:

$$y = \pi\ (\alpha\vartheta)\ (1),$$

гдѣ π алгебраическая функція x и

$$\vartheta = e^{\omega}[\chi]^{\lambda}[\chi_1]^{\lambda_1}\ldots[\chi_m]^{\lambda_m} \quad (2)$$

ω, χ_i алгебраическія функціи, λ_i постоянныя, α произвольная постоянная

3) трансцендентная 1-го класса логариѳмическаго типа:

$$y = \pi\ (\zeta + \alpha) \quad (3),$$

гдѣ π алгебраическая функція x и

$$\zeta = \omega + \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i\, lg\, \chi_i \quad (4)$$

---

*) Сообщенія Харьковскаго Мат. Общества за 1909 годъ.

Соотвѣтственно этимъ типамъ рѣшеній дифференціальныя уравненія распредѣляются на 3 различныхъ класса.

Изслѣдованія Бріо и Букэ, развитыя Пуанкарэ Пикаромъ и другими [1]), относящіяся къ разложенію рѣшеній дифференціальныхъ уравненій вблизи особенныхъ точекъ могутъ во многихъ случаяхъ служить средствомъ для опредѣленія класса уравненій въ томъ случаѣ, когда послѣднее интерируется въ конечномъ видѣ. Если разложенія около двухъ различныхъ точекъ относятъ уравненіе къ двумъ различнымъ классамъ, то это можетъ служить доказательствомъ того, что общее рѣшеніе не выражается въ конечномъ видѣ съ помощью основныхъ трансцендентныхъ функцій. Не вдаваясь вглубь, мы покажемъ только примѣненіе двухъ слѣдующихъ результатовъ Бріо и Букэ, относящихся къ дифференціальному уравненію перваго порядка, представляемому въ формѣ:

$$x\frac{dy}{dx} = ay + bx + \ldots \qquad (5)$$

A) Когда a число положительное дробное или ирраціональное мнимое, то уравненіе (5) допускаетъ безконечное множество не голоморфныхъ рѣшеній, разлагающихся по цѣлымъ положительнымъ степенямъ x и Cx^a.

B) Если a положительное цѣлое число, то, полагая

$$y = -b\sum_{i=1}^{i=a-1} \frac{1}{a-i} x^i + x^{a-1} y_1 \qquad (6)$$

уравненіе (5) приводимъ къ уравненію:

$$x\frac{dy_1}{dx} = a_1 y_1 + b_1 x + \ldots \; (5_1),$$

гдѣ $a_1 = 1$.

---

[1]) *Briot et Bouquet.* Recherches sur les proprietés des fonctions définies par des équations différentielles. Journal de l'Ecole polytechnique. Ch. 36 (t. XXI) p. 168.

Poincaré. Sur les proprietés des fonctions définies par des équations différentielles. Journal de l'Ecole polytechnique. Ch. 45. 1878. p. 13.

Picard. Sur la forme des équatios différentielles du 1 ordre dans le voisinage de certains points critiques. Bulletin de la Société Mathématique. 1874.

— Traité d'Analyse t. III, ch. II p. 23.

Если въ такимъ образомъ преобразованномъ уравненіи (5_1),

$$b_1 \gtrless o,$$

то уравненіе (5) не допускаетъ голоморфныхъ рѣшеній и всѣ рѣшенія разлагаются по степенямъ x и lgx.

§ 2. Разсмотримъ разложенія y, отвѣчающія II и III классамъ уравненій.

Очевидно случай (A) не можетъ имѣть мѣсто для I класса. Но мы также покажемъ, что этотъ случай не можетъ имѣть мѣста и для III класса, ибо онъ предполагаетъ, что y, а затѣмъ и $\zeta = \varphi\,[x, u]$ функція съ конечнымъ числомъ значеній отъ x и $u = Cx^a$ при $x = o$, $u = o$.

Если при $x = o$ χ_i не обращается ни въ нуль, ни въ безконечность, то ζ будетъ имѣть для значенія $x = o$, конечное число значеній, $\varphi(x, u) = \varphi(x, Cx^a)$ при $C \gtrless O$ должно имѣть безконечное число значеній.

Если же при $x = o$ $\chi_i = o$ или $\chi_i = \infty$, то

$$\zeta + \alpha = Blg\,(Cx^a) + \text{голоморфная функція отъ } x$$

функція съ безконечнымъ числомъ значеній отъ (x, u), гдѣ x и u въ виду произвольности C могутъ получать какія угодно назависимыя значенія, такая функція не можетъ равняться $\varphi\ (x, u)$, имѣющей конечное число значеній.

Такимъ же образомъ убѣждаемся, что разложеніе y для II класса невозможно по степенямъ x и $lgx + C$, ибо тогда.

$$\vartheta = \varphi\ (x,\ lgx + C)$$

выражается функціей съ конечнымъ числомъ значеній отъ (x, u), $u = lgx + C$. Если при $x = o$ $\omega \gtrless \infty$, $\chi_i \lessgtr o$ или ∞, то ϑ имѣетъ, какъ функція отъ x, конечное число значеній, а φ безконечное, въ противномъ случаѣ

$$\alpha\vartheta = x^{a}\ (\text{однозн. ф. } x) = e^{au}\ (\text{однозн. ф. } x) = \varphi\,(x, u)$$

гдѣ лѣвая часть имѣетъ безконечное число значеній, а правая конечное для пары значеній (x, u).

Итакъ мы можемъ сказать:

Что, если a положительное ирраціональное или мнимое число, уравненіе (5) может принадлежать только ло II классу. Если a положительное цѣлое число и въ преобразованномъ уравненіи (5_1) при $a_1=1$ $b_1 \gtrless o$, то уравненіе принадлежитъ къ III классу.

Если теперь заданное уравненіе для критической точки $x=\alpha$ преобразуется въ уравненіе (5), удовлетворяющее условіямъ II случая (A), а для $x=\beta$ въ уравненіе, удовлетворяющее условіямъ случая (B), то это уравненіе не имѣетъ общаго рѣшенія, выражаемаго въ конечномъ видѣ.

§ 3. Возьмемъ для примѣра дифференціальное уравненіе:

$$(y+2x-3y^2)\,y'-(7y-4x-3x^2)=o \quad (7)$$

Полагая $y=ux$ имѣемъ

$$(u+2+\ldots.)\,(u'x+x)-(7u-4-3x)=o$$

$$(u^2-5u+4+3x\ldots)+(u+2)\,u'x=o$$

При $x=o$ $u^2_0-5\,u_0+4=o$, откуда $u_0=1$ или $u_0=4$.

Полагая $u_0=1$, $u=u_0+v$ имѣемъ

$$(-3v+3x+\ldots)+(v+3)\,v'x=o$$

откуда

$$v'x=v-3x+\ldots \quad (8)$$

т. е. получаемъ уравненіе (5) гдѣ $a=1$, $b=-3<o$

Если уравненіе (7) имѣетъ общее рѣшеніе, выражаемое въ конечномъ видѣ, то уравненіе относится къ III классу.

Полагая $y=y_1+1$, $x=x_1+1$, имѣемъ

$$(2x_1-5y_1-3y_1^2)\,y_1'-(14y_1-10x_1-4\,x_1^2+7y_1^2)=o, \quad (9)$$

которое, какъ уравненіе (7) легко преобразуется въ уравненіе

$$v'_1\,x_1=av_1+bx_1+\ldots. \quad (10)$$

гдѣ

$$a = \frac{43 + 4\sqrt{86}}{3}$$

число ирраціональное, вслѣдствіе чего уравненіе (9), а потому и (7) можетъ быть лишь II класса. Откуда слѣдуетъ, что уравненіе (7) не допускаетъ общаго рѣшенія, выражаемаго въ конечномъ видѣ.

Варшава
26 Декабря 1906 года.

Объ одномъ свойствѣ Абелевыхъ интеграловъ съ приводящейся системой періодовъ.

Д. Д. Мордухай-Болтовского.

Если Абелевъ [1]) интегралъ перваго рода

$$\int F(x, y)\, dx,$$

опредѣляемый нѣкоторой кривой

$$f(x, y) = 0 \quad (1)$$

приводится къ Абелевымъ интеграламъ нисшаго порядка, такъ-что

$$\int F(x, y)\, dx = \sum_{j=1}^{j=\pi} \int \phi_i(\xi^{(j)}, \eta^{(j)})\, d\xi^{(j)} \quad (2)$$

$$\phi(\xi, \eta) = 0 \quad (3)$$

гдѣ $\xi^{(j)}$, $\eta^{(j)}$ алгебраическія функціи отъ (x, y), а кривая (3) нисшаго, чѣмъ (1) рода, то должны имѣть или полное приведеніе періодовъ системы интеграловъ перваго рода:

$$\Omega_{\kappa j} = \sum_{t=1}^{t=2\pi} \alpha_{j.t}\, \omega_{\kappa.t} \quad (4)$$

---

1) *Д. Мордухай - Болтовского.* О приведеніи Абелевыхъ интеграловъ къ нисшимъ трансцендентнымъ. Часть III. Стр. 342.

$$i = 1 \,.\, 2 \ldots 2p \qquad \kappa = 1 \,.\, 2 \ldots \pi$$

$\alpha_{j\,.\,t}$ цѣлыя числа, при которомъ π интеграловъ приводятся къ суммамъ

$$\sum_{j=1}^{j=\pi} \int \phi_i\,(\xi^{(j)},\ \eta^{(j)})\ d\xi^{(j)}$$

или неполное приведеніе

$$\Omega\,\kappa j = \sum_{t=1}^{t=2\pi} \alpha_{j\,.\,t}\ \omega_{\kappa\,.\,t} \quad (5)$$

$$i = 1 \,.\, 2 \,..\, 2p \qquad \kappa = 1 \,.\, 2 \,..\, \mu$$

$$\sum_{t=1}^{t=2\pi} \alpha_{j\,.\,t}\ \omega_{l\,.\,t} = 0 \quad (6)$$

$$i = 1 \,.\, 2 \,..\, 2p \qquad l = \mu + 1,\ \mu + 2 \ldots \pi$$

отвѣчающее критическому случаю основной теоремы Кенигсбергера, при которой число приводящихся интеграловъ меньше π.

Обратно, приведеніе періодовъ влечетъ за собой приведеніе интеграловъ $\int F\,(x,\ y)\ dx$ къ интеграламъ нисшаго порядка только въ случаѣ $\pi = 1 \,.\, 2 \,.\, 3$.

Но можно показать, что приведеніе періодовъ всегда предполагаетъ нѣкоторыя характерныя алгебраическія свойства интеграловъ.

Одно изъ такихъ свойствъ, относится къ системѣ Абелевыхъ уравненій

$$\sum_{j=1}^{j=\sigma} \int F_i\,(x^{(j)},\ y^{(j)})\ dx^{(j)} = 0$$

$$i = 1 \,.\, 2 \ldots \sigma - 1$$

Эта система имѣетъ алгебраическія рѣшенія при $\sigma = p + 1$. Пикаръ показалъ, что въ случаѣ приведенія системы періодовъ Ω къ системѣ ω, эти уравненія имѣютъ алгебраическія рѣшенія при

$$\sigma = \pi + 1 < p + 1.$$

Мы покажемъ еще одно свойство, изъ котораго свойство Пикара, вытекаетъ какъ слѣдствіе.

Какъ извѣстно сумма M Абелевыхъ интеграловъ приводится съ суммѣ p интеграловъ такъ что

$$\sum_{i=1}^{i=u} \int F_i\,(x^{(j)},\ y^{(j)})\ dx^{(j)} = \sum_{i=1}^{i=\pi} \int F_i\,(x^{(j1)},\ y^{(j1)})\ dx^{(j1)}$$

гдѣ $(x^{(j1)},\ y^{(j1)})$ алгебраическія функціи отъ $(x^{(j)},\ y^{(j)})$.

I. Въ случаѣ полнаго приведенія системы періодовъ Ω интеграловъ $\int F_i\,(x,\ y)\ dx$ возможно приведеніе этой суммы къ $\pi < p$ интеграламъ т. е.

$$\sum_{j=1}^{j=u} \int F_i\,(x^{(j)},\ y^{(j)})\ dx^{(j)} = \sum_{i=1}^{i=\pi} \int F_i\,(x^{(j1)},\ y^{(j1)})\ dx^{(j1)} \quad (1)$$

II. Въ случаѣ неполнаго приведенія системы Ω возможно приведеніе къ суммѣ $\sigma < \pi$ интеграловъ.

Въ самомъ дѣлѣ условія, которымъ должны удовлетворять ω

$$\sum_{t=1}^{t=\pi} (\omega_{m\,.\,2t-1}\,\omega_{n\,.\,2t} - \omega_{m\,.\,2t}\,\omega_{n\,.\,2t-1}) = 0 \quad (8)$$

допускаютъ возможность[1]) построенія π независимыхъ 2π — періодическихъ функцій $\phi_1\,(u_1, u_2 \ldots u_\pi)$, $\phi_2\,(u \ldots u_2 \ldots u_\pi) \ldots \phi_\pi\,(u_1,\ u_2 \ldots u_\pi)$.

Ва основаніи изслѣдованій Вейерштрасса [2]) фукнція

$$\phi_j = \phi_j\,(u_{11} + u_{12},\ u_{21} + u_{22} \ldots u_{\pi 1} + u_{\pi 2})$$

разсматривая, какъ функція отъ отъ u_{i_1} будетъ имѣть тѣ же періоды, что функціи

---

[1]) *N. Poincaré et E. Picard.* Sur un théorème de Riemann etc. Comptes Rendus за 1883 г. t. 97 p. 1284. Подробный *Laurent* Traité d'Analyse t. IV стр. 487.

[2]) *Weierstrass.* Untersuchungen über 2-r-fach period. functionen. Math. Werke. B. 2 p. 125.

$$\phi_j^{(1)} = \phi_j\,(u_{11},\ u_{21}\ldots u_{\pi 1}) \quad j = 1\,.\,2\,.\,.\,\pi$$

и будетъ алгебраической функціей послѣднихъ.

Точно такимъ же образомъ ϕ_j, какъ функція u_{i2} будетъ алгебраической функціей:

$$\phi_j^{(2)} = \phi_j\ (u_{12},\ u_{22}\,.\,.\,u_{\pi 2}) \quad j = 1\ .\ 2\,.\,.\,.\,\pi$$

Такимъ образомъ ϕ_j алгебраическая функція $\phi_j^{(1)}$ и $\phi_j^{(2)}$.

Полагая вмѣсто u_{i1}, u_{i2}, u_i въ случаѣ полнаго приведенія Ω.

$$\sum_{i=1}^{i=\pi}\int F_i(x_1^{(j)},\ y_1^{(j)})\ dx_1^{(j)} = u_{i1} \quad (3_1)$$
$$i = 1\,.\,2\,.\,.\,\pi$$

$$\sum_{i=1}^{i=\pi}\int F_i(x_2^{(j)},\ y_2^{(j)})\ dx_2^{(j)} = u_{i2} \quad (3_2)$$
$$i = 1\,.\,2\,.\,.\,\pi$$

$$\sum_{i=1}^{i=\pi}\int F_i(x^{(j)},\ y^{(j)})\ dx^{(j)} = u_i \quad (3)$$
$$i = 1\,.\,2\,.\,.\,\pi$$

получимъ $\phi_j^{(1)}$, $\phi_j^{(2)}$, ϕ_j, какъ однозначныя функціи не имѣющія другихъ особенныхъ точекъ кромѣ полюсовъ, а потому раціональныя функціи $(x^{(j1)},\ y^{(j1)})$ $(x^{(j2)},\ y^{(j2)})$ $(x^{(j)},\ y^{(j)})$.

Поэтому мы имѣемъ систему π алгебраическихъ уравненій

$$a_i\,(x^{(1)}, y^{(1)}, x^{(2)}, y^{(2)}\,.\,.\,x^{(\pi)}, y^{(\pi)}) = A_i\,(x^{(11)}, y^{(11)}, x^{(12)}, y^{(12)}\,.\,.\,x^{(\pi 2)}, y^{(\pi 1)}) \quad (10)$$
$$i = 1\ .\ 2\,.\,.\,\pi$$

которыя вмѣстѣ съ уравненіями:

$$f\ (x^{(j)},\ y^{(j)}) = 0,\quad f\ (x^{(j1)},\ y^{(j1)}) = 0,\quad f\ (x^{(j2)},\ y^{(j2)}) = 0 \quad (11)$$
$$j = 1\ .\ 2\,.\,.\,.\,\pi$$

опредѣляютъ $(x^{(j)},\ y^{(j)})$ въ алгебраическихъ функціяхъ отъ $(x^{(j1)},\ y^{(j1)})$ и $(x^{(j2)},\ y^{(j2)})$.

Полагая

$$x_2^{(1)} = x^{\pi+1},\ x_2^{(j)} = const.\ .\ j = 2\,.\,3\,.\,.\,.\,\pi$$

получаемъ приведеніе $\overline{\pi+1}$ интеграловъ къ π, а отсюда постепенное приведеніе $\overline{M}$ инт. къ $\overline{M-1}$ инт., $\overline{M-1}$ инт. къ $\overline{M-2}$ инт. и т. д.

Въ случаѣ неполнаго приведенія системы Ω, полагаемъ

$$\sum_{i=1}^{i=\mu}\int F_i(x_1^{(j)},\ y_1^{(j)})\ dx_1^{(j)} = u_{i_1} \qquad (12_1)$$
$$i = 1\ .\ 2\ ..\ \mu$$
$$u_{i_1} = const \qquad i = \mu + 1 \ldots \pi$$

$$\sum_{i=1}^{i=\mu}\int F_i(x_2^{(j)},\ y_2^{(j)})\ dx_2^{(j)} = u_{i_2} \qquad (12_2)$$
$$i = 1\ .\ 2\ ..\ \mu$$
$$u_{i_2} = const \qquad i = \mu + 1 \ldots \pi$$

$$\sum_{i=1}^{i=\mu}\int F_i(x^{(j)},\ y^{(j)})\ dx^{(j)} = u_i \qquad (12)$$
$$i = 1\ .\ 2\ ..\ \mu$$
$$u_i = const \qquad i = \mu + 1 \ldots \pi$$

и получаемъ $\phi_j^{(1)}$, $\phi_j^{(2)}$, ϕ_j въ видѣ алгебраическихъ функцій отъ $(x^{(j1)}, y^{(j1)})$ $(x^{(j2)}, y^{(j2)})$ $(x^{(j)}, y^{(j)})$, откуда, какъ выше, заключаемъ о приводимости M интеграловъ къ $\mu < \pi$ интеграламъ.

Полагая въ приведеніяхъ

$$\sum_{j=1}^{j=\pi+1}\int \phi_i(x^{(j)},\ y^{(j)})\ dx^{(j)} = \sum_{i=1}^{j=\pi}\int \phi_i(x^{(j1)},\ y^{(j1)})\ dx^{(j1)}$$
$$i = 1\ .\ 2\ ..\ \pi$$

$$x^{(j1)} = const$$

получаемъ алгебраическія рѣшенія системы Абелевыхъ уравненій:

$$\sum_{j=1}^{j=\pi+1}\int \phi_j(x^{(j)},\ y^{(j)})\ dx^{(j)} = C_j \qquad (13)$$
$$i = 1\ .\ 2\ ..\ \pi$$

и такимъ же образомъ въ случаѣ неполнаго приведенія Ω получаемъ систему алгебраическихъ рѣшеній уравненій:

$$\sum_{j=1}^{j=\mu+1}\int \phi_j(x^{(j)},\ y^{(j)})\ dx^{(j)} = C_j \qquad (14)$$
$$i = 1\ .\ 2\ ..\ \mu$$

Укажемъ еще на одно слѣдствіе. Какъ извѣстно приведеніе интегралы перваго рода

$$\int F_1(x, y)\, dx$$

къ суммѣ

$$\sum_{i=1}^{i=\pi} \int \phi_1(\xi_i, \eta_i)\; d\xi_i$$

Абелевыхъ интеграловъ низшаго порядка въ общемъ случаѣ предполагаетъ приведеніе π интеграловъ перваго рода:

$$\int F_i(x, y)\; dx = \sum_{i=1}^{i=\pi} \int \phi_i(\xi^{(j)}, \eta^{(j)})\; d\xi^{(j)} \quad (2)$$

$$i = 1\,.\,2\,..\,\pi$$

которому отвѣчаетъ полное приведеніе періодовъ, но возможенъ критическій случай, когда

$$\int F_i(x, y)\; dx = \sum_{j=1}^{j=\pi} \int \phi_i(\xi^{(j)}, \eta^{(j)})\; d\xi^{(j)} \quad (15)$$

$$i = 1\,.\,2\,..\,\mu$$

$$\sum_{j=1}^{j=\pi} \int \phi_i(\xi^{(j)}, \eta^{(j)})\; d\xi^{(j)} = C_j \quad (16)$$

$$i = \mu + 1\,...\,\pi$$

отвѣтствующій неполному приведенію.

Въ этомъ послѣднемъ случаѣ или

1) Система Ω допускаетъ полное приведеніе къ системѣ порядка меньше π.

2) или система ω допускаетъ полное приведеніе къ системѣ ε порядка $\rho < \pi - \mu < \pi$.

Мы докажемъ, что второму случаю отвѣчаетъ приведеніе $\int F_i(x, y)\, dx$ къ суммѣ $\sigma < \pi$ интеграловъ $\int \phi_i\;(\xi^{(j)},\; \eta^{(j)})\; d\xi^{(j)}$.

Въ самомъ дѣлѣ согласно изслѣдованіямъ Пуанкарэ, если періоды $\int \phi_i(\xi, \eta)\, dx \quad i = \mu + 1 \,..\, \pi$ приводятся къ системѣ ε порядка $\rho < \pi$, то существуетъ μ интеграловъ $\int \phi_i\, (\xi, \eta)\, d\xi \quad i = 1\,.\,2\,..\,\mu$ съ системой періодовъ, приводящейся съ системы ζ порядка $\pi - \rho$. Сумма же π послѣднихъ всегда приводится къ суммѣ интеграловъ числомъ $\sigma \leqslant \pi - \rho$.

---

29 Ноября 1906 годъ
Варшава.

О спрямляемой суммѣ дугъ алгебраической кривой.

Д. Д. Мордухай-Болтовского.

§ 1. Извѣстная теорема Фаньяно, относящагося къ спрямляемой разности дугъ эллипса можетъ быть выведена на основаніи Абелевой теоремы, относящейся къ Абелевымъ интеграламъ второго рода.

Возьмемъ вмѣсто эллипса алгебраическую кривую

$$f(x, y) = 0 \qquad (1)$$

Предположимъ, что эта кривая не имѣетъ

1) ассимптоты совпадающей съ безконечно удаленной прямой,
2) ассимптоты параллельной изотропной прямой,
3) ассимптоты, параллельной оси $У$овъ
4) На безконечно-удаленной прямой не существуетъ кратныхъ точекъ кривой:

Тогда мы можемъ на основаніи теоремы Абеля весьма просто найти сумму дугъ кривой (1) спрямляемую, причемъ каждая дуга будетъ опредѣляться геометрически.

Для длины дуги кривой (1) имѣемъ формулу

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}{\frac{\partial f}{\partial x}}\, dx \quad (2).$$

Мы можемъ положить

$$\rho = \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\,\xi \qquad (3)$$

если положимъ

$$\eta = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \omega\,(x,\ y) \quad (4)$$

$$\xi = x \quad (5)$$

Исключая x, y изъ уравненій (1) (4) (5) получаемъ алгебраическое уравненіе

$$\varphi\,(\xi,\ \eta) = 0 \quad (6)$$

Пересѣчемъ кривую (6) прямыми

$$\eta = \lambda'\,\xi + \mu' \quad (7')$$

$$\eta = \lambda''\xi + \mu'' \quad (7'')$$

Обозначая точки перестенія (7′) съ (6) черезъ

$$\xi_i\,,$$

а (7″) съ (6) черезъ ξ''_i, будемъ имѣть выраженіе

$$S = \sum \int_{\xi'_i}^{\xi''_i} \eta\,d\,\xi$$

въ раціональной функціи отъ λ', μ', λ'', μ'' если $\int \eta\,d\,\xi$ интегралы имѣющія только посюса (т. е. интегралы второго рода общаго типа).

$$S = \sum s_i$$

въ s_i дуги. Такимъ образомъ въ этомъ слутаѣ мы имѣемъ спрямляемую сумму дугъ. Если λ', μ', λ'', μ'' даны, то S можно построить съ помощью циркуля и линейки.

§ 2. Легко убѣдиться, что интегралы

$$\int \eta\, d\,\xi$$

при указанныхъ выше условіяхъ будутъ дѣйствительно интегралы второго рода (т. е. безъ логариѳмическихъ точекъ).

Условія 1) и 3) дѣлаютъ возможными только слѣдующія разложенія y

$$y = y_{-1}\, x + y_0 + \frac{y_1}{x} + \frac{y_2}{x^2} + \ldots \quad (8)$$

$$y = y_0 + y_1\,(x - x_0) + y_2\,(x - x_0)^2 + \ldots \quad (9)$$

или общнѣе

$$y = \sum_{j=1}^{j=\kappa} y_{-\frac{j}{\kappa}}\, x^{\frac{j}{\kappa}} + \sum_{j=o}^{j=\infty} y_{\frac{j}{\kappa}}\, x^{-\frac{j}{\kappa}} \quad (10)$$

$$y = \sum_{j=o}^{j=\infty} y_{\frac{j}{\kappa}}\,(x - x_0)^{\frac{j}{\kappa}} \quad (11)$$

Въ самомъ дѣлѣ, если

$$y = y_{-\frac{g}{\kappa}}\, x^{\frac{g}{\kappa}} + \ldots\ldots \qquad g > \kappa$$

то

$$y' = \frac{g}{\kappa}\, y_{-\frac{g}{\kappa}}\, x^{\frac{g}{\kappa} - 1} + \ldots\ldots$$

при $x = \infty$ $\qquad y' = \infty$

Безконечно удаленная прямая $x = \infty$ будетъ касательной въ точкѣ (∞, ∞) параллельной оси Yовъ иначе говоря ассимптота будетъ совпадать съ безконечно удаленной прямой.

Далѣе если

$$y = y_{-\frac{g}{\kappa}}\,(x - x_0)^{-\frac{g}{\kappa}} + \ldots\ldots$$

то при $x = x_0$ $y = \infty$ откуда слѣдуетъ существованіе ассимптоты $\parallel$ оси Yовъ.

Разложеніе (9) даетъ

$$y' = y_1 + 2y_2 (x - x_0) + 3y_3 (x - x_0)^2 + \ldots$$

$$1 + y'^2 = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = b_0 + b_1 (x - x_0) + b_2 (x - x_0)^2 + \ldots \quad \text{если } a_0 \gtrless 0$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = (x - x_0)^{\frac{1}{2}} [c_0 + c_1 (x - x_0) + \ldots\ldots], \text{ если } a_0 = 0.$$

Въ общемъ случаѣ

$$J = \int \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

не можетъ давать разложенія съ $lg\,(x - x_0)$.

Разложеніе будетъ или типа

$$c_0 + c_1 (x - x_0) + c_2 (x - x_0)^2 + \ldots$$

или
$$d_0 + (x - x_0)^{\frac{3}{2}} [e_0 + e_1 (x - x_0) + \ldots\ldots]$$

Разложеніе болѣе общаго типа (11) даетъ

$$y' = y'_z\, z'_x = \frac{1}{\kappa} (x - x_0)^{\frac{1}{\kappa} - 1}\, y'_z$$

гдѣ
$$z = (x - x_0)^{\frac{1}{\kappa}}$$

$$y'_z = y_{\frac{1}{\kappa}} + 2y_{\frac{2}{\kappa}}\, z + 3y_{\frac{3}{\kappa}}\, z^2 + \ldots$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = (x - x_0)^{\frac{l}{\kappa}} [c_0 + c_1 (x - x_0) + \ldots\ldots] \quad l < 0$$

откуда опять убѣждаемся, что J не содержитъ $lg\,(x - x_0)$.

Разложеніе (8) даетъ

$$y' = y_{-1} - \frac{y_1}{x^2} - \frac{2y_2}{x^2} + \ldots$$

$$1 + y'^2 = 1 + y_{-1}^2 - \frac{2y\,y_{-1}}{x^2} + \ldots$$

Если $1 + y'^2_{-1} \gtrless 0$, то

$$\sqrt{1 + y'^2} = b_0 + \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \cdots$$

$$\int \sqrt{1 + y'^2}\, dx = a + b_0\, x - \frac{b_2}{x} + \cdots\cdots$$

т. е. не содержитъ lgx.

Условіе $y'^2_{-1} + 1 \gtrless 0$ т. е. что y'_{-1} отъ $\sqrt{-1}$ равносильно условію 2) не параллельности ассимптоты изотропной прямой

$$y = ix.$$

Условіе 4) дѣлаетъ невозможнымъ существованіе разложенія (10).

§ 3. Мы можемъ сказать, что сумма дугъ

$$S = \sum s_i,$$

гдѣ s_i дуги отъ

$$(x'_i,\ y'_i) \text{ до } (x''_i,\ y''_i)$$

спрямляема.

При этомъ (x'_i, y'_i) удовлетворяютъ уравненію кривой (1):

$$f(x, y) = 0 \quad (1)$$

и уравненію

$$\sqrt{1 + y'^2} = \lambda' x + \mu' \qquad (12')$$

а (x''_i, y''_i) ур. (1) и ур.:

$$\sqrt{1 + y'^2} = \lambda'' x + \mu'' \quad (11'')$$

Уравненія (12′) и (12″) можно переписать въ видѣ:

$$\frac{ds}{dx} = \lambda'(x - x'_0) \qquad x'_0 = -\frac{\mu'}{\lambda'}$$

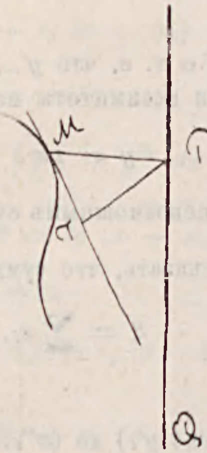
$$\frac{ds}{dx} = \lambda''(x - x''_0) \qquad x''_0 = -\frac{\mu''}{\lambda''}$$

или если положимъ $x - x'_0 = \delta'$ $\qquad x - x''_0 = \delta''$

$$\delta' \, cs\,(x', \tau') = \varepsilon' \quad (13') \qquad \varepsilon' = \frac{1}{\lambda}$$

$$\delta'' \, cs\,(x'', \tau'') = \varepsilon'' \quad (13) \qquad \varepsilon'' = \frac{1}{\lambda''}$$

гдѣ (x, τ) углы, составляемыя касательной въ точкѣ (x, y) съ осью Xовъ.



Пусть PQ прямая $x = x'_0 \parallel OY$ и потому не параллельная ассимптотѣ кривый.

MT касательная въ M.

Тогда MP (разстояніе M отъ PQ) $= \delta$

$$\delta \, cs\,(x, T) = \varepsilon = MT \text{ (проэкціи } MP \text{ на } MT)$$

Задавъ двѣ пары значеніе (x_0, ε)

$$(x'_0, \varepsilon') \qquad (x''_0, \varepsilon''_0)$$

и взявъ точки для которыхъ PQ въ разстояніи x'_0 отъ OY, а $MT = \varepsilon'$ и взявъ точки, для которыхъ PQ отъ OY есть x''_0, а $MT = \varepsilon''$, получаемъ сумму дугъ между парами этихъ точекъ, раціонально выражаемую черезъ x'_0, x''_0, ε', ε'', иначе говоря, спрямляемую.

Варшава.
Декабрь 1909 годъ.

И. Р. БРАЙЦЕВЪ.

НОВЫЙ МЕТОДЪ
ИЗЫСКАНІЯ ОСОБЫХЪ ТОЧЕКЪ ФУНКЦІИ,
опредѣляемой строкою Тэйлора.

ВАРШАВА.
ПЕЧ. ВЪ ТИП. АКЦ. ОБЩ. С. ОРГЕЛЬБРАНДА С-ЕЙ.
1910.

Въ виду равенства (30), имѣемъ:

$$e^{p_n(1-\varepsilon)} < |\sigma(p_n e^{\psi_{p_n} i})| < e^{p_n(1+\varepsilon)}, \quad n > N \tag{34}$$

гдѣ положительное число ε, въ зависимости отъ величины N, можетъ быть сколь-угодно малымъ.

Далѣе, въ виду результата (26), можемъ написать:

$$|\overline{K}_{p_n}| < e^{p_n(e^{-\delta_\varphi} - \eta)}, \quad n > N_1 \tag{35}$$

гдѣ η достаточно малое положительное число.

Въ силу неравенствъ (34) и (35), на основаніи соотношеній (33) находимъ:

$$e^{p_n(1-\varepsilon)} - e^{p_n(e^{-\delta_\varphi} - \eta)} < |\sigma_1(p_n e^{\psi_{p_n} i})| < e^{p_n(1+\varepsilon)} + e^{p_n(e^{-\delta_\varphi} - \eta)}, \quad n > N' \tag{36}$$

гдѣ N' есть наибольшее изъ чиселъ N и N_1.

Выберемъ теперь N' и, въ зависимости отъ него, ε и η такъ, чтобы

$$1 - \varepsilon > e^{-\delta_\varphi} - \eta. \tag{37}$$

Тогда неравенства (36) можно будетъ изобразить слѣдующимъ образомъ:

$$e^{p_n(1-\varepsilon)}[1 - e^{-p_n \varepsilon_\varphi}] < |\sigma_1(p_n e^{\psi_{p_n} i})| < e^{p_n(1+\varepsilon)}[1 + e^{-p_n \overline{\varepsilon}_\varphi}], \tag{38}$$

гдѣ

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varphi &= 1 - \varepsilon + \eta - e^{-\delta_\varphi} > 0; \\ \overline{\varepsilon}_\varphi &= 1 + \varepsilon + \eta - e^{-\delta_\varphi} > 0. \end{aligned} \tag{38'}$$

На основаніи соотношеній (38) получаемъ:

$$e^{1-\varepsilon} < \lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|\sigma_1(p_n e^{\psi_{p_n} i})|} < e^{1+\varepsilon}. \tag{39}$$

Такъ какъ ε можетъ быть сколь-угодно малымъ, то, въ виду результата (39), заключаемъ о справедливости равенства (31).

Допустимъ теперь, что выполняется равенство (31). Значитъ, имѣемъ:

$$e^{p_n(1-\zeta)} < \left| \sigma_1\left(p_n e^{\psi_{p_n} i}\right) \right| < e^{p_n(1+\zeta)}, \qquad (40)$$
$$n > N_2$$

гдѣ положительное число ζ, въ зависимости отъ величины N_2, можетъ быть сколь-угодно малымъ.

Принимая во вниманіе соотношеніе (32), можемъ написать:

$$\left|\sigma_1\left(p_n e^{\psi_{p_n} i}\right)\right| - \left|\overline{K}_{p_n}\right| < \sigma\left(p_n e^{\psi_{p_n} i}\right) < \left|\sigma_1\left(p_n e^{\psi_{p_n} i}\right)\right| + \left|\overline{K}_{p_n}\right|. \qquad (41)$$

Имѣя въ виду неравенства (35) и (40), на основаніи соотношеній (41) находимъ:

$$e^{p_n(1-\zeta)} - e^{p_n\left(e^{-\delta_\varphi}-\eta\right)} < \left|\sigma\left(p_n e^{\psi_{p_n} i}\right)\right| < e^{p_n(1+\zeta)} + e^{p_n\left(e^{-\delta_\varphi}-\eta\right)}, \qquad (42)$$
$$n > N''$$

гдѣ N'' означаетъ наибольшее изъ чиселъ N_1 и N_2.

Выберемъ N'' и, въ зависимости отъ него, ζ и η подъ условіемъ, чтобы

$$\eta_\varphi = 1-\zeta + \eta - e^{-\delta_\varphi} > 0;$$
$$\overline{\eta}_\varphi = 1+\zeta + \eta - e^{-\delta_\varphi} > 0. \qquad (42')$$

Тогда неравенства (42) перепишутся слѣдующимъ образомъ:

$$e^{p_n(1-\zeta)}\left(1-e^{-p_n\eta_\varphi}\right) < \left|\sigma\left(p_n e^{\psi_{p_n} i}\right)\right| < e^{p_n(1+\zeta)}\left(1+e^{-p_n\overline{\eta}_\varphi}\right). \qquad (43)$$
$$n > N''$$

Отсюда находимъ:

$$e^{1-\zeta} < \lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{\left|\sigma\left(p_n e^{\psi_{p_n} i}\right)\right|} < e^{1+\zeta}. \qquad (44)$$

Такъ какъ ζ можетъ быть сколь-угодно малымъ, то на основаніи результата (44) заключаемъ о справедливости равенства (30). Такимъ образомъ лемма установлена.

Лемма 2. Пусть будетъ:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|\sigma(p_n e^{\psi_{p_n} i})|} = e. \tag{45}$$

Въ такомъ случаѣ

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|\sigma_2(p_n e^{\psi_{p_n} i})|} = e. \tag{46}$$

Обратно: если справедливо равенство (46), *то сохраняетъ силу соотношеніе* (45).

Исключеніе изъ леммы, быть можетъ, составляетъ случай: $\delta_\varphi = 0$.

Доказательство.

Принимая во вниманіе выраженія (7) и (13), находимъ:

$$\sigma(p_n e^{\psi_{p_n} i}) = \sigma_2(p_n e^{\psi_{p_n} i}) + K_{p_n} + \overline{K}_{p_n}. \tag{47}$$

Допустимъ, что сохраняетъ силу равенство (45). Тогда прежде всего имѣемъ соотношенія (34). Далѣе, въ виду результата (12) можемъ написать:

$$|K_{p_n}| < e^{p_n(e^{-\delta_\varphi} + \varepsilon_1)}, \quad n > N_3 \tag{48}$$

гдѣ положительное число ε_1, въ зависимости отъ величины N_3, можетъ быть сколь-угодно малымъ.

На основаніи соотношенія (47) находимъ:

$$|\sigma(p_n e^{\psi_{p_n} i})| - |K_{p_n}| - |\overline{K}_{p_n}| < |\sigma_2(p_n e^{\psi_{p_n} i})| < |\sigma(p_n e^{\psi_{p_n} i})| + |K_{p_n}| + |\overline{K}_{p_n}|. \tag{49}$$

Въ силу неравенствъ (34), (35) и (48), на основаніи соотношеній (49) имѣемъ:

$$e^{p_n(1-\varepsilon)} - e^{p_n(e^{-\delta_\varphi}+\varepsilon_1)} - e^{p_n(e^{-\delta_\varphi}-\eta)} < |\sigma_2(p_n e^{\psi_{p_n} i})| <$$

$$< e^{p_n(1+\varepsilon)} + e^{p_n(e^{-\delta_\varphi}+\varepsilon_1)} + e^{p_n(e^{-\delta_\varphi}-\eta)}. \quad (50)$$

$$n > N''',$$

гдѣ N''' наибольшее изъ чиселъ N, N_1 и N_3.

Пусть будетъ $\delta_\varphi \neq 0$. Выберемъ N''', а также ε и ε_1 подъ условіемъ, чтобы

$$\zeta_\varphi = 1 - \varepsilon - \varepsilon_1 - e^{-\delta_\varphi} > 0;$$

$$\overline{\zeta}_\varphi = 1 + \varepsilon - \varepsilon_1 - e^{-\delta_\varphi} > 0. \quad (51)$$

Тогда, въ виду соотношеній (50), можемъ написать:

$$e^{p_n(1-\varepsilon)}[1-2e^{-p_n\zeta_\varphi}] < |\sigma_2(p_n e^{\psi_{p_n} i})| < e^{p_n(1+\varepsilon)}[1+2e^{-p_n\overline{\zeta}_\varphi}]. \quad (52)$$

Отсюда находимъ:

$$e^{1-\varepsilon} < \lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|\sigma_2(p_n e^{\psi_{p_n} i})|} < e^{1+\varepsilon}. \quad (53)$$

Такъ какъ ε можетъ быть какъ-угодно малымъ, то на основаніи результата (53) заключаемъ о справедливости равенства (46).

Пусть теперь справедливо равенство (46). Значитъ, имѣемъ:

$$e^{p_n(1-\varepsilon_2)} < |\sigma_2(p_n e^{\psi_{p_n} i})| < e^{p_n(1+\varepsilon_2)}, \quad (54)$$
$$n > N_4$$

гдѣ положительное число ε_2, въ зависимости отъ N_4, можетъ быть сколь-угодно малымъ.

На основаніи равенства (47) находимъ:

$$|\sigma_2(p_n e^{\psi_{p_n} i})| - |K_{p_n}| - |\overline{K}_{p_n}| < |\sigma(p_n e^{\psi_{p_n} i})| <$$

$$< |\sigma_2(p_n e^{\psi_{p_n} i})| + |K_{p_n}| + |\overline{K}_{p_n}|. \quad (55)$$

Въ виду соотношеній (35), (48) и (54), на основаніи неравенствъ (55) находимъ:

$$e^{p_n(1-\varepsilon_2)} - e^{p_n(e^{-\delta_\varphi}+\varepsilon_1)} - e^{p_n(e^{-\delta_\varphi}-\eta)} < |\sigma(p_n e^{\psi_{p_n} i})| <$$

$$< e^{p_n(1+\varepsilon_2)} + e^{p_n(e^{-\delta_\varphi}+\varepsilon_1)} + e^{p_n(e^{-\delta_\varphi}-\eta)}, \qquad (56)$$

$$n > M$$

гдѣ M наибольшее изъ чиселъ N_1, N_3 и N_4.

Выберемъ M. ε_1 и ε_2 подъ условіемъ, чтобы

$$\tau_\varphi = 1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_1 - e^{-\delta_\varphi} > 0;$$

$$\overline{\tau}_\varphi = 1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 - e^{-\delta_\varphi} > 0. \qquad (57)$$

Тогда на основаніи неравенствъ (56) можемъ написать:

$$e^{p_n(1-\varepsilon_2)}\left[1-2\,e^{-p_n\tau_\varphi}\right] < |\sigma(p_n e^{\psi_{p_n} i})| <$$

$$< e^{p_n(1+\varepsilon_2)}\left[1+2\,e^{-p_n\overline{\tau}_\varphi}\right]. \qquad (58)$$

$$n > M$$

Отсюда находимъ:

$$e^{1-\varepsilon_2} < \lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|\sigma(p_n e^{\psi_{p_n} i})|} < e^{1+\varepsilon_2}. \qquad (59)$$

Такъ какъ ε_2 можетъ быть сколь-угодно малымъ, то, въ силу результата (59), заключаемъ о справедливости равенства (45).

Такимъ образомъ лемма установлена.

Замѣчаніе. Изъ леммы 2 мы устранили случай: $\delta_\varphi = 0$. Равенство $\delta_\varphi = \frac{\cos(\varphi-\vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|} = 0$ предполагаетъ, что или $\varphi - \vartheta_\kappa = \pm\frac{\pi}{2}$, или же $|\alpha_\kappa| = \infty$ и, слѣдовательно, $\alpha_\kappa = \infty$. Такъ какъ точка $M(\rho, \varphi)$, гдѣ

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{p=\infty} \frac{1}{p}\, lg \left| \sum_0^\infty \frac{a_s p^s e^{(s\varphi-\beta_p)i}}{s!} \right|, \qquad (60)$$

принадлежитъ къ той же сторонѣ полигона K, какъ и особая точка α_κ строки (1) главы 3, то ясно, что, если $\delta_\varphi = 0$, то φ представляетъ амплитуду безконечно-удаленной точки границы многоугольника K.

Трактуемый случай характеризуется тѣмъ, что, въ силу результата (74) главы 3,

$$r_\varphi = 1, \tag{61}$$

т. е., радіусъ круга сходимости ряда (3) главы 3 равенъ 1. Значитъ, этотъ случай можно заранѣе предусмотрѣть, и потому мы будемъ его исключать въ своихъ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ при пользованіи леммой 2.

§ 3. Замѣна ряда (132) главы 3 при вычисленіи q болѣе простымъ рядомъ чиселъ.

Обозначимъ черезъ $\chi\,(p\,e^{\psi_p i})$ слѣдующее выраженіе:

$$\chi\,(p\,e^{\psi_p i}) = e^{-p\psi_p i}\;p^{-p}\;p!\;\sigma\,(pe^{\psi_p i}). \tag{62}$$

Тогда теорему 5 § 3 главы 2 формулируемъ такъ:

Пусть будетъ:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{\left|\chi\,(p_n\,e^{\psi_{p_n} i})\right|} = 1. \tag{63}$$

Обозначимъ черезъ ψ_0 и ψ_1 соотвѣтственно нижній и верхній предѣлы ψ_{p_n} при $n = \infty$. Въ такомъ случаѣ $e^{\psi_0 i}$ и $e^{\psi_1 i}$ служатъ особыми точками ряда (3) или предѣльными положеніями его особыхъ точекъ.

Въ виду двухъ предыдущихъ леммъ, эту теорему можно выразить въ слѣдующей формѣ:

Теорема 1. Обозначимъ черезъ $\chi_1\,(p\,e^{\psi_p i})$ выраженіе:

$$\chi_1\,(p\,e^{\psi_p i}) = e^{-p\,\psi_p i}\;p^{-p}\;p!\;\sigma_1\,(p\,e^{\psi_p i}). \tag{64}$$

Пусть будетъ:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{\left|\chi_1\,(p_n\,e^{\psi_{p_n} i})\right|} = 1. \tag{65}$$

Назовемъ ψ_0 и ψ_1 *соотвѣтственно нижній и верхній предѣлы* ψ_{p_n} *при* $n = \infty$. *Въ такомъ случаѣ* $e^{\psi_0 i}$ *и* $e^{\psi_1 i}$ *служатъ особыми точками ряда (3) или предѣльными положеніями его особыхъ точекъ.*

Теорема 2. Введемъ обозначеніе:

$$\chi_2\,(p\, e^{\psi_p i}) = e^{-p\psi_p i}\, p^{-p}\, p!\, \sigma_2\,(p\, e^{\psi_p i}). \tag{66}$$

Пусть будетъ:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{\left|\chi_2\,(p_n\, e^{\psi_{p_n} i})\right|} = 1. \tag{67}$$

Обозначимъ черезъ ψ_0 *и* ψ_1 *соотвѣтственно нижній и верхній предѣлы* ψ_{p_n} *при* $n = \infty$. *Въ такомъ случаѣ* $e^{\psi_0 i}$ *и* $e^{\psi_1 i}$ *служатъ особыми точками ряда (3) или предѣльными положеніями его особыхъ точекъ.*

Принимая во вниманіе теоремы 1 и 2, символами $\chi_1\,(p\, e^{\psi_p i})$ и $\chi_2\,(p\, e^{\psi_p i})$ можно пользоваться для установленія теоремы § 4 главы 2 въ приложеніи къ строкѣ (3) настоящей главы, и эта теорема выразится такъ:

Пусть будетъ:

$$\delta_n = \sum_{\sigma_p}^{3p} \frac{\rho_s\, n^s \cos\,(s\varphi + \varphi_s - \beta_p)}{s\,!}, \tag{68}$$

гдѣ $\sigma_p = 0$ *или* $= \Delta_p$; *при чемъ* β_p *выбирается подъ условіемъ, что*

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{\left|\delta_{p_n}\right|} = \lim_{p=\infty} \sqrt[p]{\left|\vartheta\,(p\, e^{\varphi_p i})\right|}. \tag{69}$$

Обозначимъ черезъ q_1 *число перемѣнъ знака въ рядѣ:*

$$\delta_{p-\nu},\ \delta_{p-\nu+1},\ \dots,\ \delta_{p+\nu} \tag{70}$$

при $p = p_n$. *Назовемъ* α *нижній предѣлъ отношенія* $\frac{q}{2\nu}$ *при* $n = \infty$. *Въ такомъ случаѣ рядъ (3) имѣетъ особую точку на дугѣ окружности* $|z| = 1$ *своего круга сходимости, содержащейся между* $+\alpha\pi$ *и* $-\alpha\pi$.

Предположимъ теперь, что φ не совпадаетъ съ амплитудой какой-либо вершины полигона K. Тогда, какъ извѣстно изъ теоремы 1 § 2 главы 3, на окружности $|z| = 1$ круга сходимости ряда (3) настоящей главы лежитъ только одна его особая точка состава:

$$z = e^{i\,\theta_\kappa}, \tag{71}$$

гдѣ

$$\theta_\kappa = -\frac{\sin\,(\varphi - \vartheta_\kappa)}{|\,\alpha_\kappa\,|}. \tag{72}$$

Теорема 2 § 5 главы 2 при этомъ выразится такъ:

Теорема 3. Назовемъ q' число перемѣнъ знака въ рядѣ:

$$s_{p-\nu},\ s_{p-\nu+1},\ \ldots,\ s_{p+\nu} \tag{73}$$

при $p = p_n$, гдѣ

$$s_n = \sum_{\sigma_p}^{3p} \frac{\rho_s\, n^s \cos\,(n\vartheta + s\varphi + \varphi_s - \beta_p)}{s\,!}; \tag{74}$$

при чемъ β_p выбирается такъ, чтобы

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|\,s_{p_n}\,|} = \lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\,\vartheta\,(p\, e^{\varphi_p i})\,|}. \tag{75}$$

Обозначимъ черезъ $\alpha\,(\vartheta)$ нижній предѣлъ отношенія $\frac{q'}{2\nu}$ при $n = \infty$. Тогда имѣемъ:

$$\vartheta - \theta_\kappa = \pi\alpha\,(\vartheta), \tag{76}$$

если удовлетворяется условіе (96) главы 3, и

$$\theta_\kappa - \vartheta = \pi\alpha\,(\vartheta), \tag{77}$$

если выполняется условіе (98) той же главы.

Соотношенія (76) и (77) могутъ быть соотвѣтственно переписаны такъ:

$$\frac{\sin\,(\varphi - \vartheta_\kappa)}{|\,\alpha_\kappa\,|} = \pi\alpha\,(\vartheta) - \vartheta \tag{78}$$

и

$$\frac{\sin\,(\varphi - \vartheta_\kappa)}{|\,\alpha_\kappa\,|} = -\pi\alpha\,(\vartheta) - \vartheta. \tag{79}$$

Равенство (78) очевидно сохраняетъ силу, если ϑ содержится въ границахъ (86) главы 3, и соотношеніе (79) имѣетъ мѣсто, если ϑ заключено въ промежуткѣ (88) той же главы

Сопоставляя между собою формулы (85) и (87) главы 3 соотвѣтственно съ формулами (78) и (79) настоящей главы, приходимъ къ выводу:

$$\alpha\ (\vartheta) = \overline{\alpha}\ (\vartheta) \tag{80}$$

для всѣхъ значеній φ, отличныхъ пока отъ амплитудъ вершинъ полигона K.

Мы сейчасъ обнаружимъ, что равенство (80) сохраняетъ силу и при $\varphi = \varphi_0$, гдѣ φ_0 амплитуда какой-либо вершины полигона K.

Итакъ, пусть $\varphi = \varphi_0$ представляетъ амплитуду какой-либо вершины полигона K. Тогда, какъ извѣстно изъ теоремы 1 § 2 главы 3, строка 3 имѣетъ двѣ особыя точки на окружности $|z| = 1$ своего круга сходимости; при чемъ амплитуды этихъ особыхъ точекъ суть:

$$-\delta_1 = -\frac{sin\ (\varphi_0 - \vartheta_\kappa)}{|\ \alpha_\kappa\ |} \tag{81}$$

и

$$-\delta_2 = -\frac{sin\ (\varphi_0 - \vartheta_p)}{|\ \alpha_p\ |}. \tag{82}$$

Допустимъ, что $\vartheta_p > \vartheta_\kappa$. Тогда, какъ и при доказательствѣ теоремы 2 § 2 главы 3, имѣемъ:

$$-\delta_1 < 0;\ -\delta_2 > 0. \tag{83}$$

Пусть будетъ далѣе:

$$\vartheta_1 = -\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}. \tag{84}$$

Тогда слѣдствіе теоремы 3 § 5 главы 2 выразится такъ:

$$\vartheta_1 + \delta_1 = \pi\, \alpha\ (\vartheta_1)$$
$$\varphi = \varphi_0$$

и

$$-\delta_2 - \vartheta_1 = \pi\, \overline{\alpha}\ (\vartheta_1),$$
$$\varphi = \varphi_0$$

или:

$$\frac{\sin(\varphi_0 - \vartheta_\kappa)}{\alpha_\kappa} \Big|_{\varphi = \varphi_0} = \pi\alpha(\vartheta_1) - \vartheta_1 \tag{85}$$

и

$$\frac{\sin(\varphi_0 - \vartheta_p)}{|\alpha_p|} \Big|_{\varphi = \varphi_0} = -\pi\alpha(\vartheta_1) - \vartheta_1. \tag{86}$$

Положимъ теперь, что $\varphi = \varphi_0 - \varepsilon$, гдѣ ε произвольно-малое положительное число.

Тогда соотношеніе (78) можно представить такъ:

$$\frac{\sin(\varphi_0 - \varepsilon - \vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|} = \pi\alpha(\vartheta_1) - \vartheta_1 \Big|_{\varphi=\varphi_0-\varepsilon} = \pi\alpha(\vartheta) - \vartheta \Big|_{\varphi=\varphi_0-\varepsilon} = C(\varphi_0 - \varepsilon). \tag{87}$$

Отсюда находимъ:

$$\frac{\sin(\varphi_0 - \vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|} = \lim_{\varepsilon = 0} C(\varphi_0 - \varepsilon). \tag{88}$$

Въ силу формулы (85) утверждаемъ, что

$$\lim_{\varepsilon = 0} C(\varphi_0 - \varepsilon) = C(\varphi_0) = \pi\alpha(\vartheta) - \vartheta \Big|_{\varphi = \varphi_0}. \tag{89}$$

Итакъ:

$$\frac{\sin(\varphi_0 - \vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|} = \pi\bar{\alpha}(\vartheta) - \vartheta \Big|_{\varphi = \varphi_0}. \tag{90}$$

Сопоставляя предыдущую формулу съ соотношеніемъ (113) главы 3, приходимъ къ заключенію, что

$$\alpha(\vartheta)\Big|_{\varphi=\varphi_0} = \bar{\alpha}(\vartheta)\Big|_{\varphi=\varphi_0}. \tag{91}$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что при всѣхъ значеніяхъ φ, содержащихся въ границахъ $0 < \varphi < 2\pi$, справедливо равенство (80).

Значитъ, при изысканіи $\alpha(\vartheta)$, вмѣсто числа q перемѣнъ знака ряда (82) главы 3, можно брать число q' перемѣнъ знака въ рядѣ (73). Въ частности, при изысканіи числа q перемѣнъ знака въ рядѣ (132) главы 3 этотъ послѣдній можно замѣнить слѣдующимъ рядомъ:

$$T_{p-\nu},\ T_{p-\nu+1},\ \ldots,\ T_{p+\nu}, \tag{92}$$

гдѣ

$$T_n = \sum_{\sigma_p}^{3p} \frac{\rho_s\, n^s \cos\,(s\varphi + \varphi_s - \beta_p)}{s\,!}. \tag{93}$$

Выраженіе (93) при опредѣленномъ p представляетъ относительно n полиномъ степени $3p$. Очевидно, что, не измѣняя числа перемѣнъ знака въ рядѣ чиселъ (92), каждое изъ этихъ послѣднихъ можемъ раздѣлить на n^{Δ_p}. Такъ что число q, отъ знанія котораго зависитъ знаніе $\alpha\,(o)$, представляетъ число перемѣнъ знака полинома:

$$\overline{T}_n = \sum_{o}^{\mu_p} \frac{\rho_{s+\sigma_p}\, n^s \cos\,[\,(s+\sigma_p)\,\varphi + \varphi_{s+\sigma_p} - \beta_p\,]}{(\,s+\sigma_p\,)\,!} \tag{94}$$

при $n = p - \nu,\ p - \nu + 1,\ \ldots,\ p + \nu$; при чемъ

$$\mu_p = 3\,p - \sigma_p. \tag{94'}$$

Для опредѣленія числа q перемѣнъ знака въ рядѣ (92) существенно важно знаніе числа корней полинома (94) при значеніяхъ n, содержащихся въ границахъ:

$$p - \nu \leqslant n \leqslant p + \nu; \tag{95}$$

при чемъ, если τ означаетъ число такихъ корней, то

$$q \leqslant \tau. \tag{96}$$

Для поясненія предыдущаго приведемъ два примѣра.

Примѣръ 1. Разсмотримъ строку Тэйлора:

$$f\ (z) = \sum_{0}^{\infty} a_n\ z^{c_n}, \tag{97}$$

гдѣ c_n цѣлое положительное число, безгранично-возрастающее одновременно съ n такъ, что $c_{n+1} - c_n$ также неопредѣленно растетъ.

Мы предполагаемъ, что

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[c_n]{a_n} = 1. \tag{98}$$

Преемственными трудами Weierstrass'а, Fredholm'а, Hadamard'а, Borel'я и Fabry, какъ извѣстно [1]), было установлено, что строка (97) имѣетъ окружность $|z| = 1$ особой линіей.

Мы сейчасъ увидимъ, какъ просто примѣняется тутъ наша метода.

Въ разсматриваемомъ случаѣ функція (93) имѣетъ составъ:

$$T_n = \sum_{q'}^{q''} \frac{\rho_s\, n^{c_s} \cos(\varphi_s + c_s\,\varphi - \beta_p)}{c_s\,!}, \tag{99}$$

при чемъ q' представляетъ наибольшее цѣлое положительное число s, удовлетворяющее условію:

$$\Delta_p \geqslant c_s, \tag{100}$$

а q'' наименьшее цѣлое положительное число s, удовлетворяющее соотношенію:

$$3\, c_p \leqslant c_s. \tag{101}$$

Замѣтимъ, что

$$\Delta_p = \mathrm{E}\left(\frac{c_p}{\psi\,(c_p)}\right).^{2)} \tag{102}$$

Назовемъ σ число положительныхъ корней полинома (99). Примѣнимъ къ нему извѣстную теорему Декарта, по которой число положительныхъ корней алгебраическаго полинома не превосходитъ числа перемѣнъ знака между послѣдовательными членами этого многочлена. Но это послѣднее число (корни-нули не считаются) не превосходитъ въ данномъ случаѣ наличнаго числа σ_1 членовъ выраженія (99); при чемъ

$$\sigma_1 = q'' - q' + 1. \tag{103}$$

Значитъ,

$$\sigma \leqslant q'' - q' + 1 \tag{104}$$

и

$$q \leqslant q'' - q' + 1. \tag{105}$$

---

[1]) См., напр., *Hadamard:* La série de Taylor et son prolongement analytique, p. 31—37.

[2]) См. (82) главы I.

Въ виду того, что въ разсматриваемомъ случаѣ

$$\nu = \lambda\ c_p, \tag{106}$$

находимъ:

$$\alpha = l_{im} \frac{q}{2\nu} = 0. \tag{107}$$

$$p = \infty$$

Формулы (135) главы 3 обратятся тогда въ слѣдующія:

$$|\alpha_\kappa| = \frac{1}{l_\varphi};$$

$$\cos(\varphi - \vartheta_\kappa) = 1; \tag{108}$$

$$|\varphi - \vartheta_\kappa| \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

На основаніи двухъ послѣднихъ изъ уравненій (108) имѣемъ:

$$\vartheta_\kappa = \varphi. \tag{109}$$

Значитъ,

$$z = \frac{e^{\varphi i}}{l_\varphi}, \tag{110}$$

при любомъ значеніи φ, представляетъ особую точку строки (97).

Такъ какъ согласно соотношеніямъ (22) главы 1

$$l_\varphi = \frac{1}{\rho},$$

то предыдущее выраженіе можетъ быть переписано такъ:

$$z = \rho\, e^{\varphi i}. \tag{111}$$

Здѣсь ρ означаетъ разстояніе точки $z = 0$ до той точки границы полигона K, амплитуда которой есть φ.

Точки (111) расположены на нѣкоторой непрерывной кривой l. Легко обнаружить, что она представляетъ окружность $|z| = 1$. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $y = f(x)$ будетъ уравненіе кривой l въ прямоугольныхъ Декартовыхъ координатахъ x и y. Такъ какъ кривая $y = f(x)$ вмѣстѣ съ тѣмъ служитъ границей полигона K, то она является огибающей семейства прямыхъ:

$$Yy + Xx = x^2 + y^2 = \rho^2, \tag{112}$$

гдѣ x служитъ параметромъ.

Замѣтимъ, что уравненіе (112) выражаетъ при опредѣленномъ x прямую, проходящую черезъ точку M (ρ, φ) и перпендикулярную къ радіусъ-вектору $\overline{OM}$.

Огибающая семейства прямыхъ (112) опредѣляется двумя уравненіями:

$$\begin{aligned} Yy + Xx &= x^2 + y^2; \\ Yy' + X &= 2\,(x + yy'). \end{aligned} \tag{113}$$

Такъ какъ уравненія (113) выражаютъ не что иное, какъ кривую $y = f\,(x)$, то они должны удовлетворяться, если положить: $X = x$ и $Y = y$. Первое изъ уравненій (113) при этомъ обращается въ тождество, а второе послѣ надлежащихъ упрощеній въ слѣдующее:

$$x + yy' = 0. \tag{114}$$

Интегрируя это уравненіе, получимъ:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 = c, \tag{115}$$

гдѣ c постоянное.

Обнаружимъ теперь, что $c = 1$. Въ силу условія (98) $|z| = 1$ есть окружность круга сходимости ряда (97). А если такъ, то по крайней мѣрѣ для одного значенія φ: $\varphi = \varphi_0$ первое изъ уравненій (108) обращается въ

$$\rho_0 = \frac{1}{l_{\varphi_0}} = 1. \tag{116}$$

Полагая поэтому въ соотношеніи (115) $\varphi = \varphi_0$, будемъ имѣть:

$$\rho_0{}^2 = c = 1. \tag{117}$$

Итакъ, $c = 1$. Въ такомъ случаѣ уравненіе (115) кривой $y = f\,(x)$ обращается въ слѣдующее:

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{118}$$

и представляетъ окружность радіуса 1 съ центромъ въ началѣ координатъ.

Мы такимъ образомъ приходимъ къ извѣстному результату, что окружность $|z| = 1$ является особой линіей функціи (97).

Примѣръ 2. Разсмотримъ теперь слѣдующую строку Тэйлора:

$$\sum_{0}^{\infty} \rho_n \, e^{i\,\alpha n \sin (lg n)^{\varepsilon}} z^n, \tag{119}$$

гдѣ ρ_n положительное число, удовлетворяющее условію:

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{\rho_n} = 1, \tag{120}$$

α какое-либо опредѣленное число, а ε положительное число, меньшее единицы.

Составимъ далѣе выраженіе:

$$L_n = \sum_{\Delta_p}^{3p} \frac{\rho_s \, n^s \cos\,[s\varphi + s\,(lg s)^{\varepsilon} - \beta_p]}{s\,!}. \tag{121}$$

Пусть p будетъ состава:

$$p = E\,[\, e^{\left(2\pi r - arc \sin \frac{\varphi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}} \,] + 1, \tag{122}$$

гдѣ r цѣлое положительное число, которое можетъ расти какъ-угодно,

$$-\frac{\pi}{2} < arc \sin \frac{\varphi}{\alpha} < +\frac{\pi}{2}, \tag{123}$$

а

$$|\,\varphi\,| < |\,\alpha\,|. \tag{124}$$

Очевидно, что p можно изобразить и такъ:

$$p = e^{\left(2\pi r - arc \sin \frac{\varphi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}} + \delta_r, \tag{125}$$

гдѣ $0 < \delta_r < 1$.

Посмотримъ теперь, каково наибольшее возможное число перемѣнъ знака выраженія (121) при $n = p - \nu$, $p - \nu + 1$, $\ldots$, $p + \nu$, гдѣ ν имѣетъ составъ, указанный на стр. 124.

Для этой цѣли разобьемъ сумму (121) на двѣ слѣдующія:

$$L_n = \sum_{\Delta_p}^{p-\mu-1} \frac{\rho_s \, n^s \cos\,(s\varphi + s \sin (lg s)^{\varepsilon} - \beta_p)}{s\,!} + M_n, \tag{126}$$

гдѣ

$$M_n = \sum_{p-\mu}^{3p} \frac{\rho_s\, n^s \cos\left[s\varphi + s \sin (lgs)^{\varepsilon} - \beta_p\right]}{s\,!}; \tag{127}$$

при чемъ

$$\mu = E\left[(1-\eta)\,p\right], \tag{128}$$

гдѣ η положительное число, которое можетъ быть сдѣлано сколь-угодно малымъ.

Обозначимъ черезъ τ число перемѣнъ знака между послѣдовательными членами суммы (127). Въ такомъ случаѣ q, число перемѣнъ знака полинома (121) при $n = p - \nu$, $p - \nu + 1$, ..., $p + \nu$, удовлетворяетъ условію:

$$q < p - \mu + \tau. \tag{129}$$

Обнаружимъ, что

$$\lim_{p=\infty} \frac{\tau}{2\nu} = 0. \tag{130}$$

Для этого раздѣлимъ всѣ члены суммы (127) на нѣкоторое число σ_p группъ, содержащихъ послѣдовательно l_1, l_2, l_3, ..., l_{σ_p} членовъ. Мы предполагаемъ, что, съ безграничнымъ возрастаніемъ p, числа σ_p и l_κ $(\kappa = 1, 2, 3, \ldots, \sigma_p)$ растутъ до безконечности; при чемъ предполагаемъ, что

$$\lim_{p=\infty} \frac{l_\kappa}{(lgp)^{1-\varepsilon}} = 0 \;\; (\kappa = 1, 2, 3, \ldots, \sigma_p). \tag{131}$$

Остановимся на разсмотрѣніи членовъ какой-либо изъ этихъ группъ, напр., l_j. Пусть

$$(\delta p + s)\,\varphi + \alpha\,(\delta p + s) \sin\left[lg\,(\delta p + s)\right]^{\varepsilon} - \beta_p \tag{132}$$

и

$$(\delta p + \sigma)\,\varphi + \alpha\,(\delta p + \sigma) \sin\left[lg\,(\delta p + \sigma)\right]^{\varepsilon} - \beta_p \tag{133}$$

будутъ аргументы косинусовъ, входящихъ множителями въ два какіе-либо члена группы l_j.

Здѣсь $1 \leqslant \delta \leqslant 3$, $s > \sigma$ и

$$\lim_{p=\infty} \frac{s}{(lgp)^{1-\varepsilon}} = \lim_{p=\infty} \frac{\sigma}{(lgp)^{1-\varepsilon}} = 0. \tag{134}$$

Обозначимъ черезъ K разность выраженій (132) и (133), а именно:

$$K = (s-\sigma)\,\varphi + \alpha\,(\delta p + s)\,\sin\,[lg\,(\delta p + s)]^{\varepsilon}$$
$$- \alpha\,(\delta p + \sigma)\,\sin\,[lg\,(\delta p + \sigma)]^{\varepsilon}. \tag{135}$$

Обнаружимъ, что K для значеній p, превосходящихъ нѣкоторое положительное число P, положительно и стремится къ нулю по мѣрѣ того, какъ p стремится къ безконечности.

Имѣемъ прежде всего:

$$[lg\,(\delta p + s)]^{\varepsilon} = \left[lgp + lg\,(\delta + \frac{s}{p})\right]^{\varepsilon} =$$

$$= (lgp)^{\varepsilon}\left[1 + \frac{lg\,(\delta + \frac{s}{p})}{lgp}\right]^{\varepsilon} = \tag{136}$$

$$= (lgp)^{\varepsilon} + \frac{\varepsilon\,lg\,(\delta + \frac{s}{p})}{(lgp)^{1-\varepsilon}} + \ldots = (lgp)^{\varepsilon} + \frac{\mu_p}{p},$$

гдѣ

$$\lim_{p=\infty} \mu_p = 0.$$

Такимъ же образомъ находимъ:

$$[lg\,(\delta p + \sigma)]^{\varepsilon} = (lgp)^{\varepsilon} + \frac{\varepsilon\,lg\,(\delta + \frac{\sigma}{p})}{(lgp)^{1-\varepsilon}} + \ldots$$
$$= (lgp)^{\varepsilon} + \frac{\nu_p}{p}, \tag{137}$$

гдѣ

$$\lim_{p=\infty} \nu_p = 0.$$

Такъ какъ $s > \sigma$, то при $p > P$, гдѣ P нѣкоторое положительное число, выполняется условіе $\mu_p > \nu_p$.

Въ виду результатовъ (136) и (137), находимъ:

$$\sin [\lg (\delta p + s)]^s = \sin \left[(\lg p)^s + \frac{\mu_p}{p} \right] = \tag{138}$$

$$= \sin (\lg p)^s \left(1 - \frac{\mu_p{}^2}{1.\ 2\ p^2} + \ldots\right) + \cos (\lg p)^s \frac{\mu_p}{p} \left(1 - \frac{\mu_p{}^2}{1.\ 2.\ 3\ p^2} + \ldots\right)$$

и

$$\sin [\lg (\delta p + \sigma)]^s = \sin (\lg p)^s \left(1 - \frac{\nu_p{}^2}{1.\ 2\ p^2} + \ldots\right) + \tag{139}$$

$$+ \cos (\lg p)^s \frac{\nu_p}{p} \left(1 - \frac{\nu_p{}^2}{1.\ 2.\ 3\ p^2} + \ldots\right).$$

А потому выраженіе (135) представится такъ:

$$K = (s - \sigma)\ \varphi + \alpha\ (s - \sigma) \sin (\lg p)^s + \alpha \tau_p, \tag{140}$$

гдѣ

$$\tau_p = \sin (\lg p)^s \left[\frac{-\mu_p{}^2 \left(\delta + \frac{s}{p}\right)}{1.\ 2\ p} + \frac{\nu_p{}^2 \left(\delta + \frac{\sigma}{p}\right)}{1.\ 2\ p} - \ldots \right] + \tag{141}$$

$$+ \cos (\lg p)^s \left[\mu_p \left(\delta + \frac{s}{p}\right) - \nu_p \left(\delta + \frac{\sigma}{p}\right) + \ldots\ldots \right].$$

Замѣтимъ, что въ послѣднемъ выраженіи пропущены члены, представляющіе при безграничномъ возрастаніи p безконечно-малыя высшихъ порядковъ, чѣмъ члены выписанные.

Внесемъ теперь въ выраженія (140) и (141) на мѣсто p его выраженіе (125). Такъ какъ

$$(lgp)^{\varepsilon} = \left[\left(2\pi r - arc\sin\frac{\varphi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} + lg\left|1 + \delta_r e^{-\left(2\pi r - arc\sin\frac{\varphi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}}\right|\right]^{\varepsilon}$$

(142)

$$= \left(2\pi r - arc\sin\frac{\varphi}{\alpha}\right)\left[1 + \frac{\varepsilon\delta_r\, e^{-\left(2\pi r - arc\sin\frac{\varphi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}}}{\left(2\pi r - arc\sin\frac{\varphi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}} + \ldots\right] =$$

$$= 2\pi r - arc\sin\frac{\varphi}{\alpha} + \frac{\gamma_r}{p},$$

гдѣ

$$\gamma_r = \frac{Q_r}{\left(2\pi r - arc\sin\frac{\varphi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}-1}}, — \qquad (143)$$

при чемъ

$$\lim_{r=\infty} Q_r = \varepsilon \lim_{r=\infty} \delta_r, —$$

то имѣемъ:

$$K = (s-\sigma)\,\varphi + \alpha\,(s-\sigma)\sin\left[2\pi r - arc\sin\frac{\varphi}{\alpha} + \frac{\gamma_r}{p}\right] + \alpha\,\tau_p$$

(144)

$$= (s-\sigma)\,\varphi - \alpha\,(s-\sigma)\left[\frac{\varphi}{\alpha}\cos\frac{\gamma_r}{p} - \sin\frac{\gamma_r}{p}\sqrt{1-\frac{\varphi^2}{\alpha^2}}\right] + \alpha\,\tau_p$$

$$= (s-\sigma)\,\varphi\left[\frac{\gamma_r^{\,2}}{1.2\,p^2} - \frac{\gamma_r^{\,4}}{1.2.3.4\,p^4} + \ldots\right] + (s-\sigma)\,\alpha\sin\frac{\gamma_r}{p}\,.$$

$$.\sqrt{1-\frac{\varphi^2}{\alpha^2}} + \alpha\,\tau_p.$$

При этомъ

$$\tau_p = \sin\left(\arc\sin\frac{\varphi}{\alpha} - \frac{\gamma_r}{p}\right)\left[\frac{\mu_p^2\left(\delta + \frac{s}{p}\right)}{1.\,2\,p} - \frac{\nu_p^2\left(\delta + \frac{\sigma}{p}\right)}{1.\,2\,p} + \ldots\right]$$

$$+ \cos\left(\arc\sin\frac{\varphi}{\alpha} - \frac{\gamma_r}{p}\right)\left[\mu_p\left(\delta + \frac{s}{p}\right) - \nu_p\left(\delta + \frac{\sigma}{p}\right) + \ldots\right].$$

Значитъ: (145)

$$K = s_r,$$

гдѣ

$$s_r = \alpha(s-\sigma)\sin\frac{\gamma_r}{p}\sqrt{1 - \frac{\varphi^2}{\alpha^2}} + (s-\sigma)\varphi\left[\frac{\gamma_r^2}{1.\,2\,p^2} - \frac{\gamma_r^4}{1.\,2.\,3.\,4\,p^4} + \ldots\right]$$

$$+ \alpha\cos\left(\arc\sin\frac{\varphi}{\alpha} - \frac{\gamma_r}{p}\right)\left[\mu_p\left(\delta + \frac{s}{p}\right) - \nu_p\left(\delta + \frac{\sigma}{p}\right) + \ldots\right] +$$

(146)

$$+ \alpha\sin\left(\arc\sin\frac{\varphi}{\alpha} - \frac{\gamma_r}{p}\right)\left[\frac{\mu_p^2\left(\delta + \frac{s}{p}\right)}{1.\,2.\,p} - \frac{\nu_p^2\left(\delta + \frac{\sigma}{p}\right)}{1.\,2\,p} + \ldots\right].$$

Обратимъ вниманіе на то, что предѣлы отношеній $\frac{\gamma_r}{\mu_p}$ и $\frac{\gamma_r}{\nu_p}$ при $r = \infty$ представляютъ числа конечныя, отличныя отъ нуля.

А потому, въ виду наличности членовъ $\alpha(s-\sigma)\sin\frac{\gamma_r}{p}\sqrt{1 - \frac{\varphi^2}{\alpha^2}}$

и $\alpha\cos\left(\arc\sin\frac{\varphi}{\alpha} - \frac{\gamma_r}{p}\right)\left[\mu_p\left(\delta + \frac{s}{p}\right) - \nu_p\left(\delta + \frac{\sigma}{p}\right) + \ldots\right]$,

существуетъ такое положительное число R, что при $r > R$, $s_r > 0$, если $\alpha > 0$, и $s_r < 0$, если $\alpha < 0$. Кромѣ того, очевидно, что $\lim\limits_{r=\infty} s_r = 0$.

Такимъ образомъ разность между аргументами косинусовъ, входящихъ множителями въ какой-либо членъ группы l_j и любой предыдущій членъ той же группы, положительна при $r > R$, если $\alpha > 0$, отрицательна, если $\alpha < 0$, и стремится къ нулю, если r стремится къ $+\infty$. А если такъ, то между послѣдовательными членами разсматриваемой группы возможно не болѣе одной перемѣны знака.

То, что найдено сейчасъ по отношенію къ группѣ l_j, примѣнимо къ любой изъ прочихъ трактуемыхъ группъ.

Выдѣлимъ изъ этихъ группъ ту, число членовъ которой наименьшее. Назовемъ δ_p число членовъ этой группы. Въ такомъ случаѣ можемъ написать:

$$\tau < \frac{3p}{\delta_p} + \sigma_p. \tag{147}$$

Очевидно, что условіе (130) выполняется.

Принимая теперь во вниманіе неравенство (129) и составъ (128) числа μ, находимъ:

$$\alpha = \lim_{p=\infty} \frac{q}{2\nu} < \eta_1, \tag{148}$$

гдѣ

$$\eta_1 = \frac{\eta}{2\sigma};$$

при чемъ $\sigma = \lim\limits_{p=\infty} \lambda$.

Число η_1, подобно η, можно считать сколь-угодно малымъ. Въ такомъ случаѣ $\alpha = 0$. Формулы (135) главы 3 обращаются при этомъ въ соотношенія (108) настоящей главы. А потому, какъ въ случаѣ примѣра 1,

$$z = \rho e^{\varphi i},$$

гдѣ $|\varphi| < |\alpha|$, а ρ есть радіусъ-векторъ точки границы полигона K', которая имѣетъ амплитудой φ, есть особая точка ряда (119).

По пріему, которымъ мы пользовались въ концѣ предыдущаго примѣра, устанавливаемъ, что всѣ точки окружности $|z| = 1$, амплитуды которыхъ содержатся въ границахъ:

$$-|\alpha| < \varphi < |\alpha|,$$

суть особыя точки ряда (119).

Такимъ же образомъ обнаруживается, что та же часть окружности (или полная окружность, если $|\alpha| > \pi$) представляетъ особую линію строки:

$$\sum_N^{\infty} \rho_n e^{ian\sin(lg^c n)^s} z^n,$$

гдѣ $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{\rho_n} = 1$, ε опредѣленное положительное число, меньшее 1, а $lg^{\sigma} n$ означаетъ результатъ σ-кратнаго логариѳмированія числа n при основаніи e.

Замѣтимъ, что тотъ же самый пріемъ позволяетъ установить, что функція:

$$\sum_{N}^{\infty} \rho_n \, e^{i\alpha n (lg^{\sigma} n)^{\varepsilon}} z^n,$$

гдѣ ρ_n, α, ε и σ имѣютъ предыдущія значенія, имѣетъ окружность $|z| = 1$ особою линіей.

Замѣченныя опечатки.

Напечатано	*надо*	*стр.*	*сверху*	*снизу*
ρ	ρ_1	4	18	
00	01	4		1
29	27	8	6	
$-a_n$	$-a_0$	39		8
$(1+\delta_s)$	$e^{-s}(1+\delta_s)$	44	4	
$\varphi_{p_{n_k}}$	φ_0	50		6
φ_{p_n}	φ_0	50		10
p	ρ	52		8
φ_0	$\varphi_{p_{n_k}}$	56		7
Δ_p	$p+\nu+1$	61		3
$(p-\nu-1)!$	$p-\nu-1$	64	3	
$<$	$>$	73	1	
α	$\pi\alpha$	78	6	
$-\alpha$	$-\pi\alpha$	78	7	
$\overline{z^{s\vartheta i}}$	$\overline{e^{s\vartheta i}\, z^{s}}$	89	10	
$\overline{q}$	$\overline{q!}$	91		1
$a_q\ n^q$	$\frac{a_q\ n^q}{q!}$	92	7	
$2\pi i$	2π	95		1
$f_\varphi(z)$	$f(z)$	103	8	
φ_p	φ	135		7
φ_p	φ	136		12

А такъ какъ a_n удовлетворяетъ условію 2, то

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a'_n|} < 1 \tag{132}$$

и

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|b'_n|} < 1. \tag{133}$$

Лѣвыя части соотношеній (132) и (133) одновременно не могутъ быть меньше 1, такъ какъ въ противномъ случаѣ, въ виду теоремъ 3 и 7 § 2 главы 1, условіе 2 не имѣло бы мѣста.

Итакъ, должно сохранять силу по крайней мѣрѣ одно изъ равенствъ:

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a'_n|} = 1 \tag{134}$$

и

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|b'_n|} = 1. \tag{135}$$

А такъ какъ a'_n переходитъ въ b'_n послѣ замѣны β_p черезъ $\frac{\pi}{2}+\beta_p$, а b'_n обращается въ a_n послѣ замѣны β_p черезъ $\beta_p-\frac{\pi}{2}$, то, слѣдовательно, всегда можно подобрать такое β_p, чтобы равенство (134) сохраняло силу.

Впредь мы будемъ предполагать, что одновременно съ условіемъ (2) осуществляется и равенство (134).

Въ настоящемъ параграфѣ мы установимъ одну существенной важности основную теорему теоріи строки Тэйлора. Предварительно займемся выводомъ одной леммы.

Обозначимъ черезъ R_φ слѣдующую функцію φ:

$$R_\varphi = \sin\left(\nu_1\omega-\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\nu_2\omega-\frac{\varphi}{2}\right)\ldots\sin\left(\nu_\mu\omega-\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\nu_1'\omega+\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\nu_2'\omega+\frac{\varphi}{2}\right)\ldots\sin\left(\nu'_{\mu'}\omega+\frac{\varphi}{2}\right), \tag{136}$$

гдѣ ω вещественная функція p, а $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\mu, \nu_1', \nu_2', \ldots, \nu'_{\mu'}$ суть цѣлыя положительныя числа, зависящія отъ p.

Послѣ этого разсмотримъ m_1+1 чиселъ $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_{m_1}$, опредѣляемыхъ на основаніи соотношенія:

$$\sum_{0}^{m_1} B_\kappa \, e^{\varphi i\,(m_1-k)} = R_\varphi \, e^{\frac{m_1 \varphi i}{2}}. \tag{137}$$

Лемма 1. Обозначимъ черезъ $|B_{\kappa_1}|$ *наибольшее изъ чиселъ:* $|B_0|, |B_1|, |B_2|, \ldots, |B_{m_1}|$. *Будемъ имѣть:*

$$|B_{\kappa_1}|^2 = \frac{\mu_p{}^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_\varphi{}^2 \frac{\sin(2\sigma+1)(2m_1+s)\varphi}{\sin(2m_1+s)\varphi} d\varphi, \tag{138}$$

гдѣ

$$P_\varphi = R_{2\varphi}, \tag{138'}$$

$$1 > \mu_p > \frac{1}{\sqrt{m_1+1}}, \tag{138''}$$

а σ и s суть какія-либо цѣлыя положительныя числа, не меньшія 1.

Доказательство.

Назовемъ B'_κ число, сопряженное съ B_κ. Тогда, мѣняя въ формулѣ (137) i на $-i$, получимъ:

$$\sum_{1}^{m_1} B'_\kappa \, e^{-\varphi i\,(m_1-k)} = R_\varphi \, e^{\frac{-m_1 \varphi i}{2}}. \tag{139}$$

Перемножимъ между собою почленно соотношенія (137) и (139). Обнаруживая при этомъ только члены, свободныя отъ тригонометрическихъ функцій, будемъ имѣть:

$$\sum_{1}^{m_1} |B_\kappa|^2 + \ldots = R_\varphi^2, \tag{140}$$

или послѣ замѣны φ на 2φ:

$$\sum_{1}^{m_1} |B_\kappa|^2 + \ldots = P_\varphi^2, \tag{141}$$

гдѣ $P_\varphi = R_{2\varphi}$.

Замѣтимъ, что въ лѣвой части соотношенія (141) входятъ $\cos 2\varphi$, $\cos 4\varphi, \ldots, \cos(2m_1\varphi)$, $\sin 2\varphi$, $\sin(4\varphi), \ldots, \sin(2m_1\varphi)$.

Извѣстно, что

$$\frac{1}{2}+\cos a+\cos(2a)+\ldots+\cos(\sigma a)=\frac{\sin(2\sigma+1)\frac{a}{2}}{2\sin\frac{a}{2}}, \qquad (142)$$

гдѣ σ какое-либо цѣлое положительное число.

Въ этомъ соотношеніи полагаемъ $a=2(2m_1+s)\varphi$; при чемъ положительное число $s \geqslant 1$.

Будемъ имѣть:

$$\tfrac{1}{2}+\cos 2(2m_1+s)\varphi+\cos 4(2m_1+s)\varphi+\ldots+\cos 2\sigma(2m_1+s)\varphi=$$

$$=\frac{\sin(2\sigma+1)(2m_1+s)\varphi}{2\sin(2m_1+s)\varphi}. \qquad (143)$$

Легко видѣть, что сохраняютъ силу слѣдующія равенства:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin(2\sigma+1)(2m_1+s)\varphi}{2\sin(2m_1+s)\varphi}\,d\varphi=\pi; \qquad (144)$$

$$\int_0^{2\pi}\cos(r\varphi)\,\frac{\sin(2\sigma+1)(2m_1+s)\varphi}{2\sin(m_1+s)\varphi}\,d\varphi=o, \qquad (145)$$

гдѣ r цѣлое положительное число, не превыходяще $4m_1$, и

$$\int_0^{2\pi}\sin(\rho\varphi)\,\frac{\sin(2\sigma+1)(2m_1+s)\varphi}{2\sin(2m_1+s)\varphi}\,d\varphi=o, \qquad (146)$$

гдѣ ρ какое-либо цѣлое положительное число.

Умножимъ теперь обѣ части соотношенія (141) на

$$\frac{\sin(2\sigma+1)(2m_1+s)\varphi}{2\sin(2m_1+s)\varphi}\,d\varphi$$

и возьмемъ отъ каждой части полученнаго такимъ образомъ соотношенія интегралъ въ границахъ между o и 2π. Принимая тогда во вниманіе формулы (144), (145) и (146), будемъ имѣть:

$$\sum_{1}^{m_1} |B_\kappa|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_\varphi{}^2 \frac{\sin(2\sigma+1)(2m_1+s)\varphi}{\sin(2m_1+s)\varphi}\, d\varphi. \tag{147}$$

Изъ этого соотношенія прежде всего находимъ:

$$|B_{\kappa_1}|^2 < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_\varphi{}^2 \frac{\sin(2s+1)(2m_1+s)\varphi}{\sin(2m_1+s)\varphi}\, d\varphi. \tag{148}$$

Такъ какъ между числами $|B_0|$, $|B_1|$, ..., $|B_{m_1}|$ нѣтъ большаго, чѣмъ число $|B_{\kappa_1}|$, то можемъ написать:

$$|B_{\kappa_1}|^2 > \frac{1}{2\pi(m_1+1)}\int_0^{2\pi} P_\varphi{}^2 \frac{\sin(2\sigma+1)(2m_1+s)\varphi}{\sin(2m_1+s)\varphi}\, d\varphi. \tag{149}$$

На основаніи результатовъ (148) и (149) заключаемъ о справедливости леммы.

Лемма 2. *Имѣемъ:*

$$P_0{}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_\varphi{}^2 \frac{\sin(2m_1+1)\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi. \tag{150}$$

Доказательство.

Соотношеніе (141) выпишемъ полностью:

$$P_\varphi{}^2 = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos 2\varphi + A_2 \cos(4\varphi) + \ldots + A_{m_1} \cos(2m_1\varphi) +$$

$$+ B'_1 \sin 2\varphi + B'_2 \sin(4\varphi) + \ldots + B'_{m_1} \sin(2m_1\varphi), \tag{151}$$

гдѣ числа A_0, A_1, ..., A_{m_1}, B'_1, B'_2, ..., B'_{m_1} не зависятъ отъ φ.

Замѣтимъ, что

$$A_\kappa = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P_\varphi{}^2 \cos(2\kappa\varphi)\, d\varphi, \tag{152}$$

$$(\kappa = 0, 1, 2, \ldots, m_1).$$

Полагаемъ въ формулѣ (151) $\varphi = 0$. Тогда

$$L_0{}^2 = P_0{}^2 = \frac{A_0}{2} + A_1 + A_2 + \ldots + A_{m_1}. \tag{153}$$

Въ виду формулы (152), соотношеніе (153) представится слѣдующимъ образомъ:

$$P_0^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P_\varphi^2 \left[\frac{1}{2} + \cos 2\varphi + \cos(4\varphi) + \ldots + \cos(2m_1\varphi)\right] d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_\varphi^2 \frac{\sin(2m_1+1)\varphi}{\sin\varphi} d\varphi, \qquad (154)$$

т. е., получили формулу (150)

Теорема (основная). Пусть будетъ:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|a'_{p_n}|} = 1. \qquad (155)$$

Обозначимъ черезъ q *число перемѣнъ знака въ рядѣ чиселъ* (126) *при* $p = p_n$. *Назовемъ тогда* α *нижній предѣлъ отношенія* $\frac{q}{2\nu}$ *при* $n = \infty$. *Въ такомъ случаѣ рядъ* (1) *имѣетъ особую точку на дугѣ окружности* $|z| = 1$ *своего круга сходимости, содержащейся между* $+\alpha\pi$ *и* $-\alpha\pi$.

Доказательство.

Разобьемъ совокупность чиселъ:

$$a_p', a'_{p+1}, \ldots, a'_{p+\nu} \qquad (156)$$

на m равныхъ группъ по h членовъ въ каждой; при чемъ послѣдующая группа начинается съ послѣдняго члена предшествующей ей группы.

Назовемъ далѣе

$$\alpha_1 h, \alpha_2 h, \ldots, \alpha_m h \qquad (157)$$

число перемѣнъ знака послѣдовательно въ этихъ группахъ.

Такимъ же образомъ раздѣлимъ совокупность чиселъ:

$$a'_p, a'_{p-1}, \ldots, a'_{p-\nu} \qquad (158)$$

на m группъ по h членовъ въ каждой. При этомъ черезъ

$$\beta_1 h, \beta_2 h, \ldots, \beta_m h \qquad (159)$$

обозначимъ число перемѣнъ знака послѣдовательно въ этихъ группахъ.

Замѣтимъ, что, съ безграничнымъ возрастаніемъ p, h также безгранично растетъ.

Далѣе, введемъ слѣдующія обозначенія:

$$\mu = h \sum_{1}^{m} \alpha_\kappa,\ \mu' = h \sum_{1}^{m} \beta_\kappa, \tag{160}$$

$$\mu + \mu' = 2\,\varkappa\,\alpha',$$

гдѣ

$$\varkappa = m\,h, \tag{161}$$

а

$$\alpha' = \frac{1}{2m} \sum_{1}^{m} (\alpha_\kappa + \beta_\kappa). \tag{162}$$

Легко видѣть, что

$$\varkappa = m + \nu. \tag{163}$$

Обозначимъ, кромѣ того, черезъ ω отношеніе

$$\omega = \frac{\pi}{2\varkappa}. \tag{164}$$

Послѣ этого разсмотримъ выраженіе:

$$\psi(p) = (-1)^{\mu'}\ i^{2\varkappa\alpha'} \sum_{o}^{2\varkappa\alpha} A_\kappa\ \varphi\left(p\ e^{2(\varkappa\alpha' - k)\,\omega i}\right). \tag{165}$$

При этомъ A_κ опредѣляется изъ слѣдующаго соотношенія:

$$\sum_{o}^{2\varkappa\alpha'} A_\kappa\ z^{2\varkappa\alpha' - k} =$$

$$= \left(z e^{-\nu_1 \omega i} - e^{\nu_1 \omega i}\right) \ldots \left(z\ e^{-\nu_\mu \omega i} - e^{\nu_\mu \omega i}\right). \tag{166}$$

$$\left(z\ e^{\nu_1' \omega i} - e^{-\nu_1' \omega i}\right) \ldots \left(z\ e^{\nu'_{\mu'} \omega i} - e^{-\nu'_{\mu'} \omega i}\right).$$

Здѣсь $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\mu, \nu_1', \nu_2', \ldots, \nu'_{\mu'}$ суть цѣлыя положительныя числа, которыя мы точнѣе опредѣлимъ впослѣдствіи.

Выраженіе (165) можно изобразить слѣдующимъ образомъ:

$$\psi(p) =$$

$$= (-1)^{\mu'}\ i^{2\varkappa\alpha'} \sum_{-\nu}^{+\nu} \frac{a_{n+p}\, p^n\, p\,!}{(n+p)\,!} \sum_{o}^{2\varkappa\alpha'} A_\kappa\ e^{2n(\varkappa\alpha' - k)\,\omega i}. \tag{167}$$

Замѣнивъ въ соотношеніи (166) z черезъ $e^{2n\omega i}$, послѣ надлежащихъ преобразованій получимъ:

$$\sum_{0}^{2\varkappa\alpha'} A_\varkappa \, e^{2n(\varkappa\alpha'-k)\omega i} =$$

$$= (-1)^{\mu} \, (2i)^{2\varkappa\alpha'} \sin(\nu_1 - n)\,\omega \ldots \sin(\nu_\mu - n)\,\omega$$

$$\sin(\nu'_1 + n)\,\omega \ldots \sin(\nu'_{\mu'} + n)\,\omega. \tag{168}$$

А потому имѣемъ:

$$\psi(p) =$$

$$= 2^{2\varkappa\alpha'} \sum_{-\nu}^{+\nu} \frac{a_{n+p}\, p^n\, p!\, L_n}{(n+p)!}, \tag{169}$$

гдѣ

$$L_n = \sin(\nu_1 - n)\,\omega \ldots \sin(\nu_\mu - n)\,\omega$$

$$\sin(\nu'_1 + n)\,\omega \ldots \sin(\nu'_{\mu'} + n)\,\omega. \tag{170}$$

Обозначимъ черезъ $\vartheta(p)$ выраженіе:

$$\vartheta(p) = 2^{2\varkappa\alpha'} \sum_{-\nu}^{+\nu} e^{-i\beta_p} \frac{a_{n+p}\, p^n\, p!\, L_n}{(n+p)!}. \tag{171}$$

Принимая во вниманіе равенство (125), разобьемъ комплексный символъ (171) на два вещественныхъ:

$$\vartheta_1(p) = 2^{2\varkappa\alpha'} \sum_{-\nu}^{+\nu} \frac{a'_{n+p}\, p^n\, p!\, L_n}{(n+p)!};$$

$$\vartheta_2(p) = 2^{2\varkappa\alpha'} \sum_{-\nu}^{+\nu} \frac{b'_{n+p}\, p^n\, p!\, L_n}{(n+p)!}. \tag{172}$$

Значитъ, имѣемъ:

$$\vartheta(p) = \vartheta_1(p) + i\,\vartheta_2(p). \tag{173}$$

Выберемъ теперь числа ν и ν' слѣдующимъ образомъ:

Пусть $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_\mu$ совпадаютъ соотвѣтственно съ нумерами членовъ группы (156), мѣняющихъ знакъ; точно также пусть $\nu'_1, \nu'_2, \ldots, \nu'_{\mu'}$ совпадаютъ соотвѣтственно съ нумерами членовъ группы (158), мѣняющихъ знакъ.

Въ такомъ случаѣ, какъ непосредственно усматривается, всѣ слагаемыя суммы $\vartheta_1(p)$ (172) одного знака.

А потому можемъ написать:

$$|\vartheta(p)| > |\vartheta_1(p)| > 2^{2 н\alpha'} |a'_p| L_0, \tag{174}$$

гдѣ

$$\begin{gathered} L_0 = \sin(\nu_1\omega) \sin(\nu_2\omega) \ldots \sin(\nu_\mu\omega) \\ \sin(\nu'_1\omega) \sin(\nu'_2\omega) \ldots \sin(\nu'_{\mu'}\omega). \end{gathered} \tag{175}$$

Такъ какъ $\vartheta(p)$ отличается отъ $\psi(p)$ (169) только множителемъ $e^{-i\beta_p}$, то можемъ написать:

$$|\psi(p)| > 2^{2 н\alpha'} |a'_p| L_0. \tag{176}$$

Отсюда находимъ:

$$\sum_0^{2н\alpha'} |A_к| \cdot |\varphi(pe^{2(н\alpha'-k)\omega i})| > 2^{2 н\alpha'} |a'_p| L_0. \tag{177}$$

Пусть между числами $|A_0|, |A_1|, \ldots, |A_{2н\alpha'}|$ нѣтъ числа, большаго $|A_{к_1}|$. Тогда на основаніи неравенства (177) можемъ написать:

$$\sum_0^{2н\alpha'} |\varphi(p e^{2(н\alpha'-k)\omega i})| > \frac{2^{2 н\alpha'} |a'_p| L_0}{|A_{к_1}|}. \tag{178}$$

Пусть, при измѣненіи k отъ 0 до $2н\alpha'$, выраженіе $|\varphi(p e^{2(н\alpha'-k)\omega i})|$ принимаетъ наибольшее значеніе при $k = k_2$. Тогда можемъ написать:

$$|\varphi(pe^{\varphi_p i})| > \frac{2^{2 н\alpha'} |a'_p| L_0}{(2н\alpha'+1) |A_{к_1}|}, \tag{179}$$

гдѣ

$$\varphi_p = 2(н\alpha' - k_2)\omega. \tag{179'}$$

Разсмотримъ сперва случай, когда всѣ члены ряда (126) одного знака, т. е., $2н\alpha' = 0$ и, слѣдовательно, $\alpha' = 0$.

Выраженіе (165) приметъ видъ:

$$\psi(p) = A_0 \varphi(p) = \varphi(p), \tag{180}$$

гдѣ A_0 предполагается равнымъ 1.

Такъ какъ, въ силу соотношенія (168), и $L_0 = 1$ въ разсматриваемомъ случаѣ, то на основаніи неравенства (179) имѣемъ:

$$|\varphi(p)| > |a'_p| \tag{181}$$

и, слѣдовательно,

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\varphi(p)|} \geqslant 1. \tag{182}$$

А такъ какъ лѣвая часть соотношенія (182) не можетъ быть больше 1, то

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\varphi(p)|} = 1. \tag{183}$$

Принимая во вниманіе теорему 5 предыдущаго параграфа, утверждаемъ, что $z = 1$ есть особая точка строки (1). [1]

Въ разсматриваемомъ случаѣ, слѣдовательно, оправдывается доказываемая теорема.

Будемъ теперь предполагать, что $2\varkappa\alpha' > 0$. Предварительно сдѣлаемъ одно существенное замѣчаніе. Обратимъ вниманіе на составъ выраженіе для φ_p (179'). Такъ какъ

$$0 \leqslant k_2 \leqslant 2\varkappa\alpha', \tag{184}$$

а $\omega = \frac{\pi}{2\varkappa}$, то

$$-\alpha'\pi \leqslant \varphi_p \leqslant +\alpha'\pi. \tag{185}$$

Имѣя въ виду составъ (162) функціи α', можемъ написать:

$$\alpha' = \frac{h\sum\limits_{1}^{m}(\alpha_\kappa + \beta_\kappa)}{2\varkappa} = \frac{2\varkappa\alpha'}{2\nu + 2m} = \frac{q}{2\nu} \cdot \frac{1}{1+\sigma_p}, \tag{186}$$

гдѣ

$$\lim_{p=\infty} \sigma_p = \lim_{p=\infty} \frac{m}{\nu} = 0. \tag{186'}$$

Пусть будетъ:

$$\alpha' = l\,(p_\varkappa). \tag{187}$$

---

[1]) Слова: „или предѣльное положеніе особыхъ точекъ ряда (1)“, какъ здѣсь, такъ и въ другихъ послѣдующихъ теоремахъ мы пропускаемъ.

Принимая во вниманіе условія теоремы, изъ соотношенія

$$\alpha' = \frac{q}{2\nu} \frac{1}{1+\sigma_{p_n}}$$

видимъ, что нижній предѣлъ α' при $n = \infty$ есть α, а верхній предѣлъ $-\alpha'$ при $n = \infty$ есть $-\alpha$. Имѣя въ виду условіе (184), отсюда заключаемъ, что нижній предѣлъ φ_{p_n} при $n = \infty$ не превосходитъ $\pi\alpha$, если $\varphi_{p_n} > 0$, а верхній предѣлъ φ_{p_n} при $n = \infty$ не меньше $-\pi\alpha$, если $\varphi_{p_n} < 0$. А если такъ, то, въ силу теоремы 5 предыдущаго параграфа, трактуемая теорема будетъ установлена, если удастся обнаружить, что

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|\, \varphi(p_n e^{\varphi_{p_n} i}) \,|} = 1. \tag{188}$$

Сейчасъ мы постараемся убѣдиться въ справедливости соотношенія (188).

Введемъ обозначеніе:

$$B_\kappa = \frac{(-1)^\mu A_\kappa}{(2i)^{2\kappa\alpha'}}. \tag{189}$$

Тогда неравенство (179) перепишется слѣдующимъ образомъ:

$$|\, \varphi(p e^{\varphi_p i}) \,| > \frac{|\, a'_p \,|\, L_0}{(2\kappa\alpha'+1)\, |\, B_{\kappa_1} |}. \tag{190}$$

Очевидно, что $|\, B_{\kappa_1} |$ есть такое число, больше котораго нѣтъ чиселъ въ рядѣ: $|\, B_0 \,|$, $|\, B_1 \,|$, ..., $|\, B_{2\kappa\alpha'} \,|$.

Пусть будетъ, ради краткости,

$$P = |\, \varphi(p e^{\varphi_p i}) \,|. \tag{191}$$

Тогда, послѣ возвышенія обѣихъ частей неравенства (190) въ квадратъ, получимъ:

$$P^2 > \frac{|\, a'_p \,|^2 L_0^2}{(2\kappa\alpha'+1)^2\, |\, B_{\kappa_1} |^2}. \tag{192}$$

Пользуясь леммами, дадимъ этому неравенству важную для нашихъ цѣлей форму.

Предположимъ, что въ означенныхъ леммахъ $m_1 = 2\,н\alpha'$, а числа ω, μ и μ', ν и ν' имѣютъ тѣ же значенія, что и въ выраженіи (166). Тогда будемъ имѣть прежде всего: $L_0{}^2 = R_0{}^2$. Далѣе, полагаемъ въ соотношеніи (168): $2\,n\,\omega = \varphi$. Будемъ имѣть:

$$\sum_{0}^{2н\alpha'} A_\kappa\, e^{\varphi i\,(н\alpha'-k)} = (-1)^{\mu}\,(2\,i)^{2н\alpha'}\,R_\varphi,$$

или:

$$\sum_{0}^{2н\alpha'} A_\kappa\, e^{\varphi i\,(2н\alpha'-k)} = (-1)^{\mu}\,(2i)^{2н\alpha'}\,R_\varphi\, e^{н\alpha'\varphi i}. \tag{193}$$

Устранимъ изъ этого соотношенія A_0, A_1, A_2, ..., $A_{2н\alpha'}$ на основаніи равенства (189). Тогда получимъ соотношеніе (137), гдѣ $m_1 = 2\,н\alpha'$.

Такимъ образомъ убѣждаемся, что B_0, B_1, B_2, ..., $B_{2н\alpha'}$ удовлетворяютъ условію (137). Но въ такомъ случаѣ $|\,B_{\kappa_1}|^2$ выражается по формулѣ (138)

Принимая во вниманіе формулы (138) и (150), представимъ неравенство (192) слѣдующимъ образомъ:

$$P^2 > \frac{|\,a_p\,|}{\mu_p{}^2\,(2\,н\alpha'+1)}\,K, \tag{194}$$

гдѣ

$$K = \frac{\displaystyle\int_0^{2\pi} P_\varphi{}^2\,\frac{\sin\,(2\,m_1+1)\,\varphi}{\sin\,\varphi}\,d\varphi}{\displaystyle\int_0^{2\pi} P_\varphi{}^2\,\frac{\sin\,(2\,\sigma+1)\,(2\,m_1+s)\,\varphi}{\sin\,(2\,m_1+s)\,\varphi}\,d\varphi} =$$

$$= \frac{\displaystyle\int_0^{\pi} P_\varphi{}^2\,\frac{\sin\,(2\,m_1+1)\,\varphi}{\sin\,\varphi}\,d\varphi}{\displaystyle\int_0^{\pi} P_\varphi{}^2\,\frac{\sin\,(2\,\sigma+1)\,(2\,m_1+s)\,\varphi}{\sin\,(2\,m_1+s)\,\varphi}\,d\varphi}. \tag{195}$$

Это можно представить такъ:

$$\int_0^{\pi} P_\varphi{}^2 \left[\frac{\sin\,(2\,m_1+1)\,\varphi}{\sin\,\varphi} - K\,\frac{\sin\,(2\sigma+1)\,(2m_1+s)\,\varphi}{\sin\,(2\,m_1+s)\,\varphi}\right] d\varphi = 0,$$

или:

$$\left[\frac{\sin\,(2\,m_1+1)\,\varphi_1}{\sin\,\varphi_1}-K\,\frac{\sin\,(2\sigma+1)\,(2\,m_1+s)\,\varphi_1}{\sin\,(2\,m_1+s)\,\varphi_1}\right]\int_0^\pi P_\varphi{}^2\,d\varphi=0, \quad (196)$$

гдѣ $0<\varphi_1<\pi$.

Такъ какъ

$$\int_0^\pi P_\varphi{}^2\,d\varphi \neq 0,$$

то

$$\frac{\sin\,(2\,m_1+1)\,\varphi_1}{\sin\,\varphi_1}-K\,\frac{\sin\,(2\sigma+1)\,(2m_1+s)\,\varphi_1}{\sin\,(2m_1+s)\,\varphi_1}=0$$

и

$$K=\frac{\sin\,(2\,m_1+1)\,\varphi_1\;\sin\,(2\,m_1+s)\,\varphi_1}{\sin\,(2\,\sigma+1)\,(2\,m_1+s)\,\varphi_1\;\sin\,\varphi_1}. \quad (197)$$

K не зависитъ ни отъ $\sigma \geqslant 1$, ни отъ $s \geqslant 1$. Полагаемъ $\sigma=m_1$ и $s=2$. Будемъ имѣть:

$$K=\frac{\sin\,(2\,m_1+1)\,\varphi_1\;\sin\,(2\,m+2)\,\varphi_1}{\sin\,(2\,m_1+1)\,(2m_1+2)\,\varphi_1\;\sin\,\varphi_1}, \quad (198)$$

гдѣ за количествомъ φ_1 сохраняемъ прежнее обозначеніе.

Такъ какъ

$$K=|\,\varphi\,(p\,e^{\varphi_p i})\,|,$$

то изъ неравенства (194) находимъ:

$$\sqrt[p]{|\,\varphi\,(p\,e^{\varphi_p i})\,|}>\sqrt[p]{\frac{|\,a_p\,|}{\mu_p\,(2\varkappa a'+1)}}\;\sqrt[2p]{K}. \quad (199)$$

Обозначимъ черезъ K_n значеніе K при $p=p_n$. Обнаружимъ тогда, что

$$\varliminf_{n=\infty}\sqrt[p_n]{K_n}\geqslant 1. \quad (200)$$

Чтобы убѣдиться въ этомъ, нужно лишь показать невозможность неравенства:

$$\varliminf_{n=\infty}\sqrt[p_n]{K_n}=\alpha<1. \quad (201)$$

Пусть будетъ:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{K_n} = \lim_{k=\infty} \sqrt[p_{n_k}]{K_{n_k}} = \alpha.$$

Значитъ, имѣемъ:

$$\alpha - \varepsilon < \sqrt[p_{n_k}]{K_{n_k}} < \alpha + \varepsilon \qquad (202)$$
$$k > R$$

и

$$K_{n_k} = \lambda_k (\alpha + \varepsilon)^{p_{n_k}}, \qquad (203)$$

гдѣ $0 < \lambda_k < 1$, а положительное число ε выбрано настолько малымъ, что $\alpha + \varepsilon < 1$.

Обнаружимъ невозможность равенства (203). Назовемъ $\overline{m}_1$ символъ $m_1 = 2н\alpha'$ при $p = p_{n_k}$, а черезъ ψ_1 выраженіе φ_1 при $p = p_{n_k}$. Соотношеніе (203) перепишется тогда такъ:

$$\frac{Sin\,(2\,\overline{m}_1 + 1)\,\psi_1 \;\; sin\,(2\,\overline{m}_1 + 2)\,\psi_1}{Sin\,\psi_1 \;\; sin\,(2\,\overline{m}_1 + 1)\,(2\,\overline{m}_1 + 2)\,\psi_1} = \lambda_k\,(\alpha + \varepsilon)^{p_{n_k}}. \qquad (204)$$

На основаніи его можно написать:

$$|\, sin\,(2\,\overline{m}_1 + 1)\,\psi_1 \;\; sin\,(2\,\overline{m}_1 + 2)\,\psi_1 \,| < (\alpha + \varepsilon)^{p_{n_k}}.$$

Этому послѣднему неравенству можно только удовлетворить, полагая, что

$$\psi_1 = \frac{s_1\,\pi + \delta^{p_{n_k}}}{2\,\overline{m}_1 + 1}, \qquad (205)$$

гдѣ s_1 цѣлое число, удовлетворяющее неравенствамъ: $0 < s_2 < 2\,\overline{m}_1 + 2$, а $0 < \delta < 1$, или же

$$\psi_2 = \frac{s_2\,\pi + \delta_1^{\,p_{n_k}}}{2\,\overline{m}_1 + 2}, \qquad (206)$$

гдѣ s_2 тоже цѣлое число, удовлетворяющее неравенствамъ:

$$0 < s_2 < 2\,\overline{m}_1 + 2 \quad \text{и} \quad 0 < \delta_1 < 1.$$

Легко видѣть, что ни выраженіе (205), ни выраженіе (206) не можетъ удовлетворить соотношенію (204). Выяснимъ это сперва относительно выраженія (205).

Имѣемъ:

$$K_{n_k} = \frac{sin\,\delta^{p_{n_k}}\; sin\left(\delta^{p_{n_k}} + \dfrac{s_1\,\pi + \delta^{p_{n_k}}}{2\,\overline{m}_1 + 1}\right)}{sin\,\dfrac{s_1\,\pi + \delta^{p_{n_k}}}{2\,\overline{m}_1 + 1}\; sin\,(2\,\overline{m}_1 + 2)\,\delta^{p_{n_k}}}.$$

Допустимъ, что $s_1 \neq 2m_1 + 1$ и не нуль. Тогда

$$K_{n_k} = \frac{\sin \delta^{p_{n_k}}}{\sin (2m_1 + 2)\, \delta^{p_{n_k}}} \left[ctg \left(\frac{s_1 \pi + \delta^{p_{n_k}}}{2m_1 + 1} \right) \sin \delta^{p_{n_k}} + \cos \delta^{p_{n_k}} \right].$$

Отсюда ясно, что

$$K_{n_k} > \frac{1 - \varepsilon}{2m_1 + 2}, \qquad k > R \tag{207}$$

гдѣ ε малое положительное число.

Пусть теперь $s_1 = 0$ или $s_1 = 2m_1 + 1$. Будемъ имѣть:

$$K_{n_k} = \frac{\sin \delta^{p_{n_k}}}{\sin (2m_1 + 2)\, \delta^{p_{n_k}}} \cdot \frac{\sin \left(1 + \dfrac{1}{2m_1 + 1}\right) \delta^{p_{n_k}}}{\sin \dfrac{\delta^{p_{n_k}}}{2m_1 + 1}}.$$

Значитъ, можемъ написать:

$$K_{n_k} > 1 - \eta, \qquad k > R'$$

гдѣ η малое положительное число.

Итакъ, можно считать, что въ обоихъ случаяхъ выполняется неравенство (207).

Къ тому же неравенству придемъ, если ψ_1 имѣетъ составъ (206).

Такимъ образомъ обнаружено, что равенство (204) и, слѣдовательно, неравенство (201) не могутъ имѣть мѣсто. Значитъ, возможно лишь соотношеніе (200).

Въ силу результата (200) на основаніи неравенства (199) находимъ:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|\varphi(p_n e^{\varphi_{p_n} i})|} \geqq 1. \tag{208}$$

А такъ какъ лѣвый символъ этого соотношенія не можетъ быть больше 1, то, значитъ, условіе (188) справедливо и теорема такимъ образомъ доказана.

§ 5. Приложеніе основной теоремы къ случаю строки Тэйлора, когда на окружности ея круга сходимости лежитъ ея одна или двѣ особыя точки.

Основная теорема, установленная въ предыдущемъ параграфѣ, только въ одномъ случаѣ приводитъ къ опредѣленному результату,

Замѣченныя опечатки.

Напечатано	*надо*	*стр.*	*сверху*	*снизу*
ρ	ρ_1	4	18	
00	01	4		1
29	27	8	6	
$\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^p}$	$\sqrt[p]{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^p}$	10		5
Δ	Δ_p	17	12	
$-a_n$	$-a_0$	39		8
$(1+\delta_s)$	$e^{-s}(1+\delta_s)$	44	4	
$\varphi_{p_{n_k}}$	φ_0	50		6
φ_{p_n}	φ_0	50		10
p	ρ	52		8
φ_0	$\varphi_{p_{n_k}}$	56		7
Δ_p	$p+\nu+1$	61		3
$(p-\nu-1)!$	$p-\nu-1$	64	3	
$z^{s\vartheta i}$	$e^{s\vartheta i}\,z^s$	89	10	
$\overline{q}$	$\overline{q}!$	91		1
$\mid a_q \mid n^q$	$\frac{\mid a_q \mid n^q}{q!}$	92	7	
$2\pi i$	2π	95		1
$f_\varphi(z)$	$f(z)$	103	8	
φ_p	φ	135		7
φ_p	φ	136		12

На стр. XIX „Введенія“ въ строчкѣ 10 снизу послѣ словъ: „функціи p_1“ пропущено: „$\Delta_p = E\left(\frac{\psi(p)}{p}\right)$, гдѣ $\psi(p)$ функція p“,

ВВЕДЕНІЕ.

Однимъ изъ цѣнныхъ элементовъ, выражающихъ функцію, является строка Тэйлора:

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n, \tag{1}$$

гдѣ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ не зависятъ отъ z.

Первый вопросъ, который долженъ былъ заинтересовать математиковъ, это опредѣленіе области сходимости ряда (1).

Abel [1]) установилъ, что въ случаѣ строки

$$1 + \frac{mz}{1} + \frac{m(m-1)}{1 \, . \, 2} z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} z^3 + \ldots .$$

такою областью служитъ кругъ $|z| < 1$.

Далѣе, Cauchy [2]) обнаружилъ справедливость положенія: существуетъ такое положительное число ρ, что, если $|z| < \rho$, рядъ (1)

---

[1]) *Abel.* „Untersuchungen über die Reihe

$$1 + \frac{mx}{1} + \frac{m(m-1)}{1 \, . \, 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} x^3 + \ldots \text{"}$$

Crelle's Journal, t. 1.

[2]) *Cauchy.* Analyse algébrique, 1821, p. 286
Résumés analytiques, 1833, p. 113.

сходится; если же $|z| > \rho$, то строка (1) расходится. При этомъ онъ показалъ, что, если λ означаетъ наибольшій предѣлъ ряда чиселъ:

$$\sqrt{|a_2|},\ \sqrt[3]{|a_3|}, \ldots,\ \sqrt[n]{|a_n|}, \ldots, \tag{2}$$

то

$$\rho = \frac{1}{\lambda}.$$

Cauchy однако не раскрылъ со всею строгостью, что такое „наибольшій изъ предѣловъ“ ряда чиселъ (2). Это выяснилъ Du Bois Reymond [1]).

Отмѣтимъ, что и самое названіе этого понятія было имъ измѣнено: онъ назвалъ его *верхнимъ предѣломъ неопредѣленности.*

Посмотримъ, что такое верхній предѣлъ неопредѣленности ряда чиселъ (2) и какъ онъ находится; при этомъ будемъ считать его числомъ конечнымъ.

Обозначимъ символомъ (B) совокупность чиселъ, изъ которыхъ каждое больше всѣхъ чиселъ ряда (2), если $n > N$, а черезъ (A) обозначимъ совокупность всѣхъ чиселъ, изъ которыхъ каждое не удовлетворяетъ этому условію, т. е., въ рядѣ чиселъ (2) существуетъ неограниченное число членовъ, большихъ каждаго числа группы (A).

Будемъ говорить, что числа (B) принадлежатъ къ высшему классу, а числа (A) къ низшему классу. Возьмемъ по числу того и другого класса. Пусть B принадлежитъ къ высшему классу, а A къ низшему. Полагая, что $B - A = \alpha$, составимъ слѣдующій рядъ чиселъ:

$$A,\ A + \frac{\alpha}{10},\ A + \frac{2\alpha}{10}, \ldots,\ A + \frac{9\alpha}{10},\ \ B.$$

Между этими числами нѣсколько по порядку принадлежатъ къ низшему классу, а остальныя къ высшему.

Пусть два смежныхъ числа предыдущаго ряда, принадлежащія къ различнымъ классамъ, будутъ:

---

[1]) *Du Bois Reymond.* Allgemeine Functionentheorie, p. 266.

$$A + \frac{C_0\ \alpha}{10},\ A + \frac{C_0\ \alpha}{10} + \frac{\alpha}{10},$$

гдѣ C_0 представляетъ одно изъ чиселъ 0, 1, 2, 3,..., 9.

Разность между большимъ и меньшимъ изъ этихъ чиселъ, т. е., $\frac{\alpha}{10}$ разбиваемъ на десять равныхъ частей и составляемъ рядъ чиселъ:

$$A + \frac{C_0\ \alpha}{10}, A + \frac{C_0\ \alpha}{10} + \frac{\alpha}{10^2}, \ldots, A + \frac{C_0\ \alpha}{10} + \frac{9\ \alpha}{10^2},\ A + \frac{C_0\ \alpha}{10} + \frac{\alpha}{10}.$$

Возьмемъ два послѣдовательныхъ числа:

$$A + \frac{C_0\ \alpha}{10} + \frac{C_1\ \alpha}{10^2},\ A + \frac{C_0\ \alpha}{10} + \frac{C_1\ \alpha}{10^2} + \frac{\alpha}{10^2},$$

принадлежащія къ двумъ различнымъ классамъ. Здѣсь C_1 есть одно изъ чиселъ: 0, 1, 2, 3,..., 9.

Поступая такъ дальше, составимъ два числа:

$$A + \frac{C_0\ \alpha}{10} + \frac{C_1\ \alpha}{10^2} + \ldots + \frac{C_{n-1}\alpha}{10^n}, A + \frac{C_0\ \alpha}{10} + \frac{C_1\ \alpha}{10^2} + \ldots + \frac{C_{n-1}\alpha}{10^n} + \frac{\alpha}{10^n},$$

изъ которыхъ первое принадлежитъ къ низшему, а второе къ высшему классу.

Замѣтимъ, что C_2, C_3, ..., C_{n-1}, подобно числамъ C_0 и C_1, суть два изъ чиселъ: 0, 1, 2, 3,..., 9.

Пусть будетъ

$$\lambda_n = A + \frac{C_0\ \alpha}{10} + \frac{C_1\ \alpha}{10^2} + \ldots + \frac{C_{n-1}\alpha}{10^n}$$

и

$$l_n = A + \frac{C_0\ \alpha}{10} + \frac{C_1\ \alpha}{10^2} + \ldots + \frac{C_{n-1}\alpha}{10^n} + \frac{\alpha}{10^n}.$$

Отсюда находимъ:

$$l_n = \lambda_n + \frac{\alpha}{10^n}. \qquad (4)$$

Легко доказывается, что $\lim\limits_{n=\infty} \lambda_n$ и $\lim\limits_{n=\infty} l_n$ представляютъ опредѣленныя числа, которыя, въ силу соотношенія (4), равны между собою.

Этотъ общій предѣлъ и есть λ.

На основаніи того, что λ есть предѣлъ λ_n и l_n при $n = \infty$, заключаемъ, что $\lambda + \varepsilon$, гдѣ $\varepsilon > o$, принадлежитъ къ высшему классу, а $\lambda - \varepsilon$ къ низшему. Значитъ, можемъ написать:

$$(5) \qquad \underset{n>N}{\sqrt[n]{|a_n|}} < \lambda + \varepsilon.$$

Съ другой стороны существуетъ такой безконечный рядъ значеній n : $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_\kappa, \ldots$, что

$$(6) \qquad \sqrt[n]{|a_n|} > \lambda - \varepsilon.$$

$$n = n_1,\ n_2,\ n_3, \ldots, n_\kappa, \ldots.$$

Сопоставляя неравенства (5) и (6), выводимъ:

$$(7) \qquad \lim_{\kappa=\infty} \sqrt[n_\kappa]{|a_{n_\kappa}|} = \lambda.$$

Разсужденія Du Bois Reymond'а въ сущности повторилъ Hadamard въ своихъ работахъ: „Sur le rayon de convergence des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable [1]) и „Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor" [2]). При этомъ онъ назвалъ λ *верхнимъ предѣломъ* выраженія $\sqrt[n]{|a_n|}$ при $n = \infty$.

Добавимъ, что, согласно Pringsheim'у [3]), принято обозначать:

$$\lambda = \overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

---

[1]) Comptes Rendus, 23 janvier 1888.

[2]) Journal de mathématiques, 4-e série, t. VIII, 1892.

[3]) *A. Pringsheim.* Zur Theorie des Doppel—Integrals. Sitzb. der Math. phys. Cl. d. K. bayer. Akad. d. Wiss., Bd. 28, 1898, H. I, p. 62.

Считаемъ здѣсь умѣстнымъ указать еще другое понятіе, имѣющее существенное значеніе въ теоріи строки Тэйлора,—это *нижній предѣлъ* какого-либо выраженія $\varphi(n)$ при $n=\infty$; при чемъ $\varphi(n)>o$.

Разсмотримъ безконечный рядъ чиселъ:

$$\varphi(1),\ \varphi(2),\ \varphi(3), \ldots,\ \varphi(n), \ldots\ldots \tag{8}$$

Будемъ предполагать, что всѣ числа (8) меньше нѣкотораго опредѣленнаго числа.

Назовемъ (A_1) совокупность всѣхъ чиселъ, изъ которыхъ каждое меньше всѣхъ чиселъ (8) при $n>N$, а черезъ (B_1) остальныя числа. Каждое изъ этихъ послѣднихъ обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что оно больше безграничнаго числа чиселъ ряда (8).

Выберемъ по одному числу каждой группы.

Пусть это будетъ: A_1 и B_1. Полагая $\beta=B_1-A_1$, составимъ по пріему, изложенному при опредѣленіи λ, два перемѣнныхъ:

$$\lambda'_n = A_1 + \frac{C'_0\,\beta}{10} + \frac{C'_1\,\beta}{10^2} + \ldots + \frac{C'_{n-1}\,\beta}{10^n}$$

и

$$l'_n = \lambda'_n + \frac{\beta}{10^n},$$

гдѣ C'_0, $C'_1, \ldots,$ C'_{n-1} представляютъ числа ряда: 0, 1, 2, 3,..., 9.

Тогда

$$\lim_{n=\infty} \lambda'_n = \lim_{n=\infty} l'_n = \mu.$$

и будетъ низшимъ предѣломъ $\varphi(n)$ при $n=\infty$.

Ясно при этомъ, что для $\varepsilon>o$

$$\varphi(n) > \mu - \varepsilon \atop n>N$$

и

$$\varphi(n) < \mu + \varepsilon.$$

$$n = n_1,\ n_2,\ n_3, \ldots,\ n_\kappa, \ldots\ldots$$

Значитъ,

$$\lim_{\kappa=\infty} \varphi(n_\kappa) = \mu,$$

или:

$$\lim_{n=\infty} \varphi(n) = \mu. \tag{9}$$

Послѣ того, какъ область сходимости строки (1) была опредѣлена, математики обратились къ рѣшенію двухъ основныхъ задачъ теоріи строки Тэйлора:

1) Разысканіе особыхъ точекъ функціи, опредѣляемой рядомъ (1) и 2) вычисленіе значеній функціи $f(z)$ (1) при значеніяхъ z, какъ лежащихъ на окружности $|z| = \rho$, такъ и внѣ ея.

Méray[1]) и Weierstrass (Abhandlungen aus der Functionenlehre) предложили методу, состоящую въ послѣдовательномъ продолженіи ряда (1), которая теоретически исчерпываетъ эти обѣ задачи. Однако при ея практическомъ примѣненіи приходится сразу наталкиваться на непреодолимыя трудности, проистекающія отъ чрезмѣрной сложности выкладокъ. Въ виду этого, математики стали искать иные пути, которые, не давая такого полнаго рѣшенія поставленныхъ выше задачъ, вели бы ближе къ цѣли въ практическомъ отношеніи.

Посмотримъ, что же сдѣлано въ этомъ отношеніи математиками; при чемъ мы будемъ говорить главнымъ образомъ о результатахъ, связанныхъ съ рѣшеніемъ первой изъ вышеозначенныхъ задачъ.

Hadamard впервые выдвинулъ эту задачу въ своей работѣ: „Essai sur l'étude des fonctions donneés par leur développement de Taylor". Опираясь на принципъ Méray-Weierstrass'a, онъ установилъ критерій, на основаніи котораго можно судить, представляетъ ли какая-либо точка окружности $|z| = \rho$ круга сходимости ряда (1) особую или нѣтъ. Чтобы проще выяснить этотъ критерій, замѣтимъ, что, не нарушая общности, радіусъ ρ круга сходимости ряда (1) можно считать равнымъ единицѣ. Въ самомъ дѣлѣ, если бы длина этого радіуса была число ρ, отличное отъ единицы, то, преобразуя рядъ (1) при помощи подстановки

$$z \mid \rho z,$$

---

[1]) *Méray.* Nouveau précis d'analyse infinitésima e. Paris, Gauthier — Villars, 1872.

мы замѣнили бы рядъ (1) новымъ:

$$\sum_{0}^{\infty} b_n z^n,$$

гдѣ $b_n = a_n \rho^n$, радіусъ круга сходимости котораго равенъ единицѣ.

Далѣе, такъ какъ при помощи подстановки

$$z \mid z e^{\vartheta i},$$

гдѣ ϑ вещественное число, всякую точку окружности $|z| = 1$ круга сходимости ряда (1) можно привести въ совпаденіе съ $z = 1$, то мы ограничимся указаніемъ критерія Hadamard'а, позволяющаго судить, является ли $z=1$ особой или простой точкой строки (1).

Обозначимъ черезъ $\overset{(p)}{f(t)}$ p-тую производную функціи $f(z)$ при $z = t$, гдѣ $o < t < 1$.

Ясно, что

$$\overset{(p)}{f(t)} = \sum_{p}^{\infty} a_n (n)_p\, t^{n-p},$$

гдѣ

$$(n)_p = n\ (n-1) \ldots (n-p+1).$$

Тогда, *если $z=1$ есть особая точка строки (1) или представляетъ предѣльное положеніе ея особыхъ точекъ, имѣемъ:*

$$(10) \qquad \lim_{p=\infty} \sqrt[p]{\frac{1}{p!} \left| \overset{(p)}{f(t)} \right|} = \frac{1}{1-t}.$$

Если же $z = 1$ не есть особая точка строки (1) и не представляетъ предѣльнаго положенія ея особыхъ точекъ, то выполняется неравенство:

$$(11) \qquad \lim_{p=\infty} \sqrt[p]{\frac{1}{p!} \left| \overset{(p)}{f(t)} \right|} < \frac{1}{1-t}.$$

Обратно: *Пусть сохраняетъ силу равенство* (10). *Въ такомъ случаѣ* $z = 1$ *есть особая точка строки* (1) *или предѣльное положеніе ея особыхъ точекъ; если же выполняется условіе* (11), *то* $z = 1$ *не есть особая точка строки* (1) *и не представляетъ предѣльнаго положенія ея особыхъ точекъ.*

Такъ какъ символъ, стоящій въ лѣвыхъ частяхъ соотношеній (10) и (11), не можетъ быть больше $\frac{1}{1-t}$, то первое и третье положенія можно формулировать слѣдующимъ образомъ: *Допустимъ, что, каково бы ни было малое положительное* ε, *существуетъ безграничный рядъ безконечно-возрастающихъ значеній* p: $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots$ *и такое положительное число* N, *что*

$$\sqrt[p_n]{\frac{1}{p_n!}\left| f^{(p_n)}(t) \right|} > \frac{1-\varepsilon}{1-t} \tag{12}$$

при $n > N$. *Въ такомъ случаѣ* $z = 1$ *есть особая точка ряда* (1) *или представляетъ предѣльное положеніе его особыхъ точекъ.*

Обратно: *Пусть* $z = 1$ *особая точка ряда* (1) *или предѣльное положеніе его особыхъ точекъ. Въ такомъ случаѣ, для даннаго сколь-угодно малаго* $\varepsilon > 0$, *можно подобрать такой безконечный рядъ безгранично-возрастающихъ значеній* p: $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots$ *и такое цѣлое положительное* N, *что при* $n > N$ *сохраняетъ силу неравенство* (12).

Такимъ образомъ Hadamard раскрылъ необходимый и достаточный признакъ, рѣшающій вопросъ, является ли разсматриваемая точка окружности круга сходимости ряда (1) особой или нѣтъ. Вся трудность заключается въ практическомъ приложеніи его критерія, который требовалъ упрощенія.

Изслѣдованія Hadamard'а были продолжены Fabry въ его двухъ работахъ: „Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et sur l'impossibilité du prolongement analytique dans des cas très généraux“ [1]) и „Sur les séries de Taylor qui ont une infinité de points singuliers.“ [2])

---

[1]) Annales de l'École Normale Supérieure, 3-e série, t. XIII, 1896

[2]) Acta Mathematica, t. 22, 1899.

Остановимся на нихъ. Пусть будетъ:

$$\varphi_p(t) = a_p + a_{p+1}\, t\, \frac{p+1}{m+1} + \cdots + a_{p+\nu}\, t^{\nu}\, \frac{(p+1)\,(p+2)\,\ldots\,(p+\nu)}{(m+1)\,(m+2)\,\ldots\,(m+\nu)}$$

$$+ a_{p-1}\, \frac{1}{t}\, \frac{m}{p} + \cdots + a_{p-\nu}\, \frac{1}{t^{\nu}}\, \frac{m\,(m-1)\,\ldots\,(m-\nu+1)}{p\,(p-1)\,\ldots\,(p-\nu+1)}, \tag{13}$$

гдѣ m цѣлое положительное число, мѣняющееся вмѣстѣ съ p такъ, что $\lim\limits_{p=\infty} \dfrac{m}{pt} = 1$, $\nu \geqslant \lambda p$, а $o < \lambda < t < 1$.

Пользуясь выраженіемъ (13), Fabry слѣдующимъ образомъ формулируетъ критерій Hadamard'а:

Если

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|\varphi_p(t)|} = 1, \tag{14}$$

то $z = 1$ *есть особая точка функціи* (1) *или представляетъ предѣльное положеніе ея особыхъ точекъ; если же*

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|\varphi_p(t)|} < 1, \tag{15}$$

то $z = 1$ *не есть особая точка строки* (1) *и не представляетъ предѣльнаго положенія ея особыхъ точекъ.*

Обратно: *Если* $z = 1$ *есть особая точка строки* (1) *или предѣльное положеніе ея особыхъ точекъ, то сохраняетъ силу равенство* (14); *если же* $z = 1$ *есть простая точка ряда* (1) *и не представляетъ предѣльнаго положенія его особыхъ точекъ, то справедливо соотношеніе* (15)

Опираясь на условіе (14), Fabry выводитъ двѣ теоремы, изъ которыхъ одна представляетъ частный случай второй, и при помощи нихъ находитъ классы строкъ Тэйлора, имѣющихъ окружности своихъ круговъ сходимости или ихъ части особыми линіями.

Изъ этихъ теоремъ мы укажемъ сперва болѣе общую. Она состоитъ въ слѣдующемъ:

Назовемъ β_p *нѣкоторую вещественную функцію* p, *а черезъ* a'_{p+s} *обозначимъ дѣйствительную часть выраженія* $a_{p+s}\, e^{-\beta_p i}$; *при чемъ* s *мѣняется отъ* $-\nu$ *до* $+\nu$.

Раздѣлимъ далѣе совокупность чиселъ:

$$a'_{p-\nu},\ a'_{p-\nu+1},\ \ldots,\ a'_p,\ \ldots,\ a'_{p+\nu} \qquad (16)$$

на μ *группъ; при чемъ число членовъ въ каждой такой группѣ назовемъ послѣдовательно:*

$$h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_\mu.$$

Обозначимъ черезъ $s_1, s_2, \ldots, s_\mu$ *число перемѣнъ знака соотвѣтственно въ этихъ группахъ. Допустимъ далѣе, что* $\frac{s_\kappa}{h_\kappa}$ $(\kappa = 1, 2, 3, \ldots, \mu)$ *остается все время меньше* α_p, *нѣкоторой функціи* p, *а* $\frac{h_\kappa}{p}$ $(\kappa = 1\ 2, \ldots, \mu)$, *съ безграничнымъ возрастаніемъ* p, *стремится къ нулю. Если, при соблюденіи этихъ условій, для того безконечнаго ряда значеній* p, *для котораго* $\frac{1}{p}\, lg\, |a'_p|$ *стремится къ нулю (предполагается, что* $\lim\limits_{p=\infty} \sqrt[p]{|a'_p|} = 1$), *функція* α_p *имѣетъ своимъ нижнимъ предѣломъ* α *при* $p = \infty$, *то существуетъ особая точка ряда* (1) *на дугѣ окружности его круга сходимости, заключающейся между* $-\alpha\pi$ и $+\alpha\pi$.

Замѣтимъ, что, если $\alpha = 0$, то эта теорема обращается въ другую теорему Fabry, о которой мы упоминали выше и которая имъ была найдена раньше болѣе общей.

Leau [1]), исходя изъ упрощеннаго имъ критерія Hadamard'a, построилъ интересную методу, въ основу которой положены имъ

[1]) *Leau.* „Sur les points singuliers situés sur le cercle de convergence et sur la sommation des séries divergentes“ C. R., 24 octobre 1898.

ряды, которые можно назвать касающимися вдоль группы членовъ. Эта метода позволяетъ составить классы строкъ Тэйлора, имѣющихъ какъ на окружностяхъ своихъ круговъ сходимости, такъ и внѣ ихъ данныя особыя точки.

Считаемъ нужнымъ отмѣтить еще двѣ работы Fabry: „Sur les séries de Taylor“ [1]) и „Sur les points singuliers d'une série de Taylor“ [2]), а также изслѣдованія Lindelöf'a: „Sur la transformation d'Euler et la détermination des points singuliers définie par un développement de Taylor“ [3]) и „Remarques sur un principe général de la théorie des fonctions analytiques“ [4]). Въ нихъ авторы, пользуясь конформнымъ преобразованіемъ односвязной части плоскости въ кругъ при помощи подстановки

$$z = \frac{x}{\alpha - x},$$

гдѣ α опредѣленное число, даютъ выраженія для функціи $f(z)$ (1), годныя въ болѣе широкихъ областяхъ, чѣмъ кругъ сходимости строки (1), благодаря чему представляется возможность въ нѣкоторыхъ случаяхъ судить о положеніи особыхъ точекъ строки (1), какъ на окружности ея круга сходимости, такъ и внѣ его.

Изслѣдованія Borel'я [5]) по суммированію расходящихся рядовъ открыли новый путь для расширенія постановки задачи объ опре-

---

Leau. „Sur le cercle de convergence des séries.“ Ibidem, 7 novembre 1898.
— „Sur les fonctions définies par un développement de Taylor.“ Ibidem, 27 mars 1899.
— „Recherche des singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor.“ Journal de Mathématiques, 5-e série t. V, 1899.

[1]) C. R., 20 décembre 1897.

[2]) Journal de Mathématiques, 5-e série, t. IV, 1898.

[3]) C. R., 28 février 1898.

[4]) Acta Societatis Fennicae, t. XXIV, № 7, Helsingfors, 1898.

[5]) *Borel.* „Sur la sommation des séries divergentes.“ C. R., 30 décembre 1895.
— „Sur la généralisation de la notion de limite et sur l'extension aux séries divergentes sommables du théorème d'Abel sur les séries entières.“ Ibidem, 13 janvier 1896.
— „Fondaments de la théorie des séries divergentes sommables.“ Journal de Mathém., 5-e série, t. II, 1896.

дѣленіи особыхъ точекъ строки (1), — представилась возможность замѣнить окружность круга сходимости ряда (1) границей основного полигона Borel'я.

Укажемъ, какъ строится этотъ многоугольникъ. Вообразимъ на плоскости перемѣннаго z особыя точки: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k, \ldots$ основной вѣтви функціи $f(z)$ [т. е., вѣтви, разлагающейся въ рядъ (1)]. Соединимъ точку $z = o$ съ этими точками прямолинейными отрѣзками: $\overline{o\alpha_1}, \overline{o\alpha_2}, \ldots, \overline{o\alpha_k}, \ldots$ и черезъ каждую изъ этихъ точекъ проведемъ прямую, перпендикулярную къ прямой, соединяющей ее съ точкой $z = o$. Эти прямыя раздѣлятъ плоскость перемѣннаго z на многоугольники. Выберемъ изъ нихъ тотъ, который заключаетъ внутри себя точку $z = o$ и не содержитъ внутри себя ни одной особой точки основной вѣтви функціи $f(z)$. Это и есть основной полигонъ Borel'я. Его мы будемъ обозначать K.

Самъ Borel посвятилъ немного изслѣдованій относительно опредѣленія особыхъ точекъ строки (1), расположенныхъ на границѣ его полигона. Онъ установилъ лишь слѣдующія положенія:

Строка Тэйлора (1), *гдѣ между коэффиціентами* a_n *нѣтъ иной зависимости для* $n > N$, *кромѣ той, которая выражается соотношеніемъ*:

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[p]{|a_n|} = \frac{1}{\rho}, —$$

при чемъ ρ *число конечное, отличное отъ нуля, — имѣетъ окружность* $|z| = \rho$ *дѣйствительнымъ купюромъ* [1]).

Строка

$$\sum_{o}^{\infty} a_n z^{c_n},$$

Borel. „Mémoire sur les séries divergentes." Annales sc. de l'École normale supérieure, 3-e série, t. X, 1899.

См. также его „Leçons sur les séries divergentes." Paris, Gauthier-Villars, 1901.

[1]) *Borel.* „Sur les séries de Taylor." C. R., 14 décembre 1896.

— „Sur les séries de Taylor." Acta Mathematica, t. 21, 1897.

гдѣ

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[c_n]{|a_n|} = \frac{1}{\rho},$$

а $c_{n+1} - c_n > \kappa \sqrt{c_n}$ *(κ опредѣленное положительное число), имѣетъ окружность* $|z| = \rho$ *дѣйствительнымъ купюромъ* [1])

Прекраснымъ продолжателемъ идеи Borel'я оказался Servant [2]). Онъ поставилъ общую задачу: *Опредѣлить особыя точки строки* (1), *лежащія на границѣ полигона K.* Отмѣтимъ существенный результатъ, къ которому пришелъ Servant. Мы только нѣсколько измѣнимъ его обозначенія.

Пусть будетъ:

$$\alpha_\kappa = |\alpha_\kappa| \, e^{i\vartheta_\kappa} \tag{17}$$

особая точка строки (1), расположенная на сторонѣ l_κ полигона K. Обозначимъ далѣе черезъ $\vartheta\,(az)$ выраженіе:

$$\vartheta\,(az) = \sum_{o}^{\infty} \frac{a_n\, a^n\, z^n}{n!}, \tag{18}$$

гдѣ

$$z = \varepsilon\, e^{\vartheta i};$$

при чемъ $\varepsilon > o$, а ϑ вещественное число, содержащееся между o и 2π.

Допустимъ, что ϑ амплитуда какой-либо точки стороны l_κ, не совпадающей съ какимъ-либо концомъ послѣдней. Въ такомъ случаѣ можемъ написать:

---

[1]) *Borel.* „Sur la rayon de sommabilité d'un développement de Taylor." C. R., 5 octobre 1896.

— „Sur les séries de Taylor qui admettent leur cercle de convergence comme coupure." Journal de Mathématiques, t. 2, 1896,

[2]) *Servant.* „Sur les points singuliers d'une fonction définie par une série de Taylor." C. R., 9 janvier 1899.

— „Essai sur les séries divergentes." Thèse de doctorat de la Faculté des Sciences de Paris, 1899.

(19) $$e^{\frac{\varepsilon\, cos\,(\vartheta-\vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|}} = \lim_{a=\infty} \sqrt[a]{|\,\vartheta\,(az)\,|},$$

или

(20) $$\frac{\varepsilon\, cos\,(\vartheta-\vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|} = \lim_{a=\infty} \frac{1}{a}\, lg\,|\,\vartheta\,(az)\,|.$$

Это соотношеніе, представляющее важное пріобрѣтеніе, могло бы быть значительно упрощено. Такъ, какъ впервые было обнаружено въ нашей работѣ: „Изысканіе особыхъ точекъ функціи, опредѣляемой строкою Тэйлора“ [1]), число a можно считать цѣлымъ.

Далѣе, цѣлую функцію $\vartheta\,(az)$ можно было бы замѣнить полиномомъ конечной степени при конечномъ a, какъ это было впослѣдствіи указано Borel'емъ въ его „Leçons sur les séries divergentes“, а также выполнено нами въ нашей вышеупомянутой работѣ.

Какъ ни важна формула (20) Servant'а, все-же она не даетъ полнаго рѣшенія вопроса,—ея одной вообще недостаточно для опредѣленія особыхъ точекъ, расположенныхъ на границѣ многоугольника K.

Вопреки утвержденію ея автора, она не приводитъ къ полному рѣшенію этого вопроса по слѣдующимъ причинамъ.

Предположимъ, что $\vartheta = \varphi_1$ и $\vartheta = \varphi_2$ суть амплитуды двухъ точекъ стороны l_κ полигона K. Въ такомъ случаѣ $|\,\alpha_\kappa\,|$ и ϑ_κ и, слѣдовательно, α_κ опредѣлятся при помощи уравненій:

$$\frac{\varepsilon}{|\,\alpha_\kappa\,|}\, cos\,(\varphi_1-\vartheta_\kappa) = \lim_{a=\infty} \frac{1}{a}\, lg\,|\,\vartheta\,(a\,\varepsilon\, e^{\varphi_1 i})\,|$$

и

$$\frac{\varepsilon}{|\,\alpha_\kappa\,|}\, cos\,(\varphi_2-\vartheta_\kappa) = \lim_{a=\infty} \frac{1}{a}\, lg\,|\,\vartheta\,(a\,\varepsilon\, e^{\varphi_2 i})\,|.$$

---

[1]) Матем. Сборн., т. XXVI.
Мы вывели эту формулу при $\varepsilon = 1$.

Однако $|\alpha_\kappa|$ и ϑ_κ, опредѣляемыя на основаніи предыдущихъ формулъ, лишь тогда представляютъ радіусъ-векторъ и амплитуду особой точки строки (1), если φ_1 и φ_2 суть дѣйствительно амплитуды точекъ одной и той же стороны полигона K. Но предугадать это обстоятельство заранѣе невозможно.

Отсюда становится ясной необходимость разысканія формулы, которая давала бы выраженіе для $\dfrac{\sin(\vartheta - \vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|}$.

Подобное дополненіе было сдѣлано впервые нами въ нашей работѣ: „Изысканіе особыхъ точекъ функціи, опредѣляемой строкою Тэйлора“. Вмѣстѣ съ тѣмъ методѣ мы дали такое направленіе, что она оказалась годной не только для опредѣленія особыхъ точекъ строки (1), лежащихъ на границѣ полигона K, но также и внѣ ея.

Какъ намъ кажется, нами найденъ наипростѣйшій путь, ведущій къ рѣшенію основной задачи теоріи строки Тэйлора — опредѣленія особыхъ точекъ основной вѣтви функціи $f(z)$ (1).

Прежде чѣмъ перейти отъ общихъ изслѣдованій по изысканію особыхъ точекъ строки Тэйлора къ болѣе частнымъ, отмѣтимъ еще критерій Mittag—Leffler'a, предложенный имъ въ его замѣткѣ: „Un critère pour reconnaître les points singuliers de la branche uniforme d'une fonction monogène“ [1]).

Возьмемъ внутри круга $|z| < \rho$ сходимости строки (1) точку a и разложимъ функцію $f(z)$ (1) по степенямъ $z - a$:

$$f(z) = \sum_0^\infty f^{(n)}_{(a)} \frac{(z-a)^n}{n!}. \tag{21}$$

Вообразимъ себѣ, что изъ точки a проведены къ особымъ точкамъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\kappa, \ldots$ основной вѣтви функціи $f(z)$ (21) прямолинейные отрѣзки $\overline{o\alpha_1}, \overline{o\alpha_2}, \ldots, \overline{o\alpha_\kappa}, \ldots$ и отъ этихъ точекъ продолжены до безконечности. Сдѣлаемъ вдоль этихъ продолженій безконечно - тонкіе купюры. Плоскость перемѣннаго z безъ этихъ купюровъ принято называть основною звѣздою Mittag - Leffler'a.

---

1) C. R., 12 aout 1901.

Критерій Mittag-Leffler'а рѣшаетъ вопросъ, является ли произвольно взятая точка плоскости перемѣннаго z вершиной звѣзды A или нѣтъ.

Обозначимъ черезъ α и ς два положительныхъ количества, меньшія единицы, и пусть $e_1^{(\nu)}$, $e_2^{(\nu)}$, ..., $e_{\nu-1}^{(\nu)}$ будутъ постоянныя, опредѣляемыя по формулѣ:

$$\lambda\,(\lambda+1)\,(\lambda+2)\ldots(\lambda+\nu-1) =$$

$$= \lambda^{\nu} + e_1^{(\nu)}\,\lambda^{\nu-1} + e_2^{(\nu)}\,\lambda^{\nu-2} + \ldots + e_{\nu-1}^{(\nu)}\lambda.$$

Тогда критерій Mittag-Leffler'а въ его простѣйшемъ выраженіи гласитъ: *Для того, чтобы точка x служила вершиной звѣзды A, необходимо и достаточно, чтобы, независимо отъ α и при какомъ-угодно маломъ $\varepsilon > 0$, выполнялось неравенство:*

$$\left| e_{\nu-1}^{(\nu)} f'(a)\frac{x-a}{lg\frac{1}{\alpha}} + \ldots + e_1^{(\nu)} f^{(\nu-1)}(a)\left(\frac{x-a}{lg\frac{1}{\alpha}}\right)^{\nu-1} + f^{(\nu)}(a)\left(\frac{x-a}{lg\frac{1}{\alpha}}\right)^{\nu}\right|$$

$$> \nu\,!\left(\frac{1-\varepsilon}{1-\alpha}\right)^{\nu}$$

для безконечнаго ряда чиселъ ν, а неравенство:

$$\left| e_{\nu-1}^{(\nu)} f'(a)\frac{(x-a)(1-\varsigma)}{lg\frac{1}{\alpha}} + \ldots + e_1^{(\nu)} f^{(\nu-1)}(a)\left[\frac{(x-a)(1-\varsigma)}{lg\frac{1}{\alpha}}\right]^{\nu-1} + \right.$$

$$\left. \ldots + f^{(\nu)}(a)\left[\frac{(x-a)(1-\varsigma)}{lg\frac{1}{\alpha}}\right]^{\nu}\right| < \nu\,!\left(\frac{1-\varepsilon}{1-\alpha}\right)^{\nu}$$

сохраняло силу при достаточно большихъ ν и при достаточно малыхъ α и ε.

Независимо отъ сложности критерія Mittag-Leffler'а, относительно него въ правѣ сдѣлать слѣдующее замѣчаніе: при его приложеніи приходится пробовать каждую точку плоскости перемѣннаго z, лежащую, какъ на окружности круга сходности ряда (21), такъ и внѣ его. Слѣдовать же этому неопредѣленному пути на самомъ дѣлѣ едва ли цѣлесообразно, разъ рѣчь идетъ объ опредѣленіи особыхъ точекъ функціи (21).

Если присоединить сюда еще работы Pincherle'я [1]), въ основу которыхъ положено функціональное исчисленіе, то вотъ всѣ общія изслѣдованія, намъ извѣстныя, въ которыхъ авторы пытались рѣшить задачу: опредѣлить особыя точки функціи (1).

Но, кромѣ нихъ, въ математической литературѣ есть множество изслѣдованій, посвященныхъ изысканію особыхъ точекъ строкъ Тэйлора частныхъ видовъ. Сюда можно отнести изысканіе Hadamard'омъ [2]) полюсовъ однозначной функціи, данной строкою Тэйлора, его теорема [3]), показывающая, какъ составляются особыя точки функціи:

$$\sum_0^\infty a_n\ b_n\ z^n,$$

если извѣстны особыя точки функцій:

$$\sum_0^\infty a_n\ z^n$$

и

$$\sum_0^\infty b_n\ z^n,$$

---

[1]) *Pincherle.* „Sur le calcul fonctionnel distributif". Math. Annalen, t. XLIX, 1897.

— „Sul confronto delle singolarità delle funzioni analitiche". Rendiconto de l'Ac. des Sc. de Bologne, 30 janvier 1898.

— „Di alcune operazioni atte ad aggiungere o togliere singolarità in una funzione analitica". Annali di Mathematica, III-e série, t. IV, 1900.

[2]) *Hadamard.* „Sur la recherche des discontinuités polaires". C. R., 8 avril 1889.

— „Essai ect.", p. 118 et suiv..

См. также его: „La série de Taylor etc.", p. 38 et suiv..

[3]) *Hadamard.* „Théorème sur les séries entières". C. R., 8 mars 1897.

— „Sur les séries entières." Procès-verbaux de la Soc. des Sc. phys. et nat. de Bordeaux, 1897.

— „Théorème sur les séries entières". Acta Mathematica, t. XXII, 1898.

См. также его: „La série de Taylor etc.", 1901, p. 69 et suiv..

детально разработанная имъ и другими математиками [1]), изслѣдованія Le Roy [2]) и Desaint'a [3]), въ основу которыхъ положены опредѣленные интегралы, и др..

Кромѣ перечисленныхъ изслѣдованій, въ математической литературѣ почти-что нѣтъ работъ, имѣющихъ своею прямою цѣлью опредѣленіе особыхъ точекъ строки (1). Вслѣдъ за Borel'емъ и Mittag-Leffler'омъ математики увлеклись изысканіемъ наиболѣе удобной формы представленія основной вѣтви функціи (1), которая годилась бы въ области, болѣе широкой, чѣмъ кругъ сходимости строки (1), и прежніе пути, съ такимъ успѣхомъ проложенные Hadamard'омъ, Fabry и Servant'омъ, какъ бы совершенно забыты.

Предлагая эту работу, мы еще разъ имѣемъ въ виду подчеркнуть цѣлесообразность общихъ изслѣдованій по изысканію особыхъ точекъ строки (1). Въ ней мы не стараемся дать новый методъ сравнительно съ тѣмъ, который былъ нами развитъ въ нашей предыдущей работѣ по строкѣ Тэйлора. Въ ней мы задаемся лишь цѣлью строго и детально обосновать всѣ наши положенія и вмѣстѣ съ тѣмъ сдѣлать убѣдительнымъ значеніе нашего метода. При этомъ мы остановились лишь на опредѣленіи особыхъ точекъ, лежащихъ на границѣ основного полигона Borel'я. Какъ расширить методъ, чтобы имѣть возможность опредѣлять положеніе особыхъ точекъ внѣ этого полигона, достаточно выяснено въ нашей работѣ: „Изысканіе особыхъ точекъ функціи, опредѣляемой строкою Тэйлора.“

---

1) *Borel.* „Sur les développements des fonctions uniformes entières en série de Taylor.“ C. R., 14 novembre 1898.
— „Sur les singularités des séries de Taylor.“ Bull. de la Société Mathém. de France, t. XXVI, p. 238—248.
Leau. „Extension d'un théorème de M. Hadamard à l'étude des séries de Taylor.“ Ibidem, p. 267—270.
Hurwitz. „Sur un théorème de M. Hadamard.“ C. R., 6 février 1899.
Dell' Agnola. Estensione di un teorema di Hadamard (двѣ замѣтки). Atti del Institute Veneto. 14 mai 1899 et 18 juin 1899.

2) *Le Roy.* „Sur les séries divergentes.“ C. R., 14 mai 1900.
— „Rectification à la note précédente.“ Ibidem, 5 juin 1900.
— „Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor.“ Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2-e série, t. II, 1901.

3) *Desaint.* „La série de Taylor et la représentation exponentielle.“ Annales de l'École Normale Supérieure, 3-e série, t. 21, 1904.

Переходимъ теперь къ краткому изложенію содержанія нашей настоящей работы.

Глава 1. Въ этой главѣ мы сперва выводимъ первую основную формулу для опредѣленія положенія особыхъ точекъ строки (1), лежащихъ на границѣ основного полигона Borel'я, а именно:

$$\frac{\cos(\varphi - \vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|} = \lim_{p=\infty} \frac{1}{p} \lg |\vartheta(pe^{\varphi i})|, ^{1)} \tag{23}$$

гдѣ

$$\vartheta(p\, e^{\varphi i}) = \sum_0^\infty \frac{a_s\, p^s\, e^{s\varphi i}}{s!}, \tag{23'}$$

$|\alpha_\kappa|$ и ϑ_κ суть радіусъ-векторъ и амплитуда особой точки строки (1), лежащей на границѣ полигона K.

Отмѣтимъ, что въ формулѣ (23) p цѣлое положительное число.

Далѣе, въ формулѣ (23) символъ $\vartheta(p\, e^{\varphi i})$ замѣняется выраженіемъ:

$$\sum_{\Delta_p}^{3p} \frac{\rho_s\, p^s \cos(\varphi_s + s\varphi - \beta_p)}{s!}, \tag{24}$$

гдѣ

$$a_s = \rho_s\, e^{i\varphi_s},$$

β_p какая-либо вещественная функція p, которая безгранично растетъ вмѣстѣ съ p и при томъ такъ, что $\lim\limits_{p=\infty} \frac{\psi(p)}{p} = 0$.

Въ концѣ главы формула (23) примѣняется къ двумъ новымъ примѣрамъ строкъ Тэйлора, особыя точки которыхъ расположены на оси вещественныхъ z.

Глава 2. Глава 2 служитъ подготовительной къ слѣдующимъ двумъ главамъ. Здѣсь устанавливаются теоремы и формулы, на которыхъ основывается нашъ методъ.

---

[1]) Какъ мы видѣли, эта формула должна быть приписана Servant'у. Нами лишь обнаружено, что p можно считать цѣлымъ числомъ.

Прежде всего предлагается новый критеріумъ, рѣшающій вопросъ, является ли разсматриваемая особая точка окружности круга сходимости ряда (1) особой или нѣтъ. Пусть радіусъ ρ круга сходимости ряда (1) равенъ 1. Тогда этотъ критеріумъ формулируется слѣдующимъ образомъ:

Пусть выполняется равенство:

$$l_\varphi = 1\,, \tag{25}$$

гдѣ

$$l_\varphi = \lim_{p=\infty} \frac{1}{p}\, lg \mid \vartheta\,(p\,e^{\varphi i}) \mid . \tag{25'}$$

Въ такомъ случаѣ $e^{\varphi i}$ *служитъ особой точкой строки* (1) *или предѣльнымъ положеніемъ ея особыхъ точекъ.*

Если же

$$l_\varphi < 1\,, \tag{26}$$

то $e^{\varphi i}$ *не есть особая точка ряда* (1) *и не представляетъ предѣльнаго положенія его особыхъ точекъ.*

Обратно: *Если* $e^{\varphi i}$ *есть особая точка строки* (1) *или предѣльное положеніе ея особыхъ точекъ, то выполняется условіе* (25); *если же* $e^{\varphi i}$ *не служитъ особой точкой ряда* (1) *и не представляетъ предѣльнаго положенія его особыхъ точекъ, то имѣетъ мѣсто неравенство* (26).

Этотъ критерій далѣе обобщаемъ, замѣняя φ вещественной функціей φ_p перемѣннаго p.

Пользуясь этимъ критеріумомъ въ его обобщенномъ видѣ, устанавливаемъ свою основную теорему, доказательство которой въ нашей работѣ: „Изысканіе особыхъ точекъ функціи и пр.“ было проведено недостаточно строго.

Трактуемая теорема состоитъ въ слѣдующемъ:

Предполагая, что a'_p *есть дѣйствительная часть* $a_p\, e^{-i\beta_p}$, *гдѣ* β_p *вещественная функція* p, *допустимъ, что*

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{\mid a'_{p_n} \mid} = 1. \tag{27}$$

Обозначимъ черезъ q число перемѣнъ знака въ рядѣ чиселъ:

$$a'_{p-\nu},\ a'_{p-\nu+1},\ \ldots,\ a'_{p},\ \ldots,\ a'_{p+\nu} \tag{28}$$

при $p = p_n$; *при чемъ*

$$\nu = \lambda p,$$

гдѣ

$$o \leqq \lambda < 1 \text{ и } o < \lim_{p=\infty} \lambda < 1.$$

Назовемъ далѣе α *нижній предѣлъ отношенія* $\frac{q}{2\nu}$ *при* $n = \infty$.

Въ такомъ случаѣ рядъ (1) *имѣетъ особую точку на дугѣ окружности* $|z| = 1$ *своего круга сходимости, содержащейся между* $-\alpha\pi$ *и* $+\alpha\pi$.

Въ приложеніи къ случаю строки (1), имѣющей на окружности $|z| = 1$ своего круга сходимости одну или двѣ особыя точки, предыдущая теорема приводитъ къ двумъ положеніямъ, существенно важнымъ въ нашихъ дальнѣйшихъ изслѣдованіяхъ.

Первая изъ этихъ теоремъ относится къ случаю строки (1), когда на окружности $|z| = 1$ ея круга сходимости расположена ея одна особая точка $e^{\varphi i}$, и состоитъ въ слѣдующемъ:

Обозначимъ черезъ α_n *вещественную часть выраженія* $e^{(n\vartheta-\beta_p)i}\, a_n$. *Пусть будетъ далѣе*

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|\alpha_{p_n}|} = 1. \tag{30}$$

Предположимъ, что число перемѣнъ знака въ рядѣ

$$\alpha_{p-\nu},\ \alpha_{p-\nu+1},\ \ldots,\ \alpha_p,\ \ldots,\ \alpha_{p+\nu} \tag{31}$$

при $p = p_n$ *будетъ* q. *Назовемъ* α *нижній предѣлъ отношенія* $\frac{q}{2\nu}$ *при* $n = \infty$. *Въ такомъ случаѣ имѣемъ:*

$$\pi\alpha = \vartheta - \varphi, \tag{32}$$

если

$$\varphi \leqq \vartheta \leqq \pi + \varphi, \tag{33}$$

и

$$\pi\alpha = \varphi - \vartheta, \tag{34}$$

если

$$-\pi + \varphi \leqq \vartheta \leqq \varphi. \tag{35}$$

Другая теорема относится къ случаю строки (1), имѣющей на окружности $|z| = 1$ своего круга сходимости двѣ особыя точки: $e^{\vartheta_1 i}$ и $e^{\vartheta_2 i}$. Ее можно формулировать слѣдующимъ образомъ:

Пусть будетъ:

$$\beta'_s = R\left[e^{\frac{s(\vartheta_1+\vartheta_2)}{2}i - \beta_p i} a_s\right]. \qquad (36)$$

При этомъ β_p выбирается подъ условіемъ, чтобы

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|\beta'_{p_n}|} = 1. \qquad (37)$$

Обозначимъ черезъ q число перемѣнъ знака между послѣдовательными членами ряда:

$$\beta'_{p-\nu}, \beta'_{p-\nu+1}, \ldots, \beta'_p, \ldots, \beta'_{p+\nu} \qquad (38)$$

при $p = p_n$. Назовемъ далѣе α нижній предѣлъ отношенія $\frac{q}{2\nu}$ при $n = \infty$. Въ такомъ случаѣ, если $\vartheta_1 > \vartheta_2$, имѣемъ:

$$\vartheta - \vartheta_2 = \pi\alpha \qquad (39)$$

или

$$\vartheta_1 - \vartheta = \pi\alpha, \qquad (39')$$

гдѣ

$$\vartheta = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}.$$

Глава 3. Въ этой главѣ выводится вторая основная формула для опредѣленія особыхъ точекъ, лежащихъ на границѣ основного полигона Borel'я. Этотъ выводъ основывается на двухъ предыдущихъ теоремахъ, а также и на слѣдующемъ положеніи: *Пусть ξ будетъ особая точка строки* (1). *Въ такомъ случаѣ $e^{-\frac{e^{\varphi i}}{\xi}}$ представляетъ особую точку функціи:*

$$\sum_0^\infty \vartheta(n e^{\varphi i}) z^n. \qquad (40)$$

Пусть будетъ:

$$\delta_\sigma = \sum_{0}^{\infty} \frac{\rho_s \sigma^s \cos(\sigma\vartheta + \varphi_s + s\varphi - \beta_p)}{s!}; \tag{41}$$

при чемъ β_p выбирается подъ условіемъ, чтобы

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|\delta_{p_n}|} = 1.$$

Предположимъ, что q представляетъ число перемѣнъ знака между послѣдовательными членами ряда чиселъ:

$$\delta_{p-\nu}, \delta_{p-\nu+1}, \ldots, \delta_p, \ldots, \delta_{p+\nu}. \tag{42}$$

Обозначимъ черезъ $\alpha(\vartheta)$ нижній предѣлъ отношенія $\frac{q}{2\nu}$ при $n = \infty$. Тогда трактуемая формула напишется такъ:

$$\frac{\sin(\varphi - \vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|} = m_\varphi, \tag{43}$$

гдѣ

$$m_\varphi = \pi\alpha(\vartheta) - \vartheta, \tag{44}$$

если

$$1 \leqslant \vartheta \leqslant \pi - 1,$$

и

$$m_\varphi = -\pi\alpha(\vartheta) - \vartheta, \tag{45}$$

если

$$-\pi + 1 \leqslant \vartheta \leqslant -1.$$

Если $\vartheta = 0$, то формулу (43) надлежитъ замѣнить слѣдующей:

$$\frac{\sin(\varphi - \vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|} = \overline{m}_\varphi. \tag{46}$$

Здѣсь

$$\overline{m}_\varphi = \pi\alpha(o),$$

а

$$\alpha(o) = \underline{\lim}_{n=\infty} \frac{q}{2\nu};$$

при чемъ q означаетъ число перемѣнъ знака цѣлой функціи

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{\rho_s\, \sigma^s \cos(\varphi_s + s\varphi - \beta)}{s!} \tag{47}$$

при $\sigma = p - \nu,\ p - \nu + 1,\ \ldots,\ p + \nu$ и $p = p_n$.

Комбинируя формулу (23) съ формулой (43), находимъ три соотношенія:

$$|\alpha_\kappa| = \frac{1}{\sqrt{l_\varphi^2 + m_\varphi^2}};$$

$$\cos(\varphi - \vartheta_\kappa) = \frac{l_\varphi}{\sqrt{l_\varphi^2 + m_\varphi^2}}; \tag{48}$$

$$\sin(\varphi - \vartheta_\kappa) = \frac{m_\varphi}{\sqrt{l_\varphi^2 + m_\varphi^2}}.$$

Второе изъ этихъ соотношеній можно замѣнить слѣдующимъ:

$$|\varphi - \vartheta_\kappa| < \frac{\pi}{2}.$$

Въ случаѣ, если $\vartheta = 0$, для опредѣленія α_κ имѣемъ формулы:

$$|\alpha_\kappa| = \frac{1}{\sqrt{l_\varphi^2 + m_\varphi^2}};$$

$$\cos(\varphi - \vartheta_\kappa) = \frac{l_\varphi}{\sqrt{l_\varphi^2 + m_\varphi^2}}; \tag{49}$$

$$|\varphi - \vartheta_\kappa| < \frac{\pi}{2}.$$

Глава 4. Здѣсь обнаруживается, что при изысканіи α (ϑ) число q перемѣнъ знака въ рядѣ чиселъ (42) можно замѣнить числомъ q' перемѣнъ знака между послѣдовательными членами ряда:

$$s_{p-\nu},\ s_{p-\nu+1},\ \ldots,\ s_p,\ \ldots,\ s_{p+\nu}, \tag{50}$$

гдѣ

$$s_n = \sum_{\sigma_p}^{3p} \frac{\rho_s\, n^s \cos(n\vartheta + s\varphi + \varphi_s - \beta_p)}{s!}; \tag{51}$$

при чемъ $\sigma_p = 0$ или Δ_p.

Значитъ, при вычисленіи $\alpha\,(o)$ число перемѣнъ знака выраженія (47) при $\sigma = p - \nu,\ p - \nu + 1,\ \ldots,\ p + \nu$ можно замѣнить числомъ перемѣнъ знака выраженія:

$$\tau_n = \sum_{\sigma_p}^{3p} \frac{\rho_s\, n^s \cos\,(\varphi_s + s\varphi - \beta_p)}{s!} \tag{52}$$

при $n = p - \nu,\ p - \nu + 1,\ \ldots,\ p + \nu$.

Работы по строкѣ Тэйлора, появившіяся съ 1900 года и не указанныя нами во „Введеніи". [1])

Mittag-Leffler. Sur une formule de M. Fredholm. C. R., 132, 751 — 753, 1901.

„ Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. Acta Mathematica, t. 26, 1902.

„ Sur l'intégrale de Laplace-Abel. C. R., 135, 937—939, 1902.

„ Une généralisation de l'intégrale de Laplace-Abel. C. R., 136, 537—539, 1903.

„ Un nouveau théorème général de la théorie des fonctions analytiques. Acta Mathematica, t. 29, 101—182, 1905.

Fredholm. Sur la méthode du prolongement analytique de M. Mittag-Leffler. Stockh. Öfv., 58, 203—205, 1901.

Lindelöf. Sur le prolongement analytique. M. S. F. Bull., 29, 157—160, 1901.

„ Une application de la théorie des résidus au prolongement analytique des séries de Taylor. C. R., 135, 1315—1318, 1902.

„ Sur l'application de la théorie des résidus au prolongement analytique des séries de Taylor. Journal de Mathématiques, 5-e série, t. 9, 1903.

„ Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

Phragment. Sur le domaine de convergence da l'intégrale infinie

$$\int_0^\infty F(ax)\, e^{-a}\, da. \quad \text{C. R., 10 juin 1901.}$$

---

[1]) Работы же по 1900 годъ включительно указаны Hadamard'омъ въ его „La série de Taylor et son prolongement analytique".

L. Desaint. Sur le séries de Taylor et les étoiles correspondantes. C. R., 132, 1102—1105, 1901.
„ Théorèmes généraux sur les points singuliers des fonctions données par une série de Taylor. Journal de Mathématiques, 5-e série, t. 8, 1902.
„ Sur le problème de la transformation dans les séries de Taylor. C. R., 136, 1423—1425, 1903.

Pringsheim. Ueber die Anwendung der Cauchyschen Multiplicationsregel auf bedingt konvergente oder divergente Reihe. American M. S. Trans., 2, 404—412, 1901.
„ Ueber die Divergenz gewisser Potenzreihen an der Konvergenzgrenze. Münch. Ber., 31, 505—524, 1901.
„ Ueber den Divergenzcharakter gewisser Potenzreihen an der Konvergenzgrenze. Acta Mathematica, t. 28, 1904.

Hanni. Ueber Borel's Verallgemeinerung des Grenzbegriffs. Monatsh. für Math., 12, 265—289, 1901.
„ Ueber die Beziehungen zwischen der Darstellung eines eindeutigen Zweiges einer monogenen Functione durch Herrn Mittag-Leffler, der Methode der Mittelwerte des Herrn Borel und der Transformation des Herrn Lindelöf. Acta Mathematica, t. 29, 1904.

Walter. Ueber den Cauchy-Hadamardschen Satz vom Konvergenzradius, nebst einer Dartellung der Dedekindschen Irrationalzahlentheorie. Monatsh. für Math., 12,49—81, 1901.

Dell'Agnola. Sulle serie di polinomi che representano un ramo di funzioni analytica monogena. Annali di Mat. (3) 6, 1901.
„ Sulle serie di polinomi. Ven. Ist. Atti 60, 1901.
„ Analogie fra alcune serie di polinomi e le serie di potenze. Nota I e II. Ven. Ist. Atti 64, 1905.

Borel. Le prolongement analytique et les séries sommables. Math. Annalen, Bd. 55, 1901.
„ Sur la généralisation du prolongement analytique. C. R., 135, 150—152, 1902.

Jahraus. Das Verhalten der Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise. Pr. Gymn. Ludwigshafen a. Rh. 56 s. 8", 1902.

Painlevé. Sur le développement des fonctions analytiques en série de polynomes. C. R., 135, 11—15, 1902.
„ Observations sur cette communication de M. Borel. C. R. 135, 1902.

V. Koch. Applications nouvelles de la fonction exponentielle. Stockh. Ak. Bihang 28, 1903.

„ Sur le prolongement analytique d'une série de Taylor. Acta Mathematica, t. 27, 1903.

„ Sur une propriété arithmétique du développement en série de Taylor d'une fonction algébrique. Arkiv f. Mat., Astr. och. Fys. 1, 627—641, 1904.

„ Sur une extension du théorème d'Eisenstein. Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. 1, 643—650, 1904.

„ Remarques sur quelques séries de polynomes. S. M. F. Bull., 34, 269—274, 1907.

G. H. Hardy. Researches in the theory of divergent series und divergent integrals. Quar. Journ., 35, 22—66, 1903.

„ A method for determining the behaviour of certain classes of power series near a singular point of the circle of convergence. Lond. M. S. Proc. (2) 3, 381—389, 1905.

„ On a class of analytic functions. Lond. M. S. Proc. (2) 3, 441—460, 1905.

„ On the singularities of functions defined by Taylor's series. Lond. M. S. Proc. (2) 5, 197—205, 1907.

Maillet. Sur les séries divergentes et les équations différentielles. Ann. de l'École Norm. Sup. (3) 20, 1903.

Faber. Ueber die polynomische Entwickelungen. Math. Ann., Bd. 57, 1903

„ Ueber die Fortsetzbarkeit gewisser Taylorschen Beihen. Math. Ann., Bd. 57, 1903.

„ Ueber die Nichtfortsetzbarkeit gewisser Potenzreihen. Münch. Ber., 34, 63—74, 1904.

„ Ueber die polynomische Entwickelungen. Math. Ann., Bd. 64, 1907.

„ Bemerkungen zu einem functionentheoretischen Satz des Herrn Hadamard. Deutsche Math. Ver. 16, 285—298, 1907.

W. B. Ford. Sur la fonction définie par une série de Maclaurin. Journal de Mathématiques (5) 9, 1903.

N. Nielson. Sur quelques transformations d'une série de puissances. Annali di Mat. (3) 10, 1904.

P. Fatou. La série de Fourier et la série de Taylor sur son cercle de convergence. C. R., 139, 850—852, 1904.

„ Sur l'intégrale de Poisson et les lignes singulières des fonctions analytiques. C. R., 140, 359—360, 1905.

P. Fatou. Séries trigonométriques et séries de Taylor. Acta Mathematica, t. 30, 1907.

C. W. Oséen. Sur un théorème de M. Le Roy. Arkiv. f. Mat., Astr. och Fys. 2, № 21, 1905.

P. Dienes. La série de Taylor sur le cercle de convergence. C. R. 140, 489—491, 1905.

„ Sur les singularités des fonctions analytiques. C. R., 21 décembre 1908.

„ Sur les singularités des fonctions analytiques en dehors du cercle de convergence. C. R., 15 mars 1909.

Fabry. Sur la série de Taylor et ses points singuliers. Nouvelles Ann. de Mathématiques, 1906, p. 503.

„ Sur la série de Taylor et ses points singuliers. Nouv. Ann. de Mathém. (4) 6, 503—507, 1907.

„ Ordre d'une série de Taylor. C. R., 6 décembre 1909.

Barnes. On certain functions defined by Taylor's series of finite radius of convergence. Lond. M. S. Proc. (2) 4, 284—316, 1907.

А. П. Пшеборскій. Изслѣдованія по теоріи аналитическихъ функцій. Задача о продолженіи ряда Тэйлора. Харьковъ, 1908.

Д. Д. Мордухай-Болтовской. О нѣкоторыхъ ариѳметическихъ свойствахъ регулярныхъ интеграловъ линейныхъ диффиренціальныхъ уравненій. Мат. Сбор., т. XXVI, 1907.

P. Dienes. Sur les points critiques logarithmitiques. C. R., 26 avril 1909.

„ Sur les singularités algébrico-logarithmiques. C. R., 29 novembre 1909.

„ Essai sur les singularités des fonctions analytiques. Journal de Mathém., 6 série, t. 15, 1909.

M. Riesch. Sur les séries de Dirichlet et les séries entières. C. R., 22 novembre 1909.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ВВЕДЕНІЕ.

ГЛАВА I.

Выводъ первой основной формулы для опредѣленія особыхъ точекъ строки Тэйлора, лежащихъ на границѣ полигона Бореля. Приложеніе этой формулы въ одномъ случаѣ.

ГЛАВА II.

Основныя теоремы и формулы.

ГЛАВА III.

Опредѣленіе положенія особыхъ точекъ строки Тэйлора, расположенныхъ на границѣ полигона Бореля.

ГЛАВА IV.

Упрощеніе задачи изысканія числа перемѣнъ знака въ рядѣ (132) главы 3.

Къ вопросу о горныхъ породахъ съ высшихъ пунктовъ восточной и западной вершинъ Эльбруса.

В. В. Дубянскаго.

О горныхъ породахъ Эльбруса существуетъ довольно обширная литература *); но тѣмъ не менѣе наши свѣдѣнія о петрографическихъ особенностяхъ этой высочайшей изъ вулканическихъ областей Кавказа все еще вообще довольно скромны. Такъ, напримѣръ, образцы горныхъ породъ, добытые Мерцбахеромъ и Деши съ высшихъ пунктовъ западной вершины Эльбруса и описанные уже неоднократно

*) *Kupfer*: „Voyage dans les environs du Mt. Elbrus dans le Caucase entrepris en 1829". Rapport fait à l'Academie S-Péterbourg. 1830.

Abich: „Ueber die geologische Natur des armenischen Hochlandes". Dorpat. 1843.

Tschemak: „Felsarten aus dem Kaukasus". Miner. Mittheil. 1872.

Faure: „Récherches géologiques dans la partie centrale de la chaîne du Caucase". Zurich. 1876.

Lagorio: „Die Andesite des Kaukasus". Dorpat. 1878.

Schafarzik: „Reisenotizen aus dem Kaukasus". Budapest. 1888.

Fournier: „Description géologique du Caucase central". Paris. 1896.

Karakasch et Rouguévitch: „Excursion géologique aux environs de Kislowodsk et de Kislowodsk à l'Elbrous". Peterbourg. 1897.

v. Ammon: „Das Gipfelgestein des Elbrus nebst Bemerkungen über einige andere Kaukasische Vorkommnisse". Z. d. geol. Ges. 1897.

Merzbacher: „Aus den Hochregionen des Kaukasus". B. II. Berlin. 1901.

v. Dannenberg: „Beiträge zur Petrographie der Kaukasus länder". Tscherm. Mit. XIX, 1900.

v. Déchy: „Kaukasus". B. III. Berlin 1907.

въ отношеніи ихъ минералогическаго состава, до сихъ поръ оставались не изслѣдованными подробно въ химическомъ отношеніи, — по крайней мѣрѣ, мнѣ не удалось найти ни одного достовѣрнаго указанія на существованіе подобнаго анализа въ имѣющейся старой и новѣйшей литературѣ, гдѣ упоминается о подлинной „Gipfelgestein“ Эльбруса. Что-же касается подлинной „Gipfelgestein“ съ восточной вершины Эльбруса, равно какъ вулканическаго туфа и лапилли съ нея-же, то о всемъ этомъ, насколько мнѣ извѣстно, совершенно нигдѣ не упоминается.

Мы располагаемъ до сихъ поръ единственнымъ анализомъ такъ называемой „Gipfelgestein des Elbrus“, принадлежащимъ знаменитому Абиху. Слѣдуетъ однако упомянуть, что послужившій для анализа образчикъ былъ именно тотъ, который имѣлъ въ своихъ рукахъ академикъ Купферъ (Дерптская коллекція). Самый образецъ породы былъ добытъ во время Эльбруской экспедиціи 1829 года, находившейся подъ начальствомъ генерала Эммануеля. Состоявшіе при экспедиціи ученые, въ томъ числѣ и академикъ Купферъ, въ вѣдѣніи котораго была геологическая часть, не достигли высоты вершины Эльбруса. Передаютъ только, что до высшихъ частей вершины удалось добраться тогда лишь одному человѣку,—состоявшему при экспедиціи черкесу Хилару. Никакихъ ближайшихъ указаній, когда и гдѣ именно добытъ вышеозначенный образчикъ породы, не существуетъ.

Остальные извѣстные въ литературѣ анализы эльбрусскихъ лавъ относятся, правда, къ немногимъ вполнѣ опредѣленнымъ*) мѣсторожденіямъ, но безусловно не имѣющимъ отношенія къ подлиннымъ „Gipfelgestein“ съ той или другой вершины. Вотъ почему, я полагаю, будетъ не лишнимъ опубликованіе результатовъ моихъ собственныхъ химическихъ изслѣдованій, матеріаломъ для которыхъ послужили образцы, собранные на высшихъ пунктахъ обѣихъ вершинъ

---

*) 1) „Hypersthen-Biotit-Amphibol-Dacit“ von dem Gebiete am obersten Theile des von Elbrus nach Norden Liehenden Malkathales (v. Dannenberg, loc. cit. p. 224—229).

2) „Hypersthen-(Amphibol)-Andesit“ von Rückendes Asau Gletschers (Déchy loc. cit. p. 241).

3) „Liparit“ (Rhyolit) beim Abstige von Kyrtyk-Thal entnommen. (Ibid., p. 265).

4) „Hypersthen-Biotit-Amphibol-Dacit“ von dem vestlich von Orte Urussbich erhellenden Rücken. (Ibid., p. 231).

Эльбруса во время моихъ личныхъ эльбрусскихъ экскурсій *) въ 1907 и 1908 г. г.

На западной вершинѣ Эльбруса, представляющей собою дугообразно изогнутую часть воронки вполнѣ самостоятельнаго кратера, имѣющую до 600 метровъ длины по ея наружному краю и обрывающуюся на юго-западъ, въ сторону истоковъ Кубани, коренная порода обнажается въ видѣ разрушеннаго гребневого лавоваго вала. Самый валъ, окаймленный широкой (до двадцати метровъ) полосой вершиннаго уплотненнаго снѣгового покрова, слегка покатаго къ югу, а затѣмъ круто обрывающагося надъ ниспадающими метровъ на 300 и оголенными тамъ и сямъ скалистыми стѣнами воронки кратера, имѣетъ свыше 300 м. длины, до 10 м. ширины своего южнаго склона и до 2 м. высоты надъ вышеупомянутой снѣжной полосой, окаймляющей валъ съ востока и юга и переходящей постепенно въ уплотненный снѣговой покровъ двухъ своеобразныхъ пирамидокъ. Одна изъ нихъ, почти правильно четыреугольная возвышается какъ-бы на самомъ юго-западномъ концѣ дуги кратерной воронки, имѣетъ до 20 м. высоты и ея вершина представляетъ высшую точку всей западной вершины Эльбруса; другая, не столь правильной формы, до 15 м. высоты, возвышается въ сѣверо-восточномъ углу наружнаго края воронки кратера, а къ подножью ея примыкаетъ съ юга слегка приподнятое къ югу плечо до 100 метровъ длиною, отъ 40 до 60 м. шириною, представляющее своею поверхностью сплошное снѣжное, точно глазированное плато съ своеобразными эллиптическими углубленіями, оріентированными по длинной оси въ направленіи юго - западныхъ вѣтровъ, съ отгибающимися въ этомъ направленіи и свободно тор-

---

*) См. краткое описаніе моего съ казакомъ Петромъ Лысенковымъ и осетиномъ Хаджумаромъ Хабліевымъ восхожденія 6/19 августа 1907 на восточную вершину Эльбруса (5593 м.), гдѣ могли продержаться съ 4 ч. 20 м. до 4 ч. 40 м. пополудни при сильномъ сѣверо - западномъ вѣтрѣ, атмосферномъ давленіи = 376 м. м. и температурѣ = — $10_{,5}$°C („Извѣстія Кавк. Отд. Импер. русскаго географич. общеста" за 1907 г.); а также краткое описаніе моего восхожденія 3/16 августа 1908 г. съ пятью туристами изъ Пятигорска, казакомъ Петромъ Лысенковымъ и горскимъ татариномъ Бачаемъ Урусбіевымъ на сѣдловину Эльбруса (5320 м.) и дальше съ однимъ только казакомъ Петромъ Лысенковымъ безъ всякаго проводника на высшую точку западной вершины Эльбруса (5629 м.), гдѣ, благодаря необыкновенно ясной и тихой погодѣ (барометрическое давленіе = 372 м. м., температура = — $5_{,5}$° С. при полномъ почти отсутствіи какого-бы то нибыло вѣтра) мы пробыли цѣлыхъ пятьдесятъ минутъ (съ 4 ч. 15 м. до 5 ч. 5 м. пополудни по петербургскому времени, или съ 5 ч. 10 м. до 6 ч. пополудни по пятигорскому времени). („Прот. Кіевск. Общ. Естеств." за 1909 годъ).

чащими къ сѣверо-востоку язычками. Поверхность снѣгового покрова пирамидокъ съ навѣтренныхъ сторонъ также покрыта углубленіями, но уже въ видѣ кармановъ. Среди отдѣльныхъ лавовыхъ глыбъ вершиннаго гребневиднаго лавоваго вала попадаются иногда не большіе кусочки розоватой пемзы, а на спускающихся къ сѣдловинѣ лавовыхъ осыпяхъ встрѣчаются маленькіе кусочки свѣтло-сѣраго туфа съ сѣрнымъ налетомъ.

Отдѣльныя глыбы лавы представляютъ собою неправильно полигонально разбитую породу темно-сѣраго цвѣта съ матовымъ блескомъ на поверхностяхъ раскола. Поверхность свѣжаго излома матовая густо-темно-сѣраго цвѣта, почти совсѣмъ чернаго; на ней бѣлѣютъ крупные (до 8 миллиметровъ) полевошпатовые кристаллы; цвѣтные минералы выдѣляются черными точками, но при макроскопическомъ обзорѣ ихъ не достаточно ясно можно различать. На плоскостяхъ разлома бросаются въ глаза неправильно расположенныя очень маленькія отдѣльныя отверстія многочисленныхъ пустотъ, пронизывающихъ породу, хотя послѣдняя въ цѣломъ является довольно таки компактной. Отдѣльные болѣе или менѣе значительно вывѣтрѣлые куски имѣютъ поверхность свѣтло-сѣраго грязноватаго цвѣта съ буроватыми пятнами.

Какъ можно замѣтить изъ сравнительнаго сопоставленія, приводимое мною описаніе коренной Gipfelgestein западной вершины Эльбруса согласуется съ описаніемъ, даннымъ Déchy въ его сочиненіи: „Kaukasus". B. III, но нѣсколько расходится съ тѣмъ, которое находимъ въ работѣ v. Ammon'a и въ сочиненіи Merzbacher'a: „Aus den Hoehregionen des Kaukasus". B. II., что, быть можетъ, объясняется тѣми особенными условіями, въ которыхъ находилась глыба, отъ которой былъ отбитъ образчикъ Мерцбахера („offenbar liegt hier eine Blitzwirkung von", какъ говоритъ самъ v. Ammon).

Подъ микроскопомъ мы можемъ наблюдать въ тонкихъ шлифахъ картину горной породы съ пронизанной многочисленными полевошпатовыми и пироксеновыми или амфиболовыми микролитами и мелкими кристалликами стекловатой основной массой, далеко не въ одинаковой степени индиферентной въ различныхъ участкахъ одного и того-же шлифа къ поляризованному свѣту. Структуру ея можно ближе опредѣлить, какъ гіалопилитовую, только въ рѣдкихъ случаяхъ, какъ витрофировую и еще рѣже, какъ флюидальную.

Среди вкрапленниковъ полевошпатовые (повидимому, плагіоклазы) занимаютъ въ породѣ первое мѣсто и по частотѣ ихъ нахожденія, и по ихъ значенію; за ними слѣдуютъ пироксены, роговая обманка и біотитъ. Магнитный желѣзнякъ встрѣчается въ единичныхъ, до нѣкоторой степени крупныхъ зернышкахъ и разсѣянъ въ видѣ многочисленныхъ точекъ по всей основной массѣ. Кварцевыя зерна мнѣ не попадались на глаза, хотя возможно (соотвѣтствующій анализъ показываетъ $65,_{61}$ процентовъ $Si\ O^2$), что значительная часть ея заключается въ стекловатомъ базисѣ.

Я не стану детально останавливаться на микроскопическомъ описаніи Gipfelgestein западной вершины Эльбруса; это сдѣлано уже v. Ammon'омъ. Я хочу только отмѣтить здѣсь, что на основаніи своихъ изслѣдованій я могъ-бы смягчить категорическое утвержденіе v. Ammon'a, сводящеся въ общемъ къ тому, что авгитъ въ качествѣ вкрапленниковъ не играетъ, будто-бы, въ породѣ почти никакой роли, и что кристаллики его являются въ ней не болѣе, какъ простыми продуктами превращенія роговой обманки. Правда, въ отношеніи особенно большихъ кристалловъ гиперстенъ беретъ перевѣсъ надъ авгитомъ; но зато въ нѣкоторыхъ участкахъ шлифа, особенно тамъ, гдѣ стекловатый базисъ очень дифференцированъ, свѣтло-зеленоватый авгитъ съ свѣтловатыми тонами его поляризаціонной окраски и явственно косымъ угасаніемъ, не только беретъ перевѣсъ надъ гиперстеномъ, а болѣе того, онъ является единственной цвѣтной порфировидной составной частью, безъ всякаго намека на какіе-бы то нибыло, остатки біотита или роговой обманки вокругъ него.

Съ такими дополненіями къ макроскопическому и микроскопическому описанію изслѣдованной мною Gipfelgestein съ западной вершины Эльбруса я могъ бы, пожалуй, присоединиться къ v. Ammon'y, который обозначаетъ Gipfelgestein западной вершины Эльбруса, какъ „vitrophyrischer Hypersthen-Amphibol-Dacit". Основываясь только на появленіи въ породѣ тѣхъ или иныхъ минераловъ, эту породу, съ ея относительно богатыми по количеству бисиликатами и довольно-таки основными плагіоклазами (преимущественно, повидимому, олигоклазъ и олигоклазъ-андезинъ) при совершенномъ почти сведеніи на нѣтъ содержанія кварца, можно было-бы причислить къ довольно бѣднымъ кремнекислотой и богатымъ известью, магнезіей и желѣзомъ породамъ. И если все-таки мы рѣшаемся отнести её къ дацитамъ, то, конечно, не на основаніи въ лучшемъ случаѣ крайнѣ неопредѣленнаго присутствія въ породѣ зеренъ кварца, а въ виду общей значительной кислотности и главнымъ образомъ общей картины химическаго состава породы, воспроизводимой въ соотвѣтствіи съ помѣщенными ниже результатами произведеннаго мною, — насколько мнѣ извѣстно, впервые, — анализа подлинной Gipfelgestein съ высшихъ пунктовъ западной вершины Эльбруса въ лабораторіи Минералогическаго Кабинета Варшавскаго Политехническаго Института.

	Процентный составъ.	Эквивалентн. количества *).		
SiO^2	$65_{,61}$	$0_{,0112}$		
Al^2O^3	$15_{,12}$	$0_{,0015}$	$0_{,0018}$ ... R^2O^3	
Fe^2O^3	$5_{,29}$	$0_{,0003}$		
FeO	$0_{,49}$	$0_{,0001}$	$0_{,0015}$ ... RO	$0_{,0025}$ ... $\overline{RO}$
MgO	$5_{,27}$	$0_{,0009}$		
CaO	$1_{,89}$	$0_{,0005}$		
Na^2O	$4_{,19}$	$0_{,0007}$	$0_{,0010}$ ... R^2O	
K^2O	$2_{,52}$	$0_{,0003}$		
H^2O	$0_{,52}$			
SO_3	—			
	$100_{,90}$			
Потеря въ вѣсѣ при 120° С	$0_{,15}$			
Уд. вѣсъ, опредѣленный пикнометромъ	$2_{,605}$			

Магматическая формула:

$$2_{,5}\ \overline{RO}\ .\ 1_{,8}\ R^2O^3\ .\ 11_{,2}\ SiO^2$$

или

$$1_{,39}\ \overline{RO}\ .\ R^2O^3\ .\ 6_{,22}\ SiO^2$$

$\beta = 39$ $\alpha = 2_{,82}$

$R^2O : R^2O = 1 : 1_{,5}$

$RO : R^2O^3 = 1 : 1_{,2}$

Для теоретическаго дацита (среднее изъ 12 анализовъ) мы имѣемъ слѣдующія данныя: **)

Магматическая формула:

$$1_{,25}\ \overline{RO}\ .\ R^2O^3\ .\ 6_{,33}\ Si\ O^2$$

$\beta = 35$ $\alpha = 3_{,02}$

$R^2O : RO = 1 : 1_{,5}$

Такимъ образомъ, если различать отдѣльные дациты не только по структурному принципу, но принимать при этомъ во вниманіе

---

*) Приведено къ 100, за вычетомъ воды процентное содержаніе раздѣлено на молекулярные вѣса.

**) Löwinson-Lessing: „Etudes de Pétrographie général avec un mémoire sur les roches éruptives d'une partie du Caucase Central.“ S.-Peterbourg. 1898.

также минералогическій составъ породы, то мнѣ кажется, что на основаніи всего сказаннаго выше мы могли-бы ближе опредѣлить Gipfelgestein западной вершины Эльбруса, какъ „гіалопилитовый пироксенъ-амфиболъ-дацитъ“.

Восточная вершина Эльбруса, подобно западной, отъ которой она отдѣлена довольно глубокой сѣдловиной (высшая точка сѣдловины 5320 м., наибольшая ширина около 160 м. и наибольшая длина около 500 м.), представляетъ тоже остатки воронки совершенно самостоятельнаго кратера; только наружныя очертанія воронки въ данномъ случаѣ приближаются скорѣе къ кругу, чѣмъ къ эллипсису, причемъ діаметръ воронки около 120 м., а глубина воронки достигаетъ 80 м. Южная, западная и отчасти сѣверная стѣнки воронки довольно хорошо сохранились, а съ восточной и сѣверно-восточной стороны воронки имѣется прорывъ, заваленный приблизительно на уровнѣ дна воронки съ ея крутыми, покрытыми снѣгомъ склонами, черными глыбами головныхъ частей вылившагося изъ кратера мощнаго лавоваго потока, гребневые участки котораго рельефно выдѣляются на бѣломъ фонѣ фирновыхъ покрововъ восточныхъ склоновъ вершины Эльбруса.

Съ южной стороны, гдѣ находится высшая точка ея (5593 м.) восточная вершина представляетъ изъ себя слегка выпуклую дискообразной формы площадку около (60 $\times$ 50) кв. м., совершенно лишенную снѣга, если не считать двухъ небольшихъ серповидныхъ ложбинокъ, заполненныхъ имъ и достигающихъ не болѣе 5 м. въ длину. Она производитъ впечатлѣніе выжженной солнцемъ полянки, благодаря обильному сѣрному налету, совмѣстно съ тонкимъ слоемъ мельчайшихъ лапилли (1—5 м. м. въ поперечникѣ) покрывающему слагающую самую вершину толщу свѣтлосѣраго съ розоватыми выцвѣтами тонко слоистаго (толщина слоя отъ 1 до 3 сент.), разбитаго многочисленными трещинами на скорлупы неправильной формы туфа, мощность котораго въ общемъ около 20 м.

Вышеупомянутая площадка постепенно переходитъ въ западную стѣнку воронки кратера, продолжаясь на сѣверъ въ видѣ такого-же сухого, лишеннаго снѣжнаго покрова хребта, длиною до 80 м., который, нѣсколько понижаясь, округло поворачиваетъ на востокъ и тянется въ этомъ направленіи еще метровъ на 40, заканчиваясь уступами свѣтло-сѣрыхъ лавовыхъ скалъ, уже лишенными туфоваго покрова и прикрытыми съ поверхности только тонкимъ слоемъ (до 5 м. м.) мельчайшихъ лапилли и сѣрнымъ налетомъ. Эти скалы обрываются метровъ на 40 надъ заполняющими нижнія части воронки снѣжными массами, тогда какъ граница снѣговой линіи на внутреннихъ склонахъ стѣнокъ воронки кратера вообще постепенно поднимается въ направленіи на юго-западъ, югъ, юго-востокъ, востокъ, и ширина обнаженной отъ снѣга полосы на обращенныхъ къ сѣверу слегка пологихъ склоновъ южной стѣнки воронки не превышаетъ уже 4—5 м.

Относительно наружныхъ склоновъ воронки восточной вершины слѣдуетъ замѣтить вообще, что на юго-западныхъ и южныхъ склонахъ довольно много мелко-обломочныхъ лавовыхъ осыпей, пронизывающихъ во многихъ мѣстахъ снѣжную пелену и оканчивающихся какъ на уровнѣ сѣдовины (юго-западные склоны), такъ и нѣсколько ниже ея (южные склоны). Довольно ощутительный уже на сѣдловинѣ запахъ сѣрнистаго газа становится все интенсивнѣе по мѣрѣ поднятія къ высшимъ пунктамъ восточной вершины, между тѣмъ какъ онъ совершенно не ощущается ни на обращенныхъ къ сѣдловинѣ же склонахъ западной вершины Эльбруса со спускающимися по нимъ двумя, тремя осыпями, ни на высшихъ пунктахъ ея.

Что касается туфа, то при истираніи въ порошокъ онъ принимаетъ однородную буровато-розовую окраску и, какъ указываетъ произведенный мною анализъ его, содержаніе въ немъ кремнекислоты составляетъ $67{,}_{12}\%$, потеря воды при прокаливаніи $4{,}_{60}\%$, причемъ влажность, судя по потерѣ въ вѣсѣ при нагрѣваніи до 120° С., достигаетъ $1{,}_{69}\%$.

Безъ труда отдѣляемыя отъ породы стальной иглой лапилли легко истираются въ свѣтло сѣрый порошокъ, застывающій послѣ быстро заканчивающагося сплавленія съ углекислымъ кали-натромъ въ массу грязновато-буро-зеленаго цвѣта. Химическій анализъ даетъ еще болѣе высокое содержаніе кремнекислоты, опредѣленное мною въ $88{,}_{39}\%$, между тѣмъ какъ потеря воды при прокаливаніи здѣсь $2{,}_{27}\%$, въ томъ числѣ влажности, судя по потерѣ въ вѣсѣ при нагрѣваніи до 120° С., всего $0{,}54\%$.

Переходя теперь къ собственно коренной породѣ восточной вершины Эльбруса, я долженъ прежде всего указать на то, что даже въ тѣхъ высшихъ пунктахъ вершины, гдѣ порода выступаетъ мѣстами совершенно обнаженной отъ туфовой толщи, верхняя поверхность ея все-таки бываетъ скрыта подъ тонкимъ слоемъ плотно приставшихъ къ ней лапилли съ сѣрнымъ налетомъ. Свободныя боковыя поверхности являются сѣрыми, нѣсколько вывѣтрившимися, мѣстами съ буроватыми пятнами и покрыты очень маленькими, болѣе многочисленными, чѣмъ это можно наблюдать въ штуфахъ

Gipfelgestein западной вершины Эльбруса, отверстьями пустотъ, пронизывающихъ всю породу, въ общемъ остающуюся довольно еще плотной, хотя порода оказываетъ значительно меньшее сопротивленіе при ударѣ молоткомъ, чѣмъ упомянутая Gipfelgestein западной вершины. На свѣжемъ изломѣ, правда, неровномъ, но опять-таки не въ такой степени, какъ это обнаруживаетъ Gipfelgestein западной вершины Эльбруса, Gipfelgestein восточной вершины нѣсколько темнѣе по своему оттѣнку, но безусловно сѣраго цвѣта, до извѣстной степени съ слабымъ зеленоватымъ отливомъ, и во всякомъ случаѣ значительно свѣтлѣе, чѣмъ почти черная порода западной вершины.

Цвѣтные вкрапленники выступаютъ здѣсь яснѣе не только благодаря болѣе свѣтлому фону основной массы, но и просто уже по той причинѣ, что они встрѣчаются въ Gipfelgestein восточной вершины Эльбруса въ болѣе обильномъ количествѣ, причемъ довольно часто бросаются въ глаза листочки біотита и иголочки амфибола или пироксена. Но безусловно главнымъ образомъ порода пеститъ бѣлыми, мѣстами даже стекловидно-водянисто-прозрачными, большими (5—10 м. м.), средними и маленькими, но очень правильно образованными полевошпатовыми вкрапленниками; слѣдуетъ отмѣтить, что большіе полевошпатовые вкрапленники здѣсь не такъ рѣзко очерчены въ своихъ контурахъ, какъ въ Gipfelgestein западной вершины Эльбруса, и обнаруживаютъ оплавленность контуровъ, которую ясно можно увидѣть даже невооруженнымъ глазомъ. Въ этой породѣ можно встрѣтить участки, гдѣ простымъ глазомъ можно уловить только мельчайшія полевошпатовыя иголочки, между тѣмъ какъ порфировидные вкрапленники исключительно принадлежатъ цвѣтнымъ минераламъ: біотиту и пироксену или амфиболу. Что касается зеренъ кварца, то здѣсь, какъ и при макроскопическомъ осмотрѣ Gipfelgestein западной вершины Эльбруса, они не попадались мнѣ на глаза.

Такому наружному виду породы соотвѣтствуетъ вполнѣ и микроскопическая картина въ тонкихъ шлифахъ. Прежде всего здѣсь можно видѣть довольно стекловатую основную массу, пронизанную многочисленными кристалликами; въ тонкомъ шлифѣ она представляется окрашенной въ чрезвычайно слабые буроватые тона, мѣстами выступаютъ темно-бурыя пятна, которыя являются какъ-бы шарообразными скопленіями стекла, отъ 0,5 до 1 м. м. въ поперечникѣ, совершенно не дѣйствующими на поляризованный свѣтъ. Слѣдуетъ замѣтить, что въ микроскопической картинѣ, получаемой при изслѣдованіи въ тонкихъ шлифахъ Gipfelgestein западной вершины

Эльбруса отсутствуютъ участки стекла, совершенно не дифференцированнаго. Въ основной массѣ лежатъ весьма многочисленные, то параллельно другъ другу, то неправильно другъ относительно друга оріентированные очень маленькія, чаще образованные въ видѣ кристаллическихъ скелетовъ, а также болѣе разсѣянныя, но не въ такой степени маленькія полевошпатовыя таблички и занимающія послѣ толко-что перечисленныхъ элементовъ первое мѣсто въ отношеніи частоты почти сплошь хорошо ограниченные по краямъ кристаллики пироксена, то прямо угасающіе при перекрещенныхъ николяхъ (гиперстенъ), то обнаруживающіе яркіе интерференціонные цвѣта. Кромѣ того стекловый базисъ заключаетъ въ себѣ также очень много точечныхъ выдѣленій магнитнаго желѣзняка наряду съ разсѣянными отдѣльными, нѣсколько большими по размѣрамъ зернышками того-же минерала, но тѣ и другія въ меньшемъ количествѣ противъ того, какое наблюдается при изслѣдованіи въ тонкихъ шлифахъ Gipfelgestein западной вершины Эльбруса.

Вся порода, какъ это бросается въ глаза при микроскопическомъ изученіи ея, является въ тонкихъ шлифахъ пронизанной многочисленными пустотами, но на стѣнкахъ ихъ, въ отличіе отъ Gipfelgestein западной вершины Эльбруса, нельзя наблюдать какихъ-либо новообразованій; самое число пустотъ здѣсь гораздо значительнѣе, что, быть можетъ, соотвѣтствуетъ тому низкому удѣльному вѣсу, который былъ опредѣленъ мною для нея, какъ и для породы западной вершины, по обыкновенному методу пикнометра, безъ притязанія на особенную точность. (Удѣльный вѣсъ для Gipfelgestein восточной вершины, по моимъ опредѣленіямъ, $2,_{226}$; удѣльный вѣсъ для Gipfelgestein западной вершины, при тѣхъ-же условіяхъ опредѣленія, какъ было уже мною упомянуто, $2,_{605}$).

Въ ясно кристаллическихъ выдѣленіяхъ въ различныхъ участкахъ шлифа, въ большой или меньшей степени богатыхъ стекловатымъ базисомъ, выступаютъ: полевой шпатъ (повидимому, главнымъ образомъ, если не исключительно, плагіоклазъ) гиперстенъ, біотитъ, роговая обманка, авгитъ. Кварца въ моихъ шлифахъ мнѣ не пришлось наблюдать, какъ и при макроскопическомъ осмотрѣ онъ не попадался на глаза, такъ что если онъ и имѣется въ породѣ, то развѣ только исключительно спорадически. Послѣдовательность, въ которой перечислены нами главныя составныя части, должна вмѣстѣ съ тѣмъ до извѣстной степени выражать и относительную степень частоты ихъ выступанія въ основной массѣ породы. И если въ этомъ отношеніи представляется еще затруднительнымъ провести рѣзкую грань между біотитомъ и роговой обманкой, то по числу болѣе или менѣе крупныхъ вкрапленниковъ біотитъ оставляетъ ее здѣсь далеко позади себя (десять біотитовыхъ индивидуумовъ противъ пяти роговообманковыхъ вкрапленниковъ въ тонкомъ шлифѣ Gipfelgestein восточной вершины и только два противъ восьми соотвѣтствующихъ вкрапленниковъ въ тонкомъ шлифѣ Gipfelgestein западной вершины Эльбруса.

Многіе относительно крупные полевошпатовые вкрапленники, если не считать отдѣльныхъ исключеній, также уступаютъ по величинѣ крупнымъ вкрапленникамъ біотита; роговая обманка въ этомъ отношеніи слѣдуетъ уже за полевымъ шпатомъ, превосходя размѣрами своихъ крупныхъ вкрапленниковъ таковые же индивидуумы гиперстена. Что касается моноклиническаго авгита, то, въ дѣйствительности, онъ, поскольку дѣло можетъ итти о вкрапленникахъ крупнаго и даже средняго размѣра, не играетъ почти никакой роли, но въ качествѣ мелкихъ вкрапленниковъ и въ особенности какъ составная часть основновной массы онъ встрѣчается въ нѣсколько большемъ количествѣ, однако-же даже и въ этомъ случаѣ онъ долженъ уступить гиперстену. Вообще, первое мѣсто по частотѣ своего появленія въ основной массѣ и по своему значенію въ породѣ занимаетъ полевой шпатъ (собственно плагіоглазъ); ближайшимъ минераломъ послѣ плагіоглаза въ этомъ отношеніи является гиперстенъ.

Въ основной полевошпатовой массѣ можно различать собственно микролиты и нѣсколько большіе по размѣрамъ, приближающіеся къ типу мельчайшихъ вкрапленниковъ индивидуумы. Для первыхъ особенно свойственны такія характерныя формы роста, какъ развилки, пластиночки и такъ называемыя „Stiefelknecht“ въ продольныхъ разрѣзахъ и пяльцы или рамочки въ поперечномъ сѣченіи. Въ полномъ соотвѣтствіи съ болѣе значительной общей стекловатостью Gipfelgestein восточной вершины Эльбруса эти образованія играютъ здѣсь главную роль въ противоположность тому, что наблюдается для Gipfelgestein западной вершины Эльбруса: тамъ микролиты представлены чаще въ видѣ совершенныхъ пластиночекъ, а здѣсь скелетовидные образованія преобладаютъ надъ болѣе значительными индивидуами основной массы, представляющими переходъ къ настоящимъ вкрапленникамъ. У представителей этой второй генераціи полевошпатовой основной массы часто отсутствуетъ вовсе двойниковая штриховка, а если и наблюдается, то рѣдко можно встрѣтить болѣе, чѣмъ двѣ хорошо развитыя сросшіяся пластинки. Чрезвычайно малые размѣры и несовершенное образованіе этихъ микролитовъ затрудняетъ точное ихъ опредѣленіе. Здѣсь наблюдается — по крайней мѣрѣ, приблизительно — прямое угасаніе, но вмѣстѣ съ тѣмъ и рѣзко выраженное косое, такъ что въ основной массѣ присутствуютъ, быть можетъ, другъ подлѣ друга различные плагіоглазы изъ ряда олигоклаза и андезина.

Образованіе плагіоглазовыхъ вкрапленниковъ было уже спеціально описано v. Ammon'омъ для Gipfelgestein западной вершины Эльбруса и не представляетъ здѣсь ничего особеннаго: обыкновенно вкрапленники являются довольно автоморфными, однако не рѣдко ихъ очертанія болѣе или менѣе сильно округлены; въ цѣломъ вещество ихъ чистое, только съ включеніями свѣтлаго, прозрачно-сѣроватаго или слегка желтоватаго стекла. Послѣднее либо образуетъ связную сѣточку, либо является въ замкнутыхъ прямоугольныхъ формахъ, на подобіе отрицательныхъ кристалловъ, часто съ неподвижнымъ пузырькомъ. Другіе кристаллы обнаруживаютъ нѣкоторую мутноватость, благодаря присутствію пылеподобныхъ включеній, которыя или занимаютъ центральное мѣсто, или оріентированы зонарно. Въ отдѣльныхъ случаяхъ плагіоклазовые кристаллы позволяютъ распознать зонарную структуру и двойниковую штриховатость; двойники обыкновенно построены по альбитовому, повидимому, закону, и только рѣдко можно натолкнуться на двойниковыя образованія, въ которыхъ пластинки оріентированы по альбитовому и вмѣстѣ съ тѣмъ по периклиновому законамъ.

Крупные плагіоклазовые индивидуумы встрѣчаются здѣсь вообще чаще, нежели въ Gipfelgestein западной вершины Эльбруса. Но, какъ выразился v. Ammon и какъ я лично могъ бы подтвердить, въ Gipfelgestein западной вершины Эльбруса „selten gewahrt man unregelmässig geformte Stücke, die wohl durch die Wirkung einer magmatischen Corrosion ihre deformität erhalten haben, auch Einbuchtungen an den Rändern lassen sich erkennen.“ Наоборотъ, въ Gipfelgestein восточной вершины Эльбруса можно констатировать это вліяніе магматической коррозіи въ высокой степени: тутъ попадаются совершенно неправильно образованныя благодаря такого рода коррозіи экземпляры плагіоглазовыхъ вкрапленниковъ, переполненные многочисленными флягообразными водянистопрозрачными включеніями стекла и даже совершенно разорванные потоками буроватаго стекла на нѣсколько сдвинутыхъ другъ относительно друга частей, которыя обнаруживаютъ полисинтетическую двойниковую штриховатость. Вѣроятнѣе всего, что половошпатовые вкрапленники, какъ и поддающіеся нѣкоторому изслѣдованію микролиты принадлежатъ по большей части олигоклазу; однако на основаніи изслѣдованій надъ угасаніемъ при скрещенныхъ николяхъ, быть можетъ, отдѣльные индивидуумы слѣдовало-бы отнести къ ряду олигоклазъ-андезина, альбитъ-олигоклаза и андезина.

Наиболѣе распространенной послѣ полевыхъ шпатовъ составной частью основной массы и породы вообще въ отношеніи Gipfelgestein восточной вершины Эльбруса, какъ было уже упомянуто, являются вообще пироксены; но всѣ остальные пироксеновые минералы играютъ здѣсь по сравненію съ гиперстеномъ, дѣйствительно, подчиненную роль. Кристаллографическія образованія гиперстена (индивидуумы основной массы часто въ видѣ кристаллическихъ скелетовъ), ихъ плеохроизмъ, включенія (магнитный желѣзнякъ и стекло, и то и другое преимущественно въ ограниченномъ количествѣ) вообще не представляютъ чего-либо замѣчательнаго. Кристаллы гиперстена въ цѣломъ свѣжи, и я ни разу не замѣчалъ въ нихъ никакихъ красновато-желтыхъ поверхностей; чаще выступаютъ продольные разрѣзы въ формѣ порядочно сжатыхъ столбиковъ съ крышеобразными счертаніями, рѣже кристаллы вытянуты въ видѣ длинныхъ, узкихъ призмъ. Ромбическій пироксенъ является въ породѣ какъ въ видѣ вкрапленниковъ, такъ и видѣ составной части основной массы; но въ этомъ случаѣ уже не представляется возможнымъ, какъ для полевошпатовыхъ элементовъ отличить двѣ рѣзко разграниченныя генераціи, — скорѣе мы имѣемъ здѣсь дѣло съ низшими и высшими членами одной генераціи, связанными въ одинъ длинный рядъ промежуточными звеньями.

Моноклиническій авгитъ встрѣчается здѣсь часто въ видѣ кристалликовъ, имѣющихъ габитусъ удлиненныхъ столбиковъ, и если онъ порядочно уступаетъ здѣсь гиперстену по своему значенію, какъ вкрапленникъ и составная часть основной массы, однако относительная самостоятельность его, какъ и въ Gipfelgestein западной вершины Эльбруса, не подлежитъ никакому сомнѣнію, тѣмъ болѣе что процессъ превращенія роговой обманки почти вовсе не имѣетъ здѣсь мѣста.

Сама роговая обманка не играетъ здѣсь такой роли, какъ въ Gipfelgestein западной вершины Эльбруса, хотя она и здѣсь выступаетъ не только въ видѣ относительно крупныхъ вкрапленниковъ, но также и въ формѣ небольшихъ и очень мелкихъ кристалликовъ, а въ отношеніи размѣровъ ея наиболѣе крупные индивидуумы превышаютъ даже нѣкоторые относительно крупные плагіоклазовые вкрапленники. Отдѣльные кристаллы ея являются по большей части совершенно свѣжими; если же мѣстами ихъ контуры довольно таки округлены и такимъ образомъ носятъ на себѣ слѣды магматической каррозіи, то, во всякомъ случаѣ, имѣющаяся при этомъ вокругъ нихъ бѣлесоватая кайма узка и окаймляетъ почти совершенно компактное ядро. Окраска роговой обмамки въ изслѣдованныхъ мною штуфахъ Gipfelgestein восточной вершины Эльбруса, при сильномъ плеохроизмѣ и обусловленнымъ этимъ слабыми интерференціонными цвѣтами, всегда была бурая, ни въ коемъ случаѣ не зеленая, возростая только въ своей густотѣ отъ свѣтлой желтовато-бурой до темной желтовато-бурой; напротивъ, роговая обманка въ Gipfelgestein западной вершины Эльбруса имѣетъ преимущественно зеленовато-бурые тона, но опять таки буроватый тонъ преобладаетъ, и я никакъ не могу, соотвѣтственно указанію v. Ammon'a, признать эту окраску за „durchweg grüne“.

Совершенно особое мѣсто въ Gipfelgestein восточной вершины Эльбруса занимаетъ біотитъ. Здѣсь нельзя, какъ въ отношеніи Gipfelgestein западной вершины сказать только, что біотитъ встрѣчается частью въ видѣ маленькихъ листочковъ, частью въ видѣ болѣе значительныхъ по размѣрамъ табличекъ, спорадически въ основной массѣ. Напротивъ того, здѣсь и въ основной массѣ довольно часто встрѣчается онъ, разсѣянный въ видѣ маленькихъ листочковъ, образующихъ мѣстами лентообразные аггрегаты; но еще замѣтнѣе обрисовывается его значеніе въ качествѣ совершенно самостоятельно выступающихъ болѣе значительныхъ табличекъ, которыя въ количественномъ отношеніи оттѣсняютъ роговую обманку на второй планъ, а по своимъ размѣрамъ превосходятъ часто вкрапленники всѣхъ другихъ минералловъ, оставаясь сами совершенно свѣжими и чистыми, только со стекловатыми водянисто - прозрачными включеніями, часто округленно пластинчатой формы, расположенными довольно правильно по прекрасно выраженнымъ въ широкихъ табличахъ и параллельно оріентированнымъ трещинамъ спайности.

Окраска біотита грязновато-желтовато-свѣтлозеленоватого цвѣта, очень отличающаяся отъ буроватой окраски роговой обманки, при сильно выраженной абсорбціи. Всѣ крупные вкрапленники біотита имѣютъ неправильную форму и представляютъ изъѣденные по краямъ экземпляры, что является слѣдствіемъ испытанной ими деформаціи подъ вліяніемъ магматической коррозіи; кромѣ того на нихъ можно наблюдать бухтообразныя углубленія отъ внѣдренія въ свѣжее вещество біотита участковъ болѣе или менѣе дифференцированнаго стекловатаго базиса.

Мнѣ ниразу не пришлось наблюдать здѣсь біотитъ въ видѣ маленькихъ или довольно широкихъ таблицъ среди нѣкогда свѣжаго вещества роговой обманки или между группой продуктовъ превращенія роговой обманки съ еще уцѣлѣвшими отъ разложенія остатками этого минерала, какъ можно это наблюдать въ шлифахъ Gipfelgestein западной вершины Эльбруса. Однимъ словомъ, біотитъ ни въ коемъ случаѣ нельзя разсматривать здѣсь, какъ въ нѣкоторомъ родѣ ту-же роговую обманку или хотя-бы даже какъ продуктъ превращенія ея. Напротивъ, она играетъ здѣсь вполнѣ опредѣленную самостоятельную роль, и потому ея участье не слѣдуетъ оставлять безъ вниманія при составленіи подходящаго наименованія для Gipfelgestein восточной вершины Эльбруса.

Сопровождающіе минералы, какъ составныя части, не играютъ въ этой породѣ никакой роли. Кромѣ наблюдаемаго тамъ и самъ въ видѣ иглообразныхъ включеній въ крупныхъ плагіоклазахъ апатита я могъ-бы отмѣтить только единичныя таблички желѣзнаго блеска.

Зерна кварца въ моихъ шлифахъ совершенно отсутствовали. Повидимому, кремнекислота и здѣсь, какъ и въ Gipfelgestein западной вершины, главнѣйшимъ образомъ заключена въ стекловатомъ базисѣ.

Соотвѣтственно большей по сравненію съ Gipfelgestein западной вершины стекловатостью Gipfelgestein восточной вершины Эльбруса, въ послѣдней можно наблюдать или чисто витрофировую структуру, или такую, которую опять-таки лучше было-бы обозначить, какъ гіало-пилитовую.

Такимъ образомъ, если принять во вниманіе: 1) вышеуказанныя структурныя отношенія, 2) болѣе высокое, чѣмъ опредѣленное для Gipfelgestein западной вершины содержаніе кремнекислоты ($68,_{44}$ процента), какъ это показываютъ выше- и нижеприведенные анализы, 3) то обстоятельство, что гиперстенъ здѣсь является наиболѣе распространеннымъ и наиболѣе имѣющимъ значеніе для обозначенія породы минераломъ, 4) что, наконецъ, біотитъ здѣсь прежде всего встрѣчается уже въ довольно значительномъ количествѣ, тогда какъ количество роговой обманки, напротивъ, никогда не можетъ вполнѣ съ нимъ сравняться, а затѣмъ онъ занимаетъ здѣсь ясно выраженное первое мѣсто по размѣрамъ среди относительно болѣе крупныхъ вкрапленниковъ различныхъ минераловъ, — то я могъ бы на основаніи всего изложеннаго причислить къ дацитамъ и интересующую насъ Gipfelgestein восточной вершины Эльбруса и дать ей именно такое названіе: „кисловатый витрофировый гиперстенъ-біотитъ-(амфиболъ)-дацитъ“.

Однако такое названіе, основанное притомъ почти исключительно на одномъ микроскопическомъ изслѣдованіи породы, мнѣ кажется слишкомъ расплывчатымъ и только маскирующимъ истинную природу Gipfelgestein восточной вершины Эльбруса, что тѣмъ болѣе обязываетъ внимательнѣе отнестись къ даннымъ подробнаго химическаго анализа приводимаго на нижеслѣдующей таблицѣ.

	Процентный составъ	Эквивалентныя количества (*)			
SiO^2	68,14	0,0113			
Al^2O^3	14,48	0,0014	0,0016		R^2O^3
Fe^2O^3	3,37	0,0002			
FeO	0,82	0,0001			
MgO	4,01	0,0007	0,0015		RO
CaO	3,10	0,0007		0,0021	$\overline{RO}$
Na^2O	3,24	0,0005	0,0006		R^2O
K^2O	1,29	0,0001			
H^2O	1,00				
SO^3	0,34				
	100,09				

Магматическая формула:

$$2{,}_1\,\overline{RO}\,.\,1{,}_6\,R^2O^3\,.\,11{,}_3\,SiO^2$$

или

$$1{,}_{31}\,\overline{RO}\,.\,R^2O^3\,.\,7{,}_{06}\,SiO^2$$

Потеря въ вѣсѣ при 120° C. 0,14

$\beta = 33$ $\alpha = 3{,}_{29}$

Удл. вѣсъ, опредѣленный пикнометромъ, = 2,226 (?)

$R^2O : RO = 1 : 2{,}_{50}$

$RO : R^2O = 1 : 1{,}_{06}$

Уже поверхностное сравненіе приведенныхъ нами химическихъ анализовъ Gipfelgesteinen западной (I) и восточной (II) вершинъ Эльбруса показываетъ намъ, что Gipfelgestein восточной вершины вообще содержитъ больше SiO^2, болѣе кислая порода по существу, абсолютно богаче по содержанію FeO, MgO и бѣднѣе по содержанію Al^2O^3, Fe^2O^3, CaO, K^2O, Na^2O. Болѣе внимательное изученіе данныхъ химическаго анализа обнаруживаетъ, что по содержанію FeO

(*) Приведено къ 100, за вычетомъ воды и SO^3, и процентное содержаніе раздѣлено на молекулярные вѣса.

и Mg O Gipfelgestein восточной породы въ одинаковой степени *) превышаетъ Gipfelgestein западной вершины; притомъ общая сумма молекулярныхъ количествъ CaO и MgO для Gipfelgesteinen обѣихъ вершинъ одинаковы, но отношенія Ca O : MgO для той и другой Gipfelgestein совершенно различныя ($\overset{I}{FeO} : \overset{II}{FeO} = 1 : 1,_6$; $\overset{I}{MgO} : \overset{II}{MgO} = 1 : 1,_6$; $\overset{I}{CaO} : \overset{I}{MgO} = 1,_8 : 1$; $\overset{II}{CaO} : \overset{II}{MgO} = 1 : 1$). Если брать Na^2O для обѣихъ Gipfelgesteinen не изолированно, а въ соотношеніи съ K^2O, то и по содержанію Na^2O Gipfelgestein восточной вершины оказывается относительно богаче Gipfelgestein западной вершины ($\overset{I}{Na^2O} : \overset{I}{K^2O} = 2,_5 : 1$; $\overset{II}{Na^2O} : \overset{II}{K^2O} = 5 : 1$).

Мнѣ кажется, что сказанное выше относительно FeO и MgO не противоречитъ даннымъ микроскопическаго анализа Gipfelgestein восточной вершины Эльбруса относительно роли въ ней біотита, а, напротивъ, въ значительной степени обосновываетъ ихъ. Равнымъ образомъ, вышеприведенное замѣчаніе относительно Na^2O, на мой взглядъ можетъ не безъ основанія навести на предположенія, не исключающія совершенно возможности, съ одной стороны, присутствія въ этой породѣ анортоклаза въ маленькихъ, водянисто-прозрачныхъ, прямоугольныхъ, удлиненныхъ и вполнѣ идіоморфныхъ полевошпатовыхъ вкрапленникамъ съ весьма небольшимъ угломъ погасанія, а съ другой стороны, обогащенія Na членовъ авгитоваго ряда въ бревенчатыхъ вкрапленникахъ авгитоваго габитуса, но съ зеленоватымъ отливомъ, какого обыкновенно не наблюдается для авгитовъ въ Gipfelgestein западной вершины при изслѣдованіи ея въ тонкихъ шлифахъ. Но, конечно, дать на это окончательный отвѣтъ можно только послѣ дальнѣйшихъ подробныхъ изслѣдованій, выходящихъ уже за предѣлы настоящаго предварительнаго сообщенія.

Высокій коэффиціентъ кислотности и видная роль біотита въ Gipfelgestein восточной вершины невольно наводятъ на мысль о „біотитовомъ дацитѣ“, который, по Розенбушу, является, по всей вѣроятности, „липарито-дацитомъ“, но въ послѣднемъ, по Розенбушу *), „rhombische und monokline Pyroxene fehlen entweder ganz oder haben doch nur den Character mehr akzessorischer Gemengtheile“, — чего уже совсѣмъ нельзя сказать про интересующую насъ породу.

---

*) Приняты въ разсчетъ пятые десятичные знаки, опущенные въ графѣ эквивалентныхъ количествъ.

Такимъ образомъ, входящія въ составъ предположительно даннаго нами для Gipfelgestein восточной вершины названія выраженія: „кисловатый“ и „біотитовый“, какъ мы видимъ, пока не привели насъ къ благопріятному результату въ поискахъ болѣе конкретнаго опредѣленія этой породы.

Въ литературѣ извѣстна еще порода, которая носитъ названіе „vitrophyrischer Biotit-Dacit“, но, по свидѣтельству Розенбуша **), „in typischen vitrophyrischen Biotit-Dacit mikrolitische Ausscheidungen fehlen vollständig, что опять-таки не можетъ быть приложимо къ нашей породѣ.

Все это побудило меня внимательнѣе пересмотрѣть тѣ химическія данныя, которыя имѣются въ литературѣ для ближайшихъ къ дацитамъ кислыхъ эффузивныхъ породъ и сопоставить ихъ съ данными, полученными мною при химическомъ анализѣ Gipfelgesteinen восточной и западной вершинъ Эльбруса. Матерьяломъ для помѣщенной ниже таблицѣ, которая явилась въ результатѣ надобнаго рода сопоставленій, послужили данныя среднихъ анализовъ дацитовъ, липаритовъ и пантеллеритовъ, заимствованныя изъ сочиненія проф. Левинсона-Лессинга: „Etudes de Petrographie générale avec un mémoire sur les roches éruptives d'une partie du Caucase Central“. S.-Peterburg. 1899. Для каждой породы брались: 1) магматическая формула, 2) коеффиціентъ кислотности (α), 3) число частицъ основаній, приходящееся на 100 частицъ $Si\,O^2$ (β), 4) отношеніе щелочей къ щелочнымъ землямъ (R^2O : RO), 5) отношеніе щелочныхъ земель къ полуторнымъ окисламъ (RO : R^2O^3), 6) отношеніе щелочей между собою (Na^2O : K^2O) и 7) отношеніе щелочной кальціевой земли къ щелочной магніевой землѣ CaO : MgO). Чтобы не заграмождать таблицы, я не привожу въ ней данныя еще для одной кислой эффузивной породы, промежуточной между липаритами и пантеллеритами, именно для Комендита; эта порода отличается рѣзко выраженнымъ преобладаніемъ общаго характера отношеній, существующихъ въ липаритовыхъ породахъ, и потому едва-ли могла-бы прибавить намъ что-нибудь особенное къ тому, что даетъ намъ самъ липаритъ.

Внимательное разсмотрѣніе таблицы наглядно показываетъ намъ, что Gipfelgestein западной вершины Эльбруса наиболѣе подходитъ къ дациту (mittel) при полномъ тождествѣ отношеній (R^2O : RO), очень большой близости магматическихъ формулъ, (α), (β) и отноше-

*) Mikroskopische Physiogrphie. B. II, Zweite Hälfte. Stuttgart. 1908. p. 999.
**) Ibid. p. 1009.

Gipfelgestein d. östlichen Gipfel des Elbrus	Dacit (Mittel)	Liparit (Mittel)	Pantellerit (Mittel)	Gipfelgestein d. westlichen Gipfel des Elbrus
	(F. Loewinson-Lessing. Etudes de pétrographie générale avec un mémoire sur les roches éruptives d'une partie du Caucase Central)			
$1_{,31}\overline{RO}.R^2O^3.7_{,06}SiO^2$	$1_{,25}\overline{RO}.R^2O^3.6_{,33}SiO^2$	$\overline{RO}\,.\,R^2O^3\,.\,9\,SiO^2$	$1_{,7}\overline{RO}:R^2O^3.\,8_{,8}\,Sio^2$	$1_{,39}\overline{RO}.R^2O^3.6_{,22}SiO^2$
$\alpha = 3_{,27}$	$\alpha = 3_{,02}$	$\alpha = 4_{,76}$	$\alpha = 3_{,54}$	$\alpha = 2_{,82}$
$\beta = 33$	$\beta = 35$	$\beta = 21$	$\beta = 32$	$\beta = 39$
$R^2O : RO = 1 : 2_{,50}$	$R^2O : RO = 1 : 1_{,5}$	$R^2O : RO = 6_{,4} : 1$	$R^2O : RO = 1_{,6} : 1$	$R^2O : RO = 1 : 1_{,5}$
$RO : R^2O^3 = 1 : 1_{,06}$	$RO : R^2O^3 = 1_{,2} : 1$	$RO : R^2O^3 = 1 : 4_{,2}$	$RO : R^2O^3 = 1 : 1_{,1}$	$RO : R^2O^3 = 1 : 1_{,20}$
$Na^2O : K^2O = 5 : 1$	$Na^2O : K^2O = 1_{,8} : 1$	$Na^2O : K^2O = 1_{,9} : 1$	$Na^2O : K^2O = 4_{,7} : 1$	$Na^2O : K^2O = 2_{,5} : 1$
$CaO : MgO = 1 : 1$	$CaO : MgO = 1_{,4} : 1$	$CaO : MgO = 5_{,6} : 1$	$CaO : MgO = 1_{,25} : 1$	$CaO : MgO = 1_{,8} : 1$

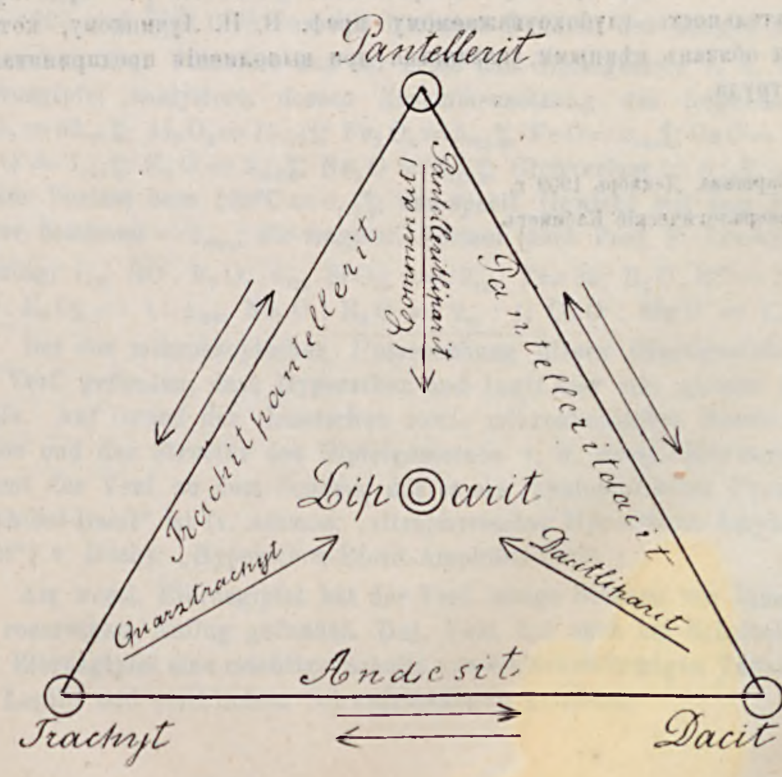
ній (CaO : MgO), отчасти также отношеній ($Na^2O : K^2O$). Только характеръ отношенія ($RO : R^2O^3$) въ Gipfelgestein западной вершины Эльбруса совершенно обратный тому, который имѣется на лицо у дацита, и напоминаетъ скорѣе пантеллериты и липариты.

Напротивъ, если-бы стали такимъ-же образомъ сравнивать Gipfelgestein западной вершины Эльбруса съ пантеллеритомъ (mittel), то, пожалуй, только одно, правда, чрезвычайно рѣзко выраженное въ ней, отношеніе ($RO : R^2O^3$) могло-бы служить сближающимъ элементомъ, во всѣхъ-же остальныхъ случаяхъ (шести изъ семи) пришлось-бы съ несравненно большимъ правомъ дать относительно взаимной близости этихъ породъ отрицательный, а никакъ не положительный отвѣтъ. Вотъ почему я рѣшаюсь для Gipfelgestein западной вершины Эльбруса, въ согласіи со всѣми особенностями ея минералогическаго, химическаго состава и структуры, отвести мѣсто безусловно среди дацитовъ въ химической классификаціи горныхъ породъ, предложенной проф. Левинсономъ-Лессингомъ.

Но если для Gipfelgestein западной вершины довольно ясно обрисовывается ея дацитовый характеръ, и только въ одномъ случаѣ проскальзываютъ черты пантеллеритовъ и липаритовъ, то для Gipfelgestein восточной вершины Эльбруса въ отношеніи ея близости къ той или иной, по какой-нибудь одной изъ перечисленныхъ кислыхъ эффузивныхъ породъ гораздо труднѣе отыскать такую ясно выраженную опредѣленность.

Въ самомъ дѣлѣ, хотя по числу молекулъ SiO^2 въ магматической формулѣ Gipfelgestein восточной вершины Эльбруса безусловно уклоняется въ сторону пантеллеритовъ и липаритовъ, однако это уклоненіе не заходитъ такъ далеко, чтобы можно было говорить о совершенной близости ея, по крайней мѣрѣ, къ сравнительно болѣе близко стоящимъ къ ней пантеллеритамъ; она занимаетъ скорѣе въ этомъ случаѣ среднее мѣсто между пантеллеритами и дацитами; то-же самое приходится сказать послѣ соотвѣтствующаго сравненія величинъ (α) и (β). Въ отношеніи ($RO : R^2O^3$) наша порода довольно близко подходитъ къ пантеллеритамъ, но почти такой-же точно характеръ близости къ нимъ, какъ мы видѣли выше, носитъ въ этомъ отношеніи и Gipfelgestein западной вершины Эльбруса.

Если гдѣ особенно рѣзко сказывается близость Gipfelgestein восточной вершины Эльбруса къ пантеллеритамъ, то это, конечно, въ отношеніи ($Na^2O : K^2O$), съ сильно бросающимся въ глаза преобладаніемъ Na^2O надъ K^2O, столь характернымъ именно для пантеллеритовъ, обладающихъ къ тому-же и значительнымъ содержаніемъ количествъ RO вообще. Но если принять во вниманіе, что въ отношеніи (R^2O : RO) ничуть не менѣе рѣзко сказывается характерное для дацитовыхъ породъ замѣтное преобладаніе RO надъ R^2O въ полную противоположность породамъ пантеллеритовымъ, то вышеприведенное нами соображеніе о промежуточномъ характерѣ Gipfelgestein восточной вершины Эльбруса, какъ-бы служащей связующимъ звеномъ между пантеллеритами и дацитами, пріобрѣтаетъ, повидимому, значительную долю вѣроятности. Наконецъ, отношеніе CaO къ MgO, которое сохраняетъ для дацитовъ, липаритовъ, пантеллеритовъ и Gipfelgestein западной вершины Эльбруса одинъ и тотъ-же общій характеръ, именно CaO : MgO > 1, причемъ для липаритовъ CaO : MgO = $5{,}_6$: 1, а для остальныхъ изъ перечисленныхъ породъ вообще < 2, здѣсь, въ Gipfelgestein восточной вершины Эльбруса получаетъ совершенно особое и строго опредѣленное выраженіе, — CaO : MgO = 1 : 1. Это отношеніе является какъ бы особенно характернымъ, фамильнымъ признакомъ для Gipfelgestein восточной вершины Эльбруса, имѣющимъ прямую связь съ не менѣе характерными особенностями минералогическаго состава породы, обнаруживаемыми при изслѣдованіи ея подъ микроскопомъ (роль біотита).



На основаніи всего вышеизложеннаго я полагалъ-бы справедливымъ признать за Gipfelgestein восточной вершины Эльбруса право на совершенно самостоятельное положеніе въ химической классификаціи горныхъ породъ, предложенной проф. Левинсономъ-Лессингомъ, которое въ достаточной мѣрѣ оправдывается особенностями микроструктуры, минералогическаго и химическаго состава ея, и отвести ей мѣсто въ ряду другихъ кислыхъ эффузивныхъ породъ между дацитами и пантеллеритами подъ именемъ „пантеллерита—дацита“.

Въ такомъ случаѣ, думается мнѣ, можно было-бы получить болѣе или менѣе законченную группировку эффузивныхъ породъ въ видѣ треугольника съ липаритомъ въ центрѣ, а дацитомъ, трахитомъ и пантеллеритомъ въ вершинахъ его. Къ этой группировкѣ, можетъ быть, и удастся въ концѣ концовъ свести всѣ петрографическія отношенія эффузивныхъ горныхъ породъ обширной вулканической области Эльбруса и тяготѣющаго къ нему района Кавказа.

Въ заключеніе считаю пріятнымъ долгомъ выразить глубокую благодарность Совѣту Варшавскаго Политехническаго Института Императора НИКОЛАЯ II, давшаго мнѣ возможность выпустить въ свѣтъ настоящую работу на страницахъ „Извѣстій“, и сердечную признательность глубокоуважаемому проф. В. И. Лучицкому, которому я обязанъ цѣнными указаніями при выполненіи предпринятаго мною труда.

Варшава. Декабрь 1909 г.
Минералогическій Кабинетъ.

RÉSUMÉ.

„Zur Frage über die Gesteine v. d. höchsten Punkten der beiden (östl. u. vestl.) Gipfeln des Elbrus".

Victor Doubjansky (Warschau).

Der Verfasser beschreibt einige Gesteinsstücke, die er beim Aufsteigen auf d. öst. (5593) M.) und vestl. (5629 M.) Gipfeln des Elbrus $\frac{6-19}{\text{VIII}}$ 1907 und $\frac{3-16}{\text{VIII}}$ 1908 von den höchsten Punkten des Berges entnommen hat. Der Verfasser hat der erste das Gipfelgestein v. d. westl. Elbrusgipfel analysiert, dessen Zusammensetzung die folgende ist: $SiO_2 = 65{,}_{61}\%$; $Al_2O_3 = 15{,}_{12}\%$; $Fe_2O_3 = 5{,}_{29}\%$; $FeO = 0{,}_{49}\%$; $CaO = 5{,}_{27}\%$; $MgO = 1{,}_{89}\%$; $K_2O = 2{,}_{52}\%$; $Na_2O = 4{,}_{19}\%$; Glühverlust $= 0{,}_{52}\%$, — darunter Verlust bein $120^0C = 0{,}_{15}\%$; das specif. Gewicht mit dem Picnometer bestimmt $= 2{,}_{605}$; die magmat. Formel (nach Prof. F. Loewinson-Lessing) $1{,}_{39}\ \overline{RO} \, . \, R_2O_3 \, . \, 6{,}_{22}\ SiO_2$; $\alpha = 2{,}_{82}$; $\beta = 39$; $R_2O \, . \, RO = 1 : 1{,}_5$; $RO : R_2O_3 = 1 : 1{,}_{20}$; $Na_2O : K_2O = 2{,}_5 : 1$; $CaO : MgO = 1{,}_8 : 1$.

Bei der mikroskopischen Untersuchung dieses Gipfelgestein hat der Verf. gefunden, dass Hypersthen und Augit hier eine gleiche Rolle spieln. Auf Grund der chemischen sowie mikroskopischen Beschaftenheiten und der Structur des Gipfelgesteines v. d. westl. Elbrusgipfel, kommt der Verf. zu dem Schluss, das es ein „hyalopilitischer Pyroxen-Amphibol-Dacit" ist (v. Ammon: „vitrophyrischer Hypersthen-Amphibol-Dacit", v. Déchy: „Hypersthen-Biotit-Amphibol-Dacit").

Am westl. Elbrusgipfel hat der Verf. einige Stücken von Bimstein mit rosarothem Auflug gefunden. Der. Verf. hat auch am Scheitel des östl. Elbrusgipfel eine mächtige Scholle von schlackenförmigen Tuffsteine mit Lapilli und reichlichem Schwefelanflügen gefunden.

Bis jetzt konnte man über das wirkliches Gipfelgestein v. d. höchsten Punkten des östl. Elbrusgipfel keine Anweisung finden; der Verfasser gibt zum ersten Mal eine ausführliche mikroskopische Beschreibung dieses Gesteines und konstatiert den makroskopischen sowie mikroskopischen Unterschied des Gipfelgesteines v. d. östl. Elbrusgipfel von dem Gipfelgestein v. d. westl. Elbrusgipfel. Das Gestein hat eine mehr glasige Beschafenheit überhaupt, und das ganz isotrope Glas in nicht ganz kleineren Partien vorhanden ist; der Augit wie auch der Amphibol spielen hier eine ganz untergeordnete Rolle, die hellen grossen porphirischen Einsprenglingen des primär Biotit dagegen kommen stark in Vordergrund; in grosserer Mange sind die Hohlraümen vorhanden, an deren Wänden die Neubildungen fehlen; es ist wahrscheinlich, das hier mögliherweise kann der Anorthoklas in Form der kleinen, rechtwinkeligen, reinen, wasserhellen Einsprenglingen beigemengt sein, sowie auch die etwas Na enthaltende Glieder der Gruppe des Pyroxen und Amphibol.

Nach der Analyse des Verfassers ist die chemische Zusammensetzung dieses Gipfelgesteines die folgende: $SiO_2 = 68,_{44}\%$; $Al_2O_3 = 14,_{48}\%$; $Fe_2O_3 = 3,_{37}\%$; $FeO = 0,_{82}\%$; $CaO = 4,_{01}\%$; $MgO = 3,_{10}\%$; $K_2O = 1,_{29}\%$; $Na_2O = 3,_{24}\%$; Glühverlust $= 1,_{00}\%$, — darunter Verlust beim $120^0C = 0,_{14}\%$; das specif. Gewicht $= 2,_{226}$ (?); die magmat. Formul $1,_{31}\ \overline{RO} \,.\, R_2O_3 \,.\, .\ 7,_{06}\ SiO_2$; $\alpha = 3,_{27}$; $\beta = 33$; $R_2O : RO = 1 : 2,_{50}$; $RO : R_2O_3 = 1 : 1,_{06}$; $Na_2O : K_2O = 5 : 1$; $CaO : MgO = 1 : 1$.

Auf Grund aller dieser Angaben und Zusammenstellungen (Seite 19) kan man das Gipfelgestein v. d. östlich. Elbrusgipfel als einen „vitrophyrischen sauerlichen Hypersthen-Biotit-(Amphibol)-Dacit“ nennen und es als ein Glied zwischen Dacit und Pantellerit unter dem Namen „Pantelleritdacit“ stellen.

Der Zusammensetzung dieses letzten Gesteines mit den anderen effusivgesteine ist im „Dreieck“ dargestellt (Seite 21), wo der Liparit in dem Mittelpunkt, der Dacit, Trachyt und Pantellerit auf den Scheiteln des Dreiecks liegen. Zu einer derselben Gruppierung wird es später möglich auch andere Gesteine des Elbrus und der nebenliegenden Gegend zusammenbringen.

Просятъ исправить вкравшіяся опечатки, искажающія смыслъ.

Напечатано:			Слѣдуетъ читать:
болѣе	стр. 8;	13 строка снизу	довольно
88,39 %	„	12 „	66,02 %
2,27 %	„	11 „	2,10 %
0,54 %	„	10 „	0,41 %

Verzeichniss der Bildungen.

Taf. I. Fig. 1. Der Scheitel des östl. Elbrusgipfel.

Fig. 2. Der Tuffstein v. d. östlich. Elbrusgipfel ($^1/_3$ natürl. Gröse).

Taf. II. Fig. 3. Das Gipfelgestein v. d. westl. Elbrusgipfel ($^2/_3$ natürl. Grösse; natürl. Farbe).

Fig. 4. Das Gipfelgestein v. d. östl. Elbrusgipfel mit frischen Bruche $^2/_3$ natürl. Grösse; natürl. Farbe).

Fig. 5. Dasselbe Gipfelgestein mit Lapilli auf der Oberfläche.

Taf. III. Fig. 6. Ein östl. Theil des westl. Elbrusgipfel.

Fig. 7—8. Die Figuren des Ausblasen im Schneedeekel des westl. Elbrusgipfel.

Fig. 9. Elbrus v. d. Zud mit dem Terskolischen Pick in dem Vordergrund (3625 M.).

Warschau. December 1909.

Mineralog. Kab. d. Kaiserl. Polytechn. Inst.

Объясненіе рисунковъ.

Таблица I. Фиг. 1-я. Фотографическій снимокъ темянной части восточной вершины Эльбруса со склоновъ западной вершины.

Фиг. 2-я. Фотографическій снимокъ туфоваго обломка съ темянной части восточной вершины Эльбруса ($^1/_3$ натур. величины).

Таблица II. Фиг. 3. Фотографическій снимокъ штуфа съ темянныхъ частей западной вершины Эльбруса ($^2/_3$ натур. величины; подлинная окраска породы).

Фиг. 4. Фотографическій снимокъ штуфа съ темянныхъ частей восточной вершины Эльбруса въ мѣстахъ, свободныхъ отъ покровной туфовой толщи ($^2/_3$ натур. величины, поверхность свѣжаго излома; подл. окр. породы).

Фиг. 5. То-же (поверхность, покрыта тонкимъ слоемъ мелкихъ ляпилли).

Таблица III. Фиг. 6. Фотографическій снимокъ части западной вершины Эльбруса (восточная пирамидка и выступающее къ югу платообразное плечо; видъ съ западной пирамидки).

Фиг. 7. Формы выдуванія на поверхности уплотненнаго снѣгового покрова выступающаго къ югу отъ восточной пирамидки плато на западной вершинѣ Эльбруса (размѣры большого діаметра эллипсиса варіируютъ отъ 5 до 20 сентиметровъ). Къ стр. 3.

Фиг. 8. Формы карманообразнаго выдуванія на юго-западныхъ и южныхъ склонахъ обѣихъ пирамидокъ на западной вершинѣ Эльбруса (истинные размѣры варіируютъ отъ 10 до 20 сентиметровъ въ поперечникѣ). Къ стр. 4.

Фиг. 9. Видъ на Эльбрусъ, фирновыя поля и Терекольскій пикъ съ юга (пріютъ „Надежда“, на высотѣ 3625 метр.).

Фиг. 1.

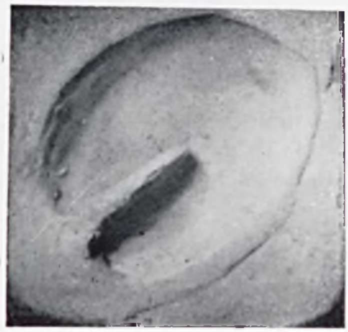
Фиг. 2.

Фиг. 3.

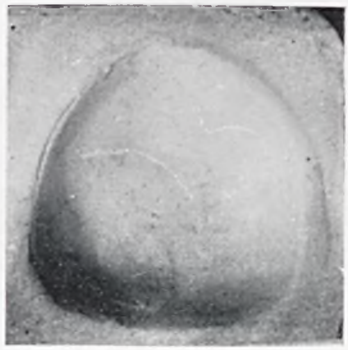
Фиг. 4.

Фиг. 5.

Фиг. 6.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

Фиг. 9.

Къ теоріи изысканія магнитныхъ рудъ.

Д. В. ФРОСТЪ.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Настоящая статья представляетъ собою часть моей готовящейся къ печати работы по вопросу о развѣдкахъ магнитныхъ рудъ. Теорія изысканія послѣднихъ впервые возникла въ Швеціи, гдѣ магнитную залежь обыкновенно представляли въ видѣ стерженвиднаго идеальнаго магнита, находящагося въ отвѣсномъ положеніи. При такомъ представленіи получалась крайняя простота теоретическихъ выводовъ. Къ сожалѣнію послѣдніе, вполнѣ достаточные при изысканіяхъ сильно магнитныхъ и съ крутымъ паденіемъ рудъ, какія почти всегда наблюдаются въ Швеціи, являются далеко не точными при рудахъ болѣе слабыхъ или имѣющихъ небольшіе наклоны къ поверхности. Вотъ почему мы видимъ стремленіе нѣкоторыхъ лицъ, занимавшихся вопросомъ изысканія магнитныхъ рудъ, обосновать теорію изысканія представленіемъ залежей въ такихъ формахъ, которыя болѣе соотвѣствуютъ дѣйствительности. Здѣсь слѣдуетъ упомянуть о работахъ профессора Uhlich'а: „Weitere Beträge zur Aufsuchung magnetischer Erzlagerstätten" въ журналѣ „Jahrbuch f. Berg- u. Hüttenwesen in K.n.g. Sachsen" за 1902 годъ и „Henry Lloyd Smyth'а: „Magnetic Observations in Geological Mapping" въ „Transactions American Institute of Mining Engineers" за 1896 г. Названные авторы въ своихъ выводахъ исходили изъ представленія магнитныхъ рудъ въ видѣ пластообразныхъ залежей, имѣющихъ различное простираніе и произвольный уголъ паденія. Съ такимъ представленіемъ и получающимися при этомъ выводами желающіе могутъ познакомиться также по печатаемому мною курсу „Изысканія магнитныхъ рудъ.“ Въ дѣйствительности и пластообразныя формы обыкновенно не свойственны магнитнымъ залежамъ, которыя скорѣе являются въ видѣ гнѣздообразныхъ мѣсторожденій эллипсоидальной, сфероидальной или приближающейся къ послѣднимъ формѣ. Вотъ почему мысль разсмотрѣть дѣйствіе магнитныхъ рудъ эллипсоидальной формы являлась вполнѣ естественной. Теоретическому вопросу о притяженіи равномѣрно намагниченнаго эллипсоида посвящено весьма много работъ.

Между прочимъ мы имѣемъ такія классическія работы, какъ Gauss'a, Laplace, Ivory, Chasles и Dirichlet. Не указывая другихъ работъ, посвященныхъ тому же вопросу, такъ какъ это не входитъ въ нашу задачу, замѣтимъ только, что мы при выводѣ формулъ для слагающихъ притяженія равномѣрно намагниченнаго эллипсоида слѣдовали методу, указанному P. G. Lejeune-Dirichlet въ его произведеніи „Ueber eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale.“ Получивъ окончательныя формулы по Dirichlet, мы соотвѣтствующей подстановкой обращаемъ ихъ въ формулы Gauss'a, болѣе удобныя для нашихъ послѣдующихъ разсужденій.

Слѣдуетъ еще замѣтить, что получающіяся для слагающихъ притяженія эллипсоида формулы представляются въ видѣ эллиптическихъ интеграловъ, не приводимыхъ къ конечному виду. Въ виду этаго затрудненія мы переходимъ далѣе къ эллипсоиду вращенія, такъ какъ, мѣняя соотношеніе осей послѣдняго, мы въ сущности приходимъ къ различнымъ формамъ, въ которыхъ могутъ наблюдаться магнитныя залежи. Не смотря на такое упрощеніе вопроса, изслѣдованіе все же представляетъ не мало затрудненій, и потому мы просимъ смотрѣть на эту статью, какъ на попытку лишь подойти къ болѣе общей теоріи изысканія магнитныхъ рудъ.

Къ теоріи изысканія магнитныхъ рудъ.

Притяженіе магнитной залежи, представляемой въ видѣ равномѣрно намагниченнаго эллипсоида.

Представляя магнитныя рудныя залежи въ видѣ эллипсоидовъ и предполагая намагничиваніе послѣднихъ равномѣрнымъ, разсмотримъ этотъ вопросъ теоретически.

Пусть намъ данъ равномѣрно намагниченный эллипсоидъ

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

и притягиваемый имъ пунктъ съ координатами a, b, c.

Примемъ, что законъ притяженія будетъ выражаться функціей $\frac{1}{\rho^2}$, гдѣ ρ^2 квадратъ разстоянія притягиваемаго пункта отъ центра эллипсоида. Въ такомъ случаѣ потенціалъ выразится такъ

$$V = -\int \frac{dx\,.\,dy\,.\,dz}{\rho}$$

Пользуясь при нахожденіи этого интеграла свойствами прерывнаго множителя Dirichlet

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin x \cos \lambda x}{x}\,dx = \begin{cases} = 1, \text{ если } \lambda < 1 \\ = 0, \text{ если } \lambda > 1 \\ = {}^1/_2, \text{ если } \lambda = 1. \end{cases}$$

можемъ написать

$$V = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\varphi \frac{\sin\varphi}{\varphi}\int \cos\left[\left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2}\right)\varphi\right]\frac{dx\,dy\,dz}{\rho} =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\varphi \frac{\sin\varphi}{\varphi}\int e^{\left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2}\right)\varphi i}\,\frac{dx\,.\,dy\,.\,dz}{\rho}$$

По Эйлеровой формулѣ

$$\int_0^\infty e^{q\psi i}\,\psi^{r-1}\,d\psi = \frac{\Gamma(r)}{(\pm q)^r}\,e^{\pm\frac{r\pi i}{2}},$$

гдѣ

$$1 > r > 0$$

найдемъ, что

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{(\rho^2)^{1/2}} = \frac{e^{-\frac{\pi i}{2}}}{\Gamma(^1/_2)}\int_0^\infty e^{\rho^2\psi i}\,\psi^{-1/2}d\psi = \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{\rho^2\psi i}\,\psi^{-1/2}\,d\psi$$

Вставляя значеніе $\frac{1}{\rho}$ въ выраженіе для V, получимъ

$$V = -\frac{2}{\pi^{3/2}} e^{-\frac{\pi i}{4}} \int_0^\infty \int_0^\infty d\varphi\, d\psi.\, \frac{\sin\varphi}{\varphi}\, \psi^{-1/2}\, e^{(a^2+b^2+c^2)\psi i}\, u,$$

гдѣ u для сокращенія обозначаетъ интегралы, взятые по x, y, z, изъ которыхъ первый

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[\left(\psi+\frac{\varphi}{\alpha^2}\right)x^2 - 2a\psi x\right]i}\, dx$$

По формулѣ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(lx^2+2mx)i}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{l}}\, e^{\frac{\pi i}{4}}\, e^{\frac{m^2}{e}};$$

получимъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[\left(\psi+\frac{\varphi}{\alpha^2}\right)x^2 - 2a\psi x\right]i}\, dx = \sqrt{\pi}\, \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{\psi+\frac{\varphi}{\alpha^2}}}\, e^{-\frac{a^2\psi^2 i}{\psi+\frac{\varphi}{\alpha^2}}}.$$

Вставляя это въ формулу для V и замѣтивъ, что

$$\left[e^{\frac{\pi i}{4}}\right]^3 = i\, e^{\frac{\pi i}{4}},$$

получимъ

$$V = -2i \int_0^\infty \int_0^\infty d\varphi\, d\psi\, \frac{\sin\, \psi^{1/2}}{\varphi\sqrt{\left(\psi+\frac{\varphi}{\alpha^2}\right)\left(\psi+\frac{\varphi}{\beta^2}\right)\left(\psi+\frac{\varphi}{\gamma^2}\right)}} \times$$

$$e^{i\varphi\psi\left[\frac{a^2}{\varphi+\alpha^2\psi}+\frac{b^2}{\varphi+\beta^2\psi}+\frac{c^2}{\varphi+\gamma^2\psi}\right]}$$

ибо

$$a^2\psi i - \frac{a^2\psi^2 i}{\psi+\frac{\varphi}{\alpha^2}} = a^2\psi i\left(1-\frac{\psi\alpha^2}{\varphi+\alpha^2\psi}\right) = a^2\psi i\,\frac{\varphi}{\varphi+\alpha^2\psi}.$$

Такъ какъ предыдущее выраженіе для V какъ въ производныхъ, такъ и подъ знакомъ корня представляетъ однородную функцію φ и ψ, то очевидно, что этотъ интегралъ можно упростить, если вмѣсто одного перемѣннаго, напримѣръ ψ, вставить его отношеніе ко второму.

Подставимъ

$$\psi = \frac{\varphi}{s},$$

гдѣ s новое перемѣнное.

Границы интегрированія будутъ ∞ и 0, но можно взять прежніе, если передъ выраженіемъ измѣнить знакъ. Подставляя

$$S = \frac{a^2}{\alpha^2 + s} + \frac{b^2}{\beta^2 + s} + \frac{c^2}{\gamma^2 + s}$$

въ выраженіе для V, получаемъ

$$V = -2i \int_0^\infty \int_0^\infty d\varphi\ ds\ \frac{\sin\varphi.\ \varphi^{-2}}{\sqrt{(1+\frac{s}{\alpha^2})(1+\frac{s}{\beta^2})(1+\frac{s}{\gamma^2})}}\ e^{\varphi S i},$$

ибо

$$d\psi \frac{\sin\varphi\ \varphi^{-1/2}}{\varphi\sqrt{(\psi+\frac{\varphi}{\alpha^2})(\psi+\frac{\varphi}{\beta^2})(\psi+\frac{\varphi}{\gamma^2})}}\ e^{\varphi\psi i\left[\frac{a^2}{\varphi+\alpha^2\psi}+\frac{b^2}{\varphi+\beta^2\psi}+\frac{c^2}{\varphi+\gamma^2\psi}\right]} =$$

$$= -\varphi\frac{ds}{s^2}\frac{\sin\varphi\ \psi^{-1/2}}{\varphi\sqrt{(\psi+\frac{\psi s}{\alpha^2})(\psi+\frac{\psi s}{\beta^2})(\psi+\frac{\psi s}{\gamma^2})}}\ e^{\varphi\psi i\left[\frac{a^2}{\psi s+\alpha^2\psi}+\frac{b^2}{\psi s+\beta^2\psi}+\frac{c^2}{\psi s+\gamma^2\psi}\right]} =$$

$$= -\frac{\varphi ds}{s^2}\frac{\sin\varphi\ \psi^{-1/2}}{\varphi\psi^{3/2}\sqrt{(1+\frac{s}{\alpha^2})(1+\frac{s}{\beta^2})(1+\frac{s}{\gamma^2})}}\ e^{\varphi i\left[\frac{a^2}{s+\alpha^2}+\frac{b^2}{s+\beta^2}+\frac{c^2}{s+\gamma^2}\right]} =$$

$$= -ds\frac{\sin\varphi\ s^2}{s^2\varphi^2\sqrt{(1+\frac{s}{\alpha^2})(1+\frac{s}{\beta^2})(1+\frac{s}{\gamma^2})}}\ e^{\varphi S i} =$$

$$= -ds\frac{\sin\varphi.\ \varphi^{-1/2}}{\sqrt{(1+\frac{s}{\alpha^2})(1+\frac{s}{\beta^2})(1+\frac{s}{\gamma^2})}}\ e^{\varphi S i}.$$

Дифференцируя послѣднее выраженіе для V по a, получаемъ слагающую горизонтальнаго напряженія, параллельнаго оси α,

$$A = \frac{4a}{\alpha^2}\int_0^\infty ds\ \frac{1}{\sqrt{(1+\frac{s}{\alpha^2})^3(1+\frac{s}{\beta^2})(1+\frac{s}{\gamma^2})}}\int_0^\infty e^{\varphi S i}\sin\varphi.\ \varphi^{-1/2}\ d\varphi$$

ибо

$$\left[e^{\varphi Si}\right]' = e^{\varphi Si}\,(\varphi\, Si)' = \varphi\, i\, e^{\varphi Si}\left(\frac{a^2}{\alpha^2+s}\right)' = \varphi\, i\, e^{\varphi Si}\;\frac{2\,a}{\alpha^2\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)}$$

Такъ какъ

$$\int_o^\infty e^{\varphi Si}\;\sin\varphi\,\varphi^{-1/2}\,d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

то

$$A = \frac{2\pi a}{\alpha^2}\int_\sigma^\infty \frac{ds}{\sqrt{(1+\frac{s}{\alpha^2})^3\,(1+\frac{s}{\beta^2})\,(1+\frac{s}{\gamma^2})}}$$

гдѣ s должно быть выбрано такъ, чтобы

$$S = \frac{a^2}{\alpha^2+s} + \frac{b^2}{\beta^2+s} + \frac{c}{\gamma^2+s} = 1.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если пунктъ внѣшній, то

$$\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2} > 1.$$

и потому для $s = 0$ $S > 1$. Такъ какъ, очевидно, оно тѣмъ меньше, чѣмъ больше s и обратится въ нуль при $s = \infty$, то существуетъ только одно единственное значеніе s, а именно σ, для котораго $S = 1$. До тѣхъ поръ, пока $s < \sigma$ $S > 1$, напротивъ, если $s > \sigma$, то $S < 1$. Слѣдовательно интегралъ слѣдуетъ взять по s въ предѣлахъ отъ $s = \sigma$ до $s = \infty$. Совершенно аналогичнымъ образомъ мы получимъ для двухъ другихъ слагающихъ, параллельныхъ осямъ β и γ, слѣдующія выраженія

$$B = \frac{2\pi b}{\beta^2}\int_\sigma^\infty \frac{ds}{\sqrt{(1+\frac{s}{\alpha^2})\,(1+\frac{s}{\beta^2})^3\,(1+\frac{s}{\gamma^2})}}$$

$$C = \frac{2\pi c}{\gamma^2}\int_\sigma^\infty \frac{ds}{\sqrt{(1+\frac{s}{\alpha^2})\,(1+\frac{s}{\beta^2})\,(1+\frac{s}{\gamma^2})^3}}$$

Полагая въ выраженіяхъ для A, B и C

$$\sqrt{1+\frac{s}{\alpha^2}} = \frac{1}{t},$$

перейдемъ къ формуламъ, болѣе для насъ удобнымъ.

Вставивъ

$$ds = -\frac{2\alpha^2\, dt}{t^3}$$

$$1 + \frac{s}{\beta^2} = 1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(\frac{1}{t^2} - 1\right)$$

$$1 + \frac{s}{\gamma^2} = 1 + \frac{\alpha^2}{\gamma^2}\left(\frac{1}{t^2} - 1\right)$$

мы получимъ

$$A = \frac{4\pi a\,\beta\gamma}{\alpha^2}\int_o^t \frac{t^2\, dt}{\sqrt{\left[1-\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)t^2\right]\left[1-\left(1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)t^2\right]}}$$

$$B = \frac{4\pi b\,\beta\gamma}{\alpha^2}\int_o^t \frac{t^2\, dt}{\sqrt{\left[1-\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)t^2\right]^3\left[1-\left(1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)t^2\right]}}$$

$$C = \frac{4\pi c\,\beta\gamma}{\alpha^2}\int_o^t \frac{t^2\, dt}{\sqrt{\left[1-\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)t^2\right]\left[1-\left(1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)t^2\right]^3}}$$

Входящія въ выраженія A, B и C эллиптическіе интегралы мы не можемъ найти непосредственно и должны бы были разложить подынтегральную функцію въ рядъ.

Впрочемъ при изслѣдованіи дѣйствія магнитныхъ рудныхъ залежей, мы можемъ представлять ихъ въ видѣ эллипсоидовъ вращенія. Тогда формулы слагающихъ напряженій значительно упрощаются. Итакъ принимая,

$$\alpha = \beta$$

получимъ

$$A = \frac{4\pi\, a\gamma}{\alpha}\int_o^t \frac{t^2\, dt}{\sqrt{1-\left(1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)t^2}}$$

$$B = \frac{4\pi\, b\gamma}{\alpha}\int_o^t \frac{t^2\, dt}{\sqrt{1-\left(1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)t^2}}$$

$$C = \frac{4\pi\, c\gamma}{\alpha}\int_o^t \frac{t^2\, dt}{\sqrt{\left[1-\left(1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)t^2\right]^3}}$$

Входящія въ послѣднія выраженія интегралы не трудно найти, только тутъ слѣдуетъ различать два случая, а именно когда $\gamma < \alpha$ и когда $\gamma > \alpha$.

I. $\gamma < \alpha$ эллипсоидъ сильно сплюснутый

$$A_1 = \frac{2\pi a\gamma}{\alpha\sqrt{(1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2})^3}}\left[arc\,sin\left\{\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}}\,t\right\} - \sqrt{1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}}\,t\sqrt{1-(1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2})\,t^2}\right]$$

$$B_1 = \frac{2\pi b\gamma}{\alpha\sqrt{(1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2})^3}}\left[arc\,sin\left\{\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}}\,t\right\} - \sqrt{1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}}\,t\sqrt{1-(1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2})\,t^2}\right]$$

$$C_1 = \frac{4\pi c\gamma}{\alpha\sqrt{(1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2})^3}}\left[\frac{\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}}\,t}{\sqrt{1-(1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2})\,t^2}} - arc\,sin\left\{\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}}\,t\right\}\right]$$

II. $\gamma > \alpha$ эллипсоидъ вытянутый

$$A_2 = \frac{2\pi a\gamma}{\alpha\sqrt{(\frac{\gamma^2}{\alpha^2}-1)^3}}\left[\sqrt{\frac{\gamma^2}{\alpha^2}-1}\,t\sqrt{1+(\frac{\gamma^2}{\alpha^2}-1)\,t^2} - \right.$$

$$\left. - lg\left\{\sqrt{\frac{\gamma^2}{\alpha^2}-1}\,t + \sqrt{1+(\frac{\gamma^2}{\alpha^2}-1)\,t^2}\right\}\right]$$

$$B_2 = \frac{2\pi b\gamma}{\alpha\sqrt{(\frac{\gamma^2}{\alpha^2}-1)^3}}\left[\sqrt{\frac{\gamma^2}{\alpha^2}-1}\,t\sqrt{1+(\frac{\gamma^2}{\alpha^2}-1)\,t^2} - \right.$$

$$\left. - lg\left\{\sqrt{\frac{\gamma^2}{\alpha^2}-1}\,t + \sqrt{1+(\frac{\gamma^2}{\alpha^2}-1)\,t^2}\right\}\right]$$

$$C_2 = \frac{4\pi c\gamma}{\alpha\sqrt{(\frac{\gamma^2}{\alpha^2}-1)^3}}\left[lg\left\{\sqrt{\frac{\gamma^2}{\alpha^2}-1}\,t + \sqrt{1+(\frac{\gamma^2}{\alpha^2}-1)\,t^2}\right\} - \frac{\sqrt{\frac{\gamma^2}{\alpha^2}-1}\,t}{\sqrt{1+(\frac{\gamma^2}{\alpha^2}-1)\,t^2}}\right]$$

Въ обоихъ случаяхъ для A, B и C

$$\frac{1}{t} = \sqrt{1+\frac{\sigma}{\alpha^2}}$$

гдѣ σ въ свою очередь опредѣляется условіямъ

$$S = \frac{a^2 + b^2}{\alpha^2 + \sigma} + \frac{c^2}{\gamma^2 + \sigma} = 1.$$

Если бы мы въ выраженіяхъ A, B, C, являющихся функціями s, положили

$$\sqrt{1 + \frac{s}{\gamma^2}} = \frac{1}{t},$$

то получили бы

$$A = \frac{4\pi a \alpha \beta}{\gamma^2} \int_0^t \frac{t^2\, d\, t}{\sqrt{\left[1-(1-\frac{\alpha^2}{\gamma^2})\, t^2\right]^3 \left[1-(1-\frac{\beta^2}{\gamma^2})\, t^2\right]}}$$

$$B = \frac{4\pi b \alpha \beta}{\gamma^2} \int_0^t \frac{t^2\, d\, t}{\sqrt{\left[1-(1-\frac{\alpha^2}{\gamma^2})\, t^2\right] \left[1-(1-\frac{\beta^2}{\gamma^2})\, t^2\right]^3}}$$

$$C = \frac{4\pi c \alpha \beta}{\gamma^2} \int_0^t \frac{t^2\, d\, t}{\sqrt{\left[1-(1-\frac{\alpha^2}{\gamma^2})\, t^2\right] \left[1-(1-\frac{\beta^2}{\gamma^2})\, t^2\right]}}$$

или при $\alpha = \beta$.

$$A = \frac{4\pi a \alpha^2}{\gamma^2} \int_0^t \frac{t^2\, d\, t}{\left[1 - (1 - \frac{\alpha^2}{\gamma^2})\, t^2\right]^2}$$

$$B = \frac{4\pi b \alpha^2}{\gamma^2} \int_0^t \frac{t^2\, d\, t}{\left[1 - (1 - \frac{\alpha^2}{\gamma^2})\, t^2\right]^2}$$

$$C = \frac{4\pi c \alpha^2}{\gamma^2} \int_0^t \frac{t^2\, d\, t.}{1 - (1 - \frac{\alpha^2}{\gamma^2})\, t^2}$$

Различая здѣсь также два случая: $\gamma < \alpha$ и $\gamma > \alpha$, получимъ.

III. $\gamma > \alpha$ эллипсоидъ вытянутый

$$A_3 = \frac{4\pi a \alpha^2}{\gamma^2 \sqrt{\left(1-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\right)^3}} \left[\frac{\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\, t}{2\left[1-\left(1-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\right)t^2\right]} - \frac{1}{4}\, lg\, \frac{1+\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\, t}{1-\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\, t} \right]$$

$$B_3 = \frac{4\pi b \alpha^2}{\gamma^2 \sqrt{\left(1-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\right)^3}} \left[\frac{\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\, t}{2\left[1-\left(1-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\right)t^2\right]} - \frac{1}{4}\, lg\, \frac{1+\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\, t}{1-\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\, t} \right]$$

$$C_3 = \frac{4\pi c \alpha^2}{\gamma^2 \sqrt{\left(1-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\right)^3}} \left[\frac{1}{2}\, lg\, \frac{1+\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\, t}{1-\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\, t} - \sqrt{1-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}\, t \right].$$

IV. $\gamma < \alpha$ эллипсоидъ сплюснутый

$$A_4 = \frac{4\pi a \alpha^2}{\gamma^2 \sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{\gamma^2}-1\right)^3}} \left[\frac{1}{2}\, ar\,ctg \left\{\sqrt{\frac{\alpha^2}{\gamma^2}-1}\; t\right\} - \frac{\sqrt{\frac{\alpha^2}{\gamma^2}-1}\; t}{2\left[1+\left(\frac{\alpha^2}{\gamma^2}-1\right)t^2\right]} \right]$$

$$B_4 = \frac{4\pi b \alpha^2}{\gamma^2 \sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{\gamma^2}-1\right)^3}} \left[\frac{1}{2}\, ar\,ctg \left\{\sqrt{\frac{\alpha^2}{\gamma^2}-1}\; t\right\} - \frac{\sqrt{\frac{\alpha^2}{\gamma^2}-1}\; t}{2\left[1+\left(\frac{\alpha^2}{\gamma^2}-1\right)t^2\right]} \right]$$

$$C_4 = \frac{4\pi c \alpha^2}{\gamma^2 \sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{\gamma^2}-1\right)^3}} \left[\sqrt{\frac{\alpha^2}{\gamma^2}-1}\; t - ar\,ctg \left\{\sqrt{\frac{\alpha^2}{\gamma^2}-1}\; t\right\} \right]$$

Опредѣлимъ теперь, чему равно t, входящее въ выраженія слагающихъ при случаяхъ I—IV.

Если (сл. I и II)

$$\frac{1}{t} = \sqrt{1+\frac{\sigma}{\alpha^2}}$$

при σ опредѣляется изъ условія

$$\frac{a^2+b^2}{\alpha^2+\sigma} + \frac{c^2}{\gamma^2+\sigma} = 1.$$

Полагая здѣсь

$$\alpha^2 + \sigma = h \quad \text{и} \quad \gamma^2 + \sigma = h + e$$

гдѣ

$$e = \gamma^2 - \alpha^2$$

ми получимъ, что

$$\frac{a^2 + b^2}{h} + \frac{c^2}{h + e} = 1.$$

и

$$h = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - e + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 - e)^2 + 4\,(a^2 + b^2)\,e}}{2}$$

но

$$t^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \sigma} = \frac{\alpha}{h}$$

и потому

$$t^2 = \frac{2\,\alpha^2}{a^2 + b^2 + c^2 - e + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 - e)^2 + 4\,(a^2 + b^2)\,e}.}$$

Если (сл. III и IV)

$$\frac{1}{t^2} = \sqrt{1 + \frac{\sigma}{\gamma^2}},$$

то подобно предыдущему найдемъ

$$t^2 = \frac{2\gamma^2}{a^2 + b^2 + c^2 - e + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 - e)^2 + 4\,c^2\,e}},$$

гдѣ

$$e = \alpha^2 - \gamma^2.$$

Разсматривая выведенныя нами выраженія слагающихъ напряженія, мы видимъ, что они для

I сл. являются функціями $\sqrt{\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha^2}}\,t$

II „ „ „ $\sqrt{\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2}}\,t$

III „ „ „ $\sqrt{\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\gamma^2}}\,t$

IV „ „ „ $\sqrt{\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\gamma^2}}\,t.$

Легко доказать, что эти члены всегда будутъ положительной дробью. Величина ихъ очпвидно зависитъ отъ величины t и чѣмъ меньше будетъ t, тѣмъ меньше самые члены. Предположимъ, что въ выраженіи

$$t^2 = \frac{2\ \alpha^2}{a^2 + b^2 + c^2 - e + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 - e)^2 + 4\ (a^2 + b^2)\ e}}$$

$b = o$, перемѣнное c положимъ $= o$ (наиболѣе невыгодный случай) и $a = const.$

Тогда $$t^2 = \frac{\alpha^2}{a^2}$$

Если въ выраженіи

$$t^2 = \frac{2\ \gamma^2}{a^2 + b^2 + c^2 - e + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 - e)^2 + 4\ c^2\ e}}$$

$b = o$, перемѣнное a положимъ $= o$ и $c = const$, то

$$t^2 = \frac{\gamma^2}{c^2}.$$

Итакъ разсмотримъ слѣдующіе случаи

1. $\gamma < \alpha$, a перемѣнно, $c = const$, $b = o$

$\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\gamma^2} t^2 = \frac{\alpha^2-\gamma^2}{\gamma^2} \cdot \frac{\gamma^2}{c^2} < 1$. т. е. всегда правильная дробь, если $\alpha^2 < 2\ \gamma^2$,

2. $\gamma < \alpha$, c перемѣнно, $a = const$, $b = o$

$$\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha^2} . t^2 = \frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha^2}{a^2} < 1 \text{ безусловно,}$$

т. к. a вообще больше α и только при выходѣ мѣсторожденія на поверхность $a = \alpha$.

3. $\gamma > \alpha$, a перемѣнно, $c = const$, $b = o$

$$\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\gamma^2} t^2 = \frac{\gamma^2-\alpha^2}{\gamma^2} \ \frac{\gamma^2}{c^2} < 1 \text{ безусловно}$$

4. $\gamma > \alpha$, c перемѣнно, $a = const$, $b = o$

$$\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2} t^2 = \frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha^2}{a^2} < 1 \text{ всегда, если } \gamma^2 < 2\ \alpha^2.$$

Итакъ мы видимъ, что если перемѣнная координата будетъ параллельна короткой оси эллипсоида, то членъ, функціей котораго являются слагающія напряженія, будетъ всегда безусловно меньше единицы, но болѣе нуля. Если же перемѣнная координата параллельна длинной оси, то въ крайнемъ случаѣ, при выходѣ мѣсторожденія на поверхность, необходимо для предыдущаго условія, чтобы квадратъ большой полуоси былъ меньше удвоеннаго квадрата меньшей полуоси эллипсоида.

Для насъ интереснѣе изслѣдованіе по направленію, параллельному меньшей полуоси. При рудахъ, залегающихъ глубоко, наши изслѣдованія будутъ справедливы по направленію какъ меньшей, такъ и большей полуоси (перемѣнная || меньшей или большей полуоси).

Итакъ мы вообще можемъ принять, что слагающія напряженія являются функціями членовъ, выражающихся правильными дробями, а потому мы можемъ разложить эти слагающія въ ряды по степенямъ вишеупомянутыхъ членовъ.

Полагая

$$\sqrt{\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha^2}}=m, \quad \sqrt{\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2}}=n, \quad \sqrt{\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\gamma^2}}=p, \quad \sqrt{\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\gamma^2}}=q,$$

Мы получимъ выраженія для A, B, C въ слѣдующемъ видѣ:

I. $\gamma < \alpha$, c перемѣнно, эллипсоидъ сильно сжатый

$$A_1 = \frac{2\pi a\gamma}{\alpha\, m^3}\left[\mathrm{arc\,sin}\, mt - mt\sqrt{1-m^2t^2}\right]$$

$$B_1 = \frac{2\pi b\gamma}{\alpha\, m^3}\left[\mathrm{arc\,sin}\, mt - mt\sqrt{1-m^2t^2}\right]$$

$$C_1 = \frac{4\pi c\gamma}{\alpha\, m^3}\left[\frac{mt}{\sqrt{1-m^2t^2}} - \mathrm{arc\,sin}\, mt\right]$$

II. $\gamma > \alpha$, эллипсоидъ вытянутый

$$A_2 = \frac{2\pi a\gamma}{\alpha\, n^3}\left[nt\sqrt{1+n^2t^2} - lg\left\{nt+\sqrt{1+n^2t^2}\right\}\right]$$

$$B_2 = \frac{2\pi b\gamma}{\alpha\, n^3}\left[nt\sqrt{1+n^2t^2} - lg\left\{nt+\sqrt{1+n^2t^2}\right\}\right]$$

$$C_2 = \frac{4\pi c\gamma}{\alpha\, n^3}\left[lg\left\{nt+\sqrt{1+n^2t^2}\right\} - \frac{nt}{\sqrt{1+n^2t^2}}\right]$$

III. $\gamma > \alpha$ $\quad a$ перемѣнно, эллипсоидъ вытянутый

$$A_3 = \frac{4\pi a \alpha^2}{\gamma^2 p^3}\left[\frac{p t}{2[1-p^2t^2]} - \frac{1}{4} lg \frac{1+pt}{1-pt}\right]$$

$$B_3 = \frac{4\pi b \alpha^2}{\gamma^2 p^3}\left[\frac{p t}{2[1-p^2t^2]} - \frac{1}{4} lg \frac{1+pt}{1-pt}\right]$$

$$C_3 = \frac{4\pi c \alpha^2}{\gamma^2 p^3}\left[\frac{1}{2} lg \frac{1+pt}{1-pt} - pt\right]$$

IV. $\gamma < \alpha$, $\quad$ эллипсоидъ сплюснутый.

$$A_4 = \frac{4\pi a \alpha^2}{\gamma^2 q^3}\left[\frac{1}{2} arctg\, qt - \frac{q t}{2[1+q^2t^2]}\right]$$

$$B_4 = \frac{4\pi b \alpha^2}{\gamma^2 q^3}\left[\frac{1}{2} arctg\, qt - \frac{q t}{2[1+q^2t^2]}\right]$$

$$C_4 = \frac{4\pi c \alpha^2}{\gamma^2 q^3}\left[q t - arctg\, q t\right].$$

Разлагая выраженія стоящія въ скобкахъ въ ряды включительно до элементовъ третьяго порядка, мы получимъ:

$$arc\sin mt - mt\sqrt{1-m^2t^2} = mt + \frac{m^3t^3}{6} - mt + \frac{m^3t^3}{2} = \frac{2m^3t^3}{3}.$$

$$\frac{mt}{\sqrt{1-m^2t^2}} - arc\sin mt = mt\left(1+\frac{m^2t^2}{2}\right) - mt - \frac{m^3t^3}{6} = \frac{m^3t^3}{3}.$$

$$nt\sqrt{1+n^2t^2} - lg\left\{nt + \sqrt{1+n^2t^2}\right\} = nt + \frac{n^3t^3}{2} - lg\left\{nt + 1 + \frac{n^2t^2}{2}\right\} =$$

$$= nt + \frac{n^3t^3}{2} - lg\left\{1 + \frac{2\,nt + n^2t^2}{2}\right\} = nt + \frac{n^3t^3}{2} - \frac{2\,nt + n^2t^2}{2} +$$

$$+ \frac{(2\,nt + n^2t^2)^2}{8} - \frac{(2\,nt + n^2t^2)^3}{24} = nt + \frac{n^3t^3}{2} - nt - \frac{n^2t^2}{2} +$$

$$+ \frac{n^2t^2}{2} + \frac{n^3t^3}{2} - \frac{n^3t^3}{3} = \frac{2n^3t^3}{3}.$$

$$lg\left\{nt+\sqrt{1+n^2t^2}\right\}-\frac{nt}{\sqrt{1+n^2t^2}}=nt+\frac{n^2\ t^2}{2}-\frac{n^2\ t^2}{2}-\frac{n^3\ t^3}{2}+$$

$$+\frac{n^3\ t^3}{3}-nt\,(1-\frac{n^2\ t^2}{2})=\frac{n^3\ t^3}{3}.$$

$$\frac{p\ t}{2\,[1-p^2t^2]}-\frac{1}{4}lg\frac{1+pt}{1-pt}=\frac{1}{2}\,pt\ [1+p^2\,t^2]-\frac{1}{2}\,pt-\frac{p^3\ t^3}{6}=\frac{p^3\ t^3}{3}.$$

$$\frac{1}{2}\,lg\,\frac{1+pt}{1-pt}-pt=pt+\frac{p^3\ t^3}{3}-pt=\frac{p^3\ t^3}{3}.$$

$$\frac{1}{2}\,ar\ ctg\ qt-\frac{q\,t}{2\,[1+q^2\,t^2]}=\frac{1}{2}\left[qt-\frac{q^3\ t^3}{3}-qt+q^3t^3\right]=\frac{q^3\ t^3}{3}.$$

$$qt-ar\ ctg\ q\,t=q\,t-qt+\frac{q^3\ t^3}{3}=\frac{q^3\ t^3}{3}.$$

Вставляя полученныя значенія въ формулы A, B и C, мы получимъ для случаевъ I и II и III и IV очень простыя выраженія слагающихъ напряженія, а именно

I и II случай, перемѣнное c

$$A=\frac{4\,\pi\,a\,\gamma\,t^3}{3\ \alpha},\ B=\frac{4\,\pi\,b\,\gamma\,t^3}{3\ \alpha},\ C=\frac{4\,\pi\,c\,\gamma\,t^3}{3\ \alpha}$$

III и IV случай, перемѣнное a

$$A=\frac{4\,\pi\,a\,\alpha^2\,t^3}{3\ \gamma^3},\ B=\frac{4\,\pi\,b\,\alpha^2\,t^3}{3\ \gamma^3},\ C=\frac{4\,\pi\,c\,\alpha^2\,t^3}{3\ \gamma^3}$$

Мы получили результатъ, который можно было предвидѣть ранѣе.

Если мы положимъ въ тѣхъ или другихъ выраженіяхъ $\alpha=\gamma$, то получимъ слагающія напряженія, вызываемаго равномѣрно намагническимъ шаромъ на пунктъ, лежащій внѣ его. Если мы въ выраженіяхъ для слагающихъ A, B и C примемъ одну изъ координатъ a или c, соотвѣтствующую глубинѣ залеганія центра эллипсоидальнаго мѣсторожденія отъ поверхности, за постоянную величину, то величины A, B и C представятъ собою видъ динамическихъ кривыхъ, форма которыхъ представляетъ для насъ особый интересъ, т. к., судя по нимъ, мы можемъ дѣлать тѣ или другія заключенія о формѣ, положеніи и о числѣ магнитныхъ залежей.

Изслѣдованіе динамическихъ кривыхъ въ общемъ видѣ представляетъ затрудненія, а потому, временно оставляя эту задачу, мы поставимъ себѣ болѣе легкую. Разсмотримъ такъ называемые профили динамическихъ кривыхъ въ двухъ главныхъ перпендикулярныхъ другъ къ другу направленіяхъ, а именно въ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ центръ мѣсторожденія въ направленіи двухъ его осей. При своихъ изслѣдованіяхъ мы будемъ предполагать, что начало осей координатъ лежитъ въ центрѣ эллипсоида и оси совпадаютъ съ направленіемъ полуосей послѣдняго. Сначала и остановимся на разборѣ болѣе простаго случая, а именно когда одна изъ осей эллипсоида вертикальна, а двѣ другія горизонтальны. Здѣсь мыслимы слѣдующіе шесть случаевъ.

I. $\gamma < \alpha$, c перемѣнно, $a = const$, $b = o$

Эллипсоидъ сильно сжатый. Ось вращенія горизонтальна.

Горизонтальное напряженіе $C_1 = \dfrac{4\pi c\gamma t^3}{3\alpha}$

Вертикальное „ $A_1 = \dfrac{4\pi a\gamma t^3}{3\alpha}$.

II. $\gamma < \alpha$, a перемѣнно, $c = const$, $b = o$

Эллипсоидъ сильно сжатый. Ось вращенія вертикальна.

Горизонтальное напряженіе $A_4 = \dfrac{4\pi a\alpha^2 t^3}{3\gamma^2}$

Вертикальное „ $C_4 = \dfrac{4\pi c\alpha^2 t^3}{3\gamma^2}$.

III. $\gamma > \alpha$, a перемѣнно, $c = const$, $b = o$

Эллипсоидъ вытянутый. Ось вращенія вертикальна.

Горизонтальное напряженіе $A_3 = \dfrac{4\pi a\alpha^2 t^3}{3\gamma^2}$

Вертикальное „ $C_3 = \dfrac{4\pi c\alpha^2 t^3}{3\gamma^2}$.

IV. $\gamma > \alpha$, c перемѣнно, $a = const$, $b = o$

Эллипсоидъ вытянутый. Ось вращенія горизонтальна.

Горизонтальное напряженіе $C_2 = \dfrac{4\pi c\gamma t^3}{3\alpha}$

Вертикальное „ $A_2 = \dfrac{4\pi a\gamma t^3}{3\alpha}$.

V. $\gamma < \alpha$, b перемѣнно, $a = const$, $c = 0$

Эллипсоидъ сжатый. Ось вращенія горизонтальна.

Горизонтальное напряженіе $B_5 = \frac{4\pi b\gamma t^3}{3\alpha}$

Вертикальное „ $A_5 = \frac{4\pi a\gamma t^3}{3\alpha}$

VI. $\gamma > \alpha$, b перемѣнно, $a = const$, $c = 0$

Эллипсоидъ вытянутый. Ось вращенія горизонтальна.

Горизонтальное напряженіе $B_6 = \frac{4\pi b\gamma t^3}{3\alpha}$

Вертикальное „ $A_6 = \frac{4\pi a\gamma t^3}{3\alpha}$

Итакъ мы видимъ, что случай I и IV, II и III и V и VI даютъ одинаковыя другъ съ другомъ выраженія слагающихъ напряженія, только при нихъ отношенія полуосей различны. Въ случаяхъ II и III t имѣетъ иное значеніе, чѣмъ въ остальныхъ.

Разсматривая вышеупомянутые профили, найдемъ аналитическимъ путемъ пункты максимумовъ и минимумовъ горизонтальнаго и вертикальнаго напряженія. Самые же профили построимъ въ дальнѣйшемъ графически по отдѣльнымъ точкамъ.

Прежде чѣмъ находить крайнія значенія напряженій, намъ слѣдуетъ опредѣлить производныя t по a и c при $b = 0$ и по b при $c = 0$. При $\frac{1}{t} = \sqrt{1 + \frac{s}{\alpha^2}}$ и $b = 0$

$$t^2 = \frac{2\alpha^2}{a^2 + c^2 - e + \sqrt{(a^2 + c^2 - e)^2 + 4a^2 e}}$$

Беря производную t^2 по c, получимъ

$$\frac{dt}{dc} = -\frac{ct}{\sqrt{(a^2 + c^2 - e)^2 + 4a^2 e}}$$

При $\frac{1}{t} = \sqrt{1 + \frac{s}{\gamma^2}}$ и $b = o$

$$t^2 = \frac{2\gamma^2}{a^2 + c^2 - e + \sqrt{a^2 + c^2 - e)^2 + 4c^2 e}}$$

Беря здѣсь производную t^2 по a, получаемъ

$$\frac{dt}{da} = -\frac{at}{\sqrt{(a^2+c^2-e)^2+4c^2e}}.$$

При $\dfrac{1}{t} = \sqrt{1 + \dfrac{s}{\alpha^2}}$ и $c = 0$, мы получаемъ

$$t^2 = \frac{\alpha^2}{a^2+b^2}$$

и слѣдовательно

$$\frac{dt}{db} = -\frac{bt}{a^2+b^2}.$$

I. Возвратимся къ первому случаю, когда $\gamma < \alpha$

c перемѣнно, $\alpha = const$, $b = 0$

Найдемъ крайнія значенія горизонтальнаго напряженія

$$C_1 = \frac{4\pi c\gamma t^3}{3\alpha}$$

При $c = 0$ $C_1 = 0$ — абсолютный минимумъ

Для нахожденія другихъ крайнихъ значеній приравниваемъ первую производную отъ C_1 по c нулю

$$\frac{dC_1}{dc} = \frac{4\pi\gamma}{3\alpha}\left[t^3 + 3t^2 c\frac{dt}{dc}\right] = \frac{4\pi\gamma}{3\alpha}t^3\left[1 - \frac{3c^2}{\sqrt{(a^2+c^2-e)^2+4a^2e}}\right] = 0$$

Такъ какъ t^3 вообще не $= 0$, то необходимо, чтобы

$$1 - \frac{3c^2}{\sqrt{(a^2+c-e)^2+4a^2e}} = 0$$

Отсюда получаемъ:

$$8c^4 - 2(a^2-e)c^2 + (a^2+e)^2 = 0$$

а потому

$$c^2 = \frac{a^2 - e + \sqrt{9a^4+14a^2e+9e^2}}{8}$$

Такъ какъ $e = \gamma^2 - \alpha^2$ здѣсь величина отрицательная, то

$$9(a^2+e)^2 < 9a^4 + 14a^2e + 9e^2 < (3a^2+e)^2$$

а потому: $\frac{a^2}{2} > c^2 > \frac{a^2}{2} + \frac{e}{4}$.

Такъ какъ $\frac{e}{4} = \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{4} > - \frac{a^2}{4}$,

то во всякомъ случаѣ: $\frac{a^2}{2} > c^2 > \frac{a^2}{4}$

и поэтому разстояніе между крайними значеніями

$$\sqrt{2}\, a > d > a$$

т. е. разстояніе между пунктами крайняго горизонтальнаго напряженія больше глубины залеганія центра залежи.

Вторая производная отъ C_1 для положительнаго c величина отрицательная, слѣдовательно мы получили maximum. Крайнія значенія для даннаго случая вертикальнаго напряженія

$$A_1 = \frac{4 \pi a \gamma t^3}{3 \alpha}$$

возможны при условіи, что $\frac{dt}{dc} = 0$ или $c = 0$.

Такъ какъ вторая производная будетъ отрицательна, то имѣемъ maximum, лежащій надъ центромъ.

II. Перейдемъ ко второму случаю, когда

$$\gamma < \alpha, \qquad a \text{ перемѣнно}, \quad c = const, \quad b = 0$$

Необходимое условіе максимумовъ или минимумовъ

$$1 - \frac{3\, a^2}{\sqrt{(a^2 + c^2 - e)^2 + 4 c^2 e}} = 0.$$

Такъ какъ это условіе отъ условія предыдущаго случая отличается только перемѣнной, а именно здѣсь вмѣсто c является a и наоборотъ, то

$$a^2 = \frac{c^2 - e + \sqrt{9 c^4 + 14 c^2 e + 9 e^2}}{8}$$

Такъ какъ здѣсь $e = \alpha^2 - \gamma^2$ величина положительная, то

$$9(c^2+e)^2 > 9c^4 + 14c^2e + 9e^2 > (3c^2+e)^2$$

$$\frac{2c^2+e}{4} > a^2 > \frac{c^2}{2}$$

и разстояніе между крайними пунктами

$$d > \sqrt{2}\, c$$

При положительномъ a здѣсь также будетъ maximum.

При $a = 0$ будетъ minimum.

III. $\gamma > \alpha$, a перемѣнно, $c = const$, $b = 0$

Подобно предыдущему получаемъ, что для maximum'овъ необходимо

$$a^2 = \frac{c^2 - e + \sqrt{9c^4 + 14c^2e + 9e^2}}{8}$$

Такъ какъ здѣсь $e = \alpha^2 - \gamma^2$ величина отрицательная, то подобно I случаю:

$$9(c^2+e)^2 > 9c^4 + 14c^2e + 9e^2 > (3c^2+e)^2$$

и потому разстояніе между крайними пунктами

$$\sqrt{2}\, c > d > a$$

IV. $\gamma > \alpha$, c перемѣнно, $a = const$, $b = 0$

Условіе максимумовъ или минимумовъ

$$1 - \frac{3c^2}{\sqrt{(a^2+c^2-e)^2 + 4a^2e}} = 0$$

и

$$c^2 = \frac{a^2 - e + \sqrt{9a^4 + 14a^2e + 9e^2}}{8}$$

Такъ какъ здѣсь $e = \gamma^2 - \alpha^2$ величина положительная, то подобно II случаю:

$$d > \sqrt{2}\, c$$

V. $\gamma < \alpha$, b перемѣнно, $a = const$, $c = 0$

Необходимое условіе максимумовъ или минимумовъ

$$1 - \frac{3b^2}{a^2 + b^2} = 0$$

откуда $$b^2 = \frac{a^2}{2}$$

и разстояніе между крайними пунктами

$$d = \sqrt{2}\, a.$$

VI. $\gamma > \alpha$, b перемѣнно, a $const$, $c = 0$.

Этотъ случай ничѣмъ не отличается отъ предыдущаго.

Дѣйствіе магнитныхъ рудныхъ залежей, имѣющихъ форму эллипсоидовъ вращенія и наклоненныхъ подъ извѣстнымъ угломъ къ горизонту.

Изслѣдуя дѣйствіе наклонныхъ залежей, имѣющихъ по прежнему форму эллипсоида вращенія, мы должны будемъ для полученія новыхъ положеній эллипсоида повернуть послѣдній около одной изъ равныхъ осей, напримѣръ β.

Поворачивая тогда систему координатъ около прежняго начала, совпадающаго съ центромъ залежи, на уголъ наклона послѣдней, такимъ образомъ, чтобы двѣ оси координатъ были горизонтальны, а третья вертикальна, мы очевидно въ прежде выведенныхъ выраженіяхъ слагающихъ напряженія должны будемъ произвести по извѣстному способу замѣну перемѣнныхъ.

Слагающія напряженія, полученныя въ новой формѣ, будутъ по прежнему параллельны осямъ эллипсоида, и потому мы каждую слагающую напряженія должны будемъ разложить на два направленія, горизонтальное и вертикальное.

Перейдемъ къ разбору возможныхъ случаевъ:

I. $\gamma < \alpha$, e перемѣнно, $a = const$, $b = 0$.

Вмѣсто прежнихъ слагающихъ C и A мы получимъ:

Горизонтальную $F = F' - F'' = C \cos \Delta - A \sin \Delta$

Вертикальную $G = G' + G'' = C \sin \Delta + A \cos \Delta$

Для вертикальнаго положенія эллипсоида мы имѣемъ:

Горизонтальную составляющую $C = \dfrac{4\pi c \gamma t^3}{3\alpha}$

Вертикальную „ $A = \dfrac{4\pi a \gamma t^3}{3\alpha}$

При поворотѣ системы координатъ на уголъ Δ координаты измѣнятся слѣдующимъ образомъ:

$$c = c' \cos\Delta + a' \sin\Delta \quad a = -c' \sin\Delta + a' \cos\Delta$$

а потому

$$F = \frac{4\pi\gamma t^3}{3\alpha}\Big[(c' \cos\Delta + a' \sin\Delta)\cos\Delta - (-c' \sin\Delta + a' \cos\Delta)\sin\Delta\Big] =$$

$$= \frac{4\pi\gamma t^3}{3\alpha} c'$$

$$G = \frac{4\pi\gamma t^3}{3\alpha}\Big[(c' \cos\Delta + a' \sin\Delta)\sin\Delta + (-c' \sin\Delta + a' \cos\Delta)\sin\Delta\Big] =$$

$$= \frac{4\pi\gamma t^3}{3\alpha} a'.$$

Итакъ мы видимъ, что выраженія слагающихъ при наклонномъ эллипсоидѣ по наружному виду не измѣнилось, что можно было видѣть и ранѣе, но только въ новыхъ выраженіяхъ значенія перемѣнныхъ a' c' и t другія, чѣмъ ранѣе.

Прежде чѣмъ переходить къ опредѣленію крайнихъ значеній составляющихъ напряженія, опредѣлимъ, чему равны теперь

$$\frac{dt}{da}, \; \frac{dt}{dc} \text{ и } \frac{dt}{db}.$$

Предположимъ для простоты, что $\Delta = 45^0$.

Вставляя въ выраженіе

$$t^2 = \frac{2\alpha^2}{a^2 + c^2 - e + \sqrt{(a^2 + c^2 - e)^2 + 4a^2 e}}$$

вмѣсто прежнихъ координатъ a, c новыя a', c' получимъ, если a будетъ вертикальной осью:

$$t^2 = \frac{2\alpha^2}{a^2 + c^2 - e + \sqrt{(a^2 + c^2 - e)^2 + 2(a - c)^2 e}}$$

гдѣ для простоты, какъ и въ слѣдующихъ формулахъ, опускаемъ значки.

Беря производную t^2 по c получимъ

$$\frac{dt}{dc} = -\frac{\alpha^2 ct - \frac{a-c}{2} e\, t^3}{\alpha^2 \sqrt{(a^2 + c^2 - e)^2 + 2(a-c)^2 e}}$$

Если вертикальной осью будетъ c, то производя замѣну перемѣнныхъ въ выраженіи

$$t^2 = \frac{2\gamma^2}{a^2 + c^2 - e + \sqrt{(a^2 + c^2 - e)^2 + 4c^2 e}}$$

получимъ

$$t^2 = \frac{2\gamma^2}{a^2 + c^2 - e + \sqrt{(a^2 + c^2 - e)^2 + 2(c - a)^2 e}}$$

и потому

$$\frac{dt}{da} = -\frac{\gamma^2\, at - \frac{c-a}{2}\, e t^3}{\gamma^2 \sqrt{(a^2 + c^2 - e)^2 + 2(c - a)^2 e}}$$

Наконецъ вставляя новыя значенія координатъ въ выраженіе

$$t^2 = \frac{2\gamma^2}{a^2 + b^2 + c^2 - e + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 - e)^2 + 4c^2 e}},$$

получимъ

$$t^2 = \frac{2\gamma^2}{a^2 + b^2 + c^2 - e + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 - e)^2 + 2(a + c)^2 e}}$$

Полагая $c = 0$. имѣемъ

$$t^2 = \frac{2\gamma^2}{a^2 + b^2 - e + \sqrt{(a^2 + b^2 - c)^2 + 2a^2 e}}$$

а потому

$$\frac{dt}{db} = -\frac{bt}{\sqrt{(a^2 + b^2 - e)^2 + 2a^2 e}}$$

Переходя къ случаю I, мы получимъ необходимое условіе максимумовъ или минимумовъ

$$(A)' = \left[\frac{4\pi\gamma c t^3}{3\alpha}\right]' = \frac{4\pi\gamma}{3\alpha}\left[t^3 + 3ct^2\frac{dt}{dc}\right] =$$

$$= \frac{4\pi\gamma t^3}{3\alpha}\left[1 - \frac{3c\left\{\alpha^2 c - \frac{a-c}{2}\, e t^2\right\}}{\alpha^2\sqrt{(a^2 + c^2 - e)^2 + 2(a - c)^2 e}}\right] = 0.$$

Такъ какъ $t^3 \neq 0$, то

$$3c\left\{\alpha^2 c - \frac{a-c}{2}\, e t^2\right\} = \alpha^2\sqrt{(a^2 + c^2 - e)^2 + 2(a - c)^2 e}$$

Въ виду невозможности дать точное рѣшеніе даннаго уравненія, прибѣгнемъ къ приближенному вычисленію, выводы котораго впослѣдствіи подтвердимъ графическимъ рѣшеніемъ данной задачи.

Такъ какъ γ величина малая по сравненію съ α, то мы можемъ $e = \gamma^2 - \alpha^2$ принять равнымъ $-\alpha^2$. Не зная истинной величины t^2, мы однако можемъ сказать, что вообще это правильная положительная дробь, тѣмъ меньшая, чѣмъ глубже находится залежь. Назовемъ эту дробь черезъ n^2. Тогда получимъ

$$3\,c\left\{(2-n^2)\,c+n^2a\right\}=2\sqrt{(a^2+c^2-e)^2+2\,(a-c)^2\,e}$$

Переходя къ полярнымъ координатамъ, т. е. полагая

$$c = l\,sin\,\varphi, \qquad a = l\,cos\,\varphi, \qquad c^2 + a^2 = l^2$$

мы найдемъ:

$$(6-3\,n^2)\,l^2\,sin^2\varphi+3\,n^2\,l^2\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi=2\sqrt{(l^2-e)^2+2\,l^2\,e\,sin\,2\varphi}$$

Беря подъ знакомъ корня крайнія значенія $sin\,2\,\varphi$ и замѣняя $l = \dfrac{a}{cos\,\varphi}$, мы получимъ:

$$(4-3\,n^2)\,tg^2\varphi+3\,n^2\,tg\,\varphi-2\pm\frac{2\,e}{a^2}=0.$$

Отсюда

$$tg\,\varphi=\frac{-3\,n^2\pm\sqrt{9\,n^4+8\,(4-3\,n^2)\,(1\mp\frac{e}{a^2})}}{2\,(4-3\,n^2)}$$

Вообще говоря, получимъ для $tg\varphi$ два не равныхъ корня, а слѣдовательно пункты крайнихъ значеній горизонтальнаго напряженія, опредѣляемыя уравненіемъ $c = a\,tg\varphi$ будутъ вообще на разныхъ разстояніяхъ отъ вертикали, проходящей черезъ центръ залежи. Разстояніе между этими пунктами будетъ равно

$$d=\frac{\sqrt{9\,n^4+8\,(4-3\,n^2)\,(1\mp\frac{e}{a^2})}}{4-3\,n^2}\,a$$

Если e будетъ значительно меньше a^2, т. е. рудная залежь будетъ на большой глубинѣ или по формѣ приблизится къ шару, то членъ $\frac{e}{a^2}$ не вліяетъ особенно на значеніе подкоренной величины и мы можемъ его отбросить. Тогда получимъ

$$d = \frac{\sqrt{9\,n^4 + 8\,(4 - 3\,n^2)}}{4 - 3\,n^2}\,a = \sqrt{1 + \left(\frac{4}{4 - 3\,n^2}\right)^2}\,a$$

т. е. при всякомъ n $\qquad d > a$

Итакъ мы видимъ, что разстояніе между крайними пунктами будетъ больше глубины залеганія центра залежи.

Для рудъ, лежащихъ не глубоко, можно принять $e = -a^2$ и смотря потому, возьмемъ ли передъ $\frac{e}{a^2}$ знакъ — или +, получимъ

$$d = \frac{8 - 3\,n^2}{4 - 3\,n^2}\,a = a + \frac{4}{4 - 3\,n^2}\,a$$

и

$$d = \frac{3\,n^2}{4 - 3\,n^2}\,a = -\,a + \frac{4}{4 - 3\,n^2}\,a$$

Такъ какъ при $e = -a^2$ а t^2 должно приближаться къ 1, то для обоихъ случаевъ получимъ:

$$d > a$$

т. е. опять же разстояніе между крайними пунктами будетъ больше глубины залеганія центра залежи.

II. Переходимъ теперь къ разсмотрѣнію слѣдующаго случая, а именно когда

$$\gamma > \alpha, \qquad a \text{ перемѣнно}, \qquad c = const., \quad b = 0$$

Подобно предыдущему случаю получимъ

Горизонтальную составляющую $\quad F = \frac{4\,\pi\,\alpha^2\,a\,t^3}{3\,\gamma^2}$

Вертикальную $\quad$ „ $\quad G = \frac{4\,\pi\,\alpha^2\,c\,t^3}{3\,\gamma^2}$

гдѣ

$$t^2 = \frac{2\,\gamma^2}{a^2 + c^2 - e + \sqrt{(a^2 + c^2 - e)^2 + 2\,(c - a)^2\,e}}$$

Необходимое условіе максимумовъ или минимумовъ

$$1 - \frac{3\,a\left\{\gamma^2\,a - \frac{c - a}{2}\,e\,t^2\right\}}{\gamma^2\sqrt{(a^2 + c^2 - e)^2 + 2(c - a)^2\,e}} = 0.$$

Такъ какъ γ значительно больше α, то можемъ принять $e = \alpha^2 - \gamma^2$ равнымъ $-\gamma^2$, и обозначивъ кромѣ того t^2, какъ правильную дробь черезъ n^2 получимъ

$$3a\left\{(2-n^2)\,a+n^2\,c\right\}=2\sqrt{(a^2+c^2-e)^2+2\,(c-a)^2\,e}$$

т. е. вполнѣ аналогично, какъ въ I случаѣ, а потому дальнѣйшіе выводы и заключенія будутъ прежніе.

Что касается существованія крайнихъ значеній вертикальнаго напряженія, то необходимо, чтобы въ I случаѣ

$$\frac{dt}{dc}=-\frac{(2-n^2)\,c+n^2\,a}{\sqrt{(a^2+c^2-e)^2+2\,(a-c)^2\,e}}=0$$

и во II случаѣ:

$$\frac{dt}{da}=-\frac{(2-n^2)\,a+n^2\,c}{\sqrt{(a^2+c^2-e)^2+2\,(c-a)^2\,e}}=0$$

т. е.

I случай $\qquad c = \dfrac{n^2}{n^2-2}\,a$

II случай $\qquad a = \dfrac{n^2}{n^2-2}\,c$

Если глубина залеганія велика, то n^2 близко къ нулю и мы получаемъ, что максимумъ вертикальнаго напряженія будетъ почти надъ центромъ залежи.

Если же глубина залеганія мала, то n^2 близко къ единицѣ и мы получаемъ для

I случая $\qquad c = -a$

II случая $\qquad a = -c$

Итакъ для вертикальнаго напряженія въ томъ и другомъ случаѣ будемъ имѣть по одному крайнему значенію, вообще не совпадающему съ центромъ и расположенному вблизи верхняго конца залежи.

V. Переходимъ теперь къ слѣдующему случаю, когда $\gamma < \alpha$

b перемѣнно, $a = const$, $c = 0$.

$$c = c'\cos\Delta + a'\sin\Delta = a'\sin\Delta$$

$$a' = c'\sin\Delta + a'\cos\Delta = a'\cos\Delta$$

$$b = b'$$

$$F = O \qquad G = \frac{4\pi\alpha^2 t^3 a}{3\gamma^2} \quad B = \frac{4\pi\alpha^2 b\, t^3}{3\gamma^2}.$$

Необходимое условіе максимумовъ или минимумовъ:

$$(B)' = \left[\frac{4\pi\alpha^2 b t^3}{3\gamma^2}\right]' = \frac{4\pi\alpha^2}{3\gamma^2}\left[t^3 + 3 b t^2 \frac{dt}{db}\right] =$$

$$= \frac{4\pi\alpha^2 t^3}{3\gamma^2}\left[1 - \frac{3 b^2}{\sqrt{(a^2+b^2-e)^2+2a^2e}}\right] = 0.$$

Откуда

$$8 b^4 - 2(a^2 - e) b^2 - (a^4 + e^2) = 0.$$

или

$$b^2 = \frac{a^2 - e + \sqrt{9a^4 - 2a^2e + 9e^2}}{8}$$

Но такъ какъ $e = \alpha^2 - \gamma^2$ величина положительная, то

$$9(a+e)^2 > 9a^4 - 2a^2e + 9e^2 > (3a^2 - e)^2$$

а слѣдовательно

$$\frac{2a^2+e}{4} > b^2 > \frac{2a^2-e}{4}$$

Такъ какъ $e < a^2$, то разстояніе между крайними пунктами

$$\sqrt{3}\, a > d > a$$

VI. $\gamma > \alpha$, b перемѣнно, $a = const.$, $c = 0$

$$F = 0, \quad G = \frac{4\pi\alpha^2 a t^3}{3\gamma^2}, \quad B = \frac{4\pi\alpha^2 b t^3}{3\gamma^2}.$$

Подобно V случаю найдемъ, что пункты крайнихъ значеній горизонтальнаго напряженія будутъ опредѣляться слѣдующимъ уравненіемъ:

$$b^2 = \frac{a^2 - e + \sqrt{9a^4 - 2a^2e + 9e^2}}{8}$$

Такъ какъ здѣсь $e = \alpha^2 - \gamma^2$ величина отрицательная, то

$$9(a^2 - e)^2 > 9a^4 - 2a^2e + 9e^2 > (3a^2 + e)^2$$

а слѣдовательно разстояніе между крайними пунктами

$$\sqrt{2(a^2 - e)} > d > \sqrt{2}\, a$$

Необходимымъ условіемъ существованія крайнихъ значеній вертикальнаго напряженія какъ въ случаѣ V, такъ и въ VI будетъ

$$\frac{dt}{db} = -\frac{bt}{\sqrt{(a^2+b^2-e)^2+2a^2e}} = 0$$

т. е. мы получимъ максимумъ при

$$b = 0,$$

т. е. надъ центромъ рудной залежи.

Резюмируя предыдущіе выводы, мы видимъ, что какъ для случая горизонтально, такъ и отвѣсно расположенныхъ рудныхъ залежей для горизонтальнаго напряженія всегда получаемъ минимумъ надъ центромъ залежи и два абсолютныхъ максимума по обѣимъ сторонамъ отъ центра, при чемъ разстояніе между послѣдними всегда болѣе глубины залеганія центра рудной залежи. Для вертикальнаго же напряженія въ данномъ случаѣ получаемъ максимумъ надъ центромъ руды. При рудахъ наклонныхъ къ поверхности разстояніе между максимумами горизонтальнаго напряженія также болѣе глубины залеганія центра, но эти максимумы расположены не симметрично относительно послѣдняго. Максимумъ вертикальнаго напряженія получается не надъ центромъ, а ближе къ верхнему концу залежи. Данные выводы вполнѣ согласуются съ результатами, получающимися при разсматриваніи магнитныхъ рудъ въ видѣ идеальнаго стержневиднаго магнита или въ формѣ пластообразныхъ залежей. Не вдаваясь здѣсь въ дальнѣйшія изслѣдованія, которыя будутъ служить предметомъ слѣдующей статьи, укажемъ только, что для полнаго изученія дѣйствія магнитныхъ рудъ, имѣющихъ различныя формы, являются необходимыми лабораторные опыты надъ дѣйствіемъ искусственныхъ магнитовъ. О производствѣ такихъ опытовъ и получающихся при этомъ результатахъ я надѣюсь поговорить въ другой разъ.

Д. В. ФРОСТЪ.
ГОРНЫЙ ИНЖЕНЕРЪ.

ИЗЫСКАНІЯ

МАГНИТНЫХЪ РУДЪ.

ВАРШАВА
Печ. въ Тип. Акц. Общ. С. Оргельбранда С-ей.
1910.

ОГЛАВЛЕНІЕ

Изысканіе магнитныхъ рудъ.

Д. В. Фростъ.

Горный Инженеръ.

ВВЕДЕНІЕ.

Предлагая благосклонному вниманію читателя настоящую брошюру, я считаю необходимымъ сдѣлать нѣкоторое поясненіе. При чтеніи въ 1907/8 учебномъ году въ Томскомъ Технологическомъ Институтѣ курса изысканія магнитныхъ рудъ мнѣ пришлось, въ виду почти полнаго отсутствія литературы по данному вопросу на русскомъ языкѣ, составить соотвѣтствующій курсъ. Предполагая послѣдній значительно обработать и пополнить, какъ съ теоретической, такъ и практической стороны многими личными наблюденіями, я ограничился тогда лишь литографированіемъ составленнаго курса въ незначительномъ количествѣ экземпляровъ, которые быстро разошлись. Наличность другихъ занятій помѣшала мнѣ подготовить къ печати намѣченную ранѣе обширную работу объ изысканіи магнитныхъ рудъ, а между тѣмъ отчасти запросы отдѣльныхъ лицъ, интересовавшихся моимъ курсомъ, а главное необходимость дать руководство для студентовъ Горнаго Отдѣленія Варшавскаго Политехническаго Института, гдѣ въ настоящее время я читаю объ изысканіяхъ магнитныхъ рудъ, побудили меня напечатать эту брошюру, что мною и выполнено благодаря благосклонному содѣйствію Варшавскаго Политехническаго Института, предоставившаго на это средства, за что я считаю своимъ долгомъ выразить ему свою глубокую благодарность.

Магнетометрическія изысканія, какъ мнѣ лично удалось познакомиться, особенно широко поставлены въ Швеціи, гдѣ почти всѣ магнитныя залежи найдены при помощи магнетометра. Въ этой странѣ магнитныя наблюденія считаются необходимыми какъ при каждой развѣдкѣ магнитныхъ рудъ, такъ и при изысканяхъ во время самой разработки, съ цѣлью нахожденія новыхъ гнѣздъ и болѣе богатыхъ частей залежи. Такъ какъ наши Уральскія мѣсторожденія магнитнаго желѣзняка представляютъ много сходнаго со шведскими магнитными рудами, то и у насъ примѣненіе магнетометра для развѣдокъ является крайне желательнымъ. Послѣднее особенно справедливо для странъ сравнительно мало изслѣдованныхъ, гдѣ необходимо въ непродолжительное время и съ наименьшей затратой средствъ составить понятіе о наличности магнитныхъ рудъ, какъ напримѣръ у насъ въ Сибири.

Въ виду компактности такихъ магнетометровъ, какъ Дальблома, Томсона-Талена и американскаго типа, этотъ инструментъ можетъ служить постояннымъ спутникомъ геологу при его развѣдкахъ. Давая въ этой брошюрѣ краткія свѣдѣнія о теоріи магнитныхъ изысканій, а также о главнѣйшихъ употребляемыхъ инструментахъ при магнетометрическихъ развѣдкахъ, я предоставляю лицамъ, желающимъ ближе познакомиться съ этимъ вопросомъ, обратиться къ спеціальной литературѣ, которой я пользовался при составленіи настоящей статьи. Главнѣйшими руководствами мнѣ служили:

E. Haanel: „On the Location and Examination of Magnetic Ore Deposits by Magnetometric Measurements“. Canada 1904.

Uhlich: „Das Aufsuchen von magnetischen Erzlagerstätten“. Lehrbuch der Markscheidekunde 1901.

Dahlblon: „Om Magnetiska Fyndigheter och deras Undersökning medelst Magnetometer“. Falun 1898. („Ueber magnetischen Erzlagerstätten und deren Untersuchung durch magnetischen Messungen“ переводъ Uhlich'а и русскій переводъ съ послѣдняго Горнаго Инженера Барбота — де — Марни).

Henry Lloyd Smyth: „Magnetic Observations in Geological Mapping“ въ Transactions American Institute of Mining Engineers 1896.

Prof. G. Nordenström: „The most Prominent and Characteristic Features of Swedisch Iron Ore Mining“ London 1899.

K. Thalen: „Sur la recherche des mines de fer à l'aide des mesures magnétic“ 1879. („Untersuchung von Eisenerzfeldern durch magnetische Messungen“ bearbeitet von K. Turley и переводъ этой статьи на русскій языкъ профессора Г. А. Тиме въ Горномъ Журналѣ за 1879).

E. Tiberg: „Ueber magnetische Untersuchung der Eisenerzlager“ Berg-und Hüttenmännische Zeitung 1884 переводъ статьи названнаго автора, помѣщенной въ Iern-Kontorets Annaler за 1884 годъ.

Uhlich: „Weitere Beiträge zur Aufsuchung magnetischer Erzlagerstätten“ Jahrbuch für Berg-und Hüttenwesen in Kng. Sachsen 1902.

Кромѣ того интересующіеся найдутъ извѣстный матеріалъ по этому вопросу уже въ цитированномъ журналѣ Jern-Kontorets Annaler и Teknisk Tidskrift, напримѣръ статья професора Стокгольмской Горной Академіи W. Petersson'а, помѣщенная въ журналѣ „Jern-Kontorets Annaler“ за 1900 г. и содержащая въ себѣ описаніе магнитныхъ развѣдокъ въ рудоносныхъ частяхъ области Jukkasjärvi и смежныхъ съ нею.

Здѣсь слѣдуетъ также упомянуть о научныхъ магнитныхъ изслѣдованіяхъ ученаго V. Carlheim-Gyllensköld'а, кратко описанныя въ его статьѣ (Sammanfattning af hufvudresultaten af magnetiska undersökningar vid Kiirunavaara malmfält i Norrbottens län utförda under åren 1900—1905). Названная статья содержитъ въ себѣ обзоръ главнѣйшихъ результатовъ изысканій автора въ области Kiirunavaara въ Norrbotten'ѣ.

Въ послѣднее время при Извѣстіяхъ Екатеринославскаго Высшаго Горнаго Училища появилась статья объ „Изысканіяхъ магнитныхъ залежей“ проф. Леонтовскаго, при составленіи которой авторъ пользовался работами Uhlich'а и Dahlblom'а.

ГЛАВА I.

Магнитъ и его свойства.

Подъ именемъ искусственнаго магнита разумѣется кусокъ стали, которому сообщена способность притягивать нѣкоторыя опредѣленныя вещества, называемыя магнитными тѣлами, какъ-то желѣзо, никкель, кобальтъ и т. д.

Но кромѣ такихъ тѣлъ, которыя притягиваются магнитомъ, есть другія,—которыя магнитомъ отталкиваются. Послѣднее обстоятельство было выяснено въ прошломъ столѣтіи Бругмансомъ, который замѣтилъ совершенно противоположное дѣйствіе магнита на висмутъ.

Беккерель доказалъ то-же дѣйствіе для сурьмы. Наконецъ въ 1845 г. Фарадей доказалъ на основаніи своихъ превосходныхъ опытовъ, что всѣ тѣла природы, какъ неорганическія такъ и органическія, какъ твердыя, такъ и жидкообразныя подчиняются дѣйствію магнита, причемъ одни тѣла притягиваются магнитомъ, другія—отталкиваются. Тѣла первой категоріи Фарадей назвалъ парамагнитными, а второй діамагнитными. Изъ числа вторыхъ кромѣ висмута и сурьмы извѣстны Zn, Sn, Pb, Cu.

Искуственные магниты извѣстны были въ глубокой древности, такъ, за 2000 до Р. Х. китайцы уже примѣняли компасы во время своихъ путешествій.

Приближая къ магниту какой-либо желѣзный предметъ, мы замѣтимъ, что не всѣ мѣста магнита оказываютъ одинаковое дѣйствіе, и что всегда существуютъ два пункта наибольшаго притяженія.

Въ такихъ пунктахъ, называемыхъ полюсами, какъ бы сосредоточена притягивающая сила магнита.

Въ предположеніи идеальнаго стержневиднаго магнита полюсы находятся на концахъ, а въ такомъ же массивномъ магнитѣ они расположены на $\frac{1}{12}$ длины его, считая отъ концовъ.

Линія, соединяющая полюсы магнита, называется магнитной осью.

Однимъ изъ главныхъ свойствъ магнита является его способность принимать въ пространствѣ вполнѣ опредѣленное положеніе, если только нѣтъ по близости какихъ-либо возмущающихъ массъ, какъ-то другихъ магнитовъ или желѣзныхъ предметовъ.

Будучи помѣщенъ на поплавкѣ въ водѣ или подвѣшенъ на незакрученной нити, магнитъ располагается своей магнитной осью въ опредѣленной вертикальной полоскости, при чемъ одинъ конецъ его всегда обращенъ къ сѣверу, а другой къ югу, а потому первый называется сѣвернымъ концомъ, а второй южнымъ. Сосредоточенные на этихъ концахъ полюсы также называются сѣвернымъ и южнымъ. Плоскость свободнаго колебанія магнита, называемая плоскостью магнитнаго меридіана, составляетъ съ географическимъ меридіаномъ обычно небольшой уголъ, извѣстный подъ именемъ магнитнаго склоненія.

Законъ притяженія и отталкиванія.

Если къ сѣверному полюсу одного магнита приблизить сѣверный полюсъ другого, подвѣшеннаго за центръ его тяжести, то послѣдній будетъ отталкиваться. Если же приблизить его южный полюсъ, то онъ будетъ притягиваться. Если возьмемъ оба южныхъ полюса, то они будутъ отталкиваться. Вообще одинаковые полюсы отталкиваются, а разноименные притягиваются. Это притяженіе и отталкиваніе пропорціонально произведенію мощностей полюсовъ и обратно пропорціонально квадрату разстоянія между ними. Данный законъ былъ открытъ Кулономъ, по имени котораго и называется—закономъ Кулона.

Если m и m' мощности соотвѣтственныхъ полюсовъ, а d разстояніе между ними, то сила f, дѣйствующая между ними

$$f = \frac{m \cdot m'}{d^2}$$

или для всякой другой среды, а не воздуха $f_1 = c\,\dfrac{m \cdot m'}{d^2}$.

Теорія строенія магнита.

Сходство явленій, вызываемыхъ магнитами, съ явленіями наэлектризованныхъ тѣлъ дало поводъ къ созданію гипотезы о существованіи въ желѣзѣ и стали особой упругой, невѣсомой, магнитной матеріи, подобной электрической жидкости по теоріи Франклина. Такъ какъ многія явленія, какъ наприм., способность желѣза и стали намагничиваться до насыщенія, а главнымъ образомъ измѣненія въ размѣрахъ и упругихъ свойствахъ желѣзныхъ и сталь ныхъ стержней и проволокъ, происходящія исключительно отъ процесса намагничиванія и указывающія на измѣненія въ молекулярномъ строеніи самихъ этихъ тѣлъ, не находили достаточнаго объясненія въ теоріи магнитныхъ жидкостей, развитой Кулономъ и Пуассономъ, то появилась новая гипотеза намагничиванія тѣлъ, такъ называемая гипотеза вращающихся молекулярныхъ магнитовъ. По этой гипотезѣ, предложенной Веберомъ и дополненной Максвеллемъ, каждая частица магнитнаго тѣла представляетъ собою самостоятельный магнитикъ съ противоположными на концахъ полюсами. Пока тѣло не намагничено, частицы своими магнитными осями расположены по всевозможнымъ направленіямъ. Вслѣдствіе этого въ ненамагниченномъ состояніи дѣйствіе однѣхъ частицъ парализуется дѣйствіемъ остальныхъ, и тѣло не обнаруживаетъ никакихъ магнитныхъ свойствъ. Подъ вліяніемъ намагничиванія всѣ частицы повертываются, располагаясь одноименными полюсами въ одну сторону. Чѣмъ больше намагничивается тѣло, тѣмъ большая достигается параллельность всѣхъ частицъ. Справедливость такой идеи подверждается многими явленіями. Такъ наприм., на какія бы мелкія части мы не дѣлили магнитъ, каждая отдѣльная часть будетъ представлять самостоятельный магнитикъ. Еще большее подтвержденіе мы находимъ при опытахъ со стеклянными трубками, наполненными стальными опилками. Пока послѣдніе не намагничены, трубка не обнаруживаетъ свойствъ магнита. Коль скоро мы намагнитимъ опилки, они мѣняютъ свое расположеніе, вытягиваются въ форму ниточекъ, образуя волокнистую структуру, а сама трубка въ цѣломъ дѣйствуетъ подобно обыкновенному магниту. Насильственное нарушеніе такого строенія намагниченныхъ опилокъ въ трубкѣ при сотрясеніи сопровождается и потерей магнитныхъ свойствъ трубки. При новомъ намагничиваніи опилки принимаютъ прежнее расположеніе.

Здѣсь слѣдуетъ обратить вниманіе на этотъ фактъ, который указываетъ на необходимость осторожнаго обращенія съ магнитомъ, чтобы путемъ какого-нибудь неосторожнаго дѣйствія не нарушить молекулярнаго строенія частицъ его и такимъ образомъ не уменьшить его силу. Въ виду этого при магнитныхъ съемкахъ, когда необходимо, чтобы сила мгнита была постоянна, рекомендуется осторожное обращеніе съ магнитомъ.

ГЛАВА II.

Магнитное поле.

Пространство, въ которомъ дѣйствуютъ магнитныя силы, называется магнитнымъ полемъ. Согласно закону Фарадея это поле перерѣзывается линіями магнитныхъ силъ, которыя опредѣляются какъ-бы путемъ, совершаемымъ свободнымъ сѣвернымъ полюсомъ, находящимся въ этомъ полѣ. Направленіе этихъ линій есть направленіе мысленнаго движенія свободнаго сѣвернаго полюса. Въ случаѣ тонкаго, длиннаго магнита съ полюсами на концахъ, линіи силъ исходятъ изъ сѣвернаго полюса, въ видѣ кривыхъ проходятъ черезъ промежуточное пространство къ южному полюсу и черезъ вещество магнита обратно къ сѣверному полюсу. Такимъ образомъ, эти линіи силъ являются сомкнутыми кривыми. Конечно такое представленіе справедливо лишь для идеальнаго магнита. Поле, производимое массивнымъ магнитомъ, далеко не такъ просто. Полюсы располагаются не на концахъ, и линіи силъ исходятъ не изъ полюса, разсматриваемаго какъ точка, а изъ поверхности сѣвернаго полюса, доставляются тѣмъ-же путемъ къ соотвѣтствующему пункту южнаго конца магнита. Какъ мы увидимъ впослѣдствіи, линіи силъ играютъ весьма важную роль при опредѣленіи глубины залеганія магнитныхъ рудъ. Обычный путь демонстраціи магнитныхъ линій силъ состоитъ въ насыпаніи желѣзныхъ опилокъ на толстую, но гладкую бумагу, положенную сверху магнита. Стружки въ этомъ случаѣ сами собой располагаются вдоль линій силъ, и ихъ расположеніе можетъ быть сфотографировано. Такъ какъ линіи силъ указываютъ въ каждой точкѣ направленіе магнитныхъ силъ, то эти линіи могутъ быть получены также съ помощью маленькаго чувствительнаго компаса около $^3/_4''$ въ діам. Стрѣлка компаса будетъ располагаться своею осью по касательной къ линіи силъ. Въ этомъ случаѣ компасъ располагается въ полѣ силъ надъ плоскостью бумаги, при чемъ отмѣчается на послѣдней точками положеніе полюсовъ магнита. Затѣмъ компасъ приподнимается на разстояніе, равное его діаметру, въ такое положеніе, чтобы сѣверный конецъ его занималъ положеніе надъ точкой, предварительно занятой южнымъ полюсомъ. Положеніе это вновь отмѣчается на бумагѣ. Соединяя рядъ полученныхъ точекъ, мы и получимъ линіи магнитныхъ силъ. Такимъ образомъ можетъ быть получено все поле линій силъ на плоскости. Чтобы представить расположеніе линій силъ въ пространствѣ, необходимо изображеніе этихъ линій на плоскости, повернуть около оси магнита.

Напряженіе магнитнаго поля въ какомъ-либо пунктѣ.

Сила, испытываемая единицей количества магнетизма въ какой-либо точкѣ магнитнаго поля, называется напряженіемъ магнитнаго поля. Напряженіе магнитнаго поля опредѣляется какъ по величинѣ, такъ и по направленію, и слѣдовательно можетъ быть представлено графически прямой линіей. Напряженіе можетъ быть выражено въ абсолютныхъ электро магнитныхъ единицахъ (въ системѣ сантиметръ-граммъ-секунда). Подъ электромагнитной единицей разумѣется количество магнетизма, которое, будучи сконцентровано въ одной какой - либо точкѣ, отталкиваетъ съ силою одной дины равное себѣ количество одноименнаго магнетизма, также сконцентрированнаго въ одной точкѣ и отстоящаго отъ перваго на разстояніи, равномъ одному сантиметру. Дина есть сила, дѣйствующая въ 1 сек. на массу въ 1 граммъ и производящая ускореніе въ $1^c/_m$.

Величина напряженія, согласно принимаемому условію, также равна числу линій силъ, расположенныхъ на 1 площади (на 1 кв. $^c/_m$.).

Изъ этого слѣдуетъ, что въ болѣе сильной части поля линіи силъ расположены тѣснѣе другъ къ другу, чѣмъ въ болѣе слабой половинѣ этого поля. Такое представленіе иллюстрируется въ созданномъ полѣ при помощи желѣзныхъ опилокъ. Линіи силъ въ этомъ случаѣ оказываются расположенными болѣе тѣсно другъ къ другу въ области полюсовъ, чѣмъ въ промежуточномъ пространствѣ между полюсами. Однако на основаніи такого грубаго созданія магнитнаго поля нельзя дѣлать заключенія, что въ промежуткѣ между рядами опилокъ линіи силъ отсутствуютъ. Въ дѣйствительности эти промежутки не свободны отъ линій силъ.

Опредѣленіе напряженія поля числомъ линій силъ на единицѣ площади просто является удобнымъ условіемъ.

Выдѣливъ на поверхности какого-либо уровня s_1 (или поверхности одинаковаго потенціала), пересѣкаемаго подъ прямымъ угломъ линіями силъ, какой-нибудь элементъ ds_1, и проведя черезъ всѣ точки его контура силовыя линіи, мы получимъ такъ называемую трубку магнитныхъ силъ. Такая трубка въ пересѣченіи съ другими поверхностями уровня s_2, s_3 вырѣжетъ элементы ds_2, ds_3, которые называются соотвѣтственными.

Если мы назовемъ напряженіе для элемента ds, черезъ H_1, то произведеніе $H_1\ ds_1$ представитъ собой такъ называемый магнитный потокъ силъ. Магнитные потоки для другихъ соотвѣтственныхъ элементовъ будутъ $H_2\ ds_2$, $H_3\ ds_3$ и т. д. Эти магнитные потоки для однородной среды и для трубки, не содержащей внутри себя намагниченныхъ элементовъ, равны между собою

$$F = H_1\ ds_1 = H_2\ ds_2 = \ldots\ldots = H_n\ ds_n\ .$$

Построеніе діаграммы магнитнаго поля.

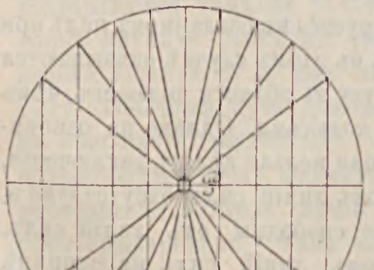
Если мы представимъ сферу, описанную радіусомъ $= 1^c/_m$ вокругъ магнитнаго полюса, мощность котораго $= 1$, то магнитная сила, вызываемая этимъ полюсомъ въ каждой точкѣ сферической поверхности, должна равняться 1.

Такъ какъ поверхность сферы $= 4\pi$ квадр. сантим., то понятно, что если мы желаемъ представить напряженіе поля при помощи числа линій силъ расположенныхъ на 1 площади, то мы должны представить $4\ \pi$ линій, выходящихъ изъ полюса въ окружающее пространство. Потокъ силъ въ этомъ случаѣ $= 4\pi$.

Если мощность полюса $= \sigma$, то число линій силъ, исходящихъ изъ такого полюса будетъ $= 4\pi\sigma$ и потокъ силъ будетъ $= 4\pi\sigma$ единицъ.

Діаграмма однополюснаго магнитнаго поля.

Полюсъ мощностью $= \sigma = \frac{10}{4\pi}$ будетъ производить $4\pi\sigma = 4\pi\frac{10}{4\pi} =$ 10 линій силъ и потокъ силъ будетъ $= 10$ единицамъ.



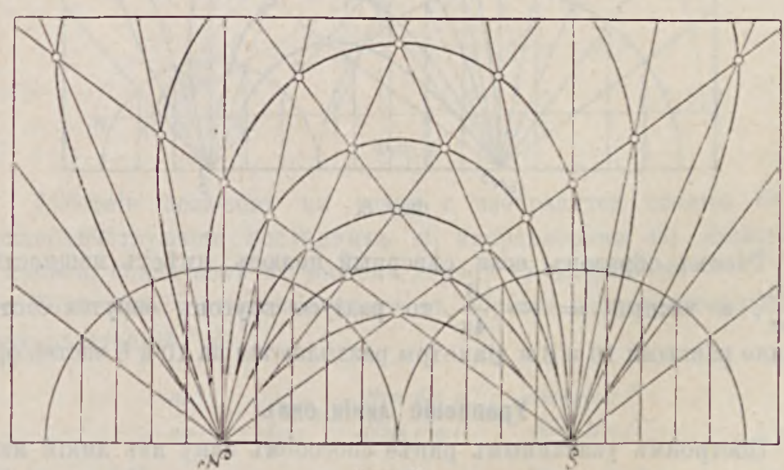
Фиг. 1.

Изображая распредѣленіе магнитныхъ силъ графически, мы должны пространство, окружающее магнитный полюсъ, раздѣлить на 10 частей, считая каждую—соотвѣтствующей 1 потока силъ. Это производится слѣдующимъ образомъ: Вокругъ полюса P (ф. 1) мощностью $\frac{10}{4\pi}$ описывается кругъ какого-нибудь подходящаго радіуса и изъ P проводится діаметръ. Этотъ діаметръ дѣлится на 10 равныхъ частей и изъ точекъ дѣленія проводятся линіи, перпендикулярныя этому діаметру, до ихъ пересѣченія съ окружностью. Изъ точекъ пересѣченія проводятся линіи къ центру окружности. Эти прямыя представятъ тѣ изъ линій силъ, которыя идутъ отъ полюса въ этомъ промежуткѣ. Если мы послѣ этого вообразимъ полученную фигуру повернутой около ея діаметра, то линіи силъ опишутъ конусы, которые вырѣжутъ изъ поверхности сферы зоны равной площади.

Такъ какъ потокъ силъ распространяется изъ полюса однообразно по всѣмъ направленіямъ, то каждая единица площади сферы будетъ прорѣзана одинаковымъ количествомъ потока силъ, а въ силу этаго каждая зона будетъ прорѣзана также одинаковымъ потокомъ.

Діаграмма двухполюснаго магнитнаго поля.

Пусть мы имѣемъ два разноименныхъ полюса равной мощности. Допустимъ, что послѣдняя, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, будетъ равна $\sigma = \pm \frac{10}{4\pi}$, причемъ знакъ $+$ обозначаетъ сѣверную полярность, а знакъ—южную.—Очевидно сѣверный и южный полюсъ будутъ давать по 10 линій силъ. Для графическаго изображенія въ этомъ случаѣ соединимъ полюсы линіей, служащей какъ бы осью магнита, и построимъ

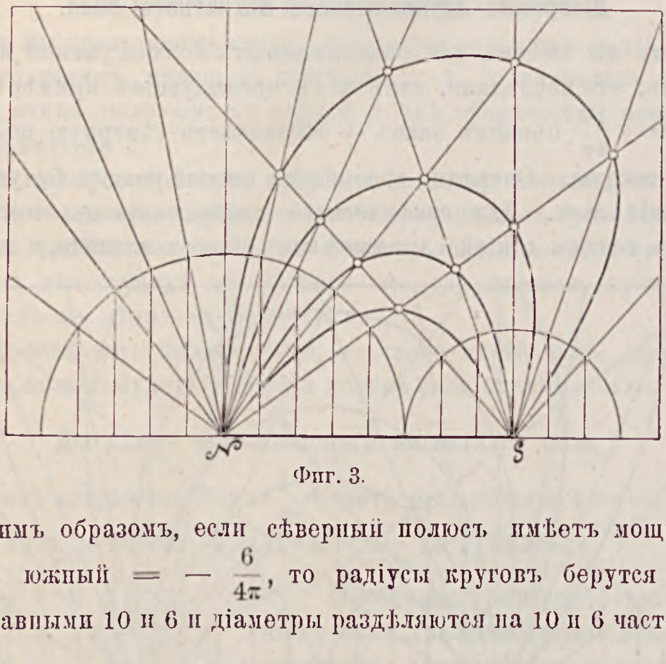


Фиг. 2.

на этой оси однополюсное поле для каждаго полюса (ф. 2). Если мы теперь вообразимъ эту фигуру повернутой около ея оси, то линіи силъ опишутъ 2×10 взаимно пронизывающихся конусовъ. Соединеніе двухъ полей въ одно производится посредствомъ соединенія діагоналей четыреугольниковъ, которые получаются изъ отрѣзковъ линій силъ. При этомъ мы получаемъ линіи силъ, исходящія отъ сѣвернаго полюса къ южному, представляющіяся ломаными, но съ увеличеніемъ дѣленія потока силъ онѣ приближаются къ непрерывнымъ кривымъ.

Двухполюсное поле магнитныхъ силъ двухъ равноименныхъ полюсовъ съ различными мощностями.

Самое построеніе въ этомъ случаѣ въ принципѣ тоже, какъ и прежде. Длина радіусовъ круговъ будетъ пропорціональна мощностямъ полюсовъ или, что тоже, пропорціональна потоку силъ, даваемому или поглощаемому даннымъ полюсомъ. Число дѣленій діаметровъ каждаго круга будетъ соотвѣтствовать той-же пропорціи.



Фиг. 3.

Такимъ образомъ, если сѣверный полюсъ имѣетъ мощность $= + \frac{10}{4\pi}$, а южный $= - \frac{6}{4\pi}$, то радіусы круговъ берутся соотвѣтственно равными 10 и 6 и діаметры раздѣляются на 10 и 6 частей (ф. 3).

Уравненіе линіи силъ.

Построимъ указаннымъ ранѣе способомъ одну изъ линій магнитныхъ силъ $a\,b\,c\,d\,s$. Пусть длина даннаго магнита NS равна l, а r радіусъ вспомогательнаго круга, уголъ $MNc = \alpha$ и уголъ $MSc = \beta$. Такъ какъ углы α и β при данномъ радіусѣ r вполнѣ опредѣляютъ положеніе одной изъ точекъ линіи силъ, то для точки c мы имѣемъ (ф. 4)

$$NC = r \cos (180^0 - \alpha) = - r \cos \alpha.$$

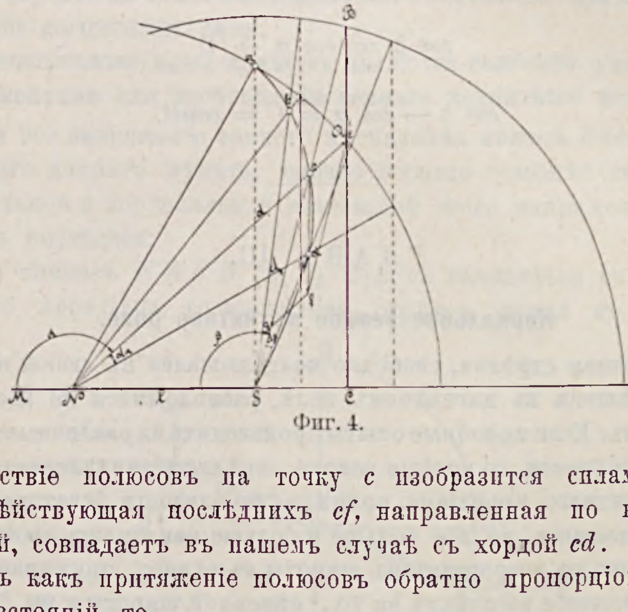
$$SC = r \cos (180^0 - \beta) = - r \cos \beta.$$

$$NC - SC = l = r\ (\cos\beta - \cos\alpha)$$

$$\cos\beta - \cos\alpha = \frac{a}{r} = c\ (const.) \quad \ldots (1)$$

Послѣднее выраженіе, представляющее уравненіе линій силъ, не трудно вывести другимъ путемъ, предлагаемымъ между прочимъ Дальбломомъ.

Беря на одной изъ линій магнитныхъ силъ $a\,b\,c\,d\,S$ двѣ весьма близкія точки c и d, мы можемъ положить, что касательная къ кривой линіи силъ въ точкѣ c совпадаетъ съ хордой $cd = ds$ и что $Nc = Nd = d_1$ и $Sc = Sd = d_2$ (ф. 4).



Фиг. 4.

Дѣйствіе полюсовъ на точку c изобразится силами ce и cg, а равнодѣйствующая послѣднихъ cf, направленная по касательной къ кривой, совпадаетъ въ нашемъ случаѣ съ хордой cd.

Такъ какъ притяженіе полюсовъ обратно пропорціонально квадрату разстояній, то

$$\frac{ce}{cg} = \frac{d_2^{\,2}}{d_1^{\,2}} = \frac{Sin\ c\,f\,e}{Sin\ e\,c\,f} = \frac{Sin\ S\,c\,f}{Sin\ N\,c\,f},$$

но изъ треугольниковъ $N\,c\,d$ и $S\,c\,d$ имѣемъ:

$$\frac{Sin\ S\,c\,f}{Sin\ N\,c\,f} = \frac{\frac{Sin\,d\beta}{ds}\cdot d_2}{\frac{Sin\,d\alpha}{ds}\cdot d_1} = \frac{d_2\,Sin\,d\beta}{d_1\,Sin\,d\alpha} = \frac{d_2\,d\beta}{d_1\,d\alpha},$$

такъ какъ углы $d\alpha$ и $d\beta$ весьма малы.

Итакъ имѣемъ

$$\frac{d_2^2}{d_1^2} = \frac{d_2\, d\beta}{d_1\, d\alpha}, \quad \frac{d_2}{d_1} = \frac{d\beta}{d\alpha}$$

или изъ треугольника NcS находимъ

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{Sin\,\alpha}{Sin\,\beta},$$

откуда

$$Sin\,\beta\,.\,d\beta = Sin\,\alpha\,.\,d\alpha.$$

Интегрируя обѣ части послѣдняго равенства, получаемъ

$$cos\,\beta = cos\,\alpha + C$$

или

$$cos\,\beta - cos\,\alpha = C = const.$$

ГЛАВА III.

Нормальное земное магнитное поле.

Магнитная стрѣлка, свободно колеблющаяся въ любой плоскости, будучи помѣщена въ магнитномъ полѣ, расположится по касательной къ линіи силъ. Если подобные опыты производить на различныхъ мѣстахъ земной поверхности, то вообще говоря, стрѣлка устанавливается въ плоскости магнитнаго меридіана, принимая по близости экватора горизонтальное положеніе, но все больше и больше наклоняясь своимъ сѣвернымъ концомъ съ возрастаніемъ широты къ сѣверу, принимаетъ вертикальное положеніе въ пунктѣ на $70,_5^0$ сѣверной широты и $98,_5^0$ западной долготы по Гринвичу. Идя къ югу отъ экватора, мы замѣтимъ обратное наклоненіе стрѣлки — южный конецъ ея будетъ все больше и больше наклоняться до вертикальнаго положенія, котораго и достигнетъ на пунктѣ 74^0 южной широты и около 148^0 восточной долготы по Гринвичу. Въ каждомъ пунктѣ наблюденія положеніе оси стрѣлки обусловливается направленіемъ линій силъ земнаго магнитнаго поля.

Если мѣста, для которыхъ углы наклоненія равны, соединить, то получатся кривыя, которыя похожи на параллели широтъ, но не совпадаютъ съ тѣми и даже не являются параллельными другъ другу.

Эти линіи называются изоклинами. Линія нулевого наклоненія называется магнитнымъ экваторомъ.

Компасная стрѣлка вообще не располагается въ плоскости астрономическаго меридіана и вертикальная плоскость, проходящая черезъ ея ось, образуетъ вообще нѣкоторый уголъ съ астрономическимъ меридіаномъ. Этотъ уголъ отклоненія отъ астрономическаго меридіана называется угломъ склоненія.

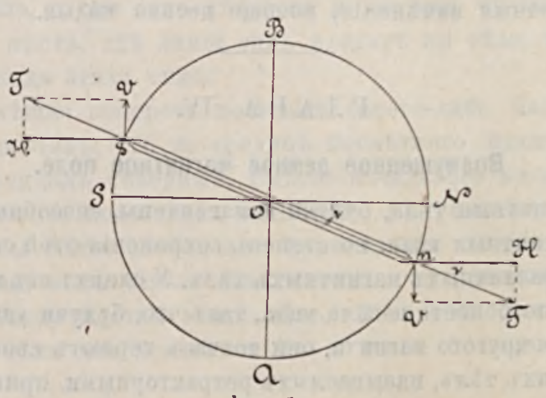
Линіи, соединяющія пункты на земной поверхности съ равными углами склоненія, называются изогонами, которыя имѣютъ подобное въ общемъ направленіе, какъ и астрономическіе меридіаны, но не совпадаютъ съ послѣдними и ихъ контуры различны.

Наконецъ линіи, называемыя изодинамами, которыя мы также можемъ получить на земной поверхности, соединяютъ пункты равнаго напряженія магнитныхъ силъ.

Перечисленные виды кривыхъ являются наиболѣе употребительными элементами для изображенія земнаго магнитнаго поля силъ.

Хотя все напряженіе земного магнитизма можетъ быть измѣрено для каждаго даннаго пункта, однако гораздо удобнѣе пользоваться горизонтальной и вертикальной слагающей этого напряженія и измѣрять лишь послѣднія.

Если компасъ $NASB$ (ф. 5) будетъ находиться въ плоскости магнитнаго меридіана, то магнитная стрѣлка, придя въ спокойное



Фиг. 5.

состояніе, составитъ уголъ v съ горизонтомъ NS и при этомъ будетъ касаться линіи силъ земнаго поля. Сила поля дѣйствуетъ съ равнымъ напряженіемъ какъ на сѣверный полюсъ въ n, такъ и на южный въ s, но въ обратномъ направленіи. Равнодѣйствующая будетъ равна нулю, и стрѣлка будетъ находиться въ покоѣ.

Пусть $n\,T = s\,T$ представляетъ по своей длинѣ напряженія дѣйствующихъ силъ, а стрѣлка указываетъ направленія, въ которыхъ тѣ дѣйствуютъ. Мы можемъ тогда разсматривать $n\,T$ и $s\,T$, т. е. все напряженіе какъ равнодѣйствующую слагающихъ H и V, изъ которыхъ первая представляетъ горизонтальное, а вторая вертикальное напряженіе земного поля. Изъ чертежа имѣемъ:

$$V = H\,tg\,v \qquad \ldots\ldots (2)$$

$$n\,T = s\,T = T = \sqrt{H^2 + V^2} = \frac{H}{\cos v} \quad \ldots (3).$$

Здѣсь T и V будутъ извѣстны, если извѣстны H и V.

Величины H и V даются для различныхъ мѣстъ въ публикуемыхъ магнитныхъ картахъ земной поверхности.

При болѣе точномъ опредѣленіи элементовъ магнитнаго поля, представляемаго изогонами, изоклинами и изодинамами, мы видимъ, что эти элементы не являются постоянными. Они претерпѣваютъ измѣненія, которыя подраздѣляются на

1. Внезапныя варіаціи, обязанныя космическимъ магнитнымъ возмущеніямъ.

2. Годовыя варіаціи, измѣняющіяся опредѣленнымъ образомъ и въ опредѣленномъ направленіи и поддающіяся вычисленію для каждаго года.

3. Суточныя измѣненія, вообще весьма малыя.

ГЛАВА IV.

Возмущенное земное магнитное поле.

Всѣ магнитныя тѣла, будучи намагничены, способны дѣйствовать на другія магнитныя тѣла, но степень сохраненія этой способности не одинакова у различныхъ магнитныхъ тѣлъ. У однихъ изъ нихъ, подобно желѣзу, эта способность весьма мала, такъ что, будучи удалены изъ магнитнаго поля другого магнита, они тотчасъ теряютъ свою полярность. Къ числу такихъ тѣлъ, называемыхъ ретракторными, принадлежатъ титанистое желѣзо, оливинъ, авгитъ, роговая обманка и пирритъ. Другія тѣла, наоборотъ, подобно закаленной стали, способны сохранять долгое время полученныя магнитныя свойства. Эти тѣла называются атракторными магнитными тѣлами и въ числѣ ихъ извѣстны магнетитъ, якобситъ и пирротитъ. Изъ послѣднихъ наиболѣе активно дѣйствующимъ является магнетитъ, или иначе магнитный желѣзнякъ. Онъ принадлежитъ къ числу весьма распространенныхъ желѣзныхъ рудъ, встрѣчаясь въ громадныхъ количествахъ въ Швеціи, Сѣверной Америкѣ и у насъ на Уралѣ, гдѣ имъ особенно богата восточная полоса Уральскаго хребта, какъ то мѣсторожденія горъ Благодати, Магнитной, Качканара и Высокой. Якобситъ и пирротитъ менѣе активны, но и они и даже ретракторныя тѣла въ присутствіи магнетита способны оказывать сильное дѣйствіе на компасную стрѣлку. Наблюдаются даже случаи, когда немагнитныя руды и различныя горныя породы получаютъ магнитныя свойства, благодаря присутствію въ нихъ магнетита, какъ побочнаго ингредіента. Иллюстраціей такихъ рудъ могутъ служить красные шведскіе желѣзняки, мѣдныя, свинцовыя и цинковыя руды. Изъ горныхъ породъ, содержащихъ большое количество магнетита съ равномѣрнымъ распредѣленіемъ его въ ихъ массѣ, слѣдуетъ указать на діабазы, діориты и гиперстены.

Содержаніе магнитнаго желѣзняка въ немагнитныхъ рудахъ и горныхъ породахъ даетъ возможность примѣнять магнетометрическіе методы изысканія для опредѣленія положенія вышеупомянутыхъ рудъ и породъ.

Всякое магнитное тѣло, напримѣръ кусокъ мягкаго желѣза, будучи помѣщено въ магнитномъ полѣ значительно видоизмѣняетъ послѣднее.

Линіи магнитныхъ силъ при этомъ сконцентрировываются около магнитнаго тѣла, и оно само дѣлается магнитомъ съ южнымъ полюсомъ въ томъ мѣстѣ, гдѣ линіи силъ входятъ въ тѣло, и сѣвернымъ въ пунктѣ выхода этихъ силъ.

Такъ помѣщая поперекъ полюсовъ какого-либо магнита кусокъ желѣза, мы замѣтимъ, что по срединѣ послѣдняго окажется южный полюсъ, а по концамъ сѣверный. Вмѣсто начальнаго магнитнаго поля появляется сложное поле двухъ магнитовъ. Получающееся при этомъ явленіе какъ бы болѣе свободнаго прохожденія линій силъ черезъ магнитныя тѣла, чѣмъ черезъ немагнитныя, объясняется различной магнитной проницаемостью этихъ тѣлъ. Послѣдняя для магнитныхъ тѣлъ больше, чѣмъ для немагнитныхъ, и всего больше для мягкаго желѣза.

Проницаемость закаленной стали меньше, чѣмъ желѣза, но первая способна сохранять полярность, развитую въ ней сильнымъ полемъ, и дѣйствовать сама на другія магнитныя тѣла.

Вообще, если часть магнитнаго поля находится въ средѣ съ большей магнитной проницаемостью, а остальное поле въ средѣ менѣе проницаемой, то линіи силъ предпочтительно проходятъ черезъ первую среду, нарушая тѣмъ самымъ распредѣленіе силъ начальнаго магнитнаго поля.

Зависимость интенсивности намагничиванія отъ положенія магнитной полосы.

Степень измѣненія распредѣленія нормальнаго земного поля, вызываемая атракторными магнитными тѣлами, помимо проницаемости ихъ, зависитъ еще отъ формы этихъ тѣлъ, положенія ихъ относительно линій силъ и глубины ихъ залеганія подъ поверхностью земли.

Если полосу мягкаго желѣза помѣстимъ ея осью параллельно линіямъ силъ магнитнаго поля, то верхній конецъ этой полосы въ сѣверномъ полушаріи, пріобрѣтаетъ южное притяженіе, а нижній сѣверное. Въ такомъ положеніи полоса получаетъ всѣ свойства обыкновеннаго магнита, полюсы котораго расположены на концахъ.

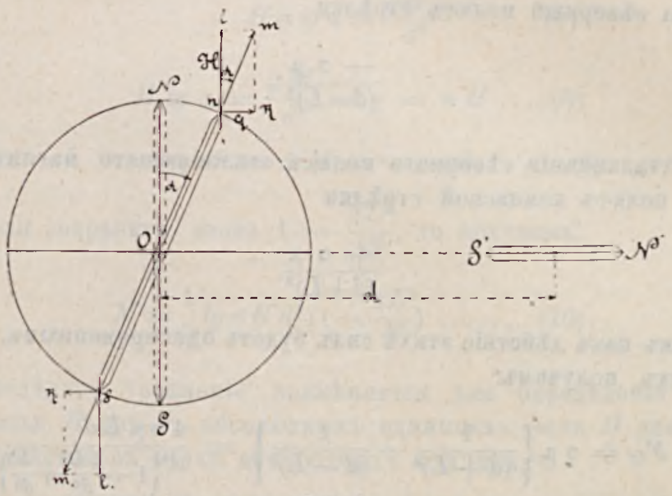
Если изслѣдовать степень намагничиванія желѣзной полосы, то оказывается, что въ случаѣ параллельности оси этой полосы направленію линій силъ, степень эта достигаетъ своего maximum'а, и наоборотъ, она получитъ minimum, если ось полосы перпендикулярна къ линіямъ силъ, и будетъ пріобрѣтать среднія значенія для промежуточныхъ положеній.

Если возбуждающее дѣйствіе земного поля можно разсматривать, какъ причину намагничиванія магнитныхъ рудъ, то очевидно, что мы вправѣ сдѣлать заключеніе, проводя параллель съ полосой изъ мягкаго желѣза, о зависимости степени намагничиванія этихъ рудъ отъ угла ихъ паденія, т. е. намагничиваніе будетъ максимальнымъ, если паденіе рудной залежи параллельно направленію линій силъ, минимальнымъ въ случаѣ перпендикулярности этихъ направленій и среднимъ для промежуточнаго значенія угла паденія. Такимъ образомъ, въ сужденіи о массивности рудныхъ залежей по напряженію вызываемаго магнитизма должно быть обращено большое вниманіе на паденіе этихъ мѣсторожденій.

ГЛАВА V.

Дѣйствіе магнита на компасную стрѣлку въ нормальномъ магнитномъ полѣ.

На небольшомъ районѣ земной поверхности, по сравненію съ радіусомъ послѣдней, потенціалъ земного магнитизма можно принять постояннымъ; нормальное магнитное поле въ этомъ случаѣ будетъ однородно и линіи магнитныхъ силъ будутъ параллельны между собой. Если въ такомъ магнитномъ полѣ будетъ помѣщенъ компасъ, то магнитная стрѣлка послѣ нѣкоторыхъ колебаній расположится своей магнитной осью по направленію магнитнаго меридіана $N\,S$ (ф. 6). Въ этомъ положеніи силы горизонтальнаго поля дѣйствуютъ на концы стрѣлки съ равнымъ напряженіемъ, но въ обратныхъ направленіяхъ, и потому равнодѣйствующая этихъ силъ будетъ равна нулю. Если при этомъ условіи въ положеніе подъ прямымъ угломъ къ направленію магнитнаго меридіана будетъ помѣщенъ магнитъ $N'S'$ въ одной горизонтальной плоскости съ компасной стрѣлкой и на разстояніи d центра его отъ точки подвѣса стрѣлки O,



Фиг. 6.

то послѣдняя отклонится отъ своего первоначальнаго положенія и ея ось расположится по направленію линій силъ равнодѣйствующаго магнитнаго поля, составленнаго изъ нормальнаго земного поля и поля, создаваемаго магнитомъ $N'\,S'$. Если южный полюсъ будетъ обращенъ къ компасу (какъ показано на ф. 6), то сѣверный конецъ стрѣлки будетъ отклоненъ къ востоку отъ магнитнаго меридіана.

Чтобы получить выраженіе для дѣйствія отклоняющаго магнита, обозначимъ:

μ мощность полюса компасной стрѣлки,

σ „ „ отклоняющаго магнита,

$2l$ длина компасной стрѣлки,

$2L$ „ отклоняющаго магнита,

$2\mu l = m$ моментъ компасной стрѣлки,

$2\sigma L = M$ моментъ отклоняющаго магнита,
H горизонтальное напряженіе земного поля,
d разстояніе центра магнита отъ точки подвѣса стрѣлки 0,
F_H сила, съ которой земное поле дѣйствуетъ на полюсъ стрѣлки,
F_D сила отклоняющаго магнита, дѣйствующая на стрѣлку,
M_H моментъ пары, причитающійся на земное поле,
M_D „ „ „ на поле, создаваемое магнитомъ.

Обозначая притяженіе знакомъ —, а отталкиваніе знакомъ +, мы будемъ имѣть для притяженія южнаго полюса отклоняющаго магнита на сѣверный полюсъ стрѣлки

$$\frac{-\sigma\mu}{(d-L)^2},$$

а для отталкиванія сѣвернаго полюса отклоняющаго магнита на сѣверный полюсъ компасной стрѣлки

$$\frac{+\sigma\mu}{(d+L)^2}$$

Такъ какъ дѣйствіе этихъ силъ будетъ одновременнымъ, то, складывая ихъ, получимъ:

$$F_D = \sigma\mu\left\{\frac{1}{(d+L)^2} - \frac{1}{(d-L)^2}\right\} = \frac{4\sigma\mu L d}{d^4\left\{1 - \frac{2L^2}{d^2} + \frac{L^4}{d^4}\right\}}$$

Пренебрегая членомъ четвертой степени ввиду его малой величины, имѣемъ

$$F_D = \frac{2M\mu}{d^3}\left\{\frac{1}{1-\frac{2L^2}{d^2}}\right\} \quad \ldots (4)$$

Если d сдѣлаемъ весьма большимъ въ сравненіи съ $2L$, то $1 - \frac{2L^2}{d^2}$ будетъ отличаться немногимъ отъ единицы, и мы можемъ написать

$$F_D = \frac{2M\mu}{d^3} \quad \ldots (5)$$

Если принять, что поле, вызываемое отклоняющимъ магнитомъ дѣйствуетъ съ равнымъ напряженіемъ на полюсы n и s, и что линіи силъ, вызываемыхъ отклоняющимъ магнитомъ, параллельны оси послѣдняго, что не вполнѣ справедливо, то для положенія равновѣсія моменты двухъ противоположно дѣйствующихъ паръ должны быть равны, а потому:

$$M_H = M_D$$

$$F_H \, 2l \sin \alpha = F_D \, 2l \cos \alpha$$

$$F_H \, tg \, \alpha = F_D \quad \ldots .(6)$$

$$F_H = H\mu \quad \ldots ..(6a)$$

$$H\mu \, tg \, \alpha = \frac{2\,M\mu}{d^3} \quad \ldots ..(7)$$

$$H \, tg \, \alpha = \frac{2\,M}{d^3} = q = n\,H \quad \ldots .(8)$$

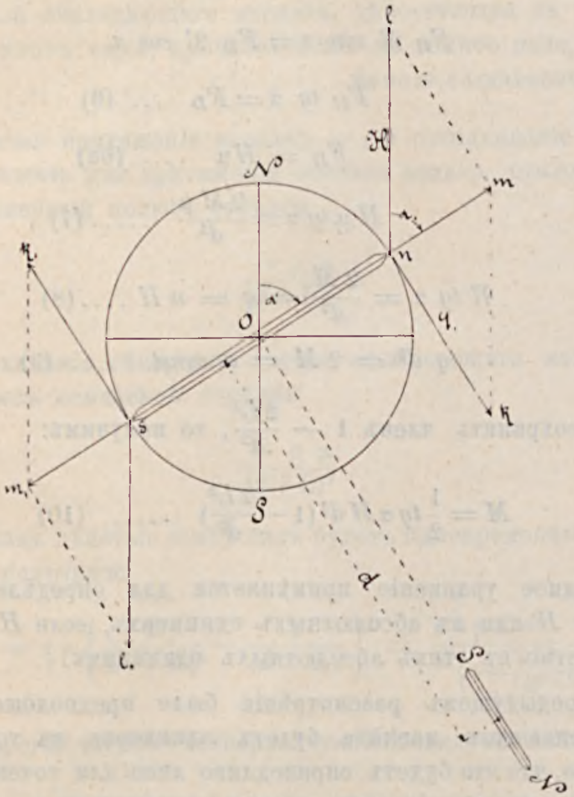
$$q \, d^3 = 2\,M = a \; const. \quad \ldots ..(9)$$

Если сохранить членъ $1 - \frac{2L^2}{d^2}$, то получимъ:

$$M = \frac{1}{2} \, tg \, \alpha \, H \, d^3 \left(1 - \frac{2L^2}{d^2}\right) \quad \ldots .. \quad (10)$$

Послѣднее уравненіе примѣняется для опредѣленія момента въ функціи H или въ абсолютныхъ единицахъ, если H для даннаго мѣста извѣстно въ этихъ абсолютныхъ единицахъ.

Въ предыдущемъ разсмотрѣніи было предположено, что сила поля отклоняющаго магнита будетъ одинакова въ точкахъ n и s, но очевидно, что это будетъ справедливо лишь для точекъ, лежащихъ на равномъ разстояніи отъ центра отклоняющаго магнита. Не трудно видѣть, что при такомъ способѣ полученія угла отклоненія сила отклоняющаго магнита, дѣйствующаго на компасную стрѣлку, будетъ измѣняться въ зависимости отъ получаемаго угла отклоненія α. Такимъ образомъ этотъ методъ (методъ тангенсовъ) будетъ давать лишь приблизительно точные результаты. Однако величина q, т. е. дѣйствіе отклоняющаго магнита на компасную стрѣлку, можетъ быть сдѣлано независимымъ отъ угла отклоненія послѣдней. Съ этой цѣлью вращаютъ ручку компаса, на которой помѣщенъ отклоняющій магнитъ, около вертикально оси, проходящей черезъ точку подвѣса компасной стрѣлки, пока стрѣлка не займетъ положенія, при которомъ оя ось будетъ перпендикулярна къ направленію ручки съ отклоняющимъ магнитомъ, какъ это видно на ф. 7. Въ этомъ положеніи и сѣверный и южный полюсы компасной стрѣлки будутъ находиться въ равномъ разстояніи отъ центра отклоняющаго магнита, и дѣйствіе послѣдняго на компасную стрѣлку для одного и того-же разстоянія между ними будетъ постояннымъ. Предполагая, что уголъ отклоненія



Фиг. 7.

компасной стрѣлки при этомъ методѣ (методъ синусовъ) отъ плоскости магнитнаго меридіана будетъ равенъ α_0', мы получимъ (ф. 7)

$$q' = H \sin \alpha_0' \quad . \; . \; . \quad (11)$$

Принимая приблизительно, что q для метода тангенсовъ постоянно, мы для различныхъ точекъ магнитнаго поля, въ которыхъ значеніе H различно, получимъ

$$q = H \operatorname{tg} \alpha_0 = H' \operatorname{tg} \alpha$$

или
$$H' = H \frac{\operatorname{tg} \alpha_0}{\operatorname{tg} \alpha} \quad . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Для метода синусовъ: $q' = H \; Sin \; \alpha_0' = H' \; Sin \; \alpha'$,

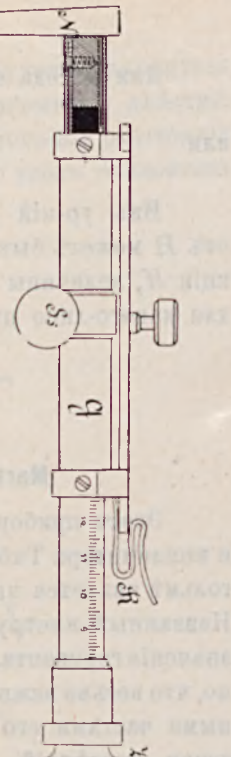
или
$$H' = H \frac{Sin \; \alpha_0'}{Sin \; \alpha'} \quad . \; . \; . \; . \; (13)$$

Изъ ур-нiй (12) и (13) слѣдуетъ, что значенiе H' отличное отъ H можетъ быть опредѣлено тѣмъ или другимъ методомъ въ функцiи H, величины горизонтальнаго напряженiя, принятаго за единицу, для какого-либо пункта магнитнаго поля.

ГЛАВА VI.

Магнетометръ Тиберга-Талена. Описанiе.

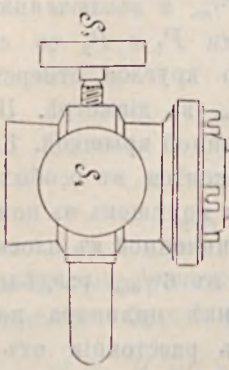
Этотъ приборъ представляетъ комбинацiю магнетометра Талена и инклинатора Тиберга и въ новой конструкцiи механика Берга въ Стокгольмѣ является инструментомъ весьма удобнымъ для полевой работы. Названный инструментъ позволяетъ опредѣлять не только различныя значенiя горизонтальной составляющей, вызываемой магнитнымъ полемъ, но, что весьма важно, и значенiя вертикальнаго напряженiя. Существенными частями его являются: компасъ и часть прибора, поддерживающая послѣднiй. *Компасъ К* (8, 9, 10, 11) состоитъ изъ низкаго пустотѣлаго цилиндра дiам. 8 с/m. и заключеннаго сверху и снизу между квадратными пластинками P_1 и P_2 со сторонами въ 9 с/m. Въ верхней плостинкѣ вырѣзано круглое отверстiе, концентричное съ цилиндромъ и имѣющее 7,5 с/m. въ дiаметрѣ. Послѣднее отверстiе прикрыто поднимающейся стеклянной крышкой. Концы стальной оси вращенiя компасной стрѣлки покоятся въ особыхъ каменныхъ подшипничкахъ, изъ которыхъ одинъ помѣщенъ въ центрѣ дна цилиндра, а другой на особой ручкѣ, привинченной къ плоскому кольцу съ дѣленiями. Послѣднее дiаметромъ въ 6 с/m., раздѣленное на градусы, прикрѣплено къ внутренней стѣнкѣ цилиндра параллельно квадратнымъ пластинкамъ, на такомъ разстоянiи отъ основанiя, чтобы верхняя поверхность кольца и компасной стрѣлки находились въ одной плоскости. Направленiе NS, параллельное двумъ сторонамъ квадратныхъ пластинокъ, имѣетъ отмѣтку 90°. Восточный-же и западный концы дiаметра снабжены дѣленiемъ 0°. Перпендикулярные между собой дiаметры компасной коробки обозначены какъ NS и OW. На продолженiи направленiя OW имѣются привинченныя къ компасной коробкѣ двѣ цилиндрическiя цапфы Z_1 и Z_2, 8 m/m. дiаметромъ, которыя позволяютъ вложить компасъ въ колонки поддерживающей

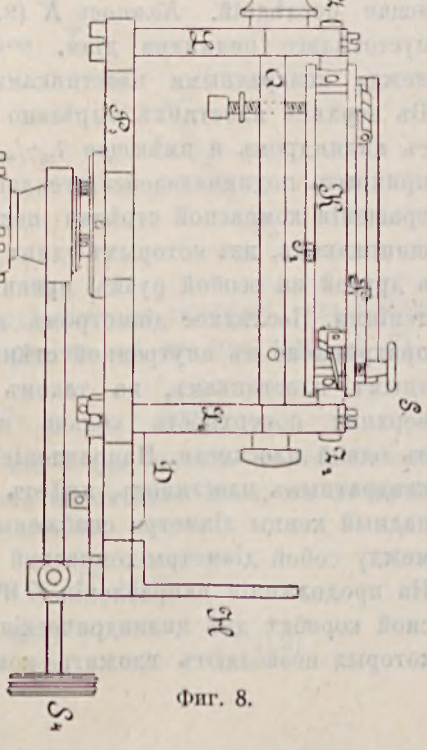


части и закрѣпить помощью особыхъ задвижекъ. Между обѣими пластинками коробка компаса снабжена уровнемъ чувствительностью въ 6′ (при уклоненіи пузырька на $1^{m}/_{m}$), видимымъ черезъ отверстіе *D*. Этотъ уровень позволяетъ привести компасъ въ горизонтальное положеніе при пользованіи имъ безъ его обычной поддержки.

Въ діагонально противоположномъ углу на верхней пластинкѣ расположена головка винта S_1, при помощи котораго производится арретированіе стрѣлки. Стрѣлка въ большей части своей длины имѣетъ форму бруска съ поперечнымъ сѣченіемъ около $2{,}_9$ кв. $^{m}/_{m}$. Полюсы ея имѣютъ заостренные концы, параллельные оси вращенія. Послѣдняя представляетъ собою цилиндръ, перпендикулярный къ магнитной оси стрѣлки и проходящій черезъ ея середину. Сѣверный конецъ стрѣлки обозначается вдѣланнымъ въ него мѣднымъ штифтикомъ.

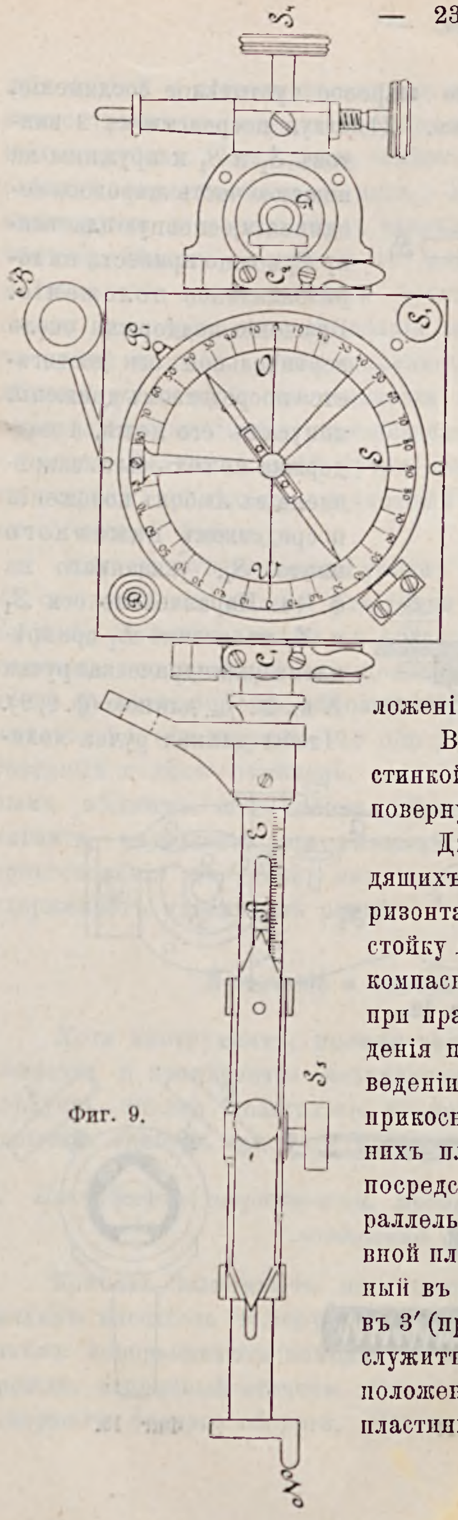
Вслѣдствіе того, что при горизонтально двигающейся стрѣлкѣ сторона ея, обращенная къ западу, вблизи оси болѣе утолщена, чѣмъ обращенная къ востоку, то при вертикальномъ положеніи компасной коробки центръ тяжести стрѣлки будетъ лежать ниже оси, подобно тому какъ при коромыслахъ вѣсовъ.





Скользящій по стрѣлкѣ грузикъ позволяетъ исключить вліяніе вертикальнаго напряженія нормальнаго земного поля, такъ, что стрѣлка, свободно колеблющаяся въ вертикальной плоскости послѣдняго, принимаетъ горизонтальное положеніе т. е. даетъ отсчетъ 0°.

Фиг. 8.



Фиг. 9.

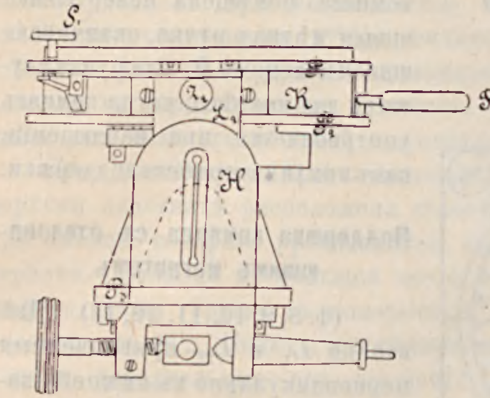
По серединѣ между квадратными пластинками на коробкѣ компаса помѣщена повертывающаяся мѣдная ручка, оканчивающаяся кольцомъ B. Эта ручка служитъ для подвѣса, когда компасъ употребляется при наблюденіи, какъ никлинаторъ безъ поддержки.

Поддержка компаса съ отклоняющимъ магнитомъ.

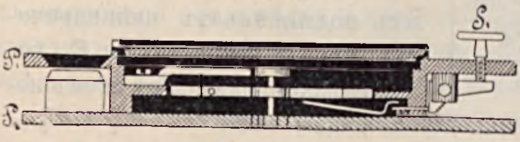
(ф. 8, 9, 10, 11, 12, 13). Двѣ стойки L_1 и L_2, привинченныя перпендикулярно къ нижней пластинкѣ P_3, поддерживаютъ въ своихъ подшипникахъ цилиндрическія цапфы компаса Z_1 и Z_2, которыя закрѣпляются въ этомъ положеніи помощью задвижекъ C_1 и C_2.

Высота стоекъ надъ нижней пластинкой такова, что компасъ можетъ быть повернутъ въ вертикальное положеніе. Два направляющихъ винтика, выходящихъ одинъ вертикально, а другой горизонтально изъ бруска Q, соединяющаго стойку L_1 съ L_2, ограничиваютъ вращеніе компасной коробки. Эти опорные винтики при правильной регулировкѣ для наблюденія приспособлены такъ, что по приведеніи квадратной пластинки P_2 въ соприкосновеніе съ тѣмъ или другимъ изъ нихъ плоскость компасной коробки непосредственно принимаетъ положеніе, параллельное или перпендикулярное основной пластинкѣ P_3. Уровень D_1, вдѣланный въ пластинку P_3, чувствительностью въ 3′ (при отклоненіи пузырька на $1^m/_m$), служитъ для указанія горизонтальнаго положенія. Нижняя сторона основной пластинки навинчена на конусъ F

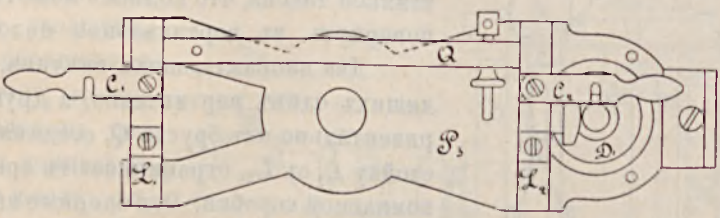
(ф. 14, 15), къ которому придѣлано шаровое пустотѣлое соединеніе, прочно удерживаемое треножникомъ. Дѣйствуя посредствомъ 2 винтовъ S_2 и S_3 и пружины на нижнюю часть шарового соединенія, основную пластинку P_3 можно привести въ горизонтальное положеніе. Вращеніе поддержки около вертикальной оси достигается посредствомъ движенія конуса въ его ложѣ, и поддержка можетъ быть закрѣплена въ любомъ положеніи посредствомъ нажимного винта S_4, указаннаго на ф. 14. Параллельно оси Z_1 и Z_2 къ стойкѣ L_1 прикрѣплена цилиндрическая ручка E въ 22 c/m. длиною (ф. 8, 9). Чтобы данная ручка явля-



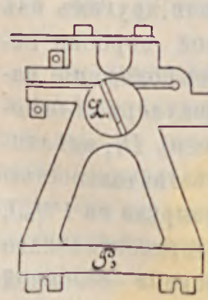
Фиг. 10.



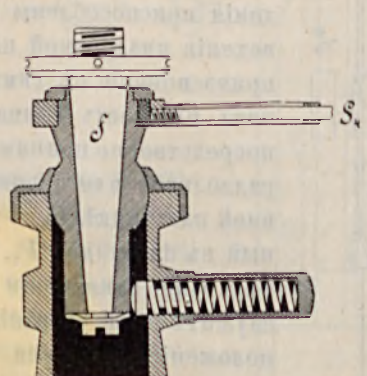
Фиг. 11.



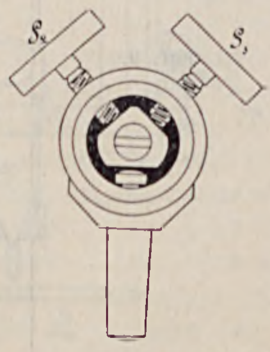
Фиг. 12.



Фиг. 13.



Фиг. 14



Фиг. 15.

лась легкой и всетаки достаточно не гибкой, она сдѣлана изъ двухъ концентричныхъ спаенныхъ одна съ другою цилиндрическихъ мѣдныхъ трубокъ. Эта ручка имѣетъ рамку для помѣщенія въ послѣдней отклоняющаго магнита. Упомянутая рамка передвигается вдоль ручки и можетъ быть закрѣплена въ любомъ положеніи винтомъ S_5. Высота ея такова, что когда въ нее вложенъ отклоняющій магнитъ, то ось послѣдняго будетъ въ одной горизонтальной плоскости съ плоскостью колебанія компасной стрѣлки. Помѣщенная на одной сторонѣ ручки миллиметровая скала, имѣющая нулевое дѣленіе въ центрѣ оси вращенія компасной стрѣлки, служитъ для опредѣленія разстоянія отклоняющаго магнита отъ центра компасной стрѣлки. На концѣ этой ручки подъ прямымъ угломъ къ нижней ея сторонѣ придѣланъ предметный діоптръ особой, наиболѣе приспособленной формы.

Непосредственно сзади уровня D_1 помѣщенъ окулярный діоптръ H, состоящій изъ мѣдной пластинки съ вертикальной щелью. Стойки L_1 и L_2 имѣютъ вырѣзы, и когда компасъ находится въ горизонтальномъ положеніи, то при помощи діоптровъ ручка E можетъ быть точно установлена въ любомъ направленіи. Отклоняющій магнитъ имѣетъ 1,1 c/m ширины, 10 c/m длины и 0,2 c/m толщины. Его сѣверный полюсъ отмѣченъ, какъ и у компасной стрѣлки, вдѣланнымъ мѣднымъ штифтикомъ. Кнопка, придѣланная къ серединѣ магнита, позволяетъ его вынимать и вкладывать въ рамку, безъ прикосновенія къ стали, изъ которой онъ сдѣланъ. Пружина R удерживаетъ магнитъ въ рамкѣ.

Испытаніе и повѣрка магнетометра.

Хотя инструментъ, прежде чѣмъ покидаетъ мастерскую, испытывается и провѣряется механикомъ, все же для наблюдателя не слѣдуетъ вполнѣ полагаться на повѣрку въ мастерской, а лучше испытать приборъ самому и произвести необходимыя поправки.

1. *Изслѣдованіе погрѣшности, происходящей отъ эксцентрицитета компасной стрѣлки.*

Компасъ вынимаютъ изъ поддержки, помѣщаютъ на горизонтальную плоскость и берутъ отсчетъ по обоимъ концамъ стрѣлки, затѣмъ поворачиваютъ компасъ на нѣкоторый уголъ и берутъ, какъ прежде, вторичный отсчетъ. Этотъ процессъ продолжаютъ, пока не совершатъ полнаго оборота. Постоянная разница въ отсчетахъ по сѣверному и южному концамъ показываетъ, что магнитная ось стрѣлки не проходитъ черезъ точки подвѣса стрѣлки.

Періодически измѣняющееся значеніе разности въ отсчитываніи показываетъ, что ось вращенія стрѣлки не проходитъ черезъ центръ градуированнаго круга. При отсчитываніи по обоимъ концамъ стрѣлки и составленіи средняго отсчета ошибка отъ эксцентрицитета уничтожается.

2. Повѣрка перпендикулярности между осью вращенія поддержки и плоскостью уровня D_1 на основной пластинкѣ P_3.

Навинчиваютъ магнетометръ на головку треножника, поворачиваютъ его такъ, чтобы ручка встала подъ винтомъ шарового сочлененія и при помощи обоихъ уравнительныхъ винтовъ приводятъ пузырекъ уровня къ центру. Послѣ этого магнетометръ поворачиваетъ на 180^0, что легко достигается при наблюденіи отсчетовъ по компасу. Если пузырекъ при этомъ сойдетъ со середины, то это служитъ указаніемъ, что ось вращенія не перпендикулярна къ плоскости уровня.

Въ такомъ случаѣ производятъ поправку, уничтожая на половину несовпаденіе пузырька со срединой посредствомъ приспособленныхъ для этого трехъ винтовъ, выходящихъ изъ дна пластинки P_3.

3. Испытаніе перпендикулярности оси вращенія компаса къ вертикальной оси вращенія поддержки.

На цапфы Z_1 и Z_2 помѣщаютъ накладной уровень и вращаютъ поддержку около вертикальной оси, пока ось Z_1 Z_2 не встанетъ по линіи одного уравнительнаго винта. При помощи послѣдняго приводятъ пузырекъ накладного уровня къ центру. Поворачиваютъ поддержку около вертикальной оси на 180^0, слѣдя за показаніемъ стрѣлки. Если въ этомъ новомъ положеніи пузырекъ сойдетъ съ середины, то изслѣдуемое условіе не будетъ выполнено. Для поправки $^1/_2$ отклоненія пузырька уничтожаютъ имѣющимися для этой цѣли исправительными винтами или, если послѣдніе отсутствуютъ, то посредствомъ уравниванія высоты соотвѣтствующей колонки L_1 или L_2, подкладывая между ею и основной пластинкой P_3 бумагу.

4. Повѣрка горизонтальности компасной коробки, когда дно ея касается вертикальнаго винта бруска Q.

Магнетометръ устанавливаютъ на треножникѣ въ горизонтальное положеніе и приводятъ нижнюю пластинку компасной коробки въ соприкосновеніе съ вертикальнымъ винтомъ бруска Q. Послѣ этого визируютъ черезъ дно или крышку компаса подъ прямымъ угломъ къ ручкѣ E на подвѣшенную вертикально на нѣкоторомъ разстояніи отъ магнетометра рейку и берутъ по ней отсчетъ. Далѣе поворачиваютъ поддержку около вертикальной оси на 180^0 (слѣдя за показаніемъ стрѣлки) и берутъ, какъ прежде, второй отсчетъ по скалѣ. Если отсчеты различны, то вертикальный винтъ долженъ быть повернутъ въ соотвѣтствующемъ направленіи, пока разница не уничтожится на половину. Пузырекъ уровня D между пластинками P_1 и P_2 долженъ находиться въ центрѣ. Всякое отклоненіе пузырька должно быть исправлено приспособленнымъ для этого винтомъ.

5. Повѣрка вертикальнаго положенія компасной коробки, когда пластинка ея P_2 приводится въ соприкосновеніе съ горизонтальнымъ винтомъ бруска Q.

Магнетометръ помѣщается на треножникъ и устанавливается въ горизонтальное положеніе, какъ раньше, а пластинка P_2 приводится въ соприкосновеніе съ горизонтальнымъ винтомъ Вертикальность пластинки P_2 послѣ этого можетъ быть удостовѣрена посредствомъ отвѣса или визированіемъ вдоль пластинки P_2 на скалу, расположенную подъ магнетометромъ, какъ въ предыдущемъ случаѣ. Поправка производится горизонтальнымъ винтомъ.

6. Исключеніе вертикальной слагающей силы нормальнаго земного поля.

Магнетометръ, установленный въ нормальномъ полѣ и точно приведенный въ горизонтальное положеніе, поворачивается, пока стрѣлка не дастъ отсчета 90^0, затѣмъ компасъ устанавливается вертикально и маленькая аллюминіевая пластинка, приспособленная въ новѣйшихъ инструментахъ для производства этой повѣрки, передвигается вдоль компасной стрѣлки въ ту или другую сторону до тѣхъ поръ, пока стрѣлка не дастъ отсчета 0^0. Тогда пластинка закрѣпляется въ послѣднемъ положеніи посредствомъ предназначенныхъ для этого винтиковъ. Если такой пластинки не имѣется, то она можетъ быть замѣнена ниткой, которой обвязываютъ южный конецъ стрѣлки и передвигаютъ ее до требуемаго положенія заостренной спичкой. Однако всякая нитка болѣе или менѣе гигроскопична, и ея вѣсъ не будетъ постояннымъ, а будетъ зависѣть отъ состоянія погоды.

Необходимыя предосторожности при производствѣ наблюденій съ магнетометромъ.

1. Наблюдатель долженъ удостовѣриться, не имѣетъ-ли онъ или его помощникъ съ собою какихъ-либо желѣзныхъ предметовъ, какъ-то перочинныхъ ножей, ключей и т. п., которые могутъ вліять на отсчеты стрѣлки.

2. Если въ полѣ находятся такія тѣла, которыя дѣйствуютъ на магнитную стрѣлку, но не могутъ быть удалены, какъ напр. желѣзныя крыши строеній, магнитныя рудныя массы и т. д., то положеніе ихъ необходимо тщательно замѣтить, нанести на эскизъ, чтобы затѣмъ, перенеся ихъ положеніе на планъ магнитнаго поля, можно было оцѣнить ихъ возмущающее вліяніе.

3. Во избѣжаніе электризаціи стеклянной крышки компасной коробки, что вызываетъ неправильныя показанія стрѣлки, крышку не слѣдуетъ протирать платкомъ. Впрочемъ при дыханіи на наэлектризованное стекло происходитъ разрядка электричества.

4. Осѣданіе пыли на каменныхъ подшипничкахъ въ мѣстѣ подвѣса стрѣлки понижаетъ чувствительность послѣдней. Поэтому необходимо по возможности рѣже открывать стеклянную крышку.

5. Отсчеты въ полѣ лучше производить въ сумрачный день. Въ солнечный день магнетометръ долженъ предохраняться отъ непосредственныхъ лучей солнца зонтикомъ, не имѣющимъ ни желѣзныхъ, ни стальныхъ частей.

Повышенія температуры магнита въ какой-бы то ни было степени всегда слѣдуетъ избѣгать, такъ какъ моментъ магнита при этомъ понижается, возвращаясь къ первоначальной величинѣ, когда температура его дѣлается нормальной. Гораздо болѣе важную причину, вліяющую на величину момента магнита, представляютъ сотрясенія, такъ какъ послѣднія измѣняютъ силу магнитной проницаемости магнита.

Величина отклоненія компасной стрѣлки отъ дѣйствія отклоняющаго магнита зависитъ отъ момента послѣдняго, отъ величины K, постоянной инклинатора, и отъ момента компасной стрѣлки. Такимъ образомъ выходитъ, что при изслѣдованіи магнитнаго поля результаты отсчетовъ могутъ быть получены согласными только въ томъ случаѣ, если въ продолженіи съемки моментъ магнита остается неизмѣннымъ. Для достиженія послѣдняго слѣдуетъ принимать всѣ необходимыя предосторожности.

6. Накопленіе влажности на стрѣлкѣ магнетометра во время сырой погоды можетъ уничтожить уравновѣшенность стрѣлки и такимъ образомъ, вызвать погрѣшность при употребленіи магнетометра въ качествѣ инклинатора.

Влажность со стеклянной крышки и со стрѣлки лучше всего удалять, оставляя магнетометръ въ открытомъ видѣ въ тепломъ мѣстѣ, пока онъ не высохнетъ. Чистки стрѣлки или внутренностей компаса тряпкой слѣдуетъ во всякомъ случаѣ избѣгать.

ГЛАВА VII.

Горизонтальное напряженіе магнитнаго поля. Методы наблюденій.

Для опредѣленія горизонтальнаго напряженія магнитнаго поля измѣряютъ уголъ отклоненія компасной стрѣлки при дѣйствіи на нее отклоняющаго магнита, занимающаго опредѣленное положеніе на ручкѣ магнетометра E.

Смотря по тому, какъ получается уголъ отклоненія, различается методъ тангенсовъ и методъ синусовъ, изъ которыхъ первый менѣе точенъ.

При примѣненіи этихъ методовъ, магнетометръ, при горизонтальномъ положеніи компаса, устанавливается въ пунктѣ наблюденія на треножникъ и пузырекъ круглаго уровня D_1 приводится къ центру дѣйствіемъ установительныхъ винтовъ.

Въ случаѣ метода тангенсовъ инструментъ послѣ этого вращается около вертикальной оси, пока компасная стрѣлка не встанетъ перпендикулярно къ ручкѣ, т. е. не дастъ отсчета 90^0. Легкимъ постукиваніемъ по стеклянной крышкѣ компаса убѣждаются въ свободномъ положеніи стрѣлки. Теперь магнитная ось компасной стрѣлки будетъ параллельна магнитному меридіану мѣста наблюденія и ручка E перпендикулярна къ плоскости этого меридіана. Послѣ этого осторожно вкладываютъ отклоняющій магнитъ въ его рамку на ручкѣ E и закрѣпляютъ въ этомъ положеніи посредствомъ пружины R и закрѣпительнаго винта S_5.

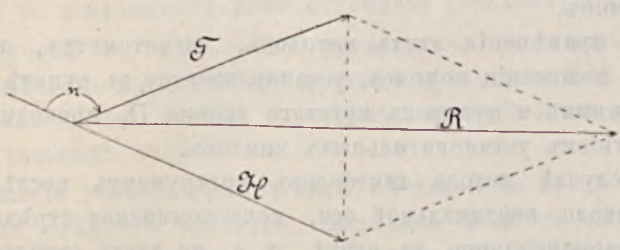
Осторожность при вкладываніи магнита въ рамку необходима, чтобы избѣжать сильныхъ колебаній стрѣлки, такъ какъ въ противномъ случаѣ тратится много времени на ожиданіе, пока стрѣлка установится окончательно въ своемъ новомъ положеніи. Послѣднее, какъ и прежде, повѣряютъ легкимъ постукиваніемъ Произведенный тогда отсчетъ будетъ $= a_0$, а $90^0 - a_0 = \alpha_0$ будетъ соотвѣтствовать углу произведеннаго отклоненія. Предполагая, что магнетометръ находится въ нормальномъ земномъ полѣ, будемъ имѣть

$$H\, tg\, \alpha_0 = q = H\, ctg\, a_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Если-же магнетометръ помѣщенъ въ полѣ, возмущенномъ магнитными рудными массами, то получается нѣкоторый другой отсчетъ a, соотвѣтствующій углу отклоненія стрѣлки — $90^0 - a = \alpha$. Этотъ уголъ отклоненія вызывается, во-первыхъ, силой R, которая равна совмѣстному горизонтальному напряженію даннаго поля, а, во-вторыхъ, дѣйствіемъ отклоняющаго магнита. Компасная стрѣлка будетъ удерживаться въ направленіи равнодѣйствующей обѣихъ силъ. Величина R является равнодѣйствующей H, горизонтальной составляющей нормальнаго земного поля, и F, горизонтальной составляющей поля, вызваннаго магнитными рудными массами.

Если уголъ между направленіями этихъ двухъ слагающихъ будетъ $= n$, то величину R мы можемъ представить функціей слагающихъ H и F и угла n (фиг. 16)

$$R = \sqrt{H^2 + F^2 - 2\, HF\cos n} \quad . \; . \; . \; . \quad (15)$$



Фиг. 16.

Въ этомъ случаѣ при отсчетѣ a и соотвѣтствующемъ углѣ отклоненія стрѣлки α, мы будемъ имѣть

$$R\, tg\, \alpha = q = R\, ctg\, a \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Изъ уравненій (14) и (16) получаемъ, что

$$R = \frac{tg\, \alpha_0}{tg\, \alpha} H = \frac{ctg\, a_0}{ctg\, a} H \quad . \; . \; . \; . \quad (17)$$

Въ этомъ уравненіи R выражено въ функціи горизонтальной составляющей нормальнаго земного поля, для котораго уголъ отклоненія былъ $= \alpha_0$. Какъ установлено ранѣе, методъ тангенсовъ даетъ лишь приближенныя значенія. Для болѣе точнаго измѣренія употребляется методъ синусовъ.

При этомъ методѣ, послѣ того какъ магнетометръ помѣщенъ надъ точкой наблюденія въ нормальномъ земномъ полѣ и приведенъ въ горизонтальное положеніе, осторожно кладутъ отклоняющій магнитъ въ его рамку и вращаютъ магнетометръ до тѣхъ поръ, пока стрѣлка (послѣ постукиванія) не дастъ отсчета 90°. Въ этомъ положеніи ось стрѣлки будетъ перпендикулярна къ оси отклоняющаго магнита. При удаленіи послѣдняго стрѣлка отклоняется на нѣкоторый уголъ и становится въ положеніе, при которомъ ея ось параллельна магнитному меридіану мѣста наблюденія. Уголъ a'_0 будетъ новымъ отсчетомъ и $90^0 - a'_0 = \alpha'_0$ будетъ соотвѣтствующимъ угломъ отклоненія, вызваннымъ отклоняющимъ магнитомъ. Въ такомъ случаѣ мы получимъ:

$$H \sin \alpha'_0 = H \cos a'_0 = q' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Если a' и α' соотвѣтствующіе углы, полученные въ сложномъ полѣ, то мы будемъ имѣть:

$$R \sin \alpha'_0 = R \cos a'_0 = q'$$

отсюда
$$R = \frac{\sin \alpha'_0}{\sin \alpha'} H = \frac{\cos a'_0}{\cos a'} H \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Изъ уравненія (14) слѣдуетъ, что такъ какъ H мѣняется сообразно съ мѣстомъ, то уголъ α_0 долженъ также мѣняться съ перемѣной мѣста, если только q, сила отклоняющаго магнита, остается постоянной. Въ виду вышесказаннаго уголъ α_0 для мѣстъ, въ которыхъ должно изслѣдоваться возмущенное поле, лучше брать какъ среднее изъ ряда наблюденій, произведенныхъ въ различныхъ частяхъ нормальнаго земного поля, окружающаго возмущенное поле.

Сравненіе упомянутыхъ методовъ.

Что касается выгодъ и недостатковъ обоихъ приведенныхъ методовъ для опредѣленія горизонтальнаго напряженія R, то слѣдуетъ замѣтить, что методъ тангенсовъ является вполнѣ подходящимъ, когда требуются лишь приблизительные результаты. Онъ требуетъ менѣе времени, и инструментъ, установленный для этого метода, по удаленіи отклоняющаго магнита и приведеніи компаса въ вертикальное положеніе, можно употребить въ качествѣ инклинатора и произвести отсчеты для опредѣленія вертикальнаго напряженія этого поля, какъ объ этомъ будетъ сказано далѣе.

Сверхъ того изъ уравненія (16) слѣдуетъ, что

$$tg\ \alpha = \frac{q}{R}.$$

Такъ какъ tg измѣняется въ предѣлахъ отъ $-\infty$ до $+\infty$, то любому значенію $\frac{q}{R}$ соотвѣтствуетъ опредѣленный уголъ α, или, другими словами, методъ тангенсовъ для каждаго случая даетъ опредѣленное значеніе R.

Съ другой стороны, методъ синусовъ даетъ болѣе точные результаты, но онъ мало удобенъ, при немъ для производства наблюденія необходимо больше времени, чѣмъ при методѣ тангенсовъ, и онъ требуетъ, чтобы инструментъ былъ приведенъ въ прежнее положеніе, прежде чѣмъ устанавливать вертикально компасъ для пользованія приборомъ, какъ инклинаторомъ.

Далѣе изъ уравненія

$$Sin\ \alpha' = \frac{q'}{R}$$

такъ какъ sin не можетъ быть больше 1, выходитъ, что для значеній $q > R$ не будетъ существовать соотвѣтствующаго угла α'. Въ пунктахъ, гдѣ получаются такія значенія, компасная стрѣлка не можетъ принять положенія перпендикулярнаго къ оси отклоняющаго магнита. Приведенный недостатокъ метода синусовъ можетъ въ нѣкоторой мѣрѣ быть уменьшенъ при увеличеніи разстоянія d, середины отклоняющаго магнита отъ центра компасной стрѣлки. Такъ какъ q измѣняется обратно пропорціонально d^3, то съ возрастаніемъ послѣдняго q быстро уменьшается, а при маломъ q этотъ методъ можетъ быть примѣненъ для измѣренія малыхъ значеній R. Такъ какъ съ уменьшеніемъ q α_0 также уменьшается, то для измѣренія малыхъ значеній R слѣдуетъ выбирать малыя значенія α_0. Напримѣръ, въ то время какъ при углѣ $\alpha_0 = 30^0$ могутъ быть измѣрены только значенія R, которыя $> 0,50\ H$; при $\alpha_0 = 10^0$ можно уже измѣрять силы R, большія, чѣмъ $0,17\ H$.

Изъ предыдущаго ясно, что для второстепенныхъ изслѣдованій, которыя должны дать только поверхностное понятіе о содержаніи руды, особенно при наблюденіяхъ на поверхности, можно употреблять болѣе краткій, хотя менѣе точный методъ тангенсовъ, и по найденнымъ значеніямъ изображать кривыя равныхъ величинъ α, не принимая во вниманіе абсолютной величины R.

Напротивъ, для точныхъ наблюденій, особенно въ рудникѣ, лучше пользоваться методомъ синусовъ.

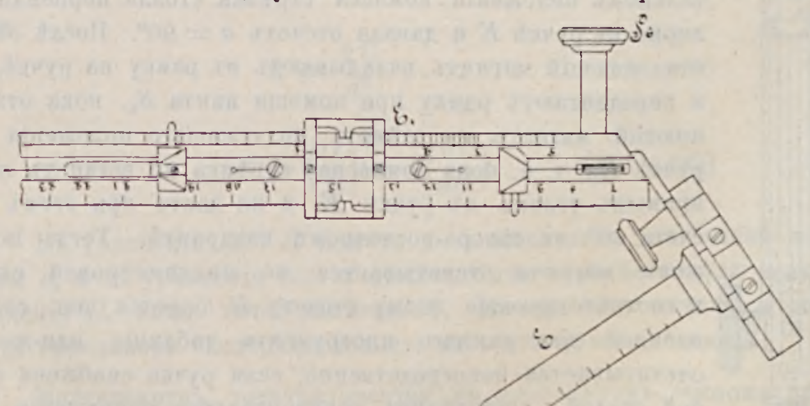
Чтобы облегчить вычисленіе результатовъ, особенно при большомъ числѣ опредѣленій, при томъ и другомъ методѣ, удобно пользоваться составленными для этого таблицами I и II значеній $\frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha}$ и $\frac{tg\, \alpha_0}{tg\, \alpha}$.

Величины вышеупомянутыхъ отношеній составлены для значеній α_0 отъ 10^0 — 30^0 черезъ каждый градусъ. Если не требуется особой точности, то для тѣхъ же значеній можно составить діаграммы, какъ это будетъ объяснено далѣе.

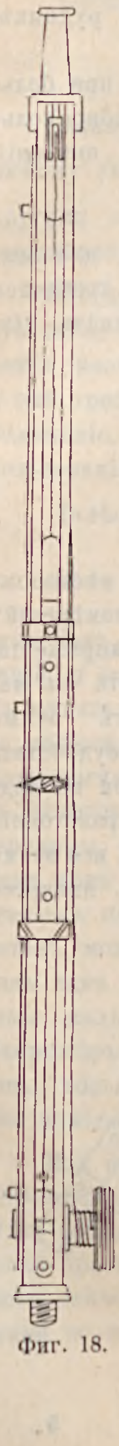
ГЛАВА VIII.

Видоизмѣненіе Дальбломомъ метода синусовъ.

Дальбломъ въ своей статьѣ „О магнитныхъ рудныхъ мѣсторожденіяхъ и ихъ изысканіи посредствомъ магнитныхъ измѣреній“ даетъ другой пріемъ для опредѣленія горизонтальнаго напряженія. Этотъ пріемъ требуетъ только незначительныхъ измѣненій въ магнетометрѣ и обладаетъ тѣмъ преимуществомъ, что даетъ точные результаты, не представляя въ то же время различныхъ неудобствъ, встрѣчающихся при обыкновенномъ методѣ синусовъ. При послѣднемъ методѣ вслѣдствіе неизмѣннаго значенія d, т. е. разстоянія середины отклоняющаго магнита отъ компасной стрѣлки, q все время остается постояннымъ, уголъ же отклоненія α напротивъ является



Фиг. 17.



Фиг. 18.

перемѣннымъ; тогда какъ при пріемѣ Дальблома уголъ отклоненія $\eta = 30^0$ остается постояннымъ, а q напротивъ является перемѣннымъ. Для примѣненія этого метода къ компасной коробкѣ магнетометра Тиберга-Талена привинчивается вторая ручка E_1 (фиг. 17, 18). Послѣдняя направлена на центръ подвѣса компасной стрѣлки и дѣлаетъ уголъ въ 30^0 съ ручкой E. Эта вторая ручка имѣетъ рамку для помѣщенія отклоняющаго магнита, ось котораго, когда онъ помѣщенъ на мѣсто, находится въ той-же горизонтальной плоскости, какъ и магнитная ось компасной стрѣлки. Рамка можетъ передвигаться взадъ и впередъ по ручкѣ E_1 при помощи шнурка или проволоки, прикрѣпленной къ рамкѣ и натягиваемой роликомъ S_6. Вдоль одной стороны ручки помѣщена миллиметровая скала, нуль дѣленій которой находится въ центрѣ оси вращенія компасной стрѣлки. Рамка снабжена указателемъ, такъ что положеніе центра отклоняющаго магнита можетъ быть прочтено по скалѣ. Другая сторона ручки можетъ быть снабжена скалой, которая даетъ равнодѣйствующую горизонтальнаго напряженія R непосредственно для различныхъ разстояній центра отклоняющаго магнита отъ нуля.

Методъ наблюденія.

Инструментъ устанавливается точно такъ же, какъ въ случаѣ метода тангенсовъ, т. е. чтобы при горизонтальномъ положеніи компаса стрѣлка стояла перпендикулярно къ ручкѣ E и давала отсчетъ $a = 90^0$. Послѣ этого отклоняющій магнитъ вкладываютъ въ рамку на ручкѣ E_1 и передвигаютъ рамку при помощи винта S_6, пока отклоняющій магнитъ не займетъ надлежащаго положенія на ручкѣ E_1, т. е. пока компасная стрѣлка не встанетъ подъ прямымъ угломъ къ ручкѣ E_1 и не дастъ при этомъ отсчета 60^0 въ сѣверо-восточномъ квадрантѣ. Тогда положеніе магнита отсчитывается по миллиметровой скалѣ и соотвѣтствующее этому отсчету R берется изъ составленной для даннаго инструмента таблицы, или-же R отсчитывается непосредственно, если ручка снабжена особой скалой. Опредѣливъ горизонтальное напряженіе, отклоняющій магнитъ удаляютъ, компасная стрѣлка возвращается въ прежнее свое положеніе, т. е. къ отсчету 90^0, и мы, установивъ компасъ вертикально, можемъ взять отсчетъ для опредѣленія вертикальнаго напряженія.

Градуированіе ручки Дальблома.

Такъ какъ согласно уравненію (9) произведеніе дѣйствія отклоняющаго магнита q на кубъ его разстоянія отъ центра стрѣлки есть величина постоянная, то для различныхъ соотвѣтственныхъ значеній q и d мы имѣемъ

$$q_0\,d_0 = q_1\,d_1{}^3 = q_2\,d_2{}^3 = \ldots\ldots = q_n\,d_n{}^3 = C\ const.$$

Если H горизонтальное напряженіе нормальнаго земного поля и q_0 соотвѣтствующее ему дѣйствіе отклоняющаго магнита, когда компасная стрѣлка стоитъ перпендикулярно къ Дальбломовской ручкѣ, а R и q соотвѣтствующія величины для возмущеннаго поля, то для метода Дальблома получаемъ:

$$H\ sin\ 30^0 = q_0$$

$$R\ sin\ 30^0 = q$$

Отсюда

$$H = 2\,q_0 \quad \text{и} \quad R = 2\,q = n\,H, \;.\;.\;.\;. \quad (20)$$

но

$$q\,d^3 = C \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (9)$$

Подставляя въ послѣднее уравненіе для q его величину изъ уравненія (20), мы имѣемъ:

$$\frac{R}{2}\,d^3 = C$$

или

$$R = \frac{2\,C}{d^3} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (21)$$

и

$$d = \left(\frac{2\,C}{R}\right)^{1/3} = \left(\frac{2\,C}{nH}\right)^{1/3} \;.\;.\;.\;. \quad (22)$$

Въ уравненіи (21) R можетъ быть вычислено для всякой величины d, а въ уравненіи (22) d можетъ быть опредѣлено для всякаго значенія R, когда точно извѣстно C. Послѣдняя величина можетъ быть опредѣлена экспериментально, какъ это указано ниже.

Магнетометръ устанавливается въ нормальномъ земномъ полѣ, и приводится въ горизонтальное положеніе. Затѣмъ весь инструментъ вращается около вертикальной оси до тѣхъ поръ, пока Дальбломовская ручка не приметъ направленія, совпадающаго съ магнитной осью компасной стрѣлки, причемъ сѣверный конецъ стрѣлки будетъ давать отсчетъ 30^0 въ сѣверо-западной четверти.

Послѣ этого осторожно вкладываютъ въ рамку Дальбломовской ручки отклоняющій магнитъ сѣвернымъ концомъ по направленію къ сѣверному полюсу компасной стрѣлки и медленно передвигаютъ по направленію къ компасной коробкѣ, пока стрѣлка не встанетъ подъ прямымъ угломъ къ ручкѣ E_1, при чемъ сѣверный конецъ стрѣлки дастъ отсчетъ 60^0 въ сѣверо-восточной четверти. Въ этомъ случаѣ уголъ отклоненія $\alpha = 90^0$, а потому

$$q_1 = H\, sin\, 90^0 = H = 1,$$

при чемъ H принимается равнымъ единицѣ.

Если мы полученное при этомъ разстояніе d, между срединой магнита и центромъ компасной стрѣлки, точно измѣримъ, то легко вычислимъ

$$C_1 = 1\, d_1{}^3$$

Такимъ-же точно образомъ ведутъ дальнѣйшія наблюденія, беря лишь каждый разъ новый уголъ отклоненія, напримѣръ послѣдовательно черезъ 5^0, и каждый разъ измѣряя соотвѣтствующее углу отклоненія разстояніе d. Такъ какъ вычисленныя на основаніи измѣренныхъ d значенія отдѣльныхъ C не будутъ точно согласоваться между собою, то изъ нихъ опредѣляютъ среднее значеніе C_m. На основаніи этого средняго мы можемъ провѣрить разстоянія d_1, d_2 и т. д. подстановкой въ уравненіе

$$d^3 = \frac{C_m}{q}$$

частныхъ значеній q_1, q_2 и т. д.

Мы можемъ калибрировать миллиметровую скалу Дальбломовской ручки опредѣленіемъ значеній R, соотвѣтствующихъ отдѣльнымъ миллиметровымъ дѣленіямъ скалы, или можемъ построить скалу различныхъ значеній R для различныхъ разстояній d, которая можетъ быть въ такомъ случаѣ перенесена на Дальбломовскую ручку на сторону, противоположную той, на которой помѣщена миллиметровая скала.

Калибровка миллиметровой скалы.

Подстановкой въ уравненіе

$$R = \frac{2\,C_m}{d^3}$$

сантиметровыхъ дѣленій скалы, мы опредѣлимъ значенія R, соотвѣтствующія этимъ дѣленіямъ. Послѣ этого мы можемъ вычертить кривую, откладывая на абсциссѣ миллиметровыя дѣленія, а на ординатѣ соотвѣтствующія значенія R. Масштабъ значеній R слѣдуетъ выбирать такимъ образомъ, чтобы ординаты не были чрезмѣрно большими, однако, чтобы разности ординатъ для различныхъ миллиметровъ были достаточно ясны.

Построеніе скалы для непосредственныхъ отсчетовъ R.

Черезъ подстановку въ уравненіе

$$d^3 = \frac{2\,C_m}{R} = \frac{2\,C_m}{nH}$$

или

$$d = (2\,C_m)^{1/3} \cdot \left(\frac{1}{n\,H}\right)^{1/3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

различныхъ значеній n мы получимъ соотвѣтствующія значенія d.

Для облегченія этихъ вычисленій можно составить таблицы различныхъ значеній $\left(\frac{1}{n}\right)^{1/3}$ и ихъ логариомовъ, какъ это даетъ табл. III.

Подобно предыдущему, мы можемъ построить кривую, откладывая на абсциссѣ различныя значенія R, а на ординатѣ соотвѣтствующія значенія d въ сантиметрахъ.

Полученную скалу значеній R сначала наносятъ на бумагу и провѣряютъ, а затѣмъ уже переносятъ на ручку магнетометра. Большія значенія R удобно опредѣлять Дальбломовскимъ методомъ, примѣняя спеціальный отклоняющій магнитъ съ большей мощностью полюсовъ. Для этого магнита значенія C_m будутъ иными, чѣмъ вычисленныя для прежняго магнита, и мы должны будемъ построить новыя кривыя.

Значеніе C_m зависитъ отъ постоянства силы отклоняющаго магнита и значенія H въ пунктѣ наблюденія. Если та или другая изъ этихъ величинъ мѣняется, то является необходимость въ новомъ опредѣленіи C_m. Постоянство силы отклоняющаго магнита и компасной стрѣлки не можетъ быть гарантировано. Магниты мало по малу ослабѣваютъ что, правда, въ значительной мѣрѣ можетъ быть избѣгнуто приготовленіемъ магнитовъ изъ молибденовой стали и искусственной закалкой ихъ въ горячемъ маслѣ. Врядъ-ли слѣдуетъ упоминать, что случайныя паденія отклоняющаго магнита безусловно требуютъ новаго опредѣленія C_m.

Изъ уравненія

$$R = \frac{2\,C_m}{d^3}$$

мы получимъ для того же самаго d, до новаго значенія C'_m выраженіе

$$R' = \frac{2\,C'_m}{d^3}$$

и отсюда

$$R' = \frac{C'_m\,R}{C_m}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (24)$$

изъ котораго слѣдуетъ, что въ случаѣ новаго опредѣленія C_m, значенія R, отсчитываемыя по Дальбломовской ручкѣ, должны быть замѣнены новыми значеніями, полученными умноженіемъ прежнихъ на отношеніе $\frac{C'_m}{C_m}$.

Въ случаѣ измѣненія скалы, дающей непосредственно R, соотвѣтственно новому значенію C'_m, при вычисленіи очень удобно пользоваться уже упомянутой ранѣе таблицей значеній $\left(\frac{1}{n}\right)^{1/3}$. Примѣнимость Дальбломовскаго метода основана на уравненіи (9)

$$q\,d^3 = C$$

Это уравненіе, какъ уже ранѣе доказано, не вполнѣ справедливо. Профессоръ Улихъ находитъ, что уравненіе въ формѣ:

$$qd^3 + cqd^2 = C,$$

въ которомъ коэффиціентъ c меньше единицы, даетъ лучшіе результаты. Однако опыты показываютъ, что для практическихъ цѣлей уравненіе

$$q\,d^3 = C$$

достаточно точно.

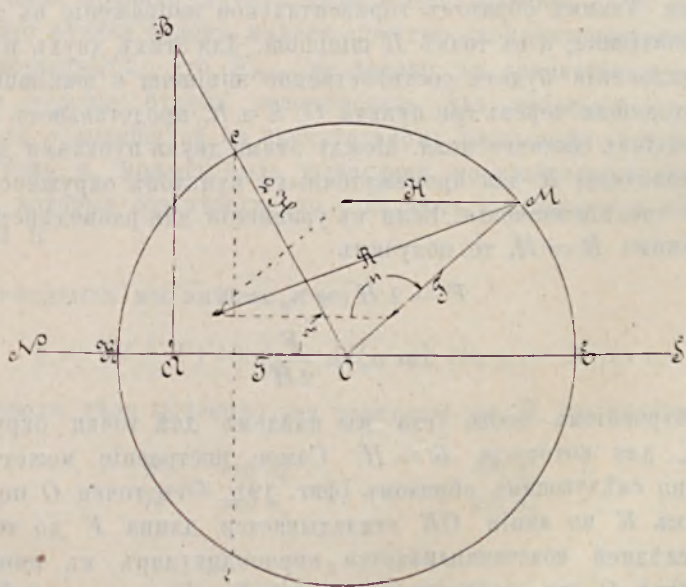
ГЛАВА IX.

Значеніе горизонтальнаго напряженія въ земномъ магнитномъ полѣ, возмущенномъ присутствіемъ магнитныхъ рудныхъ массъ.

Въ возмущенномъ полѣ горизонтальное напряженіе R, какъ уже было указано, есть равнодѣйствующая горизонтальнаго напряженія нормальнаго земного поля и горизонтальной составляющей магнитныхъ силъ, вызываемыхъ магнитными рудными массами. Если первую обозначить черезъ H, а вторую черезъ F, то

$$R = \sqrt{H^2 + F^2 - 2\,H\,F\cos n}$$

Въ возмущенномъ полѣ H остается постояннымъ по направленію и напряженію, которыя являются мѣняющимися для F, причемъ напряженіе послѣдней зависитъ отъ горизонтальнаго разстоянія пункта наблюденія отъ пункта, находящагося надъ полюсомъ рудной массы.



Фиг. 19.

Принимая, что рудная масса залегаетъ отвѣсно подъ пунктомъ 0 (фиг. 19) и что верхній ея полюсъ будетъ южнымъ, мы очевидно можемъ пренебречь дѣйствіемъ сѣвернаго полюса данной рудной массы. Въ такомъ случаѣ очевидно, что для пункта наблюденія M, для котораго H и F представляютъ по напряженію и направленію горизонтальныя составляющія даннаго поля, діагональ R параллелограма, построеннаго на этихъ составляющихъ, будетъ по направленію и напряженію представлять равнодѣйствующую горизонтальнаго напряженія въ пунктѣ M. Для всякой точки окружности радіуса OM и H и F остаются постоянными по напряженію, а H кромѣ того и по направленію, но F, будучи направлено къ центру, для каждой точки окружности будетъ имѣть различное направленіе. Четыре изъ этихъ точекъ имѣютъ особый интересъ. Въ пунктѣ E уголъ $n = 180^0$ и выраженіе равнодѣйствующей будетъ:

$$R = \sqrt{H^2 + F^2 - 2\,H\,F\cos 180^0} = H + F \quad . \quad . \quad (25)$$

Равнодѣйствующая въ этой точкѣ = суммѣ составляющихъ.

Въ пунктѣ K уголъ $n = 0^0$ и

$$R = \sqrt{H^2 + F^2 - 2\,H\,F\cos 0^0} = H - F \quad . \quad . \quad (26)$$

или равнодѣйствующая для этого пункта = разности между составляющими. Такимъ образомъ горизонтальное напряженіе въ точкѣ E имѣетъ maximum, а въ точкѣ K minimum. Для этихъ двухъ пунктовъ уголъ отклоненія будетъ соотвѣтственно minimum и maximum. Линія, проходящая черезъ три пункта O, E и K, представляетъ магнитный меридіанъ даннаго поля. Между этими двумя пунктами для R_{max} и R_{min} величины R для промежуточныхъ пунктовъ окружности принимаютъ среднія значенія. Если въ уравненіи для равнодѣйствующей мы положимъ $R = H$, то получимъ

$$F - 2\,H\cos n_0 = 0$$

$$\cos n_0 = \frac{F}{2H}$$

Построеніемъ этого угла мы найдемъ двѣ точки окружности C и C_1, для которыхъ $R = H$. Самое построеніе можетъ быть выполнено слѣдующимъ образомъ (фиг. 19). Отъ точки O по направленію къ K на линіи OK откладывается длина F до точки A. Изъ послѣдней возстанавливается перпендикуляръ къ линіи OK, а изъ точки O онъ засѣкается въ точкѣ B радіусомъ $= 2\,H$.

Линія OB пересѣчетъ окружность въ точкѣ C. Въ этой и соотвѣтствующей ей точкѣ C_1 получаются углы отклоненія компасной стрѣлки, равные угламъ отклоненія въ нормальномъ земномъ полѣ $= \alpha_0$, такъ называемые нейтральные углы. Въ пунктѣ O сила полюса магнитной массы направлена вертикально и потому $F = O$, соотвѣтственный уголъ, слѣдовательно, будетъ равенъ также α_0. Если только длина F не получится больше, чѣмъ $2H$, то для всякой окружности съ центромъ O найдутся двѣ точки съ углами отклоненія $= \alpha_0$. Соединяя рядъ подобныхъ точекъ, мы получимъ нѣкоторую линію, называемую въ Швеціи „нейтральной линіей", проходящую черезъ точку O, черезъ которую проходитъ также линія, соединяющая R_{max} и R_{min}. Послѣднее обстоятельство даетъ возможность опредѣлять мѣстоположеніе полюса магнитной рудной массы.

Такъ какъ въ изслѣдуемой мѣстности мы можемъ опредѣлить положеніе пунктовъ maximum'а и minimum'а угла отклоненія, а также положеніе нейтральной линіи, то отсюда вытекаетъ весьма простое правило для нахожденія полюса рудной массы, а именно, послѣдній долженъ находиться подъ пунктомъ пересѣченія нейтральной линіи съ линіей, соединяющей точки maximum'а и minimum'а. Къ сожалѣнію въ дѣйствительности мы не имѣемъ тѣхъ простыхъ условій, которыя принимаемъ въ теоріи, а потому и выведенное теоретически правило имѣетъ лишь общее значеніе. Оно предполагаетъ, что рудная залежь имѣетъ простую сконцентрированную форму, а во-вторыхъ, что F_{max} не велико въ сравненіи съ H. Послѣднее условіе будетъ существовать для небольшихъ рудныхъ массъ или находящихся на значительномъ разстояніи отъ поверхности. Уголъ α_0 можетъ быть вычисленъ по извѣстнымъ значеніямъ α_1 и α_2, которыя соотвѣтственно отвѣчаютъ maximum'у и minimum'у значеній R.

Во-первыхъ мы имѣемъ

$$q = (H + F)\, sin\, \alpha_1 = (H - F)\, sin\, \alpha_2 = H\, sin\, \alpha_0$$

Отсюда, дѣля почленно эти равенства на H, мы получимъ

$$\frac{F}{H} = \frac{sin\, \alpha_0}{sin\, \alpha_1} - 1 = 1 - \frac{sin\, \alpha_0}{sin\, \alpha_2}$$

или

$$\frac{1}{sin\, \alpha_1} + \frac{1}{sin\, \alpha_2} = \frac{2}{sin\, \alpha_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

или представляя эту формулу въ логариомическомъ видѣ

$$sin\,\alpha_0 = \frac{2}{\frac{1}{sin\,\alpha_1} + \frac{1}{sin\,\alpha_2}} = \frac{2\,sin\,\alpha_1\,sin\,\alpha_2}{sin\,\alpha_1 + sin\,\alpha_2} = \frac{sin\,\alpha_1\,sin\,\alpha_2}{sin\,\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\,cos\,\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}$$

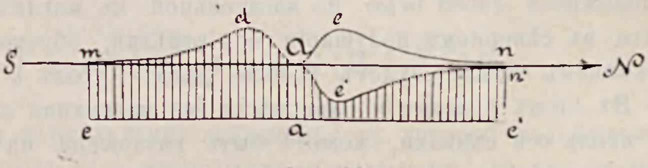
Очевидно, если α_0 и одно изъ двухъ α_1 или α_2 извѣстно, то неизвѣстное α_1 или α_2 можетъ быть вычислено по уравненію (27).

Польза такого вычисленія, приводящаго къ опредѣленію положенія полюса рудной массы, станетъ очевидной, если мы предположимъ, что намъ извѣстенъ на меридіанѣ къ сѣверу отъ полюса рудной массы пунктъ P_2 съ угломъ отклоненія α_2, соотвѣтствующимъ minimum'у значенія R. Пунктъ P_2 будетъ лежать на окружности, радіусъ которой неизвѣстенъ, но въ центрѣ которой будетъ находиться рудный полюсъ. Въ такомъ случаѣ, вычисляя по уравненію (27) уголъ α_1 и опредѣливъ на меридіанѣ пунктъ P_1 съ угломъ отклоненія $= \alpha_1$, и раздѣливъ разстояніе $P_1\,P_2$ пополамъ, мы получимъ центръ искомой окружности, а слѣдовательно и положеніе полюса рудной массы.

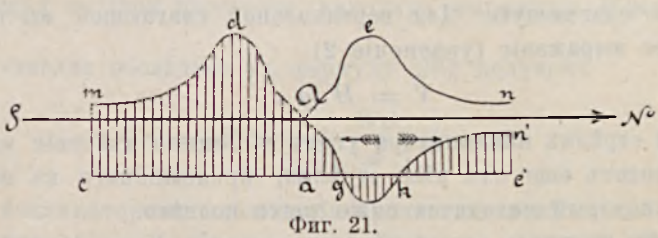
Нейтральная линія раздѣляетъ изслѣдуемое поле на площадь минимальныхъ значеній горизонтальнаго напряженія, простирающуюся къ сѣверу отъ нейтральной линіи, и площадь максимальныхъ значеній того-же напряженія, лежащую къ югу отъ этой линіи.

Въ пунктѣ O значеніе $F = O$. Отъ этого значенія, наблюдаемаго также внѣ границъ поля, F постепенно уменьшается, пока не сдѣлается равнымъ нулю на границахъ изслѣдуемаго поля. Такимъ образомъ существуетъ одна окружность, для которой F имѣетъ максимальныя значенія, внутри и внѣ послѣдней — окружности промежуточныхъ значеній F. По пути отъ значенія $F = O$ F_{max} встрѣтится однажды, а всѣ среднія значенія F — два раза.

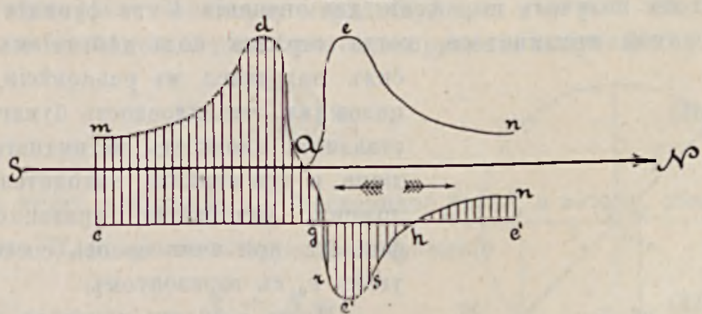
Если $F_{max} < H$, то компасная стрѣлка всегда будетъ указывать на сѣверъ вдоль направленія магнитнаго меридіана. Если $F_{max} = H$, то на меридіанѣ будетъ находиться пунктъ, гдѣ $F_{max} - H = O$. Въ этомъ пунктѣ, такъ сказать индиферентномъ, который лежитъ къ сѣверу отъ O, компасная стрѣлка будетъ занимать безразлично какое-угодно положеніе. Если $2\,H > F_{max} > H$, то будутъ существовать два индиферентныхъ пункта, одинъ, находящійся внутри окружности maximum'овъ, а другой внѣ ея. При движеніи отъ перваго индифферентнаго пункта по направленію къ N, стрѣлка поворотится и будетъ указывать къ югу, пока мы не достигнемъ второго индиферентнаго пункта, гдѣ стрѣлка снова измѣнитъ свое направленіе и будетъ указывать къ сѣверу. Слѣдовательно въ этомъ случаѣ будетъ существовать только одна нейтральная линія, раздѣляющая поле на двѣ площади, максимальнаго и минимальнаго горизонтальнаго напряженія. Когда же $F_{max} > 2\ H$, то будетъ существовать 2 нейтральныхъ линіи между двумя индиферентными пунктами. Одна сомкнутая кривая, проходящая черезъ пунктъ O, „ложная нейтральная линія“ и вторая разомкнутая кривая, лежащая далѣе первой къ сѣверу „истинная нейтральная линія“. Равнодѣйствующая горизонтальнаго напряженія вдоль меридіана въ случаяхъ, когда $F_{max} < H$, $2\ H > F_{max} > H$ и $F_{max} > 2\ H$ соотвѣтственно представлена на фиг. 20, 21 и 22. На этихъ фигу-



Фиг. 20.



Фиг. 21.



Фиг. 22.

рахъ кривая надъ линіей SN представляетъ измѣненіе F вдоль меридіана, а пунктъ A полюсъ. Линія CC_1, параллельная SN, проведена отъ нея на разстояніи H. На фиг. 20 R все время положительно, и компасная стрѣлка всюду указываетъ на сѣверъ вдоль меридіана. На фиг. 21 и 22 g и h являются индифферентными пунктами, равнодѣйствующая между этими пунктами отрицательна, стрѣлка компаса указываетъ на югъ. Во точкахъ r и s (фиг. 22) равнодѣйствующая равна — H, черезъ r проходитъ „ложная“, а черезъ s „истинная нейтральная линія.“

ГЛАВА X.

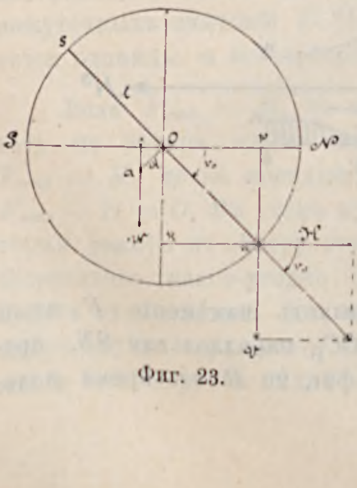
Вертикальное напряженіе возмущеннаго поля. Теорія инклинатора.

Уже ранѣе было указано, что магнитная стрѣлка, свободно колеблющаяся въ любой плоскости, въ земномъ магнитномъ полѣ сама расположится своей осью по касательной къ магнитнымъ силамъ и что въ сѣверномъ полушаріи ось стрѣлки, обращенной сѣвернымъ концомъ книзу, будетъ вообще дѣлать уголъ v съ горизонтомъ. Въ этомъ положеніи равновѣсія вся магнитная сила, дѣйствующая вдоль оси стрѣлки, можетъ быть разложена на двѣ взаимно перпендикулярныя составляющія: H горизонтальную и V вертикальную слагающую. Для вертикальной слагающей мы получимъ слѣдующее выраженіе (уравненіе 2)

$$V = H\, tg\, v \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

При стрѣлкѣ инклинатора уголъ v помимо дѣйствія магнитной силы зависитъ еще отъ вѣса стрѣлки, приложеннаго къ центру ея тяжести, который находится ниже точки подвѣса.

Чтобы получить выраженіе для значенія V въ функціи угла v и постоянной инклинатора, когда стрѣлка подъ дѣйствіемъ этихъ силъ находится въ равновѣсіи, предположимъ, что плоскость бумаги представляетъ плоскость магнитнаго меридіана и что стрѣлка находится въ положеніи равновѣсія, указанномъ на фиг. 23, при чемъ ея ось составляетъ уголъ v_0 съ горизонтомъ.



Фиг. 23.

Пусть a будетъ центромъ тяжести стрѣлки и d его разстояніе отъ точки подвѣса. Будемъ разсматривать вѣсъ стрѣлки W сконцентрированнымъ въ точкѣ a. Пусть $l = on = {}^1/_2$ длины стрѣлки, H и V соотвѣтственно горизонтальная и вертикальная составляющія магнитной силы поля и μ мощность полюса n стрѣлки. Тогда очевидно, что сила V стремится увеличить уголъ v_0, т. е. вызвать вращеніе по часовой стрѣлкѣ, тогда какъ сила H и дѣйствіе тяжести стремятся уменьшить уголъ v_0, вызывая обратное вращеніе. Въ положеніи равновѣсія моменты паръ, вызывающіе вращеніе стрѣлки въ прямо противоложныя направленія, будутъ равны

Моментъ пары, вызываемой силой H, $M_H = H \mu\, 2\, ok = H \mu\, 2\, l \sin v_0$

" " " " V, $M_v = V \mu\, 2\, po = V \mu\, 2\, l \cos v_0$

" тяжести, отнесенной къ оси вращенія x $M_g = W.oc = Wd \sin v_0$

$$M_H + M_g = M_v$$

или

$$(H \mu\, 2\, l + Wd) \sin v_0 = V \mu\, 2\, l \cos v_0$$

отсюда

$$V = (H + \frac{Wd}{2 \mu l})\, tg\, v_0 = (H + \frac{Wd}{m})\, tg\, v_0 \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Если вертикальная плоскость, въ которой колеблется стрѣлка дѣлаетъ уголъ γ съ магнитнымъ меридіаномъ, то для слагающей H, дѣйствующей въ этой плоскости, находимъ выраженіе $H \cos \gamma$.

Подставляя послѣднее въ формулу (28), получимъ

$$V = (H \cos \gamma + \frac{Wd}{m})\, tg\, v_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Съ инклинаторомъ наблюденія производятся въ плоскости, перпендикулярной къ магнитному меридіану, т. е. $\gamma = 90^0$. Въ такомъ случаѣ для величины вертикальнаго напряженія получаемъ

$$V = \left(\frac{Wd}{m}\right) tg\, v_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Въ этомъ уравненіи $\frac{Wd}{m}$ постоянное число, а потому, обозначая его черезъ K, получимъ слѣдующее выраженіе

$$V = K\, tg\, v_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Въ полѣ, возмущенномъ присутствіемъ магнитныхъ рудныхъ массъ, вертикальная сила является равнодѣйствующей вертикальной слагающей нормальнаго земного поля и вертикальной слагающей поля магнитной рудной массы $\pm G$. Знакъ $+$ обозначаетъ притяженіе сѣвернаго полюса стрѣлки, а знакъ — притяженіе южнаго. Горизонтальная сила R, дѣйствующая на стрѣлку, есть равнодѣйствующая горизонтальной слагающей нормальнаго земного поля и горизонтальной слагающей руднаго поля F.

Если плоскость инклинатора находится въ плоскости магнитнаго меридіана, то мы, предполагая, что дѣйствуетъ только одно G, имѣемъ (ур. 28)

$$\pm G = (R + K)\ tg\ v'_0 \quad . \ . \ . \ . \quad (32)$$

Если уголъ дѣлаемый плоскостью инклинатора съ плоскостью магнитнаго меридіана $= \gamma$, то получаемъ (см. ур. 29)

$$\pm G = (R\ cs\ \gamma + K)\ tg\ v'_1 \quad . \ . \ . \quad (32a)$$

Если $\gamma = 90^0$ т. е. когда плоскость инклинатора находится подъ прямымъ угломъ къ магнитному меридіану, то мы имѣемъ (см. ур. 31)

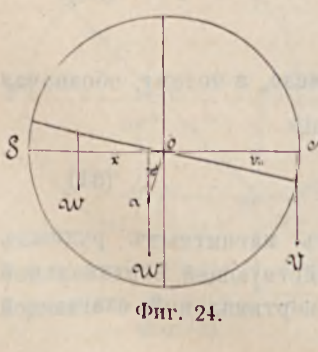
$$\pm G = K\ tg\ v'_2 \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (32b)$$

Слѣдовательно выраженіе для равнодѣйствующей вертикальнаго напряженія

$$V \pm G = K\,(tg\ v_2 \pm tg\ v'_2) \quad . \ . \ . \ . \quad (33)$$

Въ инклинаторѣ Тиберга вертикальная сила нормальнаго земного поля V уравновѣшена маленькимъ грузикомъ, помѣщеннымъ на южной половинѣ компасной стрѣлки, а потому $v_2 = 0$. При этой поправкѣ для опредѣленія вертикальнаго напряженія руднаго поля получаемъ уравненіе

$$\pm G = K\ tg\ v'_2 \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (33a)$$



Фиг. 24.

Если уравновѣшиваніе стрѣлки для исключенія силы V произведено не вполнѣ вѣрно, то получается нѣкоторая маленькая погрѣшность индекса $\pm v_{,,}$ (сѣверный конецъ ниже или выше нуля). Въ такомъ случаѣ, если w маленькій противовѣсъ на южномъ концѣ стрѣлки, то для условія равновѣсія въ нормальномъ земномъ полѣ, мы имѣемъ (фиг. 24)

$$V. 2\,\mu.\, l \cos v_{,,} = W d \sin v_{,,} + w.\, x \cos v_{,,}$$

и

$$V - \frac{wx}{m} = \frac{Wd}{m}\, tg\, v_{,,} = K\, tg\, v_{,,} \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Если при погрѣшности индекса $+ v_{,,}$ мы получимъ въ возмущенномъ полѣ отсчетъ по сѣверному концу стрѣлки v_1, то онъ очевидно будетъ вызванъ силой

$$(V - \frac{wx}{m}) + G$$

или

$$K\, tg\, v_{,,} + G = K\, tg\, v_1$$

отсюда

$$G = K\, (tg\, v_1 - tg\, v_{,,}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Если же индексная погрѣшность $- v_{,,}$, то получаемъ

$$-(V - \frac{wx}{m}) + G = K\, tg\, v_1$$

или

$$G = K\, (tg\, v_1 + tg\, v_{,,}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Такимъ образомъ, пользуясь уравненіями (35) и (36), легко произвести поправку погрѣшности, вызванную неправильнымъ уравновѣшиваніемъ стрѣлки въ нормальномъ земномъ полѣ.

Если уголъ $v_{,,}$ довольно малъ, то мы можемъ принять

$$G = K\, tg\, (v_1 \pm v_{,,}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Опредѣленіе значенія K.

Инструментъ будетъ тѣмъ чувствительнѣе, чѣмъ меньшія значенія G можно имъ опредѣлить, чѣмъ стало быть меньше K. У обыкновенно употребляемыхъ магнетометровъ K имѣетъ значеніе между 0,7 H и 1,2 H. Если хотимъ по чему либо имѣть весьма чувствительный инструментъ, то, разсматривая выраженіе для K

$$K = \frac{Wd}{m},$$

мы видимъ, что должны d, либо W, либо оба одновременно сдѣлать возможно малыми, а магнитный моментъ m большимъ. Но такъ какъ уменьшеніе вѣса стрѣлки W влечетъ за собой и уменьшеніе m, то лучше уменьшить d, т. е. переносить центръ тяжести стрѣлки ближе къ ея оси вращенія или же примѣнять стрѣлки большей длины.

Въ выраженіи $K = \frac{Wd^2}{m}$ W и m могутъ быть точно опредѣлены, но такъ какъ m со временемъ уменьшается, а d не можетъ быть точно опредѣлено, то въ виду этихъ соображеній величину K лучше опредѣлять экспериментальнымъ путемъ, примѣняя одинъ изъ слѣдующихъ методовъ:

1. Уравновѣсивъ стрѣлку для исключенія вертикальнаго напряженія V нормальнаго земного поля, устанавливаютъ магнетометръ въ сильно отклоняющей области и поворачиваютъ до тѣхъ поръ, пока ось стрѣлки, при горизонтальномъ положеніи компаса, не будетъ параллельна оси Z_1 Z_2 компасной коробки. Затѣмъ компасная коробка снова приводится въ вертикальное положеніе, причемъ стрѣлка будетъ колебаться въ плоскости магнитнаго меридіана. Если R горизонтальное напряженіе поля, а v'_0 отсчетъ по сѣверному концу стрѣлки, то уравненіе (32) дастъ:

$$G = (R + K)\, tg\, v'_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Компасная коробка снова приводится въ горизонтальное положеніе, магнетометръ поворачивается подъ прямымъ угломъ, компасная коробка устанавливается вертикально и берется новый отсчетъ v'_2. Такъ какъ теперь стрѣлка находится въ плоскости перпендикулярной къ магнитному меридіану, то

$$G = K\, tg\, v'_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Изъ уравненій (38) и (39) получаемъ

$$(R + K)\, tg\, v'_0 = K\, tg\, v'_2$$

и отсюда

$$K = \frac{tg\, v'_0}{tg\, v'_2 - tg\, v'_0}\, R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

R можетъ быть опредѣлено по методу синусовъ и подставлено въ выраженіе (40).

2. Въ нормальномъ полѣ мы можемъ воспользоваться однимъ изъ двухъ слѣдующихъ методовъ:

a) Подъ центромъ магнетометра подвѣшивается вертикально южнымъ полюсомъ кверху сильный магнитъ. Плоскость инклинатора устанавливается перпендикулярно къ плоскости магнитнаго меридіана, такъ что $\gamma = 90^0$, а потому изъ уравненія (32a)

$$G = K\, tg\, v_2$$

Второй отсчетъ берется при ручкѣ E, обращенной къ югу, т. е. при инклинаторѣ, повернутомъ на 180^0 отъ магнитнаго меридіана, при чемъ γ въ уравненіи (32а) $= 180^0$, и такъ какъ горизонтальное напряженіе магнита, дѣйствующаго на стрѣлку равно 0, а слѣдовательно $R = H$, то

$$G = (K - H)\ tg\ v_3.$$

Изъ предыдущихъ двухъ уравненій имѣемъ:

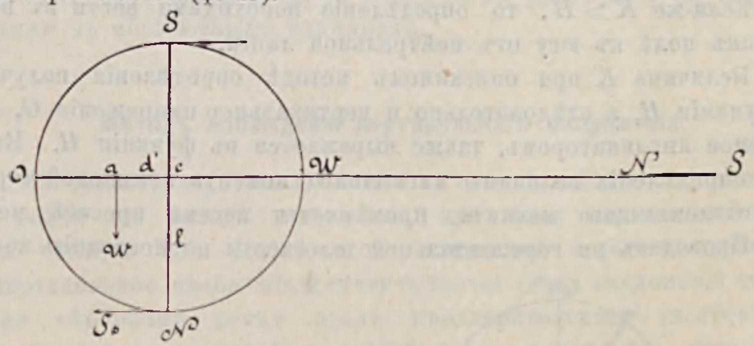
$$K\ (tg\,v_3 - tg\,v_2) = H\,tg\,v_3$$

и

$$K = \frac{tg\,v_3}{tg\,v_3 - tg\,v_2} H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

При изысканіяхъ пользуются среднимъ K_m, опредѣленнымъ изъ частныхъ значеній K, соотвѣтствующихъ различнымъ разстояніямъ южнаго полюса магнита подъ магнетометромъ отъ компасной стрѣлки.

b) Магнетометръ устанавливается въ нормальномъ полѣ, какъ при методѣ тангенсовъ, компасная коробка приводится въ вертикальное положеніе, а отклоняющій магнитъ, помѣщенный на ручкѣ E сѣвернымъ концомъ по направленію къ сѣверному полюсу стрѣлки, осторожно придвигается къ стрѣлкѣ, пока послѣдняя не установится почти вертикально (ф. 25).



Фиг. 25.

Такъ какъ въ плоскости вращенія стрѣлки H почти равно нулю, то обозначая черезъ F_D силу съ которой дѣйствуетъ отклоняющій магнитъ на полюсъ стрѣлки мощностью μ, черезъ M_F моментъ пары, создаваемой отклоняющимъ магнитомъ, а черезъ Mg моментъ, вызываемый силой тяжести, приложенной въ a, мы получаемъ

$$M_F = F_D\,.\,2l$$

$$Mg = Wd'$$

Для положенія равновѣсія

$$F_D \cdot 2l = W d'$$

но

$$F_D = \frac{2 M \mu}{d^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

и потому

$$4 \frac{M \mu l}{d^3} = \frac{2 M m}{d^3} = W d'$$

но

$$q = \frac{2 M}{d^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Отсюда $q = \dfrac{W d'}{m}$

Величина q опредѣляется затѣмъ, не мѣняя положенія отклоняющаго магнита, по методу синусовъ, и мы окончательно получимъ

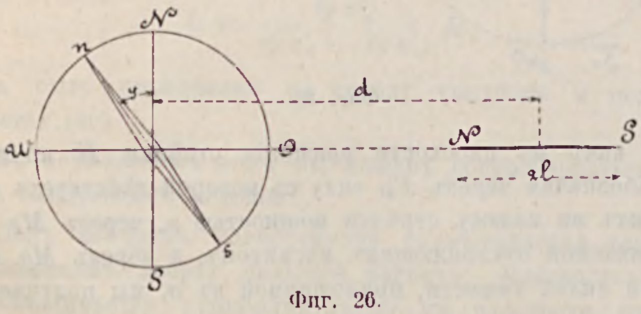
$$q = K = H \sin \alpha_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Изъ этого уравненія видно, что K можетъ быть опредѣлено въ нормальномъ земномъ полѣ лишь при условіи, что $K \leqslant H$.

Если-же $K > H$, то опредѣленіе необходимо вести въ возмущенномъ полѣ къ югу отъ нейтральной линіи.

Величина K при описанномъ методѣ опредѣленія получается въ функціи H, а слѣдовательно и вертикальное напряженіе G, опредѣляемое инклинаторомъ, также выражается въ функціи H. Въ цѣляхъ опредѣленія величины магнитнаго момента компасной стрѣлки или отклоняющаго магнита, примѣняется весьма простой методъ.

Проводятъ на горизонтальной плоскости по показанію компаса



Фиг. 26.

линію въ направленіи магнитнаго меридіана и линію къ ней перпендикулярную и ее пересѣкающую (ф. 26).

Въ пунктѣ ихъ пересѣченія помѣщаютъ маленькій компасъ, ось вращенія стрѣлки котораго должна совпадать съ точкой пересѣченія. Послѣ этого магнитъ (компасную стрѣлку или отклоняющій магнитъ), моментъ котораго долженъ быть опредѣленъ, помѣщаютъ такимъ образомъ, чтобы его ось совпадала съ направленіемъ, перпендикулярнымъ магнитному меридіану, а центръ находился въ опредѣленномъ разстояніи d отъ точки пересѣченія линій.

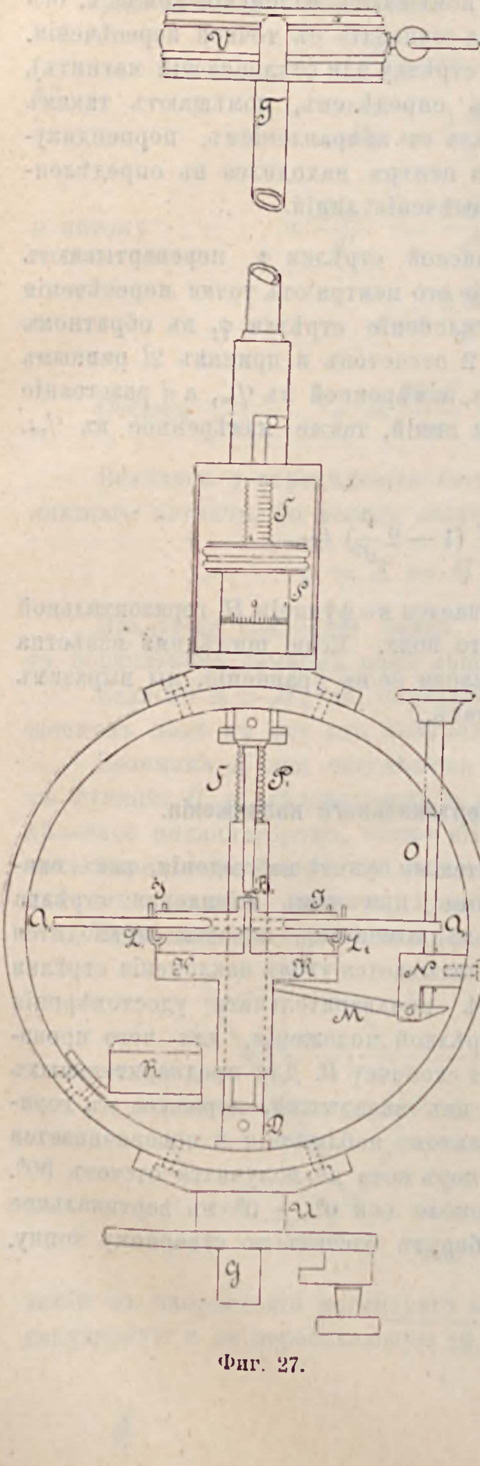
Отсчитавъ отклоненіе компасной стрѣлки φ, перевертываютъ магнитъ, сохраняя то-же разстояніе его центра отъ точки пересѣченія линій, при чемъ получается отклоненіе стрѣлки φ_1 въ обратномъ направленіи. Взявъ среднее изъ 2 отсчетовъ и принявъ $2l$ равнымъ $^5/_6$ дѣйствительной длины магнита, измѣренной въ $^c/_m$, а d разстояніе средины магнита отъ пересѣченія линій, также измѣренное въ $^c/_m$, получаемъ изъ уравненія (10)

$$m = \frac{1}{2}\, d^3 H \left(1 - 2\,\frac{l^2}{d^2}\right) tg\varphi_m$$

Въ этомъ уравненіи m получается въ функціи H, горизонтальной составляющій нормальнаго земного поля. Если послѣдняя извѣстна въ абсолютныхъ единицахъ, то вводя ее въ уравненіе, мы выразимъ m также въ абсолютныхъ единицахъ.

Методъ наблюденія вертикальнаго напряженія.

Магнетометръ устанавливается въ пунктѣ наблюденія, какъ описано ранѣе при методѣ тангенсовъ, при чемъ компасная стрѣлка дастъ отсчетъ 90°. Послѣ этого компасная коробка приводится въ вертикальное положеніе и отсчитывается уголъ наклоненія стрѣлки по ея сѣверному концу послѣ предварительнаго удостовѣренія въ правильности занимаемаго стрѣлкой положенія, для чего производятъ легкое сотрясеніе, опуская скобочку B. Для предварительныхъ наблюденій компасъ вынимается изъ вкладышей, держится въ горизонтальномъ положеніи надъ пунктомъ наблюденія и поворачивается около вертикальной оси до тѣхъ поръ пока не получится отсчетъ 90°. Послѣ этого его повертываютъ около оси 0° — 0° въ вертикальное положеніе и, какъ обыкновенно, берутъ отсчетъ по сѣверному концу.

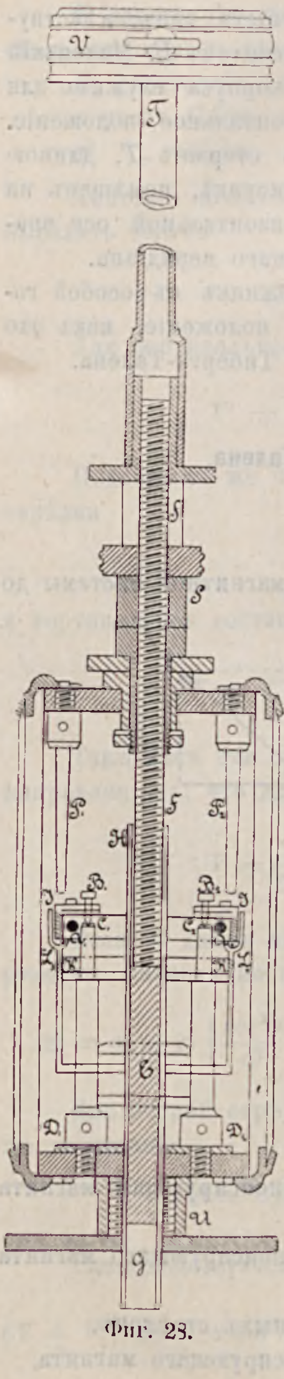


Фиг. 27.

ГЛАВА XI.

Магнетометръ Томсона - Талена. Описаніе.

Этотъ инструментъ состоитъ изъ 2 параллельныхъ магнитныхъ стрѣлокъ A_1, A_2 (ф. 27, 28) цилиндрической формы $2^3/_4$ дюйма длиной и около $^1/_{16}$ дюйма въ діаметрѣ. Эти магниты вставлены въ мѣдное кольцо J одинаковыми полюсами въ одномъ и томъ-же направленіи. Кольцо снабжено винтиками B_1 и B_2, съ концами изъ закаленной стали, которые упираются въ агатовыя подставки C_1 и C_2, поддерживаемыя колонками D_1 и D_2, и позволяютъ магнитнымъ стрѣлкамъ колебаться въ вертикальной плоскости около діаметра кольца, проходящаго черезъ магнитный экваторъ стрѣлокъ. Для прекращенія движенія магнитной системы и поднятія опорныхъ винтиковъ съ агатовыхъ поддержекъ, когда съ инструментомъ не работаютъ, послѣдній снабженъ арретиромъ, состоящимъ изъ второго мѣднаго кольца KK, расположеннаго ниже магнитной системы. Надъ этимъ кольцомъ помѣщены 4 вилки L_1, L_2, L_3 и L_4, которыя захватываютъ и приподнимаютъ верхнее кольцо съ магнитной системой при помощи рычага M, на который нажимаетъ винтъ 0. Когда кольцо KK поднимается рычагомъ M, то кольцо J крѣпко прижимается



Фиг. 28.

къ задержкамъ P_1 и P_2, удерживающимъ магнитную систему въ неподвижномъ положеніи. Центръ тяжести магнитной системы ниже точки ея подвѣса, какъ и при инклинаторѣ Тиберга, но въ магнетометрѣ Томсона - Талена кромѣ того чувствительность системы можетъ быть увеличена или уменьшена посредствомъ поднятія или опусканія винтовъ B_1 и B_2.

Наклоненіе магнитныхъ стрѣлокъ, вызываемое вертикальной составляющей магнитныхъ силъ дѣйствующихъ на стрѣлки, можетъ быть компенсировано цилиндрическимъ магнитомъ E, сѣверный полюсъ котораго направленъ кверху. Этотъ магнитъ задѣланъ въ мѣдный цилиндрическій корпусъ, какъ это видно на ф. 27 и 28, и спабженъ мѣднымъ винтомъ F, при помощи котораго можно измѣнять разстояніе верхняго полюса магнита E отъ плоскости магнитныхъ стрѣлокъ. Этимъ винтомъ дѣйствуютъ при помощи его головки S, помѣщенной надъ крышкой наружнаго корпуса. Положеніе сѣвернаго полюса компенсирующаго магнита относительно центра кольца, обнимающаго магнитныя стрѣлки, указывается дѣленіями скалы, выгравированной на наружной поверхности винта. Для удобства отсчетовъ по скалѣ, цилиндрическій мѣдный корпусъ магнита съ передней стороны на короткомъ разстояніи срѣзанъ. На ф. 27 мы видимъ дѣленія 3 и 4. Разстояніе между нарѣзками винта равно 0,03 дюйма и головка винта раздѣлена на 100 частей. Это позволяетъ опредѣлить разстояніе отклоняющаго магнита отъ оси вращенія магнитныхъ стрѣлокъ съ точностью до 0,0003 долей дюйма. Вся описанная внутренняя часть окружена цилиндрическимъ мѣднымъ корпусомъ, закрытымъ спереди и сзади подвижной стеклянной пластинкой. На каждой изъ этихъ пластинокъ прочерчена горизонтальная линія, показывающая горизонтальное положеніе стрѣлокъ, когда вертикальная составляющая магнитныхъ силъ, дѣйствующихъ на стрѣлку, будетъ скомпенсирована магнитомъ E. Маленькій круглый уровень, помѣщенный внутри этого корпуса служитъ для приведенія оси магнитной системы въ горизонтальное положеніе. Маленькій компасъ v, насаженный на мѣдномъ стержнѣ T, длиною въ 5 дюймовъ, который, какъ это видно на рисункѣ, помѣщенъ на крышкѣ корпуса, служитъ для приведенія горизонтальной оси вращенія магнитной системы въ плоскость магнитнаго меридіана.

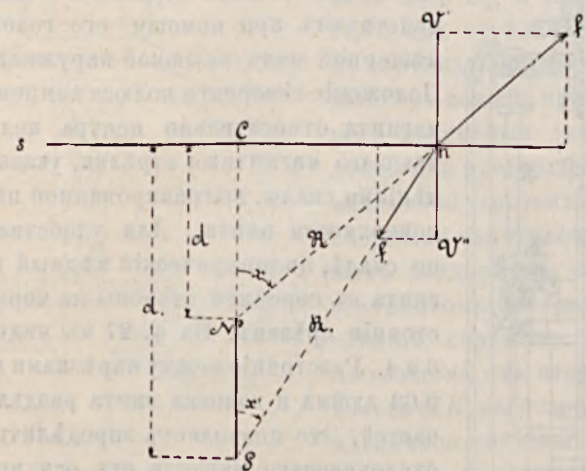
Магнетометръ устанавливается на треножникъ съ особой головкой для приведенія его въ горизонтальное положеніе, какъ это подробно изложено при описаніи магнетометра Тиберга-Талена.

Теорія магнетометра Томсона-Талена.

Пусть на ф. 29:

NS компенсирующій магнитъ,

Cn разстояніе отъ центра оси вращенія магнитной системы до полюса n одной изъ стрѣлокъ,



Фиг. 29.

$d = CN$ разстояніе сѣвернаго полюса компенсирующаго магнита отъ точки C,

$d_1 = CS$ разстояніе южнаго полюса компенсирующаго магнита отъ точки C,

μ мощность одного изъ полюсовъ магнитныхъ стрѣлокъ,

ı „ „ „ „ компенсирующаго магнита,

R разстояніе сѣвернаго полюса компенсирующаго магнита отъ сѣвернаго полюса одной изъ магнитныхъ стрѣлокъ,
R_1 разстояніе южнаго полюса отъ того-же пункта n,
x уголъ CNn,
x' „ CSn.

Дѣйствіе полюса N на сѣверный конецъ стрѣлки мы можемъ выразить черезъ

$$f = \frac{\sigma\mu}{R^2}$$

Для вертикальной слагающей этой силы V' получимъ

$$V' = f\cos x = \frac{\sigma\mu \cos x}{R^2} = \frac{\sigma\mu \cos^3 x}{d^2}$$

Подобнымъ же образомъ дѣйствіе полюса S на тотъ-же полюсъ стрѣлки

$$f' = \frac{\sigma\mu}{R_1^{\,2}},$$

а вертикальная составляющая этой силы V''

$$V'' = f' \cos x' = \frac{\sigma\mu \cos x'}{R_1^{\,2}} = \frac{\sigma\mu \cos^3 x'}{d_1^{\,2}}$$

Такъ какъ эти силы дѣйствуютъ въ прямо противоположныхъ направленіяхъ, что для равнодѣйствующей ихъ V, мы имѣемъ

$$V = (V' - V'') = \sigma\mu \left\{ \frac{\cos^3 x}{d^2} - \frac{\cos^3 x'}{d_1^{\,2}} \right\}$$

Если $2l$ длина магнитной стрѣлки, то для дѣйствія компенсирующаго магнита на одну изъ компасныхъ стрѣлокъ имѣемъ

$$V \cdot 2l = \sigma \cdot \mu \cdot 2l \left\{ \frac{\cos^3 x}{d^2} - \frac{\cos^3 x'}{d_1^{\,2}} \right\} = \sigma m \left\{ \frac{\cos^3 x}{d^2} - \frac{\cos^3 x'}{d_1^{\,2}} \right\} \quad . \quad . \ (42)$$

Для второй стрѣлки съ мощностью μ' мы получаемъ подобное-же выраженіе

$$V_1 \cdot 2l = \sigma m' \left\{ \frac{\cos^3 x}{d^2} - \frac{\cos^3 x'}{d_1^{\,2}} \right\} \quad . \quad . \quad . \ (42a).$$

Равнодѣйствующая силъ на обѣ стрѣлки будетъ равна ихъ суммѣ

$$(V + V_1)\, 2l = \sigma\,(m + m') \left\{ \frac{\cos^3 x}{d^2} - \frac{\cos^3 x'}{d_1^{\,2}} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \ (42b).$$

Вращеніе магнитной системы, вызываемое этими силами, будетъ происходить или по часовой стрѣлкѣ или противъ нея, смотря потому, положительно или отрицательно будетъ $(V+V_1)$. Если $(V+G)$ вертикальное напряженіе возмущеннаго земного поля, то для горизонтальнаго положенія магнитныхъ стрѣлокъ необходима, чтобы

$$-(V+G)=(V+V_1)$$

Величина $(V+V_1)$ зависитъ отъ разстоянія полюсовъ N и S компенсирующаго магнита отъ пункта 0, какъ это выясняется изъ разсмотренія кривой, построенной для описаннаго инструмента.

На ф. 30 A_1A_1 одна изъ стрѣлокъ магнитной системы съ сѣвернымъ полюсомъ n и южнымъ — S; P_1 и P_2 соотвѣтственно сѣверный и южный полюсы отклоняющаго магнита. Разстояніе $P_1P_2={}^5/_6$ дѣйствительной длины отклоняющаго магнита. F мѣдный винтъ придѣланный къ отклоняющему магниту, при помощи котораго можетъ быть измѣнено разстояніе P_1 отъ O. Скала дѣленій видна на передней сторонѣ винта. Абсциссы кривой a, b, c, d, e, f, g будутъ равны разстояніямъ d_n точки P_1 отъ O, а соотвѣтствующія ординаты представятъ собою вычисленныя значенія

$$\left(\frac{cos^3 x}{d^2}-\frac{cos^3 x'}{d_1{}^2}\right)$$

Отрицательныя ординаты соотвѣтствуютъ вращенію магнитной системы подъ дѣйствіемъ компенсирующаго магнита противъ часовой стрѣлки, а положительныя — вращенію по направленію послѣдней.

Фиг. 30.

Когда сѣверный полюсъ P_1 расположенъ точно на высотѣ ординаты c, то дѣйствіе отклоняющаго малнита на сѣверный конецъ стрѣлки A_1A_1 равно нулю. Когда P_1 занимаетъ положеніе P_2, то дѣйствіе компенсирующаго магнита, вызывающее вращеніе магнитной системы по часовой стрѣлкѣ, будетъ maximum, соотвѣтствующій ординатѣ g. Изъ ф. 30 очевидно, что большая сила, требующаяся для притяженія сѣвернаго полюса въ возмущенномъ полѣ, будетъ соотвѣтствовать и большему значенію отсчета по скалѣ λ_n, тогда какъ большей силѣ, требующейся для компенсаціи притяженія южнаго полюса, будетъ соотвѣтствовать меньшее значеніе отсчета по скалѣ.

Если λ_0 будетъ отвѣчать отсчету по скалѣ, когда стрѣлки магнетометра занимаютъ горизонтальное положеніе въ нормальномъ полѣ, и λ_1, λ_2, λ_3 и т. д. отсчеты для различныхъ мѣстъ въ возмущенномъ полѣ, то отсчеты, отвѣчающіе значеніямъ вертикальнаго напряженія рудной залежи для этихъ мѣстъ, соотвѣтственно будутъ $\lambda_1 - \lambda_0$, $\lambda_2 - \lambda_0$, $\lambda_3 - \lambda_0$ и т. д. Эти отсчеты будутъ, слѣдовательно, положительны или отрицательны, смотря потому, будетъ-ли $\lambda_0 <$ или $> \lambda_n$. Въ первомъ случаѣ будетъ компенсироваться притяженіе сѣвернаго полюса, а во второмъ — притяженіе южнаго, а численное значеніе $\lambda_n - \lambda_0$ показываетъ компенсируемое напряженіе вертикальной слагающей магнитныхъ рудъ, отсчитываемое по произвольной скалѣ.

Отсчеты λ_1, λ_2, λ_3 и т. д. помимо измѣряемаго напряженія зависятъ еще отъ момента магнитныхъ стрѣлокъ и компенсирующаго магнита. Такъ какъ эти величины для различныхъ инструментовъ различны, то очевидно, что отсчеты на двухъ различныхъ инструментахъ не будутъ тождественными. По этой причинѣ въ цѣляхъ вычисленія глубины магнитныхъ рудъ и т. д. необходимо выразить отсчеты λ_n для опредѣленія G въ функціи H. Это можетъ быть достигнуто слѣдующимъ методомъ калибровки.

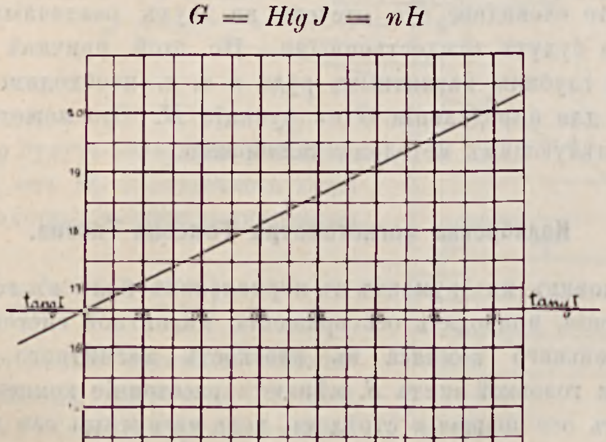
Калибровка магнетометра Томсона-Талена.

Установивъ инструментъ въ нормальномъ полѣ въ горизонтальное положеніе, приводятъ ось вращенія магнитной системы при помощи маленькаго компаса въ плоскость магнитнаго меридіана, и, дѣйствуя головкой винта S, мѣняютъ расстояніе компенсирующаго магнита отъ оси вращенія стрѣлокъ, пока магнитныя оси послѣднихъ не будутъ въ одной плоскости съ горизонтальной линіей, прочерченной на стеклянной крышкѣ. Отсчетъ берется по скалѣ и дѣленіямъ головки винта. Затѣмъ подъ центромъ магнетометра на разстояніи d_1 помѣщается въ вертикальномъ положеніи сильный магнитъ южнымъ полюсомъ кверху.

Стрѣлки возвращаются въ свое первоначальное горизонтальное положеніе при помощи компенсирующаго магнита и берется отсчетъ λ_1. Это повторяется для различныхъ разстояній магнита отъ оси вращенія стрѣлокъ и отсчеты λ_2, λ_3, λ_4 и т. д. для различныхъ, точно измѣренныхъ разстояній d_1, d_2, d_3 и т. д., опредѣляются и записываются. Послѣ этого магнитъ удаляется, магнетометръ Томсона-Талена замѣняется инклинаторомъ Тиберга, съ осью вращенія стрѣлки строго перпендикулярной къ магнитному меридіану. Надъ центромъ инклинатора южнымъ полюсомъ книзу вѣшается новый магнитъ на такомъ разстояніи отъ стрѣлки, чтобы точно компенсировать вертикальную слагающую земного поля V. Стрѣлка инклинатора займетъ горизонтальное положеніе, ея магнитная ось будетъ въ плоскости магнитнаго меридіана. Послѣ этого первый магнитъ помѣщается подъ инклинаторомъ послѣдовательно на разстояніяхъ d_1, d_2, d_3 и т. д. отъ точки подвѣса стрѣлки и соотвѣтствующіе разстояніямъ d_1, d_2, d_3 и т. д. углы точно отсчитываются и записываются. Такъ какъ вертикальная составляющая земного магнетизма вполнѣ компенсирована, то углы отклоненія J_1, J_2, J_3 и т. д., соотвѣтствующіе разстояніямъ d_1, d_2, d_3 и т. д., вызываются лишь силами: горизонтальной составляющей земного магнетизма H и вертикальной составляющей магнита, находящагося подъ инклинаторомъ.

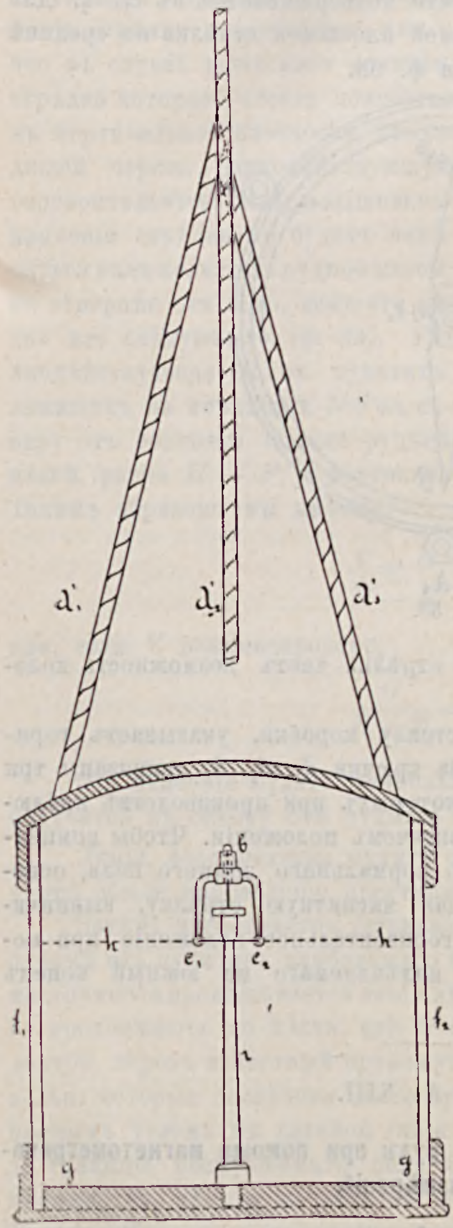
Слѣдовательно мы имѣемъ:

$$G = H tg J = nH$$



Фиг. 31

Можно построить кривую, откладывая на абсциссахъ значенія tgJ_n и на ординатахъ отсчеты λ_0, λ_2 и т. д.



Фиг. 32.

По этой кривой (ф. 31) для любого отчета λ_n мы можемъ опредѣлить соотвѣтствующій tgJ_n. Въ такомъ случаѣ мы имѣемъ

$$G_n = tg\ J_n = n$$

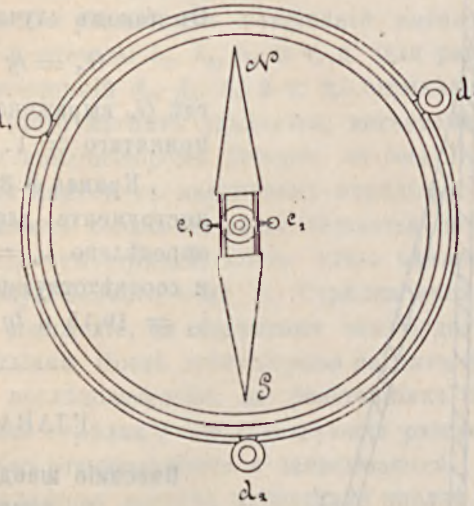
гдѣ G_n выражено въ функціи H, принятаго $= 1$.

Кривая ф. 30 вычерчена для инструмента, для котораго было опредѣлено $\lambda_0 = 16{,}70$, $\lambda_1 = 18$ и соотвѣтствующій $tg\ J_1 = 0{,}52$, $\lambda_2 = 19{,}15$ и $tg\ J_2 = 1$ и т. д.

ГЛАВА XII.

Описаніе шведскаго горнаго компаса.

Шведскій горный компасъ въ новѣйшей конструкціи шведскихъ механиковъ, являясь крайне цѣннымъ инструментомъ для предварительнаго изслѣдованія магнитнаго руднаго поля, по существу является тѣмъ-же, какъ изобрѣтенный въ XVIII столѣтіи Даніелемъ Тила. Онъ состоитъ изъ стеклянной цилиндрической коробки $f_1 f_2$ (ф. 32). Дно послѣдней закрывается мѣдной вывинчивающейся пластинкой gg, на которой съ внутренней посеребренной стороны наносятся градусныя дѣленія. Въ центрѣ этой пластинки вставлена легкая мѣдная колонка i, верхній конецъ которой оканчивается стальнымъ остріемъ. Послѣднее служитъ вертикальной осью подвѣсной части $bc_1 c_2$, заключающей въ b каменную шляпку. Горизонтальная ось магнитной стрѣлки при помощи подвѣсной части подверживается въ c_1, c_2. Для возможнаго движенія въ вертикальной плоскости стрѣлка по срединѣ имѣетъ вырѣзъ, какъ это видно на ф. 33.



Фиг. 33.

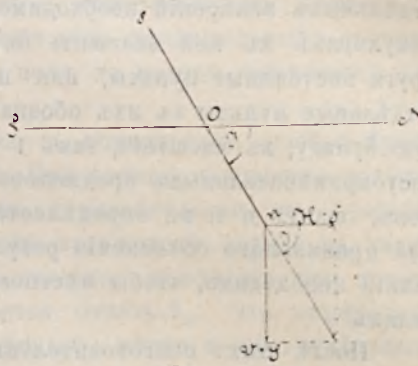
Такой способъ подвѣшиванія стрѣлки даетъ возможность колебаться ей въ любой плоскости.

Линія hh, прочерченная по стеклу коробки, указываетъ горизонтальное положеніе стрѣлки. За крючки d_1, d_2, d_3 привязаны три шпурка d_1', d_2', d_3', при помощи которыхъ при производствѣ наблюденій инструментъ держится въ висячемъ положеніи. Чтобы компенсировать вертикальную слагающую нормальнаго земного поля, основная пластинка gg, поддерживающая магнитную стрѣлку, вывинчивается, и стрѣлка приводится въ горизонтальное положеніе при помощи маленькаго кусочка воска, налѣпляемаго на южный конецъ стрѣлки.

ГЛАВА XIII.

Изслѣдованіе залежей магнитныхъ рудъ при помощи магнетометрическихъ измѣреній.

Если при обходѣ изслѣдуемой мѣстности съ инклинаторомъ Тиберга или лучше со шведскимъ горнымъ компасомъ, обнаруживается сильно мѣняющееся наклоненіе компасной стрѣлки, по которому можно заключить о присутствіи магнитныхъ рудныхъ мѣсторожденій, то вначалѣ опредѣляютъ послѣдовательно мѣста наибольшаго наклоненія стрѣлки и отмѣчаютъ ихъ. Необходимо при этомъ замѣтить, что въ случаѣ шведскаго компаса, стрѣлка котораго всегда колебется въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ равнодѣйствующую горизонтальныхъ силъ, maximum наклоненія стрѣлки не будетъ находиться надъ полюсомъ рудной массы, но сѣвернѣе отъ него, какъ это видно изъ слѣдующаго (ф. 34). Равнодѣйствующая R въ пунктахъ, лежащихъ на меридіанѣ NS къ сѣверу отъ верхняго полюса рудной массѣ, равна $H - F$, а вертикальная равнодѣйствующая $= V + G$. Такимъ образомъ мы имѣемъ:



Фиг. 34.

$$\frac{V + G}{H - F} = tg\,J$$

или, если V компенсировано,

$$\frac{G}{H - F} = tg\,J_1 .$$

Это значеніе будетъ наибольшимъ для $H - F = 0$, а послѣднее получится къ сѣверу отъ руднаго полюса.

Линія, соединяющая пункты наибольшаго наклоненія стрѣлки, даетъ общее направленіе простиранія руднаго поля.

Затѣмъ магнетометръ устанавливается въ изслѣдуемомъ полѣ подъ однимъ изъ пунктовъ наибольшаго наклоненія и при помощи діоптровъ инструмента провѣшивается линія въ направленіи простиранія, при чемъ ее продолжаютъ до мѣста, гдѣ $G = 0$. Измѣряя эту главную линію лентой, черезъ извѣстный промежутокъ (метромъ 10) на ней вбиваютъ колья, которые послѣдовательно нумеруютъ. Отъ этихъ кольевъ подъ прямымъ угломъ къ главной линіи проводятъ вспомогательныя линіи до границы возмущеннаго поля и на послѣднихъ черезъ такіе-же промежутки, какъ и на главной линіи, устанавливаютъ тоже колья. Такимъ образомъ все изслѣдуемое поле разбивается на квадраты. Въ цѣляхъ отличія отдѣльныхъ квадратовъ въ полѣ, ряды кольевъ, параллельные главной линіи, отмѣчаются буквами, а перпендикулярные ряды цифрами, т. е. каждый колъ отмѣчается буквой и цифрой соотвѣтствующихъ рядовъ, на пересѣченіи которыхъ онъ стоитъ.

Для необходимаго продолженія, возобновленія или повторенія отдѣльныхъ измѣреній необходимо, какъ на оси такъ и на перпендикулярахъ къ ней заложить въ извѣстномъ разстояніи другъ отъ друга постоянные пункты, или при помощи кольевъ, или камней. Отдѣльные пункты съ ихъ обозначеніями наносятся на миллиметровую бумагу, въ масштабѣ такъ 1 : 1000, причемъ положеніе всѣхъ достопримѣчательныхъ предметовъ, какъ-то построекъ, дорогъ, шурфовъ, шахтъ и т. п., опредѣляется и такъ-же наносится на эскизъ. Для правильнаго объясненія результатовъ магнетометрическихъ изысканій необходимо, чтобы мѣстность была представлена въ горизонталяхъ.

Послѣ этихъ подготовительныхъ дѣйствій въ полѣ и приблизительнаго наброска, магнетометръ испытывается въ нормальномъ полѣ, и устанавливаются какъ его постоянныя, такъ и необходимыя поправки.

Инклинаторная стрѣлка приводится къ 0, посредствомъ уравновѣшиванія маленькимъ противовѣсомъ, или же индексная погрѣшность отсчитывается и записывается, чтобы можно было ее принять въ разсчетъ при окончательномъ вычисленіи вертикальнаго напряженія.

Послѣ всего этого можетъ быть начато производство самой магнетометрической съемки. Магнетометръ устанавливаетъ послѣдовательно у каждаго кола и опредѣляются соотвѣтственныя значенія угла α (или R) и v для этихъ пунктовъ и тотчасъ-же заносятся на эскизъ при данномъ пунктѣ.

Притяженіе южнаго полюса обозначается знакомъ, помѣщаемымъ передъ записываемымъ угломъ. Въ случаѣ быстраго измѣненія измѣряемаго магнитнаго напряженія становится необходимымъ производить добавочныя наблюденія на промежуточныхъ пунктахъ, или на сторонахъ квадратовъ, или внутри послѣднихъ. Добавочныя значенія угла α (или R) и V, опредѣленныя при этомъ, заносятся у соотвѣтствующаго мѣста на эскизѣ. Во многихъ случаяхъ полезно, а для полнаго изслѣдованія поля даже необходимо, отмѣчать углы, которые равнодѣйствующая R дѣлаетъ съ линіями, параллельными главной оси или имъ перпендикулярными. Для этой цѣли магнетометръ устанавливается надъ коломъ, ручка его E наводится при помощи діоптровъ на линію кольевъ, отсчитывается уголъ δ, заключающійся между линіей кольевъ и магнитной осью стрѣлки, и заносится въ соотвѣтственномъ мѣстѣ на эскизъ. Такое наблюденіе не требуетъ много времени, его можно произвести при каждомъ пунктѣ. Среднее значеніе угла δ_0, наблюдаемаго на границахъ поля, гдѣ $G=0$ и $R=H$, указываетъ среднее направленіе магнитнаго меридіана изслѣдуемаго поля.

Если наблюденія производятся съ магнетометромъ Томсона-Талена, который допускаетъ опредѣленіе лишь относительныхъ значеній вертикальнаго напряженія руднаго поля, то методъ измѣняется слѣдующимъ образомъ.

Инструментъ устанавливается въ нормальномъ полѣ и приводится въ горизонтальное пложеніе. При помощи маленькаго компаса, помѣщеннаго на крышкѣ коробки, горизонтальная ось вращенія стрѣлки устанавливаться параллельно магнитному меридіану, магнитная стрѣлка приводится въ горизонтальное положеніе при помощи компенсирующаго магнита и берется отчетъ λ_0. Это опредѣленіе должно быть повторено для различныхъ мѣстъ и изъ отдѣльныхъ наблюденій выводится среднее λ_{m0}.

Разница между отдѣльными наблюденіями и ихъ среднимъ не должна быть особенно велика. Послѣ этого инструментъ устанавливается надъ различными кольями въ изслѣдуемомъ полѣ и производятся отсчеты λ_1, λ_2, λ_3 и т. д., указывающіе положеніе компенсирующаго магнита, при которомъ стрѣлки принимаютъ горизонтальное положеніе.

Окончивъ измѣренія, на основаніи результатовъ послѣднихъ, составляютъ карты съ нанесеніемъ на нихъ горизонтальнаго и вертикальнаго напряженія и различныхъ направленій равнодѣйствующей R. Гораздо удобнѣе для каждой изъ этихъ величинъ составить отдѣльныя карты. Соединеніемъ точекъ равнаго горизонтальнаго напряженія на одной картѣ и точекъ равнаго значенія G для другой карты, мы получаемъ для каждой систему изодинамическихъ линій. Соединеніемъ точекъ равнаго склоненія, мы получаемъ для этихъ картъ систему изогонъ.

Карты горизонтальнаго напряженія.

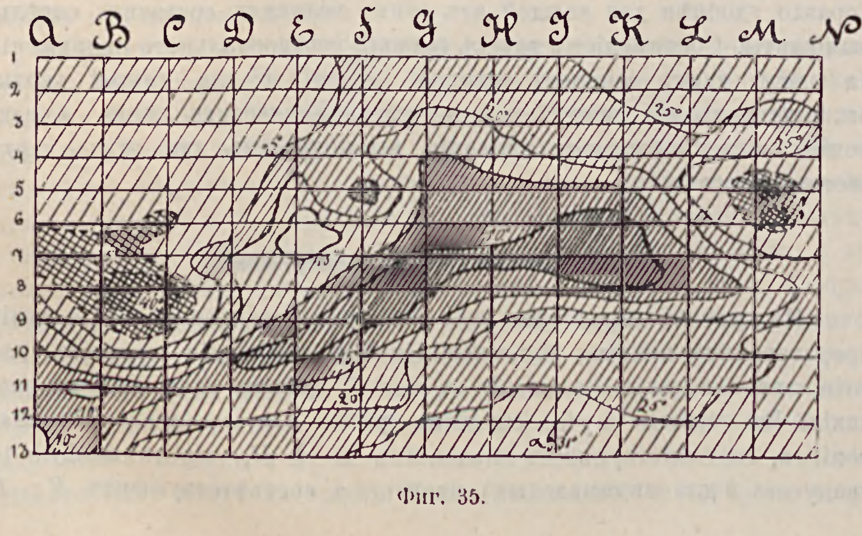
На картахъ горизонтальнаго напряженія изодинамическія линіи представляютъ кривыя, получающіяся отъ соединенія пунктовъ, для которыхъ или углы отклоненія α, или R имѣютъ одни и тѣ-же значенія. Въ первомъ случаѣ строятся кривыя для максимальныхъ значеній α, соотвѣтствующихъ значеніямъ $R < H$, черезъ каждые 10 градусовъ и для минимальныхъ значеній α, соотвѣтствующихъ $R > H$

черезъ каждые 5 градусовъ. Во второмъ случаѣ соединяются пункты, для которыхъ, напримѣръ, $R = 1.00,\ 1.20,\ 1.30,\ 1.40 \ldots\ldots 2{,}50$.

При этомъ слѣдуетъ замѣтить, что не особенно важно большое число линій, полученныхъ на картахъ. Главное, чего слѣдуетъ придерживаться при построеніи магнитныхъ картъ, это выбирать такія значенія для линій, которыя будутъ наиболѣе полно представлять распредѣленіе магнитныхъ силъ въ полѣ, безъ обремененія карты слишкомъ большимъ числомъ линій, часто затемняющихъ главнѣйшія формы залежи. Въ обычной шведской практикѣ рекомендуются слѣдующія обозначенія на картахъ горизонтальнаго напряженія. Нейтральная линія ($R = H$ или $\alpha = \alpha_0$) вычерчивается коричневымъ цвѣтомъ (жженая сіенна). Кривыя максимальныхъ значеній α, соотвѣтствующихъ минимальнымъ значеніемъ R, изображаются зеленой линіей и кривыя минимальныхъ значеній α, соотвѣтствующихъ максимальнымъ значеніемъ R, красной линіей.

Площади, ограниченныя линіями, окрашиваются въ соотвѣтствующій имъ цвѣтъ и густота окраски возрастаетъ по мѣрѣ увеличенія разности значеній окружающихъ линій отъ значенія $R = H$. Различные предметы, какъ-то дома, шахты и т. д. вычерчиваются обыкновенной тушью.

Для будущихъ справокъ и для сравненія съ картами дригихъ залежей, необходимо указывать на планѣ, рядомъ съ именемъ наблюдателя, точное положеніе залежей, время производства съемки, равно какъ употребленный методъ, примѣнявшійся инструментъ и нормальный уголъ α_0, если только R не опредѣляется прямо по Дальбло-



Фиг. 35.

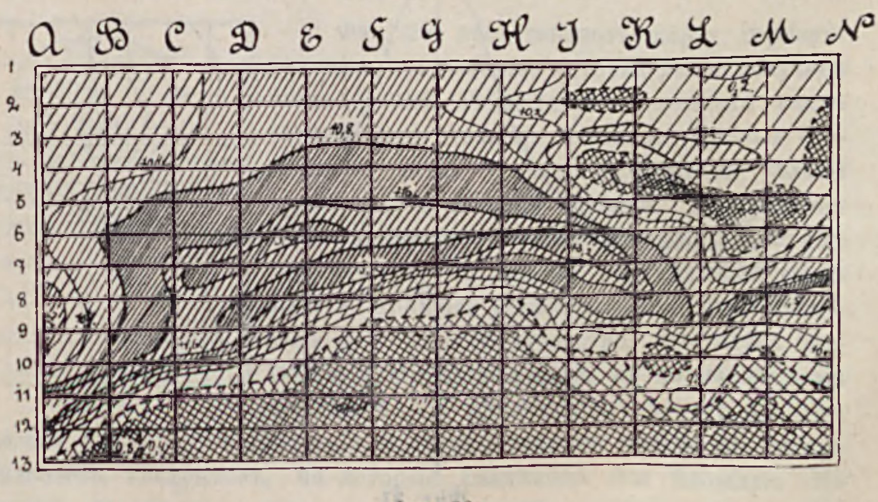
мовской ручкѣ... Фиг. 35 показываетъ такой планъ горизонтальнаго напряженія въ масштабѣ 1 : 1000. Нейтральная линія показана пунктиромъ, области максимумовъ ($\alpha > \alpha_0$) двойной штриховкой, а области минимумовъ ($\alpha < \alpha_0$) просто заштрихованы. Штриховка тѣмъ гуще, чѣмъ болѣе отличаются отъ величины α_0 значенія кривыхъ равныхъ горизонтальныхъ напряженій, которыя даны черезъ каждые 5 градусовъ. Карты, вычерченныя въ краскахъ, даютъ значительно лучшее представленіе.

Карты вертикальнаго напряженія.

Если наблюденія производятся съ инклинаторомъ Тиберга, то кривыя на картахъ вертикальнаго напряженія могутъ соединять или пункты съ равными значеніями угловъ, или съ равными значеніями вертикальнаго напряженія $G = K \, tg \, v$.

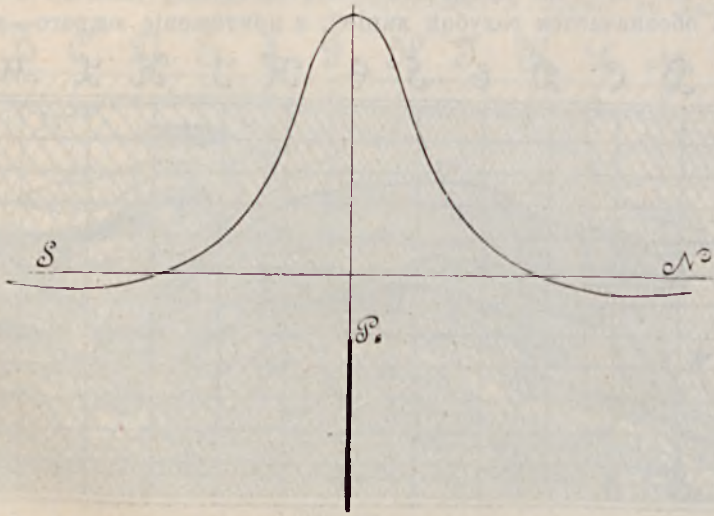
Для вычисленія G по наблюденнымъ угламъ можно пользоваться таблицей тангенсовъ. Кривыя могутъ быть построены для угловъ наклоненія или черезъ каждые 5, или 10 градусовъ, а для G въ функціи H для значеній $G = 0.0$, 0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1.6, 3.2.

Въ случаѣ наблюденій, произведенныхъ магнетометромъ Томсона-Талена, линіи проводятся черезъ пункты, для которыхъ λ_n, или $(\lambda_n - \lambda_0)$, или соотвѣтствующія значенія $tg\, I_n$, дающія G въ функціи H, имѣютъ одни и тѣ же значенія. На картахъ вертикальнаго напряженія приняты слѣдующія обозначенія: притяженіе сѣвернаго полюса обозначается голубой линіей, а притяженіе южнаго—желтой.



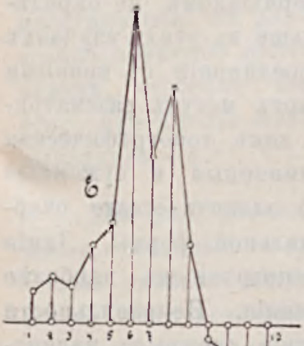
Фиг. 36

Площади между границами этихъ кривыхъ окрашиваются соотвѣтствующими тонами, какъ это описано для плановъ горизонтальнаго напряженія. Въ цѣляхъ сравненія различныхъ картъ, получаемыхъ при наблюденіяхъ съ инструментами, для которыхъ K различно, значеніе послѣдняго должно быть указано въ добавленіе къ тѣмъ даннымъ, о которыхъ уже было упомянуто при картахъ горизонтальнаго напряженія. Фиг. 36 показываетъ планъ вертикальнаго напряженія въ масштабѣ 1 : 1000 того-же руднаго поля, для котораго данъ планъ горизонтальнаго напряженія на фиг. 35. Линія пунктовъ, для которыхъ $G = 0$, проведена штриховымъ пунктиромъ. Остальныя кривыя соединяютъ пункты съ вертикальнымъ напряженіемъ $G = 0.2, 0.4, 0.8, 1.6_1, 3.2\ H$. Площади положительныхъ напряженій (притяженіе сѣвернаго полюса) заштрихованы просто, а площади отрицательныхъ G (притяженіе южнаго полюса) крестообразно. Штриховка тѣмъ гуще, чѣмъ болѣе значенія кривыхъ окружающихъ эти площади, отличаются отъ значенія H. Понятно, и здѣсь изображеніе въ краскахъ было-бы яснѣе. Значеніе G въ полѣ, возмущенномъ присутствіемъ только одной магнитной залежи, отличается тѣмъ, что съ удаленіемъ отъ maximum'а, расположеннаго надъ руднымъ полюсомъ, упомянутыя значенія сначала быстро, а затѣмъ медленнѣе уменьшаются до нуля, далѣе получаютъ нѣкоторое отрицательное значеніе, но на бо́льшихъ разстояніяхъ снова обращаются въ нуль (фиг. 37). Кривыя съ болѣе плоской вершиной, соот-



Фиг. 37.

вѣтствующія постепенному уменьшенію отъ maximum'а, указываютъ или на глубину подъ поверхностью, или на малый уголъ паденія залежей. Въ случаѣ весьма сложнаго поля, вызваннаго присутствіемъ нѣсколькихъ магнитныхъ рудныхъ массъ, дѣлается необходимымъ построеніе такъ называемыхъ кривыхъ профилей, которые показываютъ дѣйствіе отдѣльныхъ рудныхъ массъ. Эти кривыя строятся на основаніи плановъ вертикальнаго напряженія, при чемъ на оси абсциссъ откладываются разстоянія отдѣльныхъ пунктовъ, а за ординаты принимаются значенія G, измѣренныя для отдѣльныхъ пунктовъ. Подобнымъ образомъ полученъ поперечный профиль (фиг. 38), проведенный черезъ пунктъ E карты вертикальнаго напряженія (фиг. 36).

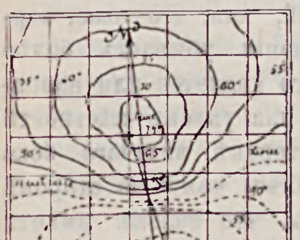


Фиг. 38.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ, для опредѣленія нѣсколькихъ массъ можетъ потребоваться большее число такихъ профилей, построенныхъ для различныхъ частей поля.

ГЛАВА XIV.

Указанія, даваемыя магнитными картами.



Фиг. 39.

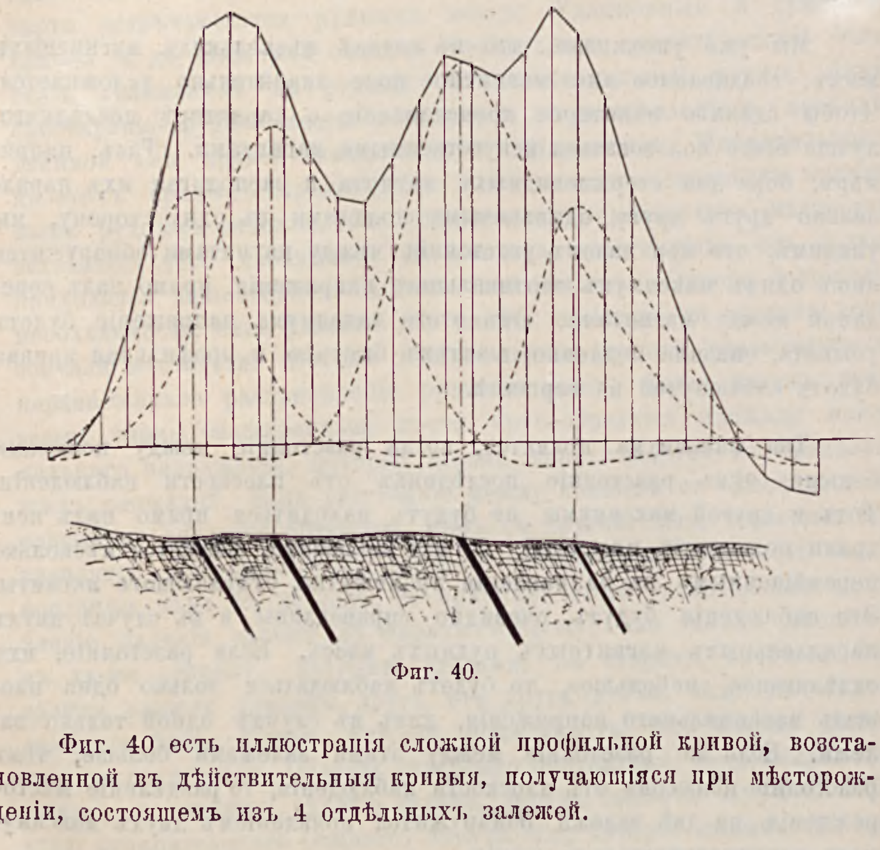
Фиг. 39 представляетъ карту горизонтальнаго напряженія, которая была получена посредствомъ наблюденій въ комнатѣ около вертикально стоящаго магнита. Кривыя соединяютъ здѣсь пункты съ равными углами отклоненія компасной стрѣлки. Нейтральная линія, для которой уголъ отклоненія $\alpha_0 = 45^0$, пересѣкается съ линіей, соединяющей maximum и minimum угла отклоненія, надъ полюсомъ p_s. То обстоятельство, что здѣсь maximum и minimum лежатъ не на магнитномъ меридіанѣ NS, проходящемъ черезъ p_s, объясняется тѣмъ, что наблюденія были произведены только въ углахъ отдѣльныхъ квадратовъ, на которые раздѣлена вся площадь. На практикѣ карты горизонтальнаго напряженія могутъ служить для изысканія магнитныхъ рудъ только въ простѣйшихъ случаяхъ, когда, напримѣръ, имѣется всего одна залежь болѣе или менѣе правильной формы. При этихъ условіяхъ, пересѣченіе нейтральной линіи съ линіей, соединяющей maximum и minimum, даетъ положеніе полюса. Въ болѣе сложныхъ, какъ напримѣръ на фиг. 35 случаяхъ пересѣченіе нейтральной линіи съ магнитнымъ меридіаномъ не опредѣляетъ положенія руднаго полюса. Гораздо больше въ этихъ случаяхъ даютъ карты вертикальнаго напряженія въ соединеніи съ кривыми профилей. Изодинамическія кривыя этихъ картъ могутъ разсматриваться какъ линіи контура, а самая карта, какъ топографическая карта встрѣчающихся рудныхъ массъ. Удлиненныя и суженныя кривыя и до извѣстной степени правильнаго эллиптическаго очертанія указываютъ на рудныя залежи правильной формы. Линія простиранія рудной массы совпадаетъ съ направленіемъ наиболѣе длинной оси кривой максимальнаго напряженія. Неправильности въ этихъ кривыхъ происходятъ или вслѣдствіе смежныхъ магнитныхъ рудныхъ залежей, или объясняются неровностями мѣстности, вслѣдствіе чего наблюденія на равныхъ разстояніяхъ отъ полюса приходится производить на различной высотѣ. Отсюда вытекаетъ необходимость, какъ указано уже ранѣе, помѣщать на картахъ горизонтали мѣстности. Весьма неправильныя кривыя указываютъ на неравномѣрное распредѣленіе рудныхъ массъ. Такія залежи часто даютъ очень расширенныя, почти кругообразныя площади максимальнаго напряженія, которое весьма мало мѣняется въ предѣлахъ этихъ площадей. Если разстояніе между кривыми съ одной стороны максимума является бо́льшимъ, чѣмъ съ другой, или, что тоже, вертикальное напряженіе въ первомъ направленіи убываетъ болѣе медленно, чѣмъ въ другомъ, то причиной этого является или направленіе паденія залежи въ первую сторону, или уклонъ мѣстности въ ту-же сторону. Другими словами, на сторонѣ висячаго бока залежи кривыя удалены другъ отъ друга далѣе, чѣмъ на сторонѣ лежачаго бока. Планъ фиг. 36 показываетъ, что залежь имѣетъ паденіе къ востоку. Область сѣвернаго притяженія, сопровождающаго каждую магнитную рудную залежь, всегда бываетъ окружена областью отрицательнаго (южнаго) притяженія, которое вызывается нижнимъ руднымъ полюсомъ. Если залежь находится глубоко подъ поверхностью и паденіе ея крутое, то южное притяженіе настолько слабо, что дѣлается едва замѣтнымъ. Напротивъ вліяніе нижняго (сѣвернаго) полюса возрастаетъ по мѣрѣ уменьшенія паденія рудной массы и приближенія этого полюса къ поверхности. Протяженіе площади съ притяженіемъ южнаго полюса возрастаетъ съ глубиною рудной массы, и потому этотъ фактъ можетъ служить цѣннымъ указаніемъ на распространеніе рудной массы въ глубину. При пологопадающихъ рудахъ на сторонѣ висячаго бока замѣчается болѣе или менѣе сильное южное [притяженіе. Оно тѣмъ значительнѣе, чѣмъ паденіе залежи слабѣе. Въ тѣхъ случаяхъ, когда рудныя залежи простираются въ длину во много разъ болѣе, чѣмъ въ глубину, южное полюсное притяженіе распространяется на сѣверный конецъ залежи, особенно когда простираніе руды *NS*, и интенсивность этого притяженія особенно замѣтна, когда сѣверный конецъ залежи выклинивается.

Мы уже упоминали, что въ случаѣ нѣсколькихъ магнитныхъ массъ, создаваемое ими магнитное поле значительно усложняется. Чтобы сдѣлать нѣкоторое представленіе о характерѣ послѣдняго, лучше всего пользоваться искусственными магнитами. Такъ, напримѣръ, беря два стержневидныхъ магнита и располагая ихъ параллельно другъ другу одинаковыми полюсами въ одну сторону, мы увидимъ, что при маломъ разстояніи между магнитами обнаружится лишь одинъ максимумъ вертикальнаго напряженія, прямо надъ серединой между магнитами. Отъ этого максимума напряженіе будетъ убывать, сначала медленно, а затѣмъ быстрѣе, и профильная кривая будетъ сплюснутой на вершинѣ.

Два максимума появятся, когда разстояніе между полюсами больше, чѣмъ разстояніе послѣднихъ отъ плоскости наблюденія. Тотъ и другой максимумы не будутъ находиться прямо надъ центрами полюсныхъ площадей, но ихъ положеніе окажется нѣсколько перемѣщеннымъ въ направленіи промежутка, отдѣляющаго магниты. Эти наблюденія будутъ очевидно справедливы и въ случаѣ двухъ параллельныхъ магнитныхъ рудныхъ массъ. Если разстояніе, ихъ отдѣляющее, небольшое, то будетъ наблюдаться только одна площадь максимальнаго напряженія, какъ въ случаѣ одной только залежи. Если же разстояніе между этими залежами больше, чѣмъ разстояніе полюсовъ отъ плоскости наблюденія, то раздѣленіе мѣсторожденія на двѣ залежи обнаружится появленіемъ двухъ максимумовъ вертикальнаго напряженія.

Въ цѣляхъ правильныхъ выводовъ при сложныхъ случаяхъ, встрѣчающихся при параллельныхъ залежахъ, пользуются, какъ уже сказано, такъ называемыми кривыми профилей, которые удобнѣе всего проводить перпендикулярно къ простиранію залежей. Если провести ихъ такъ, какъ указано ранѣе (фиг. 38), то изъ разсмотрѣнія ихъ сразу видно, имѣется ли одна рудная залежь или нѣсколько.

Если кривыя профилей даютъ сложныя и необычныя формы, то приходится разложить сложную кривую на составляющія кривыя, построеніемъ въ предѣлахъ сложной кривой предполагаемыхъ кривыхъ, пока алгебраическая сумма ординатъ послѣднихъ не будетъ соотвѣтствовать дѣйствительнымъ ординатамъ сложной кривой.



Фиг. 40.

Фиг. 40 есть иллюстрація сложной профильной кривой, возстановленной въ дѣйствительныя кривыя, получающіяся при мѣсторожденіи, состоящемъ изъ 4 отдѣльныхъ залежей.

ГЛАВА XV.

Магнитныя изысканія въ рудникѣ.

Магнитныя изысканія въ рудникѣ, носящія въ Швеціи названіе „измѣреніе силовыхъ линій“ (Kraftpfeilmessung), имѣютъ своей цѣлью рѣшеніе вопроса, на какой глубинѣ относительно забоя находится рудная залежь или имѣются ли въ сторонѣ отъ проведенныхъ штрековъ еще другія рудныя залежи, или нѣтъ. Впрочемъ тѣ-же измѣренія могутъ производиться и въ отсутствіи магнитныхъ рудъ, если, напримѣръ, возникаетъ вопросъ объ отысканіи сломанной буровой штанги, которая не попалась въ штрекѣ. Въ послѣднемъ случаѣ лучше примѣнить магнетометръ Тиберга, чѣмъ другіе пріемы.

Такъ какъ эти измѣренія ведутся въ сравнительно узкихъ штрекахъ, а слѣдовательно пункты наблюденій лежатъ близко одинъ къ другому, то, какъ ясно видно изъ предыдущаго, измѣренія необходимо производить съ наивозможной точностью. Далѣе очевидно, что измѣренія не достигнутъ никакой цѣли, если вблизи инструмента будутъ находиться какія-либо магнитныя массы, такъ какъ послѣднія даже небольшихъ размѣровъ, но находящіяся на близкомъ разстояніи, напримѣръ кусокъ магнетита, могутъ произвести бóльшее вліяніе на компасную стрѣлку, чѣмъ даже большія залежи руды, но которыя удалены на большое разстояніе. Въ отсутствіи по близости инструмента такихъ отклоняющихъ массъ необходимо удостовѣриться при помощи горнаго компаса. Принципъ изысканія состоитъ въ томъ, что опредѣляютъ величины R и δ и на основаніи ихъ, а также извѣстной величины и направленія H, чертятъ параллелограммы силъ, въ которыхъ R является діагональю, а H и отыскиваемое F сторонами. Силы, представляемыя по величинѣ линіями, обозначаются на концѣ стрѣлками, отчего и произошло названіе „Kraftpfeilmessung“.

Производство измѣреній.

Въ штрекѣ, въ которомъ должны быть произведены наблюденія, провѣшивается при помощи шнура прямая линія, которую измѣряютъ и разбиваютъ на части въ 2, 3 и самое большее въ 5 m. Эти пункты на шнурѣ отмѣчаютъ или при помощи надѣваемыхъ скобочекъ, или — обвязыванія ниткой. Подъ каждымъ пунктомъ устанавливается на штативѣ инструментъ и приводится въ горизонтальное положеніе.

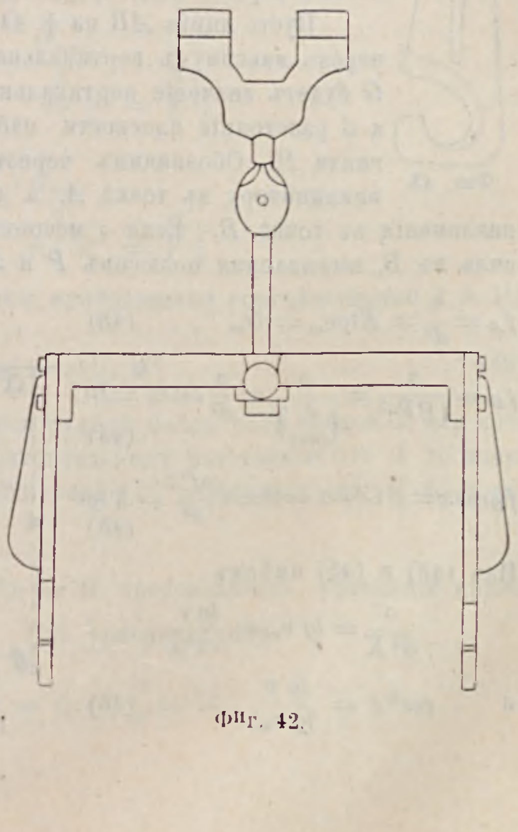
Поворачивая около вертикальной оси, при помощи діоптровъ совмѣщаютъ ручку магнетометра съ направленіемъ прямой и отсчитываютъ при горизонтальномъ положеніи компаса уголъ δ, т. е. уголъ, который образуетъ направленіе равнодѣйствующей R въ пунктѣ наблюденія со шнуромъ. Предварительно, какимъ-нибудь образомъ опредѣляютъ уголъ δ_0, составляемый направленіемъ горизонтальной составляющей земного магнетизма со шнуромъ, или другими словами магнитное простираніе шнура. Горизонтальное напряженіе R, равнодѣйствующее изъ горизонтальной составляющей H земного магнетизма и горизонтальной силы F руднаго мѣсторожденія, опредѣляется возможно точнѣе методомъ синусовъ. Затѣмъ при вертикальномъ положеніи компаса опредѣляютъ по извѣстному способу вертикальное напряженіе рудной залежи. Необходимо по возможности чаще опредѣлять, въ какую сторону отъ шнура убываетъ или возрастаетъ горизонтальное напряженіе.

Чаще опредѣляютъ подобнымъ образомъ уменьшеніе или увеличеніе вертикальнаго напряженія G къ кровлѣ или къ почвѣ выработки. По окончаніи измѣреній вычерчивается планъ въ масштабѣ 1 : 100, на который наносится самый штрекъ съ постоянными точками и положеніе прямой съ ея пунктами наблюденія. При каж-

Фиг. 41.

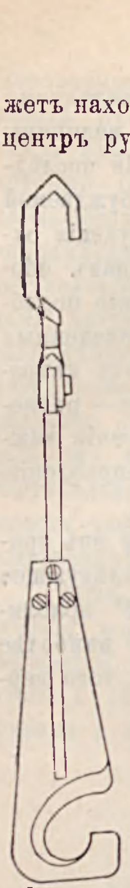
домъ пунктѣ шнура подъ соотвѣтствующими углами къ послѣднему δ_0 и δ откладывается въ масштабѣ $H = 50$ или $100^m/_m$ величины H и R, а изъ параллелограмма, построеннаго на основанiи послѣднихъ, находится направленiе и величина силы F, возбуждаемой искомой рудной залежью. Для ясности линiи, соотвѣтствующiя силамъ R, H и F, проводятся различной краской и на концахъ обозначаются стрѣлкой. Фиг. 41 даетъ графическое изображенiе подобнаго измѣренiя. Параллельныя прямыя равной длины, проведенныя черезъ каждый пунктъ и тонко вычерченныя, представляютъ напряженiе H, пунктирныя линiи, имѣющiя различное направленiе — равнодѣйствующiя R, а толстыя линiи, полученныя при построенiи каждаго отдѣльнаго параллелограмма, даютъ по величинѣ и направленiю силу F.

Какъ общее правило для опредѣленiя положенiя руды изъ произведенныхъ измѣренiй силовыхъ линiй, Тибергъ даетъ слѣдующее указанiе: Если всѣ или бóльшая часть силовыхъ линiй F приблизительно направлены къ одному и тому же пункту и наиболѣе длинныя изъ нихъ лежатъ ближе къ послѣднему, а кромѣ того вертикальное напряженiе G является отрицательнымъ, то надо думать, что здѣсь находятся руды. Смотря по тому, сходятся ли линiи своими передними или задними концами, поверхность наблюденiя находится или выше, или ниже магнитнаго центра руды, который часто даже приблизительно не совпадаетъ съ серединой залежи. Это объясняется или неправильностью послѣдней, или значительнымъ ея горизонтальнымъ простиранiемъ. Во второмъ случаѣ на сѣверномъ концѣ залежи появляется сильное южное притяженiе Если вертикальное напряженiе положительно, то руда мо-



Фиг. 42.

жетъ находиться выше или ниже горизонта наблюденія. Если случайно центръ руды находится на одномъ горизонтѣ со штрекомъ, измѣренія не достигаютъ цѣли. Въ этомъ случаѣ можно руководствоваться лишь вертикальнымъ напряженіемъ. Слѣдуетъ замѣтить, что изысканія въ рудникѣ представляются наиболѣе трудными.



Фиг. 43.

При описанныхъ работахъ удобнѣе подвѣшивать магнетометръ Тиберга-Талена на шнурѣ при помощи особаго приспособленія (ф. 42, 43).

ГЛАВА XVI.

Опредѣленіе разстоянія верхняго полюса магнитной рудной массы отъ поверхности.

I-ый методъ. Разсматривая магнитную залежь, какъ идеальный магнитъ, мы получаемъ при опредѣленіи разстоянія ея полюса отъ плоскости наблюденія результаты, весьма хорошо подтверждающіеся на практикѣ.

Пусть линія AB на ф. 44 будетъ прямой, проведенной черезъ максимумъ вертикальнаго напряженія G_{max}. Пусть G будетъ значеніе вертикальнаго напряженія въ точкѣ B, а d разстояніе плоскости наблюденія надъ полюсомъ магнита P. Обозначимъ черезъ v_m уголъ, полученный по инклинатору въ точкѣ A, а черезъ v подобный же уголъ наклоненія въ точкѣ B. Если σ мощность полюса P, f_B магнитная сила въ B, вызываемая полюсомъ P и x — уголъ APB, то

$$f_A = \frac{\sigma}{d^2} = K tg v_m = G_m \quad . \; . \; . \; (43)$$

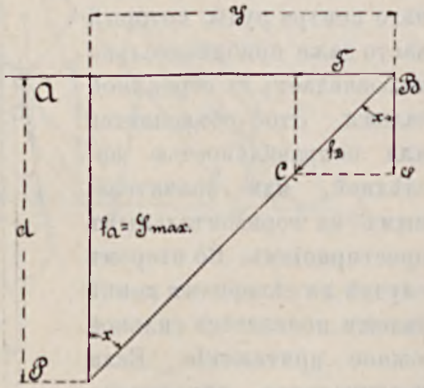
$$f_B = \frac{\sigma}{(BP)^2} = \frac{\sigma}{\left(\frac{d}{\cos x}\right)^2} = \frac{\sigma}{d^2}\cos^2 x = BC \quad (44)$$

$$f_B \cos x = BC \cos x = G = \sigma\frac{\cos^3 x}{d^2} = K tg v \quad (45)$$

Изъ (43) и (45) имѣемъ

$$\frac{\sigma}{d^2 K} = tg\, v_m = \frac{tg\, v}{\cos^3 x}$$

и $$\cos^3 x = \frac{tg\, v}{tg\, v_m} \quad . \; . \; (46)$$



Фиг. 44.

Далѣе изъ ф. 44 имѣемъ

$$d = AB\ ctg\, x \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (47)$$

Значенія x и $ctgx$ могутъ быть опредѣлены изъ таблицъ, составленныхъ для различныхъ значеній $\frac{tg\, v}{tg\, v_m}$ (таб. V).

Для примѣненія этого метода требуется точно опредѣлить два значенія G_m и G для какого-либо пункта B. Послѣднее не должно быть меньше $\frac{1}{3}G_m$. Разстояніе AB должно быть измѣрено точно.

Результаты получаются лучшими, если мы возьмемъ AB отъ точки G_{max} въ направленіи, перпендикулярномъ простиранію залежи и на сторонѣ болѣе быстраго измѣненія напряженія G.

Если y' и y'' разстоянія отъ G_{max} соотвѣтственно до точекъ, гдѣ $G_1 = \frac{G_{max}}{3}$ и $G_2 = \frac{G_{max}}{2}$, то на основаніи уравненій 43, 45, 46 имѣемъ:

$$cs^3 x = \frac{K\, tg\, v}{K tg v_m} = \frac{G}{G_{max}} \quad . \ . \ . \ (48)$$

и отсюда для

$$G_1 = \frac{G_{max}}{3}$$

$$cos\ x' = \sqrt[3]{\tfrac{1}{3}}$$

и для

$$G_2 = \frac{G_{max}}{2}$$

$$cos\ x'' = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}$$

Ctg — ы x' и x'' равны приближенно соотвѣтственно 1 и $1^1/_3$, а потому

$$d = y' = 1^1/_3\, y'' \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (49)$$

т. е. глубина верхняго полюса рудной массы подъ точкой A, для которой G maximum, равна горизонтальному разстоянію отъ A до точки, для которой $G = \frac{1}{3}\, G_{max}$ или равно $1\frac{1}{3}$ разстоянія отъ A до точки, для которой $G = \frac{1}{2}\, G_m$.

Выраженіе (45) $\frac{\sigma}{d^2}\, cos^3 x = G$ представляетъ уравненіе кривой вертикальнаго напряженія. Изъ уравненія (44)

$$CB = f_B = \frac{\sigma}{d^2} cos^2 x$$

мы имѣемъ для горизонтальнаго напряженія F выраженіе

$$F = f_B \sin x = \frac{\sigma}{d^2} \cos^2 x \cdot \sin x\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

которое дастъ уравненіе кривой горизонтальнаго напряженія. Этотъ методъ особенно примѣнимъ при рудахъ падающихъ отвѣсно, или подъ угломъ, близкимъ къ 90^0.

II-ой методъ. Линіи силъ, выходящія изъ того или другого полюса магнита и дѣлающія малый уголъ съ продолженіемъ его оси, являются почти прямыми линіями.

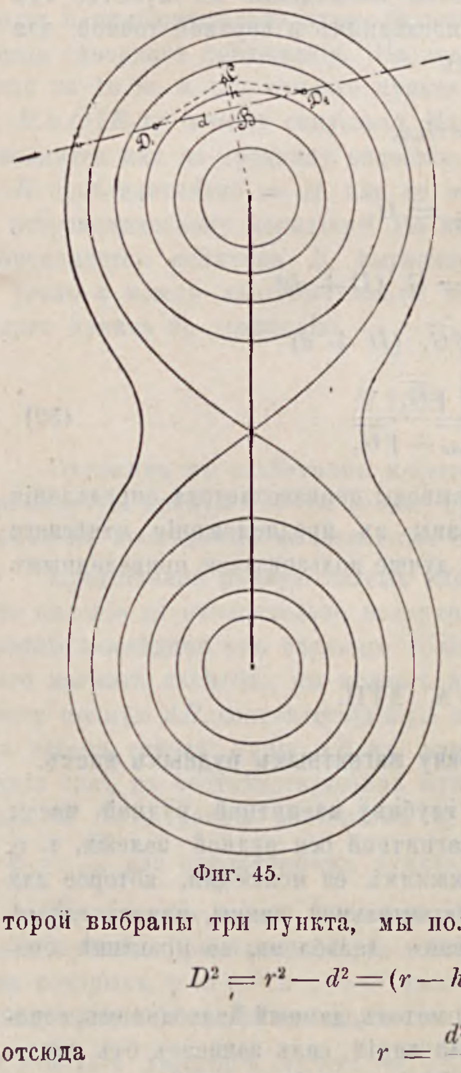
Этимъ обстоятельствомъ можно воспользоваться для слѣдующаго эмпирическаго опредѣленія разстоянія полюса подъ поверхностью. Проводятъ линію черезъ точку максимальнаго напряженія G перпендикулярно къ простиранію рудной залежи. На этой линіи, начиная отъ точки G_{max}, откладываютъ разстоянія отъ 2 до 5 *m.* и для этихъ точекъ тщательно опредѣляютъ значенія G, R и δ. Если направленіе магнитнаго меридіана для даннаго мѣста извѣстно, то построеніемъ при каждомъ вышеупомянутомъ пунктѣ по даннымъ R, H, δ_0 (уголъ линіи съ направленіемъ напряженія H) и δ соотвѣтствующаго параллелограма мы можемъ опредѣлить слагающую F въ функціи H. Далѣе изъ уравненія

$$tg\,\varphi = \frac{G}{F}$$

мы можемъ для каждаго пункта опредѣлить и построить уголъ φ, который даетъ направленіе силовыхъ линій, вызываемыхъ рудной залежью. Продолживъ стороны угловъ φ до ихъ взаимнаго пересѣченія и опредѣливъ среднее разстояніе точекъ пересѣченія отъ данной прямой, мы получимъ въ извѣстномъ масштабѣ глубину залеганія верхняго полюса.

III-ій методъ. Третій методъ основанъ на томъ фактѣ, что кривыя полнаго напряженія, проходящія вокругъ полюсовъ идеальнаго магнита, по близости этихъ полюсовъ, представляютъ почти окружности. Этотъ методъ состоитъ въ нахожденіи трехъ пунктовъ, имѣющихъ одинаковое напряженіе. Послѣдніе будутъ лежать на окружности одной изъ изодинамическихъ линій полнаго напряженія (ф. 45). Для примѣненія этого метода черезъ точку B, на которой $G = max$, проводятъ линію перпендикулярную къ простиранію рудной залежи, и производятъ наблюденія для точнаго опредѣленія значеній G, R и δ.

Далѣе устанавливаютъ надъ точкой B подмости или лѣстницу для опредѣленія напряженія G на различныхъ высотахъ надъ выбраннымъ пунктомъ B. Послѣдній выбирается такимъ образомъ, чтобы напряженіе F въ немъ и по вертикали отъ этого пункта равнялось нулю, т. е. другими словами, чтобы напряженіе G для этихъ пунктовъ равнялось полному напряженію T. Опредѣливъ, какъ указано ранѣе, напряженіе R и G для каждаго пункта данной прямой, вычисляютъ по формулѣ $T = \sqrt{F^2 + G^2}$ полное напряженіе для этихъ пунктовъ. Найдя среди послѣднихъ два такихъ пункта D_1, D_2, для которыхъ T равно напряженію G, полученному на извѣстной высотѣ надъ точкой B, измѣряютъ возможно точнѣе какъ разстоянія пунктовъ, для которыхъ $T = G$, отъ точки B равное d, а также разстояніе по вертикали равное h точки B отъ пункта C, гдѣ полное напряженіе равно G. Обозначая глубину залеганія верхняго полюса подъ точкой B черезъ D и черезъ r радіусъ кривой полнаго напряженія, на которой выбраны три пункта, мы получимъ (ф. 45).



Фиг. 45.

$$D^2 = r^2 - d^2 = (r - h)^2 = r^2 + h^2 - 2\,r\,h$$

отсюда
$$r = \frac{d^2 + h^2}{2h}$$

и
$$D = r - h = \frac{d^2 + h^2}{2h} - h = \frac{d^2 - h^2}{2h} \quad . \; . \; . \quad (51)$$

IV-ый методъ. Этотъ методъ требуетъ только опредѣленія G_{max} и величины G_1 на нѣкоторой высотѣ надъ точкой, для которой

$G = G_{max}$. Этотъ способъ опредѣленія не зависитъ отъ характера мѣстности. Пусть σ равно мощности полюса магнитной рудной массы, D разстоянію полюса отъ плоскости наблюденія въ пунктѣ, гдѣ $G = G_{max}$, и d разстояніе между послѣднимъ и верхней точкой, для которой $G = G_1$ Тогда мы имѣемъ

$$\frac{\sigma}{D^2} = G_{max}$$

$$\frac{\sigma}{(D+d)^2} = G_1$$

$$\sigma = G_{max}\ D^2 = G_1\ (D+d)^2$$

$$\sqrt{G_{max}}\ D = \sqrt{G_1}\ (D+d)$$

$$D = \frac{d\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_{max}} - \sqrt{G_1}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (52)$$

Послѣдняя формула, какъ и выводы перваго метода опредѣленія глубины залеганія полюса, сдѣланы въ предположеніи отвѣснаго идеальнаго магнита. На практикѣ лучше пользоваться приведеннымъ третьимъ методомъ.

ГЛАВА XVII.

Опредѣленіе протяженія въ глубину магнитныхъ рудныхъ массъ.

Опредѣленіе протяженіи въ глубину магнитной рудной массы сводится къ нахожденію длины магнитной оси рудной залежи, т. е. разстоянія между верхнимъ и нижнимъ ея полюсами, которое для массивнаго магнита $= \frac{5}{6}$ его дѣйствительной длины, или въ случаѣ магнитныхъ рудъ $\frac{9}{10}$, что, по словамъ Дальблома, на практикѣ оказывается болѣе вѣрнымъ.

I-ый методъ. Нижеописанный методъ, данный Дальбломомъ, основанъ на томъ фактѣ, что очертанія линій силъ зависятъ отъ длины магнита, какъ это видно изъ уравненія силовыхъ линій

$$\frac{a}{r} = const.$$

гдѣ a длина магнита. Примѣнимость даннаго метода провѣрена Дальбломомъ на весьма большомъ числѣ примѣровъ. Самый методъ состоитъ въ слѣдующемъ. Отъ пункта максимальнаго вертикальнаго напряженія залежи откладывается въ обѣ стороны прямая линія EF по возможности точно перпендикулярно къ простиранію мѣсторожденія и приблизительно вдвое большей длины, чѣмъ область простиранія сѣвернаго притяженія. На этой прямой отмѣриваются разстоянія по 10 m. и для каждаго пункта точно опредѣляются значенія δ, R и G (R по методу синусовъ). Направленіе магнитнаго меридіана находится или по среднему значенію δ для мѣстъ, гдѣ G почти $= O$ и R приблизительно $= H$, или по извѣстному мѣстному склоненію и астрономическому меридіану. По извѣстнымъ значеніямъ δ, R и H опредѣляется величина F, выраженная какъ и G въ функціи H, и уголъ φ между линіями силъ и плоскостью наблюденія для каждаго пункта по уравненію

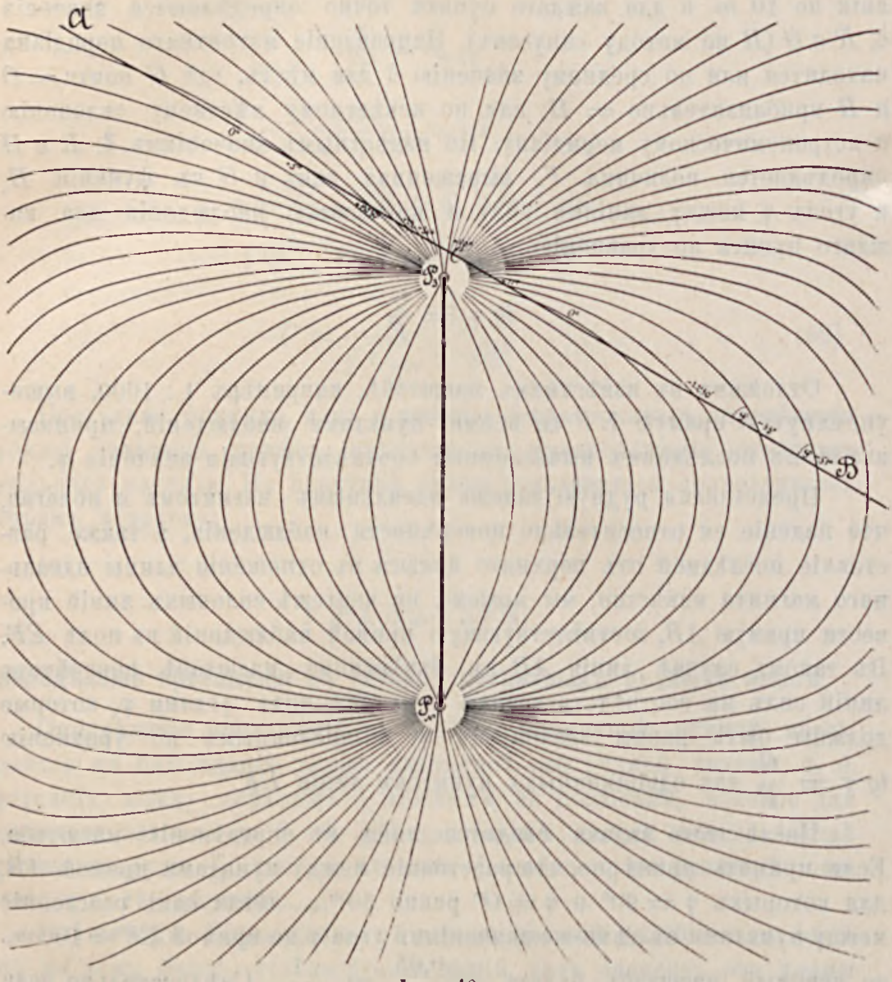
$$tg\,\varphi = \frac{G}{F}$$

Отложивъ въ извѣстномъ масштабѣ, напримѣръ 1 : 1000, вышеупомянутую прямую EF со всѣми пунктами наблюденій, приписываютъ къ послѣднимъ вычисленныя соотвѣтствующія значенія φ.

Представляя рудную залежь идеальнымъ магнитомъ и полагая, что паденіе ея относительно поверхности наблюденія, а также разстояніе послѣдней отъ верхняго полюса въ отношеніи длины идеальнаго магнита извѣстно, мы можемъ на чертежѣ силовыхъ линій провести прямую AB, соотвѣтствующую прямой наблюденій въ полѣ EF. Въ такомъ случаѣ линія AB въ извѣстномъ масштабѣ пересѣчетъ линіи силъ въ соотвѣтствующихъ пунктахъ подъ углами φ, которые должны быть равны значеніямъ φ, вычисленнымъ по уравненію $tg\,\varphi = \frac{G}{F}$ для одноименныхъ пунктовъ линіи EF.

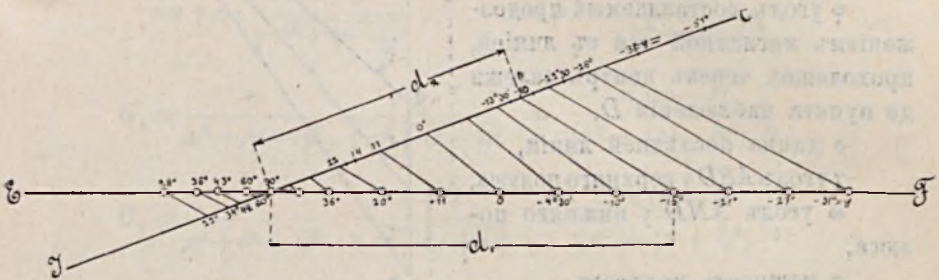
Послѣ этого задача сведется лишь къ опредѣленію масштаба. Если принять примѣрно, что разстояніе между пунктами прямой AB, для которыхъ $\varphi = 90^0$ и $\varphi = O^0$ равно $50^m/_m$, тогда какъ разстояніе между пунктами съ тѣми-же значеніями угла φ на прямой $EF = 100\,m.$, то искомый масштабъ будетъ $= \frac{0{,}05}{100} = \frac{1}{2000}$. Слѣдовательно, если бы длина идеальнаго магнита равнялась $100^m/_m$, то длина руднаго магнита была-бы $= 0{,}1 \;.\; 2000 = 200$ m.

Такъ какъ на практикѣ паденіе рудной залежи и разстояніе верхняго полюса отъ линіи наблюденія не можетъ быть опредѣлено вполнѣ точно, то пользуются приближенными пріемами, которые повторяютъ до тѣхъ поръ, пока не получатъ удовлетворительныхъ результатовъ. Съ этой цѣлью проводятъ на чертежѣ силовыхъ линій произвольную прямую AB, пересѣкающую линіи силъ подъ различными углами, которые тщательно измѣряютъ транспортиромъ, затѣмъ всѣ пункты пересѣченія прямой AB съ соотвѣтственной надписью



Фиг. 46.

угловъ откладываютъ на линіи JC, проведенной подъ нѣкоторымъ угломъ къ начерченной уже ранѣе линіи EF, такимъ образомъ, чтобы пунктъ съ значеніемъ $\varphi=90^0$ былъ ихъ общимъ пунктомъ. Линіи, соединяющія пункты съ одинаковыми значеніями φ на прямыхъ JC и EF, должны быть параллельны между собою, если только рудную залежь можно принять за идеальный магнитъ, а наблюденія и построенія были сдѣланы вѣрно. Въ такомъ случаѣ отношеніе $\frac{d_1}{d_2}$. 1000 даетъ искомый масштабъ, гдѣ d_1 разстояніе двухъ пунктовъ на линіи наблюденій EF, а d_2 разстояніе между соотвѣтствующими пунктами прямой JC. Вполнѣ понятно, что соединительныя линіи могутъ быть только приблизительно параллельны. Параллельность ихъ особенно нарушается вблизи пункта пересѣченія. При нѣкотовомъ опытѣ однако удается довольно скоро провести соотвѣтствующую прямую AB и получить достаточную параллельность соединительныхъ линій, а вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточную точность опредѣленія простиранія



Фиг. 47

рудной залежи въ глубину. Если первый опытъ не удастся, то его повторяютъ, проводя новую прямую AB. Въ примѣрѣ, изображенномъ на ф. 46 и 47, масштабъ для линіи наблюденій $EF = 1 : 1600$, отношеніе $\frac{d_1}{d_2} = 1{,}54$, длина идеальнаго магнита $P_S P_N$ на чертежѣ силовыхъ линій (ф. 46) $= 0{,}062$ *m*. Слѣдовательно разстояніе обоихъ рудныхъ полюсовъ

$$2l = 0{,}062 \, . \, 1600 \, . \, 1{,}54 = 154 \ m.$$

Простираніе въ глебину залежи будетъ большимъ, такъ какъ полюсы находятся не на концахъ ея.

Проф. Улихъ указываетъ, что въ нѣкоторыхъ случаяхъ удобнѣе пользоваться силовыми линіями, производимыми магнитомъ съ различными мощностями полюсовъ.

II-ой методъ. Нижеописанный методъ, предложенный пр. Робертомъ Таленомъ, заключается въ опредѣленіи угла φ, составляемаго продолженіемъ магнитной оси рудной залежи съ линіей, проходящей черезъ центръ магнитной оси до точки наблюденія. Пусть будетъ (ф. 48).

AD плоскость наблюденія,

D пунктъ наблюденія, для котораго G и F уже опредѣлены,

SN магнисная ось рудной залежи,

$2l$ длина оси,

z вертикальное разстояніе отъ плоскости наблюденія до центра магнитной оси,

x разстояніе AD между пунктами, для которыхъ вертикальное напряженіе соотвѣтственно $= G_{max}$ и G,

φ уголъ, составляемый продолженіемъ магнитной оси съ линіей, проходящей черезъ центръ залежи до пункта наблюденія D,

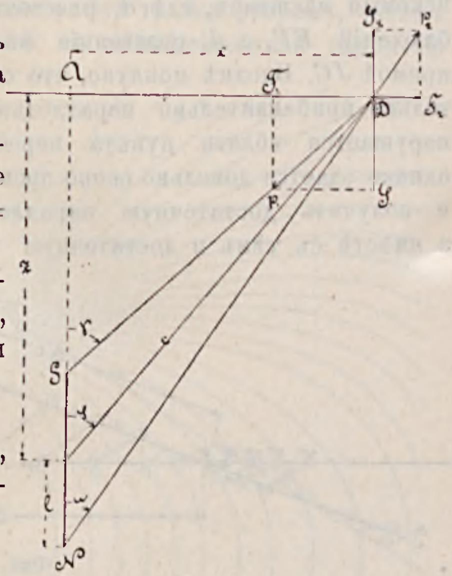
c длина послѣдней линіи,

γ уголъ ASD у верхняго полюса,

ω уголъ AND у нижняго полюса,

σ мощность полюсовъ,

P_1 дѣйствіе южнаго полюса въ пунктѣ D,



Фиг. 48.

P_2 дѣйствіе сѣвернаго полюса въ пунктѣ D,

F_1 и G_1 составляющія силы P_1,

F_2 и G_2 „ „ P_2,

Въ такомъ случаѣ мы имѣемъ:

$$P_1 = \frac{\sigma}{SD^2} = \frac{\sigma}{x^2 + (z-l)^2}$$

$$P_2 = \frac{\sigma}{ND^2} = \frac{\sigma}{x^2 + (z+l)^2}$$

$$F_1 = P_1 \; Sin\,\gamma\,, \quad F_2 = P_2 \; Sin\,\omega$$

$$Sn\,\gamma = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (z-l)^2}}\,, \qquad Sin\,\omega = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (z+l)^2}}$$

$$F_1 = \frac{\sigma}{x^2 + (z-l)^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + (z-l)^2}} = \frac{\sigma\, x}{[x^2 + (z-l)^2]^{3/2}}$$

$$F_2 = \frac{\sigma}{x^2 + (z+l)^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + (z+l)^2}} = \frac{\sigma x}{[x^2 + (z-l)^2]^{3/2}}$$

Если M моментъ магнита, то мы имѣемъ $M = 2l \,.\, \sigma$ или $\sigma = \frac{M}{2l}$

$$F = F_1 - F_2 = \frac{Mx}{2l} \left\{ \frac{1}{[x^2 + (z-l)^2]^{3/2}} - \frac{1}{[x^2 + (z+l)^2]^{3/2}} \right\} \quad . \quad (53)$$

$$G_1 = P_1 \cos \gamma \qquad G_2 = P_2 \cos \omega$$

$$\cos \gamma = \frac{z-l}{\sqrt{x^2 + (z-l)^2}}, \qquad \cos \omega = -\frac{z+l}{\sqrt{x^2 + (z+l)^2}}$$

$$G_1 = \frac{\sigma}{x^2 + (z-l)^2} \cdot \frac{z-l}{\sqrt{x^2 + (z-l)^2}} = \frac{\sigma (z-l)}{[x^2 + (z-l)^2]^{3/2}}$$

$$G_2 = \frac{\sigma}{x^2 + (z+l)^2} \cdot \frac{z+l}{\sqrt{x^2 + (z+l)^2}} = \frac{\sigma (z+l)}{[x^2 + (z+l)^2]^{3/2}}$$

$$G = G_1 - G_2 = \frac{M}{2l} \left\{ \frac{z-l}{[x^2 + (z-l)^2]^{3/2}} - \frac{z+l}{[x^2 + (z+l)^2]^{3/2}} \right\} \quad . \quad . \quad (54)$$

$$x^2 + (z-l)^2 = SD^2 = c^2 + l^2 - 2\, c\, l \cos \varphi$$

$$x^2 + (z+l)^2 = ND^2 = c^2 + l^2 + 2\, c\, l \cos \varphi$$

Пренебрегая величиной $\frac{l^2}{c^2}$, такъ какъ l въ сравненіи съ c вообще весьма мало, получаемъ

$$\left[x^2 + (z-l)^2\right] = c^2 \left[1 + \frac{l^2}{c^2} - 2\frac{l}{c} \cos \varphi\right]; \; \left[x^2 + (z-l)^2\right]^{1/2} = c\left(1 - \frac{l}{c} \cos \varphi\right)$$

$$\left[x^2 + (z-l)^2\right]^{3/2} = c^3 \left[1 - \frac{3l}{c} \cos \varphi\right]; \; \left[x^2 + (z-l)^2\right]^{-3/2} = \frac{1}{c^3}\left[1 + 3\frac{l}{c} \cos \varphi\right].$$

Такъ какъ выраженіе $[x^2 + (z+l)^2]^{-3/2}$ отличается отъ предыдущаго только знакомъ при l, то подобно предыдущему имѣемъ:

$$\left[x^2 + (z+l)^2\right]^{-3/2} = \frac{1}{c^3}\left[1 - 3\frac{l}{c} \cos \varphi\right]$$

Вставляя найденныя значенія въ выраженіе для F, получаемъ

$$F = \frac{Mx}{2lc^3}\left[1 + 3\frac{l}{c}\cos\varphi - 1 + 3\frac{l}{c}\cos\varphi\right] = \frac{3Mx}{c^4}\cos\varphi$$

Такъ какъ $x = z\,tg\,\varphi$ и $c = \frac{z}{\cos\varphi}$, то вставляя эти значенія въ предыдущія выраженія, находимъ

$$F = \frac{3Mz\,tg\,\varphi}{z^4}\cos^5\varphi = \frac{3M}{z^3}\sin\varphi\cos^4\varphi \quad . \; . \; . \quad (55)$$

Далѣе

$$G = \frac{M}{2l}\left[\frac{z-l}{c^3}\left(1 + \frac{3l}{c}\cos\varphi\right) - \frac{z+l}{c^3}\left(1 - \frac{3l}{c}\cos\varphi\right)\right] =$$

$$= \frac{M}{2lc^3}\left[z + \frac{3lz}{c}\cos\varphi - l - \frac{3l^2}{c}\cos\varphi - z + \frac{3lz}{c}\cos\varphi - l + \frac{3l^2}{c}\cos\varphi\right] =$$

$$= \frac{M}{2lc^3}\left[\frac{6l}{c}z\cos\varphi - 2l\right] = \frac{M}{c^3}\left[3\frac{z}{c}\cos\varphi - 1\right] = \frac{M}{c^3}\left[3\cos^2\varphi - 1\right].$$

$$G = \frac{M}{z^3}\cos^3\varphi\left[3\cos^2\varphi - 1\right] \quad . \; . \quad (56)$$

$$\frac{F}{G} = \frac{3M}{z^3}\sin\varphi\cos^4\varphi \cdot \frac{z^3}{M\cos^3\varphi\left[3\cos^2\varphi - 1\right]} = \frac{3\cos\varphi\sin\varphi}{3\cos^2\varphi - 1} = \frac{3\,tg\,\varphi}{3 - \frac{1}{\cos^2\varphi}} =$$

$$= \frac{3\,tg\,\varphi}{3 - sc^2\varphi} = \frac{3\,tg\,\varphi}{3 - 1 - tg^2\varphi} = \frac{3\,tg\,\varphi}{2 - tg^2\varphi},$$

отсюда

$$tg^2\varphi + 3\frac{G}{F}tg\,\varphi - 2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (57)$$

Рѣшая это уравненіе, получимъ

$$tg\,\varphi = -\frac{3}{2}\frac{G}{F} \pm \sqrt{\frac{9}{4}\frac{G^2}{F^2} + 2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (58)$$

Вставляя значеніе $tg\,\varphi$ въ уравненіе $x = z\,tg\,\varphi$, найдемъ

$$z = \frac{x}{tg\,\varphi} = x\,ctg\,\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (59)$$

Пунктъ D долженъ находиться на линіи, проходящей черезъ G_{max} подъ прямымъ угломъ къ простиранію.

Припоминая уравненіе (19) $R = \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha} H$ и подставляя вмѣсто $R = H + F$, получимъ:

$$(H + F) \sin \alpha = H \sin \alpha_0$$

Замѣняя F черезъ его значеніе, находимъ

$$\left[H + \frac{3M}{z^3} \cos^4 \varphi \sin \varphi\right] \sin \alpha = H \sin \alpha_0$$

Если D будетъ лежать въ томъ пунктѣ меридіана, гдѣ α достигаетъ своего минимума, то $\cos^4\varphi \sin\varphi$ должно быть максимумомъ, такъ какъ остальныя величины предыдущаго выраженія постоянны. Беря производную $\cos^4 \varphi \sin \varphi$ и приравнявъ ее нулю, получимъ

$$(\cos^4 \varphi \sin \varphi)' = + \cos^5 \varphi - 4 \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi = \cos^3 \varphi (\cos^2 \varphi - 4 \sin^2 \varphi) = 0$$

$$\cos^2 \varphi - 4 \sin^2 \varphi = 0$$

или

$$tg\, \varphi = \frac{1}{2}$$

Подставляя это значеніе въ выраженіе (59), получимъ

$$z = \frac{x}{tg\, \varphi} = 2x$$

Изъ этой формулы слѣдуетъ, что глубина середины рудной залежи подъ плоскостью наблюденія равна двойному разстоянію по меридіану между пунктомъ съ минимальнымъ угломъ отклоненія и пунктомъ, лежащимъ надъ полюсомъ рудной массы A, а такъ какъ α_{min} и α_{max} лежатъ симметрично относительно пункта A, то глубина залеганія центра залежи равна разстоянію между пунктомъ максимума и минимума угла отклоненія.

Эта формула приложима лишь для отвѣсно падающихъ залежей или близкихъ къ нимъ.

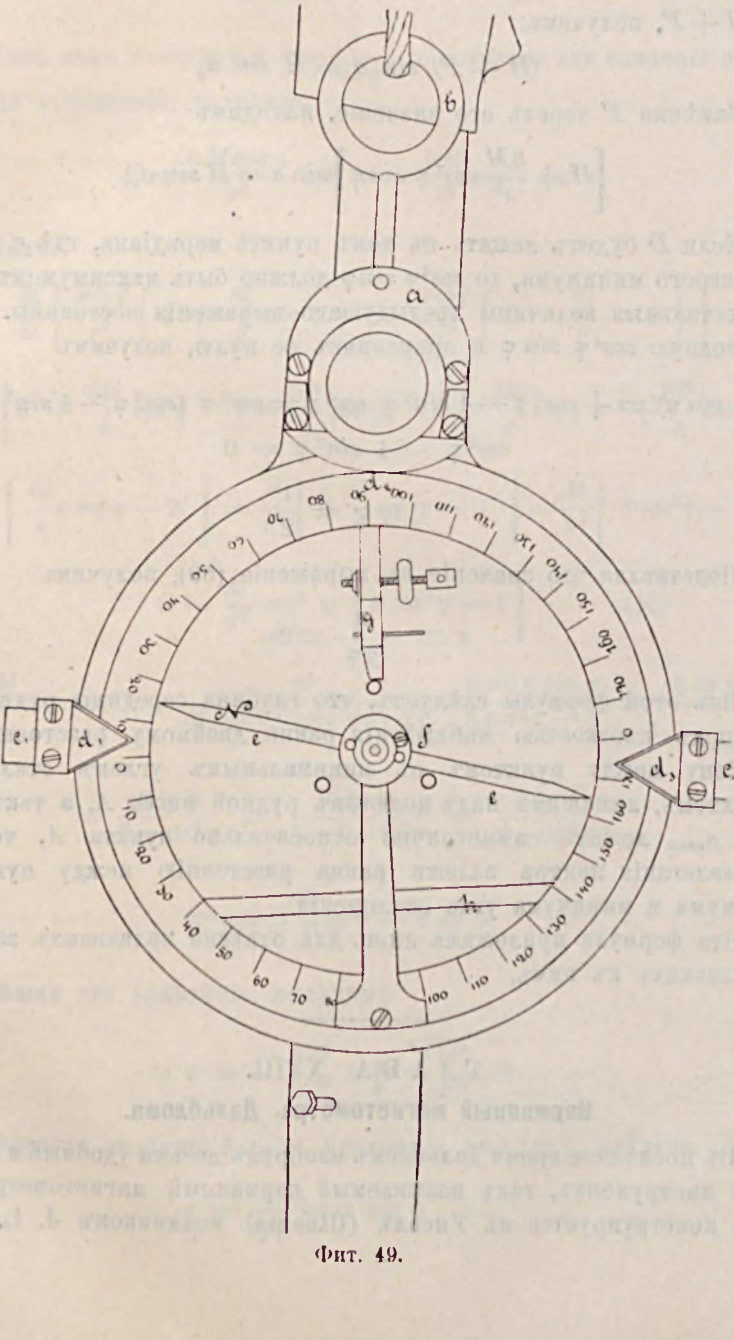
ГЛАВА XVIII.

Карманный магнетометръ Дальблома.

Въ послѣднее время Дальбломъ изобрѣлъ весьма удобный и компактный инструментъ, такъ называемый карманный магнетометръ, который конструируется въ Упсалѣ (Швеція) механикомъ J. L. Rose.

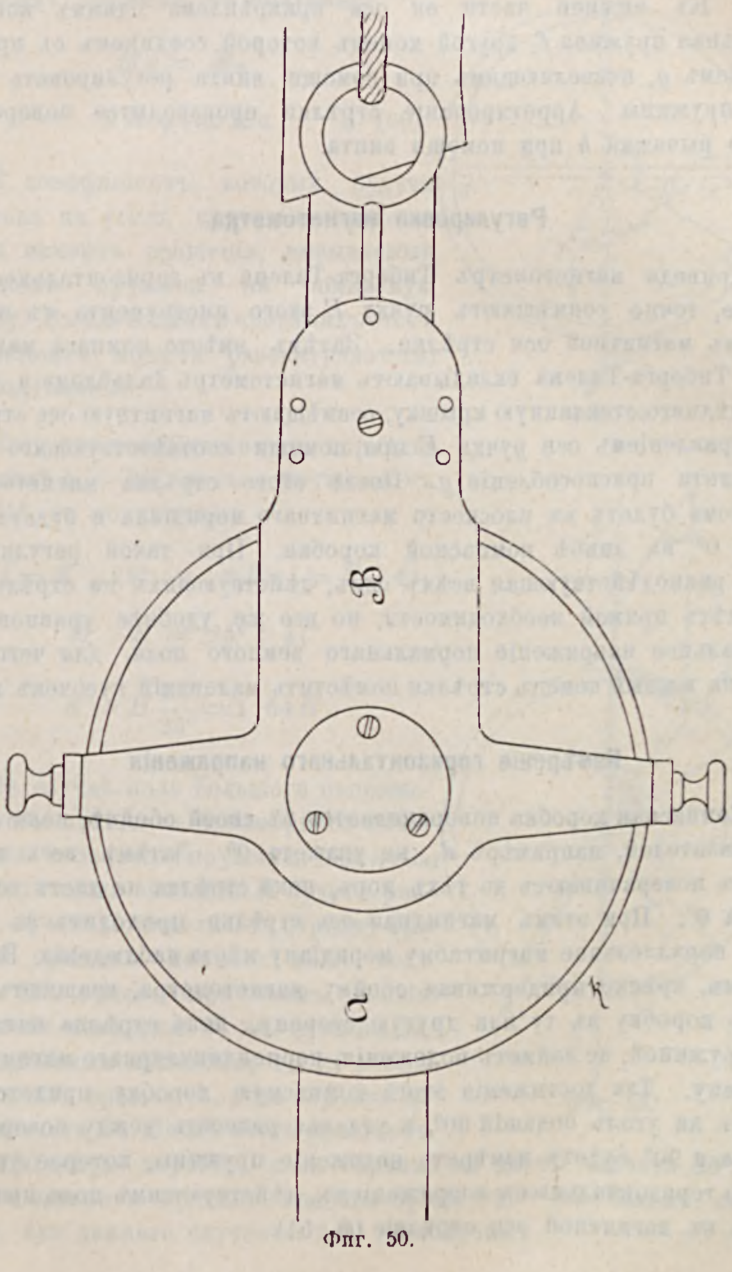
Описаніе магнетометра.

Магнетометръ состоитъ изъ компасной коробки A, которая прикрѣплена къ обоймѣ B, позволяющей вращать компасную коробку



Фиг. 49.

около оси, проходящей черезъ ось магнитной стрѣлки (ф. 49, 50). Обойма B снабжена круглымъ уровнемъ a, ручкой съ кольцомъ b для вертикальнаго подвѣшиванія, двумя цилиндрическими цапфами C_1



Фиг. 50.

и C_2 и тремя индексами d_1, d_2, d_3, изъ которыхъ d_1 и d_3 придѣланы къ оси, а d_2 къ рамкѣ круглаго уровня.

Магнитная стрѣлка e поддерживается въ каменныхъ подшипничкахъ. Къ нижней части ея оси прикрѣплена однимъ концомъ спиральная пружина f, другой конецъ которой соединенъ съ приспособленіемъ g, позволяющимъ при помощи винта регулировать натяженіе пружины. Арретированіе стрѣлки производится поворотомъ особаго рычажка h при помощи винта.

Регулировка магнетометра.

Приведя магнетометръ Тиберга-Талена въ горизонтальное положеніе, точно совмѣщаютъ ручку E этого инструмента съ направленіемъ магнитной оси стрѣлки. Затѣмъ вмѣсто компаса магнетометра Тиберга-Талена вкладываютъ магнетометръ Дальблома и, снявъ съ послѣдняго стеклянную крышку, совмѣщаютъ магнитную ось стрѣлки съ направленіемъ оси ручки E при помощи соотвѣтствующаго поворота винта приспособленія g. Послѣ этого стрѣлка магнетометра Дальблома будетъ въ плоскости магнитнаго меридіана и будетъ указывать 0^0 на лимбѣ компасной коробки. При такой регулировкѣ общая равнодѣйствующая всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на стрѣлку$=0$. Хотя нѣтъ прямой необходимости, но все же удобнѣе уравновѣсить вертикальное напряженіе нормальнаго земного поля, для чего слѣдуетъ на южный конецъ стрѣлки помѣстить маленькій кусочекъ воску.

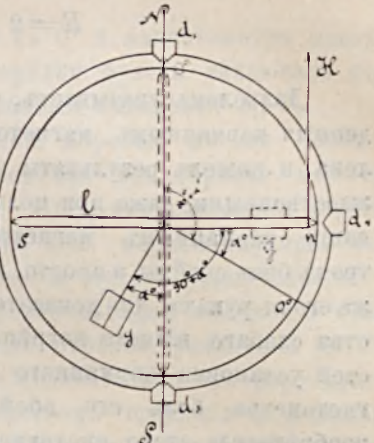
Измѣреніе горизонтальнаго напряженія.

Компасная коробка поворачивается въ своей обоймѣ, пока одинъ изъ указателей, напримѣръ d_1, не укажетъ 0^0. Затѣмъ весь магнетометръ поворачиваютъ до тѣхъ поръ, пока стрѣлка не дастъ точнаго отсчета 0^0. При этомъ магнитная ось стрѣлки приходитъ въ положеніе, параллельное магнитному меридіану мѣста наблюденія. Вслѣдъ за этимъ, крѣпко придерживая обойму магнетометра, вращаютъ компасную коробку въ ту или другую сторону, пока стрѣлка натягиваемая пружиной, не займетъ положенія, перпендикулярнаго магнитному меридіану. Для достиженія этого компасную коробку придется повернуть на уголъ большій 90^0, и угловая разность между поворотомъ компаса и 90^0 будетъ измѣрять натяженіе пружины, которое уравновѣшено горизонтальнымъ напряженіемъ, дѣйствующимъ подъ прямымъ угломъ къ магнитной оси стрѣлки (ф. 51).

Если M_H будетъ моментомъ вращенія, вызываемымъ горизонтальнымъ напряженіемъ поля, M_S — моментомъ вращенія въ противоположномъ направленіи, вызываемымъ дѣйствіемъ пружины, то получимъ:

$$M_H = M_S$$

или $$2\,H\,\mu\,l = K\alpha \quad . \quad . \quad (60)$$



Фиг. 51.

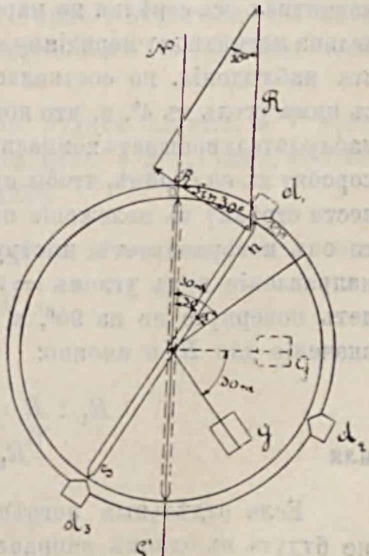
гдѣ K коэффиціентъ, который, будучи умноженъ на уголъ крученія, представляетъ моментъ вращенія, вызываемый дѣйствіемъ пружины на компасную стрѣлку. Въ извѣстныхъ предѣлахъ этотъ коэффиціентъ можетъ разсматриваться, какъ постоянный.

Если при наблюденіяхъ въ нормальномъ полѣ $\alpha_0 = 25^0$, а въ возмущенномъ $\alpha_1 = 41^0$, то получимъ:

$$2H\mu\,l = K\;.\;25^0 \quad \text{и} \quad 2\,R\mu\,l = K\;.\;41$$

или $$H : R = 25^0 : 41^0$$

и $$R = H\frac{41^0}{25^0} = 1.64\,H.$$



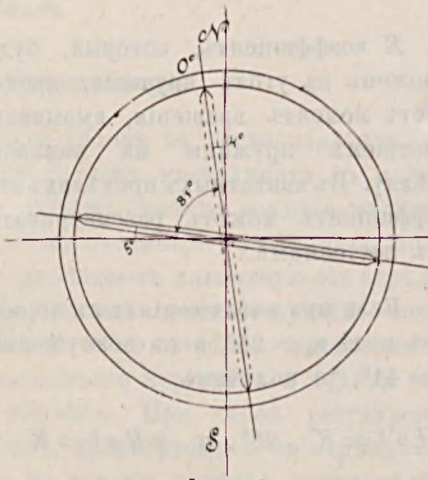
Фиг. 52.

Въ случаѣ поля большого напряженія, чтобы избѣгнуть чрезмѣрнаго натяженія или ослабленія пружины, для которой предѣльныя значенія K будутъ различны, лучше устанавливать стрѣлку при помощи вращенія компаса лишь подъ угломъ 30^0. Чтобы при этомъ условіи произвести измѣреніе R въ функціи H, устанавливаютъ индексъ d_1 на 30^0 и весь инструментъ вращаютъ, пока стрѣлка не дастъ отсчета 0^0. Послѣ этого вращаютъ одну компасную коробку, пока стрѣлка не дастъ отсчета 30^0, т. е. пока не встанетъ противъ индекса d_1 (ф. 52). Въ такомъ случаѣ, если α_1 для даннаго случая $= 34^0$, то получимъ

$$34^0 : 25^0 = R \sin 30^0 : H$$

$$R = 2 \cdot \frac{34^0}{25^0} H = 2{,}72\, H.$$

Дальбломъ указываетъ, что онъ сравнивалъ измѣренія, произведенныя карманнымъ магнетометромъ и магнетометромъ Тиберга-Талена, и нашелъ результаты этихъ двухъ инструментовъ вполнѣ тождественными, даже при пользованіи карманнымъ магнетометромъ безъ обоймы, а просто, держа его въ рукахъ. Для доказательства слабаго вліянія погрѣшностей установки карманнаго магнетометра безъ его обоймы, изобрѣтатель этого инструмента даетъ слѣдующее объясненіе. Предположимъ, говоритъ онъ, что магнитная ось стрѣлки не параллельна магнитному меридіану мѣста наблюденія, но составляетъ съ нимъ уголъ въ 4^0, и, что когда наблюдатель вращаетъ компасную коробку въ ея обоймѣ, чтобы привести стрѣлку въ положеніе перпендикулярное магнитному меридіану, то онъ поворачиваетъ инструментъ и обойму въ противоположномъ направленіи подъ угломъ $= 5^0$ (ф. 53). Тогда очевидно стрѣлка будетъ повернута не на 90^0, а только на 81^0 и отсчетъ дастъ меньшее значеніе для R, а именно:



Фиг. 53.

$$R_1 : R = \sin 81^0 : \sin 90^0$$

или

$$R_1 = 0{,}988\, R$$

Если отдѣльныя погрѣшности, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ, не будутъ въ одномъ направленіи, то погрѣшность результата будетъ оказывать еще меньшее вліяніе. Дальбломъ высказываетъ также мнѣніе, что при наблюденіяхъ въ сильномъ полѣ, когда отклоненіе стрѣлки берется въ 30^0, и при составленіи средняго изъ 3-хъ наблюденій для одного мѣста, результатъ, получаемый карманнымъ магнетометромъ, значительно точнѣе, чѣмъ при измѣреніи инструментомъ съ отклоняющимъ магнитомъ.

Вертикальное напряженіе.

Если индексы d_1 и d_3 совмѣщены съ 0^0 и магнетометръ повернутъ вертикально, то магнитная ось стрѣлки будетъ заключать нѣкоторый уголъ съ горизонтомъ, указываемый индексами d_1, d_3.

Посредствомъ вращенія компасной коробки въ ея обоймѣ въ соотвѣтствующемъ направленіи магнитная ось стрѣлки можетъ быть совмѣщена съ указателями d_1, d_3. Въ этомъ положеніи вертикальная составляющая магнитныхъ силъ поля перпендикулярна магнитной оси стрѣлки, и натяженіе пружины будетъ уравновѣшивать эту силу. Натяженіе пружины при горизонтальномъ положеніи компаса было установлено такъ, что, когда стрѣлка указывала на 0^0, вращательное дѣйствіе пружины $= 0$. Слѣдовательно при вертикальномъ положеніи, когда стрѣлка посредствомъ вращенія компасной коробки въ ея обоймѣ снова будетъ приведена въ горизонтальное положеніе, то сумма вращенія отъ d_1 до точки 0, измѣряемая угломъ v, вызоветъ натяженіе пружины, вполнѣ достаточное для уравновѣшиванія вертикальнаго напряженія поля. Уголъ v отсчитывается по сѣверному концу стрѣлки, при положительномъ напряженіи внизъ отъ 0^0, а при отрицательномъ вверхъ.

Если G вертикальное напряженіе рудной залежи, а V вертикальная слагающая нормальнаго земного поля, v и v_0 углы, соотвѣтствующіе силамъ $G + V$ и V, то получимъ

$$2\,(G + V)\,\mu\, l = K v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

$$2\,H \mu\, l = K\, \alpha_0$$

Дѣля первое на второе, найдемъ

$$G + V = \frac{v}{\alpha_0}\, H$$

$$G = \frac{v}{\alpha_0}\, H - V$$

но

$$V = \frac{v_0}{\alpha_0}\, H$$

И окончательно

$$G = \frac{v}{\alpha_0}\, H - \frac{v_0}{\alpha_0}\, H = \frac{v - v_0}{\alpha_0}\, H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

Слѣдовательно, если наблюдатель произведетъ отсчетъ въ нормальномъ полѣ $v_0 = +15^0$, а въ возмущенномъ полѣ $+5^0$ и $+72^0$, и если α_0 по прежнему $= 25^0$, то получимъ:

$$G_1 = \frac{5-15}{25} H = -\frac{10}{25} H = -0.40\, H$$

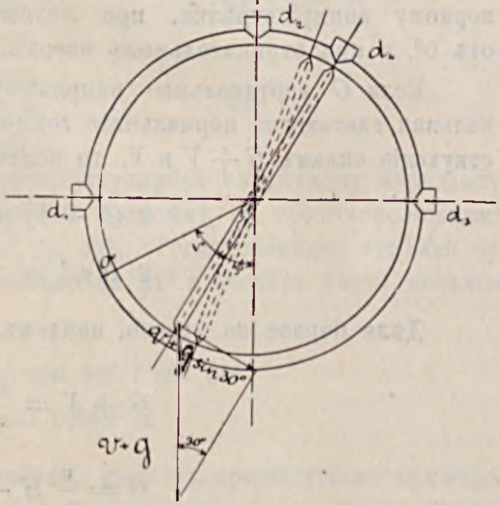
и

$$G_2 = \frac{72-15}{25} H = +\frac{57}{25} H = +2.28\, H.$$

Если компасная стрѣлка была уравновѣшена для вертикальной составляющей нормальнаго поля и, слѣдовательно, $v_0 = 0$, а наблюдаемый уголъ въ возмущенномъ полѣ $= v_1$, то

$$G = \frac{v_1}{\alpha_0} H \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (63)$$

При измѣреніи весьма значительнаго вертикальнаго напряженія предпочтительнѣе употреблять отклоненіе отъ вертикали лишь на уголъ 30^0. Однако въ этомъ случаѣ необходимо для исключенія дѣйствія горизонтальной составляющей, чтобы плоскость магнетометра было помѣщена перпендикулярно къ магнитному меридіану. Для облегченія измѣреній Haanel рекомендуетъ еще индексъ d_4 подъ угломъ въ 30^0 отъ d_2, какъ это видно на ф. 54.



Фиг. 54.

Предположимъ, что магнетометръ своей плоскостью расположенъ перпендикулярно къ магнитному меридіану, а магнитная стрѣлка придетъ въ положеніе, указанное на ф. 54 пунктиромъ. Будемъ вращать компасъ въ его обоймѣ, пока стрѣлка не будетъ совмѣщена съ индексомъ d_4. Отсчетъ отъ 0^0 до сѣвернаго конца стрѣлки будетъ равенъ v и мы получимъ

$$(G + V) \sin 30^0 \,.\, 2\mu l = Kv \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (64)$$

$$H \cdot 2\mu l = K\alpha_0$$

$$G + V = 2\frac{v}{\alpha_0} H$$

$$G = 2\frac{v}{\alpha_0} H - V \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (64a)$$

А въ нормальномъ полѣ:

$$V \sin 30^0 \, 2\mu l = K v_0'$$

$$H \cdot 2\mu l = K\alpha_0$$

отсюда $$V = \frac{2v_0'}{\alpha_0} H$$

Вставляя это выраженіе въ (64а), получимъ

$$G = \frac{2(v - v_0')}{\alpha_0} H \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (65)$$

Уголъ v_0' для нормальнаго поля необходимо опредѣлить возможно точнѣе. Такимъ образомъ, если $v_0' = -8^0$ въ нормальномъ полѣ, а въ возмущенномъ $v = +32^0$, то получимъ

$$G = \frac{2(32+8)}{25} H = 2\frac{40}{25} H = 3.20\, H$$

Въ числѣ преимуществъ магнетометра Тальблома можно указать слѣдующія:

1. Измѣренія незначительнаго вертикальнаго напряженія независимы отъ магнитнаго меридіана.

2. Примѣненіе уравновѣшивающей пружины дѣлаетъ ненужной длинную ручку E съ отклоняющимъ магнитомъ.

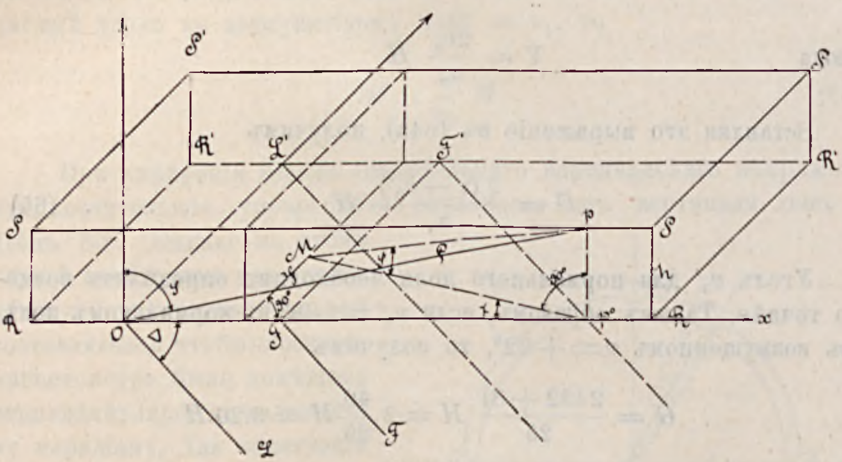
3. Магнетометромъ можно пользоваться для приближеннаго измѣренія вертикальнаго напряженія возмущеннаго поля.

ГЛАВА XIX.

Представленіе магнитныхъ мѣсторожденій въ видѣ пластообразныхъ залежей.

Въ предыдущемъ мы видѣли, что теорія изысканія магнитныхъ рудъ основана на представленіи магнитныхъ залежей въ видѣ стержневиднаго идеальнаго магнита. Несмотря на неточность такого представленія, выводы по большей части являлись достаточными для примѣненія ихъ на практикѣ. Однако легко показать, что мы можемъ обосновать наши выводы представленіемъ магнитныхъ рудъ въ видѣ пластообразныхъ залежей, имѣющихъ различное простираніе и произвольный уголъ паденія.

Предположимъ, что на ф. 55 SS_1 представляетъ поверхность наблюденія, которую для простоты примемъ горизонтальной, и что RR_1 горизонтъ, на которомъ находится рудная залежь и высота надъ поверхностью котораго $= h$. Обозначимъ ширину залежи въ горизон-



Фиг. 55.

тальномъ направленіи OF черезъ въ u $tg \triangle$ черезъ λ. Предположимъ далѣе распространеніе залежи по глубинѣ и по простиранію безконечно большимъ. Въ такомъ случаѣ мы очевидно можемъ принять, что верхнія поверхности залежи $OFF'L$ и FFF' притягиваютъ сѣверный конецъ стрѣлки, помѣщенной въ пунктѣ P, а нижняя поверхность OLL' отталкиваетъ тотъ-же конецъ. Разсмотримъ дѣйствіе этихъ поверхностей на стрѣлку. Выдѣливъ на поверхности OFL' элементарную площадку M и обозначая притяженіе на единицѣ длины черезъ ω, мы очевидно для дѣйствія этой площадки на сѣверный конецъ стрѣлки получимъ

$$dM = \omega \frac{dx\,dy}{\rho^2}$$

гдѣ $\rho = MP$, разстояніе точки M отъ P.

Разлагая силу dM на горизонтальную и вертикальную составляющія въ плоскости MPP_0, мы получимъ:

$$dH = \frac{\omega\, dx\, dy \cos\psi}{\rho^2}$$

$$dV' = \frac{\omega\, dx\, dy \sin\psi}{\rho^2}$$

Такъ какъ простираніе безконечно велико, то можемъ принять, что горизонтальная составляющая напряженія будетъ перпендикулярна къ простиранію и потому

$$dH_1' = \frac{\omega\, dx\, dy \cos\psi \cos\chi}{\rho^2}$$

Опредѣлимъ величины $\sin\psi$, $\cos\psi$, $\cos\chi$ и ρ.

$$\rho^2 = PM^2 = PP_0^2 + MP_0^2 = h^2 + QP_0^2 + QM^2 = h^2 + (OP_0 - OQ)^2 + y^2 = \\ = h^2 + (h\,tg\,\varphi - x)^2 + y^2$$

$$\sin\psi = \frac{h}{\rho},\ \cos\psi = \frac{MP_0}{\rho},\ \cos\psi = \frac{QP_0}{MP_0} = \frac{(h\,tg\,\varphi - x)}{MP_0}$$

$$\cos\psi \,.\, \cos\chi = \frac{MP_0}{\rho} \cdot \frac{(h\,tg\,\varphi - x)}{MP_0} = \frac{htg\varphi - x}{\rho}.$$

Подставляя эти значенія въ выраженіе dH' и dV' и интегрируя, получимъ

$$\frac{H_1'}{\omega} = \iint \frac{dx\,dy\,(htg\,\varphi - x)}{\rho^3} = \iint \frac{dx\,dy\,(htg\,\varphi - x)}{[h^2 + (htg\,\varphi - x)^2 + y^2]^{3/2}}. \quad (66)$$

$$\frac{V_1'}{\omega} = \iint \frac{h\,dx\,dy}{[h^2 + (htg\,\varphi - x)^2 + y^2]^{3/2}} \quad . \; . \; . \; . \quad (67)$$

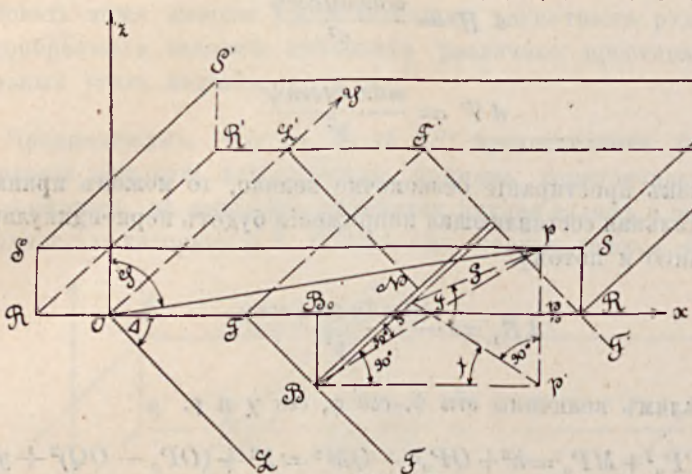
Разсмотримъ теперь дѣйствіе поверхности FFF', на которой выдѣляемъ площадку N (ф. 56)

$$dH_2' = \frac{\omega\, dx\, dy \cos\psi \,.\, \cos\chi}{\rho^2} \qquad dV_2' = \frac{\omega\, dx\, dy \sin\psi}{\rho^2}$$

$$\sin\psi = \frac{PP'}{PN} = \frac{P_0P + P_0P'}{\rho} = \frac{h + BB_0}{\rho} = \frac{h + (x - b)tg\Delta}{\rho} = \frac{h + (x - b)\lambda}{\rho}$$

$$\cos\psi = \frac{P'N}{PN} = \frac{P'N}{\rho},\ \cos\chi = \frac{BP'}{P'N} = \frac{htg\varphi - x}{P'N},\ \cos\psi\,.\,\cos\chi = \frac{h\,tg\,\varphi - x}{\rho}$$

$$\rho^2 = BN^2 + BP^2 = BN^2 + PP'^2 + BP'^2 = y^2 + [h + (x-b)\lambda]^2 + (htg\varphi - x)^2$$



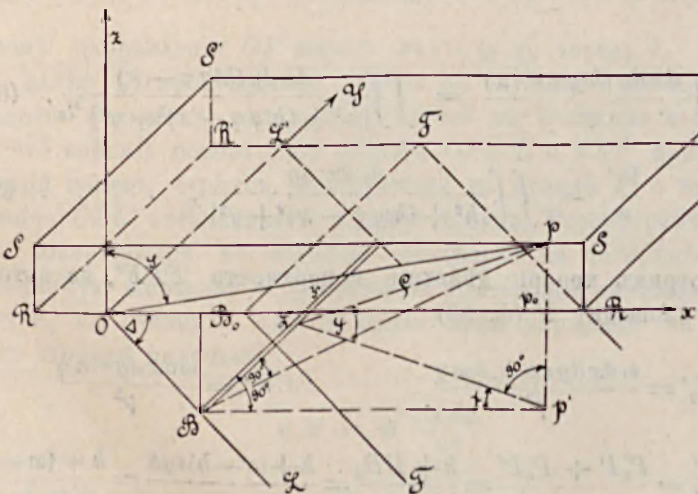
Фиг. 56.

Слѣдовательно

$$\frac{H'_2}{\omega} = \iint \frac{dx\,dy\,(htg\,\varphi - x)}{[(h + \lambda x - \lambda b)^2 + (htg\,\varphi - x)^2 + y^2]^{3/2}}\ \ . \ . \quad (68)$$

$$\frac{V'_2}{\omega} = \iint \frac{dx\,dy\,(h + \lambda x - \lambda b)}{[(h + \lambda x - \lambda b)^2 + (htg\,\varphi - x)^2 + y^2]^{3/2}}\ \ . \ . \quad (69)$$

Наконецъ для третьей поверхности LOL' получимъ (ф. 57)



Фиг. 57.

$$dH'_3 = \frac{\omega\, dx\, dy \cos\psi \cos\chi}{\rho^2}, \qquad dV'_3 = \frac{\omega\, dx\, dy \sin\psi}{\rho^2}$$

$$\sin\psi = \frac{PP'}{PL} = \frac{PP_0 + P_0P'}{\rho} = \frac{h + BB_0}{\rho} = \frac{h + xtg\Delta}{\rho} = \frac{h + \lambda x}{\rho}$$

$$\cos\psi = \frac{P'L}{PL} = \frac{P'L}{\rho} \quad \cos\chi = \frac{BP'}{P'L} = \frac{htg\varphi - x}{P'L} \quad \cos\psi\cos\chi = htg\varphi - x$$

$$\frac{H'_3}{\omega} = \iint \frac{dx\, dy\, (h\, tg\, \varphi - x)}{[(h + \lambda x)^2 + (htg\varphi - x)^2 + y^2]^{3/2}} \quad . \quad . \quad (70)$$

$$\frac{V'_3}{\omega} = \iint \frac{dx\, dy\, (h + \lambda x)}{[(h + \lambda x)^2 + (htg\varphi - x)^2 + y^2]^{3/2}} \quad . \quad . \quad (71)$$

Полное горизонтальное напряженіе въ пунктѣ P будетъ

$$\frac{H'}{\omega} = \frac{H'_1}{\omega} + \frac{H'_2}{\omega} - \frac{H'_3}{\omega}$$

и полное вертикальное напряженіе —

$$\frac{V'}{\omega} = \frac{V'_1}{\omega} + \frac{V'_2}{\omega} - \frac{V'_3}{\omega}$$

Первое интегрированіе нужно во всѣхъ случаяхъ произвести по y отъ $-\infty$ до $+\infty$, а по x въ первомъ случаѣ отъ 0 до b, во второмъ отъ b до $+\infty$ и въ третьемъ отъ 0 до $+\infty$.

$$\frac{H_1'}{\omega} = \int_{x=o}^{x=b} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \frac{dx\, dy\, (h\, tg\, \varphi - x)}{[\, h^2 + (h\, tg\, \varphi - x)^2 + y^2\,]^{3/2}} =$$

$$= 2 \int_{x=o}^{x=b} \frac{(h\, tg\, \varphi - x)\, dx}{h^2 + (ht\, g\, \varphi - x)^2} = - \left\{ lg\, [h^2 + (htg\, \varphi - X)^2] \right\}_o^b =$$

$$= - lg \frac{h^2 + (ht\, g\, \varphi - b)^2}{h^2 + h^2\, tg^2\, \varphi} = - lg \frac{h^2 + (x - b)^2}{h^2 + x^2} \quad . \quad (72)$$

$$\frac{H'_2}{\omega} \int_{x=b}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \frac{dx\, dy\, (h\, tg\, \varphi - x)}{[(h + \lambda x - \lambda b)^2 + (htg\varphi - x)^2 + y^2\,]^{3/2}} =$$

$$= 2 \int_{x=b}^{x=\infty} \frac{(htg\, \varphi - x)\, dx}{(h + \lambda x - \lambda b)^2 + (ht\, g\varphi - x)^2} =$$

$$\frac{1}{1+\lambda^2}\left[lg\,\frac{\{h+\lambda\,(htg\,\varphi-b)\}^2}{(h+\lambda x-\lambda b)^2+(htg\,\varphi-b)^2}+2\,\lambda\,ar\,ctg\,\frac{h+\lambda x-\lambda b}{htg\,\varphi-x}\right]_b^s=$$

$$=\frac{1}{1+\lambda^2}\left[-\,lg\,\frac{\{h+\lambda\,(htg\,\varphi-b)\}^2}{h^2+(htg\,\varphi-b)^2}+2\,\lambda\,ar\,ctg\,(-\lambda)-\right.$$

$$\left.-\,2\,\lambda\,arctg\,\frac{h}{htg\,\varphi-b}\right]\,.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(73a)$$

$$\frac{H'_3}{\omega}=\frac{1}{1+\lambda^2}\left[-\,lg\,\frac{(h+\lambda\,h\,t\,g\,\varphi)^2}{h^2+h^2\,tg^2\,\varphi}+2\,\lambda\,ar\,ctg\,(-\lambda)-\right.$$

$$\left.-\,2\,\lambda\,ar\,ctg\,\frac{h}{h\,t\,g\,\varphi}\right]\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(73b)$$

$$\frac{H'}{\omega}=\frac{H'_1}{\omega}+\frac{H'_2}{\omega}-\frac{H'_0}{\omega}=-\,lg\,\frac{h^2+(x-b)^2}{h^2+x^2}+\frac{1}{1+\lambda^2}\times$$

$$\left[-\,lg\,\frac{(h+\lambda x-\lambda\,b)^2}{h^2+(x-b)^2}+lg\,\frac{(h+\lambda\,x)^2}{h^2+x^2}+2\,\lambda\,(ar\,ctg\,\frac{h}{x}-arctg\,\frac{h}{x-b})\right]=$$

$$=-\,lg\,\frac{h^2+(x-b)^2}{h^2+x^2}+\frac{1}{1+\lambda^2}\left[lg\,\frac{(h+\lambda\,x)^2\,\{h^2+(x-b)^2\}}{(h^2+x^2)\,(h+\lambda\,x-\lambda\,b)^2}+\right.$$

$$\left.+\,2\lambda\,(ar\,ctg\,\frac{h}{x}-ar\,ctg\,\frac{h}{x-b})\right].$$

Такъ какъ b мало въ сравненіи съ x и h, то принимая

$$\frac{h+\lambda x}{h+\lambda x-\lambda b}=1,$$

$$\frac{H'}{\omega}=-\,lg\,\frac{h^2+(x-b)^2}{h^2+x^2}+\frac{1}{1+\lambda^2}\,lg\,\frac{h^2+(x-b)^2}{h^2+x^2}+$$

$$+\,\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\,(ar\,ctg\,\frac{h}{x}-ar\,ctg\,\frac{h}{x-b})=\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\,lg\,\frac{h^2+x^2}{h^2+(x-b)^2}+$$

$$+\,\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\,(arctg\,\frac{h}{x}-ar\,ctg\,\frac{h}{x-b})$$

$$\frac{H'}{\omega}=\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\, lg\, \frac{h^2+x^2}{h^2+(x-b)^2}-\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\left(ar\,ctg\,\frac{x}{h}-ar\,ctg\,\frac{x-b}{h}\right). \qquad (74)$$

$$\frac{V'_1}{\omega}=\int_{x=o}^{x=b}\int_{y=-\infty}^{y=\infty}\frac{h\,dx\,dy}{[h^2+(htg\,\varphi-x)^2+y^2]^{3/2}}=$$

$$=2\int_{x=o}^{x=b}\frac{h\,d\,x}{h^2+(htg\varphi-x)^2}=-2\left[arctg\,\frac{htg\varphi-x}{h}\right]_o^b=$$

$$=2\left(ar\,ctg\,\frac{ht\,g\varphi}{h}-arctg\,\frac{htg\varphi-b}{h}\right)=2\left(arc\,tg\,\frac{x}{h}-arctg\,\frac{x-b}{h}\right) \quad (75)$$

$$\frac{V'_2}{\omega}=\int_{x=b}^{x=\infty}\int_{y=-\infty}^{y=\infty}\frac{dx\,dy\,(h+\lambda+-\lambda b)}{[(h+\lambda x-\lambda b)^2+(htg\varphi-x)^2+y^2]^{3/2}}=$$

$$=2\int_{x=b}^{x=\infty}\frac{(h+\lambda x-\lambda b)\,dx}{(h+\lambda x-\lambda b)^2+(ht\,g\varphi-x)^2}-=\frac{1}{1+\lambda^2}\times$$

$$\left[\lambda lg\,\frac{\{h+\lambda(h\,tg\,\varphi-b)\}^2}{\{(h+\lambda x-\lambda b)^2+(h\,tg\,\varphi-x)^2\}}+2\,arctg\,\frac{h\,tg\varphi-x}{h+\lambda x-\lambda b}\right]_b^\infty=$$

$$=-\frac{1}{1+\lambda^2}\left[-\lambda\,lg\,\frac{\{h+\lambda(htg\varphi-b)\}}{h^2+(htg\,\varphi-b)^2}+\right.$$

$$\left.+2\,ar\,ctg\left(-\frac{1}{\lambda}\right)-2\,arctg\,\frac{htg\varphi-b}{h}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

$$\frac{V'_3}{\omega}=-\frac{1}{1+\lambda^2}\left[-lg\,\frac{\{h+\lambda h\,tg\,\varphi\}^2}{h^2+h^2\,tg^2\,\varphi}+\right.$$

$$\left.+2\,ar\,ctg\left(-\frac{1}{\lambda}\right)-2\,arctg\,\frac{h\,tg\,\varphi}{h}\right]. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

$$\frac{V'}{\omega}=\frac{V'_1}{\omega}+\frac{V'_2}{\omega}-\frac{V'_3}{\omega}=2\left(arctg\,\frac{x}{h}-arctg\,\frac{x-b}{h}\right)+$$

$$-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\left[lg\,\frac{(h+\lambda\,htg\varphi)^2}{h^2+h^2\,tg^2\,\varphi}-lg\,\frac{\{h+\lambda(h\,tg\,\varphi-b)\}^2}{h^2+(h\,tg\,\varphi-b)^2}-\right.$$

$$-\frac{2}{1+\lambda^2}\left(arctg\,\frac{h\,tg\,\varphi}{h}-arctg\,\frac{htg\varphi-b}{h}\right)=2\left(ar\,ctg\,\frac{x}{h}-arctg\,\frac{x-b}{h}\right)-$$

$$-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\, lg\, \frac{(h+\lambda\, h\, tg\, \varphi)^2\, \{h^2+(h\, tg\, \varphi-b^2\}}{(h^2+h^2\, tg^2\, \varphi)\, \{h+\lambda(h\, tg\, \varphi-b)\}^2}-$$

$$-\frac{2}{1+\lambda^2}\,(arctg\, \frac{h\, tg\, \varphi}{h}-ar\, ctg\, \frac{htg\varphi-b}{h})$$

Принимая

$$\frac{h+\lambda\, h\, tg\, \varphi}{h+\lambda\,(h\, tg\, \varphi-b)}=1,$$

Получимъ

$$\frac{V'}{\omega}=2\,(ar\, ctg\, \frac{x}{h}-ar\, ctg\, \frac{x-b}{h})-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\, lg\, \frac{h^2+(x-b)^2}{h^2+x^2}-$$

$$-\frac{2}{1+\lambda^2}\left[arctg\, \frac{x}{h}-arctg\, \frac{x-b}{h}\right]$$

$$\frac{V'}{\omega}=\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\, lg\, \frac{h^2+x^2}{h^2+(x-b)^2}+\frac{2\lambda^2}{1+\lambda^2}\left[arctg\, \frac{x}{h}-arctg\, \frac{x-b}{h}\right] \qquad (78)$$

$$\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}=\frac{tg^2\Delta}{1+tg^2\Delta}=\frac{sin^2\Delta}{cos^2\Delta+sin^2\Delta}=sin^2\Delta$$

$$\frac{\lambda}{1+\lambda^2}=\frac{tg\,\Delta}{1+tg^2\Delta}=\frac{sin\,\Delta\, cos\,\Delta}{cos^2\Delta+sin^2\Delta}=1/_2\, sin\, 2\,\Delta$$

Вставляя значенія этихъ коэффиціентовъ въ выраженія $\frac{H'}{\omega}$ и $\frac{V'}{\omega}$ находимъ

$$\frac{H'}{\omega}=sin^2\Delta\, lg\, \frac{h^2+x^2}{h^2+(x-b)^2}-sin\, 2\,\Delta\,(arctg\, \frac{x}{h}-arctg\, \frac{x-b}{h}) \qquad (79)$$

$$\frac{V'}{\omega}=1/_2\, sin\, 2\,\Delta\, lg\, \frac{h^2+x^2}{h^2+(x-b)^2}-2\, sin^2\Delta\,(ar\, ctg\, \frac{x}{h}-arctg\, \frac{x-b}{h}) \qquad (80)$$

Предположимъ теперь, что паденіе залежи отвѣсное, т. е. $\Delta=90^0$, тогда мы выводимъ изъ предыдущихъ формулъ:

$$\frac{H}{\omega}=lg\, \frac{h^2+x^2}{h^2+(x-b)^2} \quad \text{и} \quad \frac{V}{\omega}=2\,(arctg\, \frac{x}{h}-arctg\, \frac{x-b}{h})$$

Вставляя эти выраженія въ уравненія (79 и 80), имѣемъ

$$\frac{H'}{\omega} = sin^2 \Delta \frac{H}{\omega} - {}^1/_2 \, sin \, 2\Delta \frac{V}{\omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

$$\frac{V'}{\omega} = {}^1/_2 \, sin \; 2 \, \Delta \frac{V}{\omega} + sin^2 \, \Delta \frac{V}{\omega} \quad . \quad . \quad . \quad (82)$$

Перенося начало координатъ въ середину залежи, т. е. полагая $x = x' + \frac{b}{2}$, мы получимъ для горизонтальнаго напряженія въ случаѣ отвѣсной залежи

$$\frac{H}{\omega} = lg \frac{h^2 + x^2}{h^2 + (x - b)^2} = lg \frac{h^2 + (x' + \frac{b}{2})^2}{h^2 + (x' - \frac{b}{2})^2}$$

При $x' = 0$, т. е. надъ среднимъ пунктомъ залежи, $\frac{H}{\omega} = 0$.

Если мы замѣнимъ x' черезъ $-x'$, то получимъ

$$\frac{H}{\omega} = lg \frac{h^2 + (\frac{b}{2} - x')^2}{h^2 + (-\frac{b}{2} - x')^2} = lg \frac{h^2 + (x' - \frac{b}{2})^2}{h^2 + (x' + \frac{b}{2})^2} = - lg \frac{h^2 + (x' + \frac{b}{2})^2}{h^2 + (x' - \frac{b}{2})^2}$$

т. е. соотвѣтствующіе пункты по обѣимъ сторонамъ средняго пункта будутъ имѣть равныя горизонтальныя составляющія, но съ обратными знаками, т. е. дѣйствующія въ прямо противоположныя стороны.

Для опредѣленія значеній x, для которыхъ получаются пункты съ крайними значеніями H', продифференцируемъ уравненіе (74) и приравняемъ результатъ нулю.

$$\frac{dH'}{\omega} = \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2} \, \frac{h^2 + (x - b)^2}{h^2 + x^2} \cdot 2 \, \frac{x \, [h^2 + (x - b)^2] - (x - b) \, [h^2 + x^2]}{[h^2 + (x - b)^2]^2} \, dx +$$

$$- \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{h}\right)^2} \, \frac{1}{h} - \frac{1}{1 + \left(\frac{x - b}{h}\right)^2} \, \frac{1}{h} \right] dx = 0.$$

Упрощая это выраженіе, мы получаемъ квадратное уравненіе для опредѣленія x

$$x^2 - \frac{b\lambda + 2h}{\lambda} \, x - \frac{h^2\lambda - bh}{\lambda} = 0$$

Отсюда

$$x = \frac{b\lambda + 2h}{2\lambda} \pm \frac{\sqrt{b^2\lambda^2 + 4h^2 + 4h^2\lambda^2}}{2\lambda} \quad . \; . \; . \quad (83)$$

Беря разность корней, или, что тоже, измѣряя разстояніе между пунктами съ крайними значеніями, равное $2d$, и подставляя вмѣсто b его значеніе $\frac{2a}{sin\ \Delta}$, гдѣ $2a$ мощность залежи, мы найдемъ

$$x_1 - x_2 = 2d = \frac{\sqrt{b^2\lambda^2 + 4h^2 + 4h^2\lambda^2}}{\lambda}$$

$$d^2 = \frac{b^2\lambda^2 + 4h^2 + 4h^2\lambda^2}{4\lambda^2} = \frac{b^2 tg^2\Delta + 4h^2 + 4h^2 tg^2\Delta}{4\, tg^2\Delta} =$$

$$= \frac{b^2 sin^2\Delta + 4h^2 cos^2\Delta + 4h^2 sin^2\Delta}{4\, sin^2\Delta} = \frac{b^2 sin^2\Delta + 4h^2}{4 sin^2\Delta} =$$

$$= \frac{4a^2 + 4h^2}{4\, sin^2\Delta} = \frac{a^2 + h^2}{sin^2\Delta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (84)$$

Если паденіе залежи отвѣсно, т. е. $\Delta = 90$, то

$$d^2 = a^2 + h^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (85)$$

т. е. мощность залежи въ этомъ случаѣ будетъ всегда меньше, чѣмъ разстояніе между пунктами съ крайними значеніями горизонтальнаго напряженія.

Для залежей съ крутымъ паденіемъ разстояніе между пунктами съ крайними значеніями горизонтальнаго напряженія будетъ нѣсколько большимъ, чѣмъ для отвѣсно падающихъ залежей. Это разстояніе будетъ возрастать обратно пропорціонально углу паденія.

Беря для случая отвѣсно падающей залежи значеніе вертикальнаго напряженія и опредѣляя его maximum, предварительно перенеся начало координатъ въ середину залежи, т. е. положивъ $x = x' + \frac{b}{2}$ и слѣдовательно

$$\frac{V}{\omega} = 2\left(arctg\frac{x' + \frac{b}{2}}{h} - arctg\frac{x' - \frac{b}{2}}{h}\right),$$

дифференцируемъ это выраженіе и приравниваемъ результатъ нулю

$$\frac{dV}{\omega} = 2\left(\frac{1}{1+\left(\frac{x'+\frac{b}{2}}{h}\right)^2}\,\frac{1}{h} - \frac{1}{1+\left(\frac{x'-\frac{b}{2}}{h}\right)^2}\,\frac{1}{h}\right)dx = 0.$$

Упрощая найденное выраженіе мы получаемъ, что $x' = 0$, т. е. пунктъ съ V_{max} лежитъ надъ серединой залежи.

Такъ какъ общее алгебраическое опредѣленіе пунктовъ, для которыхъ $H' = 0$ и $V' = max$, весьма затруднительно, то удобнѣе для произвольныхъ величинъ λ, h и a (или b) и для различныхъ значеній x вычислить отношеніе $\frac{H'}{\omega}$ и $\frac{V'}{\omega}$ и построить діаграммы, по которымъ уже легко будетъ опредѣлить максимальный и нулевой пунктъ для любого случая. (См. Smyth: „Magnetic Observations in Geological Mapping“).

ТАБЛИЦА I

Значеній $\frac{sin\alpha_0}{sin\alpha}$

α	$=1^0$	2^0	3^0	4^0	5^0	6^0	7^0	8^0	9^0	10^0	11^0	12^0	13^0	14^0	15^0	16^0	17^0	18^0	19^0	20^0	21^0	22^0	23^0
α_0																							
10	9.95	4.97	3.32	2.49	1.99	1.66	1.42	1.25	1.11	1.00	.91	.83	.77	.72	.67	.63	.59	.56	.53	.51	.48	.46	.44
11	10.93	5.47	3.64	2.73	2.19	1.82	1.57	1.37	1.22	1.10	1.00	.92	.85	.79	.74	.69	.65	.62	.59	.56	.53	.51	.49
12	11.91	5.96	3.97	2.98	2.39	1.99	1.71	1.49	1.33	1.20	1.09	1.00	.92	.86	.80	.75	.71	.67	.64	.61	.58	.55	.53
13	12.89	6.44	4.30	3.22	2.58	2.15	1.85	1.62	1.44	1.29	1.18	1.08	1.00	.93	.87	.82	.77	.73	.69	.66	.63	.60	.58
14	13.86	6.93	4.62	3.47	2.78	2.31	1.98	1.74	1.55	1.39	1.27	1.16	1.07	1.00	.93	.88	.83	.78	.74	.71	.67	.65	.62
15	14.83	7.42	4.94	3.71	2.97	2.48	2.12	1.86	1.65	1.49	1.36	1.24	1.15	1.07	1.00	.94	.88	.84	.79	.76	.72	.69	.66
15	15.79	7.90	5.27	3.95	3.16	2.64	2.26	1.98	1.76	1.59	1.44	1.33	1.22	1.14	1.06	1.00	.94	.89	.85	.81	.77	.74	.70
17	16.75	8.38	5.59	4.19	3.35	2.80	2.40	2.10	1.87	1.68	1.53	1.41	1.30	1.21	1.13	1.06	1.00	.95	.90	.85	.82	.78	.75
18	17.71	8.85	5.90	4.43	3.55	2.96	2.54	2.22	1.97	1.78	1.62	1.49	1.37	1.28	1.19	1.12	1.06	1.00	.95	.90	.86	.82	.79
19	18.65	9.33	6.22	4.67	3.73	3.11	2.67	2.34	2.08	1.87	1.71	1.57	1.45	1.35	1.26	1.18	1.11	1.05	1.00	.95	.91	.87	.83
20	19.60	9.80	6.53	4.90	3.92	3.27	2.81	2.46	2.19	1.97	1.79	1.64	1.52	1.41	1.32	1.24	1.17	1.11	1.05	1.00	.95	.91	.87
21	20.53	10.27	6.85	5.14	4.11	3.43	2.94	2.57	2 29	2.06	1 88	1.72	1.59	1.48	1.38	1.30	1.23	1.16	1.10	1.05	1 00	.96	.92
22	21.46	10.73	7.16	5.37	4.30	3.58	3.07	2.69	2.39	2.16	1.96	1.80	1.66	1.55	1.45	1.36	1.28	1.21	1.15	1.09	1.05	1.00	.96
23	22.39	11.19	7.46	5.60	4.48	3.74	3.21	2.81	2.50	2.25	2.05	1.88	1.74	1.61	1.51	1.42	1.34	1.26	1.20	1.14	1.09	1.04	1.00
24	23.30	11.65	7.77	5.83	4.67	3.89	3.34	2.92	2.60	2.34	2.13	1.96	1.81	1.68	1.57	1.48	1.39	1.32	1.25	1.19	1.13	1.09	1.04
25	24.21	12.11	8.07	6.06	4.85	4.04	3.47	3.04	2.70	2.43	2.21	2.03	1.88	1.75	1.63	1.53	1.44	1.37	1.30	1.24	1.18	1.13	1.08
26	25.12	12.56	8.38	6.28	5.03	4.19	3.60	3.15	2.80	2.52	2 30	2.11	1.95	1.81	1.69	1.59	1.50	1.42	1.35	1.28	1.22	1.17	1.12
27	26.01	13.01	8.67	6.51	5.21	4.34	3.72	3.26	2.90	2.61	2.38	2.18	2.02	1.88	1.75	1.65	1.55	1.47	1.39	1.33	1.27	1.21	1.16
28	26.90	13.45	8.97	6.73	5.39	4.49	3.85	3.37	3.00	2.70	2.46	2.26	2.09	1.94	1.81	1.70	1.61	1.52	1.44	1.37	1.31	1.25	1.20
29	27.78	13.89	9.26	6.95	5.56	4.64	3.98	3.48	3.10	2.79	2.54	2.33	2.15	2.00	1.87	1.76	1.66	1.57	1.49	1.42	1.35	1.29	1 24
30	28.65	14.33	9.55	7 17	5.74	4.78	4.10	3.59	3.20	2.88	2.62	2.40	2.22	2.07	1.93	1.81	1.71	1.62	1.53	1.46	1.39	1.33	1.28

ТАБЛИЦА I

Значеній $\frac{sin\alpha_0}{sin\alpha}$

α / α_0	24°	25°	26°	27°	28°	29°	30°	31°	32°	33°	34°	35°	36°	37°	38°	39°	40°	41°	42°	43°	44°	45°	46°
10	.43	.41	.40	.38	.37	.36	.35	.34	.33	.32	.31	.30	.29	.29	.28	.27	.27	.26	.26	.25	.25	.24	.24
11	.47	.45	.43	.42	.41	.39	.38	.37	.36	.35	.34	.33	.32	.32	.31	.30	.30	.29	28	.28	.27	.27	.26
12	.51	.49	.47	.46	.44	.43	.42	.40	.39	.38	.37	.36	.35	.34	.34	.33	.32	.32	.31	.30	.30	.29	.29
13	.55	.53	.51	.49	.48	.46	.45	.44	.42	.41	.40	.39	.38	.37	.36	.36	.35	.34	.34	.33	.32	.32	.31
14	.59	.57	.55	.53	.51	.50	.48	.47	.46	.44	.43	.42	.41	.40	.39	.38	.38	.37	.36	.35	.35	.34	.34
15	.64	.61	.59	.57	.55	.53	.52	.50	.49	.47	.46	.45	.44	.43	.42	.41	.40	.39	.39	.38	.37	.37	.36
16	.68	.65	.63	.61	.59	.57	.55	.53	.52	51	.49	.48	.47	.46	.45	.44	.43	.42	.41	.40	.40	.39	.38
17	.72	.69	.67	.64	.62	.60	.58	.57	.55	.54	.52	.51	.50	.49	.47	.46	.45	.45	.44	.43	.42	.41	.41
18	.76	.73	.70	.68	.66	.64	.62	.60	.58	.57	.55	.54	.53	.51	.50	.49	.48	.47	.46	.45	.44	.44	.43
19	.80	.77	.74	.72	.69	.67	.65	.63	.61	.60	.58	.57	.55	.54	.53	.52	.51	.50	.49	.48	.47	.46	.45
20	.84	.81	.78	.75	.73	.70	.68	66	.64	.63	.61	.60	.58	.57	.56	.54	.53	.52	.51	.50	.49	,48	.47
21	.88	.85	.82	.79	.76	.74	.72	.70	.68	.66	.64	.62	.61	.60	.58	.57	.56	.55	.54	.53	.52	.51	.50
22	.92	.89	.85	.82	.80	.77	.75	.73	.71	.69	.67	.65	.64	.62	.61	.59	.58	.57	.56	.55	.54	.53	.52
23	.96	.92	.89	.86	.83	.81	.78	.76	.74	.72	.70	.68	.66	.65	.63	.62	.60	.60	.58	.57	.56	.55	.54
24	1.00	.96	.93	.90	.87	.84	.81	.79	.77	.75	.73	.71	.69	.68	.66	.65	.63	.62	.61	.60	.58	.57	.56
25	1.04	1.00	.96	.93	.90	.87	.84	.82	.80	.78	.76	.74	.72	.70	.69	.67	.66	.64	.63	.62	.61	.60	.59
26	1.08	1.04	1.00	.97	.93	.90	.88	.85	.83	.80	.78	.76	.75	.73	.71	.70	.68	.67	.65	.64	.63	.62	.61
27	1.12	1.07	1.04	1.00	.97	.94	.91	.88	.86	.83	.81	.79	.77	.75	.74	.72	.71	.69	.68	.67	.65	.64	.63
28	1.15	1.11	1.07	1.03	1.00	.97	.94	.91	.89	.86	.84	.82	.80	.78	.76	.75	.73	.72	.70	.69	.68	.66	.65
29	1.19	1.15	1.11	1.07	1.03	1.00	.97	.94	.91	.89	.87	.84	.82	.81	.79	.77	.75	.74	.72	.71	.70	.69	.67
30	1.23	1.18	1.14	1.10	1.06	1.03	1.00	.97	.94	.92	.89	.87	.85	.83	.81	.79	.78	.76	.75	.73	.72	.71	.69

ТАБЛИЦА І

Значеній $\frac{sin\alpha_0}{sin\alpha}$

α / α_0	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	55°	56°	57°	58°	59°	60°	61°	62°	63°	64°	65°	66°	67°	68°	69°
10°	.24	.23	.23	.23	.22	.22	.22	.21	.21	.21	.21	.20	.20	.20	.20	.20	.19	.19	.19	.19	.19	.19	.19
11	.26	.26	.25	.25	.25	.24	.24	.24	.23	.23	.23	.22	.22	.22	.22	.22	.21	.21	.21	.21	.21	.21	.20
12	.28	.28	.27	.27	.27	.26	.26	.26	.25	.25	.25	.24	.24	.24	.24	.23	.23	.23	.23	.23	.23	.22	.22
13	.31	.30	.30	.29	.29	.28	.28	.28	.27	.27	.27	.26	.26	.26	.26	.25	.25	.25	.25	.25	.24	.24	.24
14	.33	.33	.32	.32	.31	.31	.30	.30	.29	.29	.29	.28	.28	.28	.28	.27	.27	.27	.27	.26	.26	.26	.26
15	.35	.35	.34	.34	.33	.33	.32	.32	.32	.31	.31	.30	.30	.30	.30	.29	.29	.29	.29	.28	.28	.28	.28
16	.38	.37	.36	.36	.35	.35	.34	.34	.34	.33	.33	.32	.32	.32	.31	.31	.31	.31	.30	.30	.30	.30	.29
17	.40	.39	.39	.38	.38	.37	.37	.36	.36	.35	.35	.34	.34	.34	.33	.33	.33	.32	.32	.32	.32	.31	.31
18	.42	.42	.41	.40	.40	.39	.39	.38	.38	.37	.37	.36	.36	.36	.35	.35	.35	.34	.34	.34	.34	.33	.33
19	.44	.44	.43	.42	.42	.41	.41	.40	.40	.39	.39	.38	.38	.38	.37	.37	.36	.36	.36	.36	.35	.35	.35
20	.47	.46	.45	.45	.44	.43	.43	.42	.42	.41	.41	.40	.40	.39	.39	.39	.38	.38	.38	.47	.37	.37	.37
21	.49	.48	.47	.47	.46	.45	.45	.44	.44	.43	.43	.42	.42	.41	.41	.41	.40	.40	.39	.49	.39	.39	.38
22	.51	.50	.50	.49	.48	.47	.47	.46	.46	.45	.45	.44	.44	.43	.43	.42	.42	.42	.41	.41	.41	.40	.40
23	.53	.53	.52	.51	.50	.50	.49	.48	.48	.47	.47	.46	.46	.45	.45	.44	.44	.43	.43	.43	.42	.42	.42
24	.56	.55	.54	.53	.52	.52	.51	.50	.50	.49	.48	.48	.47	.47	.46	.46	.46	.45	.45	.44	.44	.44	.44
25	.58	.57	.56	.55	.54	.54	.53	.52	.52	.51	.50	.50	.49	.49	.48	.48	.47	.47	.47	.46	.46	.46	.45
26	.60	.59	.58	.57	.56	.56	.55	.54	.53	.53	.52	.52	.51	.51	.50	.50	.49	.49	.48	.48	.48	.47	.47
27	.62	.61	.60	.59	.58	.58	.57	.56	.55	.55	.54	.53	.53	.52	.52	.51	.51	.50	.50	.50	.49	.49	.49
28	.64	.63	.62	.61	.60	.60	.59	.58	.57	.57	.56	.55	.55	.54	.54	.53	.53	.52	.52	.51	.51	.51	.50
29	.66	.65	.64	.63	.62	.61	.61	.60	.59	.58	.58	.57	.57	.56	.55	.55	.54	.54	.53	.53	.53	.52	.52
30	.68	.67	.66	.65	.64	.63	.63	.62	.61	.60	.60	.59	.58	.58	.57	.57	.56	.56	.55	.55	.54	.54	.54

ТАБЛИЦА I

Значеній $\frac{sin\alpha_0}{sin\alpha}$

α / α_0	70°	71°	72°	73°	74°	75°	76°	77°	78°	79°	80°	81°	82°	83°	84°	85°	86°	87°	88°	89°	90°
10	.18	.18	.18	.18	.18	.18	.18	.18	.18	.18	.18	.17	.17	.17	.17	.17	.17	.17	.17	.17	.17
11	.20	.20	.20	.20	.20	.20	.20	.19	.19	.19	.19	.19	.19	.19	.19	.19	.19	.19	.19	.19	.19
12	.22	.22	.22	.22	.22	.21	.21	.21	.21	.21	.21	.21	.21	.21	.21	.21	.21	.21	.21	.21	.21
13	.24	.24	.24	.23	.23	.23	.23	.23	.23	.23	.23	.23	.23	.23	.23	.22	.22	.22	.22	.22	.22
14	.26	.25	.25	.35	.25	.25	25	.25	.25	.25	.24	.24	.24	.24	.24	.24	.24	.24	.24	.24	.24
15	.27	.27	.27	.27	.27	.27	.27	.26	.26	.26	.26	.26	.26	.26	.26	.26	.26	.26	.26	.26	.26
16	.29	.29	.29	.29	.29	.28	.28	.28	.28	.28	.28	.28	.28	.28	.28	.28	.28	.28	.27	.27	.27
17	.31	.31	.31	.30	.30	.30	.30	.30	.30	.30	.30	.30	.29	.29	.29	.29	.29	.29	.29	.29	.29
18	.33	.33	.32	32	.32	.32	.32	.32	.31	.31	.31	.31	.31	.31	.31	.31	.31	.31	.31	.31	.31
19	.35	.34	.34	.34	.34	.34	.33	.33	.33	.33	.33	.33	.33	.33	.33	.33	.33	.33	.32	.32	.32
20	.36	.36	.36	.36	.36	.35	.35	.35	.35	.35	.34	.35	.34	.34	.34	.34	.34	.34	.34	.34	.34
21	.38	.38	.38	.37	.37	.37	.37	.37	.37	.36	.36	.36	.36	.36	.36	.36	.36	.36	.36	.36	.36
22	.40	.40	.39	.39	.39	.39	.39	.38	.38	.38	.38	.38	.38	.38	.38	.38	.37	.37	.27	.37	.37
23	.42	.41	.41	.41	.41	.40	.40	.40	.40	.40	.40	.39	.39	.39	.39	.39	.39	.39	.29	.39	.39
24	.43	.43	.43	.42	.42	.42	.42	.42	.41	.41	.41	.41	.41	.41	.41	.41	.41	.41	.41	.41	.41
25	.45	.45	.44	.44	.44	.44	.43	.43	.43	.43	.43	.43	.43	.42	.42	.42	.42	.42	.42	.42	.42
26	.47	.42	.46	.46	.46	.45	.45	.45	.45	.45	.44	.44	.44	.44	.44	.44	.44	.44	.44	.44	.44
27	.48	.48	.48	.47	.47	.47	.47	.46	.46	.46	.46	.46	.46	.46	.46	.45	.45	.45	.45	.45	.45
28	.50	.50	.49	.49	.49	.49	.48	.48	.48	.48	48	.47	.47	.47	.47	.47	.47	.47	.47	.47	.47
29	.52	.51	.51	.51	.50	.50	.50	.50	.49	.49	.49	.49	.49	.49	.49	.49	.49	.48	.48	.48	.48
30	.53	.53	.53	.52	.52	.52	.51	.51	.51	.51	.51	.51	.50	.50	.50	.50	.50	.50	.50	.50	.50

ТАБЛИЦА II

Значенiй $\frac{tang\alpha_0}{tang\alpha}$

α / α_0	$=1^0$	2^0	3^0	4^0	5^0	6^0	7^0	8^0	9^0	10^0	11^0	12^0	13^0	14^0	15^0	16^0	17^0	18^0	19^0	20^0	21^0	22^0	23^0
10^0	10.10	5.05	3.36	2.52	2.01	1.68	1.44	1.25	1.11	1.00	.91	.83	.76	.71	.66	.61	.58	.54	.51	.48	.46	.44	.41
11	11.14	5.56	3.71	2.78	2.22	1.85	1.58	1.38	1.23	1.10	1.00	.91	.84	.78	.72	.68	.64	.60	.56	.53	.51	.48	.46
12	12.18	6.09	4.06	3.04	2.43	5.02	1.73	1.51	1.34	1.20	1.09	1.00	.92	.85	.79	.74	.69	.65	.62	.58	.55	.53	.50
13	13.23	6.61	4.40	3.30	2.64	2.20	1.88	1.64	1.46	1.31	1.19	1.09	1.00	.93	.86	.80	.75	.71	.67	.63	.60	.57	.54
14	14.28	7.14	4.76	3.57	2.85	2.37	2.03	1.77	1.57	1.41	1.28	1.17	1.08	1.00	.93	.87	.82	.77	.72	.68	.65	.62	.59
15	15.35	7.67	5.11	3.83	3.06	2.55	2.18	1.91	1.69	1.52	1.38	1.26	1 16	1.07	1.00	.92	.88	.82	.78	.74	.70	.66	.63
16	16.43	8.21	5.47	4.10	3.28	2.73	2.33	2.04	1.81	1.63	1.47	1.35	1.24	1.15	1.07	1.00	.94	.88	.83	.79	.75	.71	.67
17	17.51	8.75	5.83	4.37	3.49	2.91	2.49	2.17	1.93	1.73	1.57	1.44	1.32	1.23	1.14	1.07	1.00	.94	.89	.84	.80	.76	.72
18	18.61	9.30	6.20	4.65	3.71	3.09	2.65	2.31	2.05	1.84	1.67	1.53	1.41	1.30	1.21	1.13	1.06	1.00	.94	.89	.85	.80	.76
19	19.73	9.86	6.57	4.92	3.94	3.28	2.80	2.45	2.17	1.95	1.77	1.62	1.49	1.38	1.28	1.20	1.13	1.06	1.00	.95	.90	.85	.81
20	20.85	10.42	6.94	5.20	4.16	3.46	2.96	2.59	2.30	2.06	1.87	1.71	1.58	1.46	1.36	1.27	1.19	1.12	1.06	1.00	.95	.90	.86
21	21.99	10.99	7.32	5.49	4.39	3.65	3.13	2.73	2.42	2.18	1.97	1.81	1.66	1.54	1.43	1.34	1.26	1.18	1.11	1.05	1.00	.95	.90
22	23.15	11.57	7.71	5.70	4.62	3.84	3.29	2.87	2.55	2.29	2.08	1.91	1.75	1.62	1.51	1.41	1.32	1.24	1.17	1.11	1.05	1.00	.95
23	24.32	12.15	8.10	6.07	4.85	4.04	3.46	3.02	2.68	2.41	2.18	2 00	1.84	1.70	1.58	1.48	1.39	1.31	1.23	1.17	1.11	1.05	1.00
24	25.51	12.75	8.49	6.37	5.09	4.24	3.63	3.17	2.81	2.52	2.29	2.09	2.93	1.79	1.66	1.55	1.46	1.37	1.29	1.22	1.16	1 10	1.05
25	26.71	13.35	8.90	6.67	5.33	4.44	3.80	3.32	2.94	2.64	2.40	2.19	2.02	1.87	1.74	1.63	1.52	1.43	1.35	1.28	1.21	1.15	1.10
26	27.94	13 97	9.31	6.97	5.57	4.64	3.97	3.47	3.08	2.77	2.51	2.29	2.11	1.96	1.82	1.70	1.59	1.50	1.42	1.34	1.27	1.21	1.15
27	29.19	14.59	9.72	7.29	5.82	4.85	4.15	3.63	3.22	2.89	2.62	2.40	2.21	2.04	1.90	1.78	1.67	1.57	1.48	1.40	1.33	1.26	1.20
28	30.46	15.23	10.15	7.60	6.08	5.06	4.33	3.78	3.36	3.01	2.73	2.50	2.30	2.13	1.98	1.85	1.74	1.64	1.54	1.46	1.38	1.32	1.25
29	31.76	15.87	10.58	7.93	6.34	5.27	4.51	3.94	3.50	3.14	2.85	2.61	2.40	2.22	2.07	1.93	1.81	1.71	1.61	1.52	1.44	1.37	1.31
30	33.08	16.53	11.02	8.26	6.60	5.49	4.70	4.11	3.64	3.27	2.97	2.72	2.50	2.32	2.15	2.01	1.89	1.78	1.68	1.59	1.50	1.43	1.36

ТАБЛИЦА II

Значеній $\frac{tang\alpha_0}{tang\alpha}$

α / α_0	24°	25°	26°	27°	28°	29°	30°	31°	32°	33°	34°	35°	36°	37°	38°	39_0	40°	41°	42°	43°	44°	45°	46°
10°	.40	.38	.36	.35	.33	.32	.30	.29	.28	.27	.26	.25	.24	.23	.23	.22	.21	.20	.20	.19	.18	.18	.17
11	.44	.42	.40	.38	.37	.35	.34	.32	.31	.30	.29	.28	.27	.26	.25	.24	.23	.22	.22	.21	.20	.19	19
12	.48	.46	.44	.42	.40	.38	.37	.35	.34	.33	.31	.30	.29	.28	.27	.26	.25	.24	.24	23	.22	.21	.20
13	.52	.49	.47	.45	.43	.42	.40	.38	.40	.36	.34	.33	.32	.31	.30	.28	.27	.27	.26	.25	.24	.23	.22
14	.56	.53	.51	.49	.47	.45	.43	.41	.41	.38	.37	.36	.34	.33	.32	.31	.30	.29	.28	.27	.26	.25	.24
15	.60	.57	.55	.53	.50	.48	.46	.45	.43	.41	.40	.38	.37	.36	.34	.33	.32	.31	.30	.29	.28	.27	.26
16	.64	.61	.59	.56	.54	.52	.50	.48	.46	.44	.42	.41	.39	.38	.37	.35	.34	.33	.32	.31	.30	.29	.28
17	.69	.66	.63	.50	.57	.55	.53	.51	.49	.47	.45	.44	.42	.41	.39	.38	.36	.35	.34	.33	.32	.31	.29
18	.73	.70	.67	.64	.61	.59	.56	.54	.52	.50	.48	.46	.45	.43	.42	.40	.39	.37	.36	.35	.34	.32	.31
19	.77	.74	.71	.68	.65	.62	.60	.57	.55	.53	.51	.49	.47	.46	.44	.42	.41	.40	.38	.37	.36	.34	.33
20	.82	.78	.75	.71	.68	.66	.63	.61	.58	.56	.54	.52	.50	.48	.47	.45	.43	.42	.40	.39	.38	.36	.35
21	.86	.82	.79	.75	.72	.69	.66	.64	.61	.59	.57	.55	.53	.51	.49	.47	.46	.44	43	.41	.40	.38	.37
22	.91	.87	.83	.79	.76	.73	.70	.67	.65	.62	.60	.58	.46	.54	.52	.50	.48	.46	.45	.43	.42	.40	.39
23	.99	.91	.87	.83	.80	.77	.73	.71	.68	.65	.63	.61	.58	.56	.54	.52	.51	.49	.47	.45	.44	.42	.51
24	1.00	.95	.91	.87	.84	.80	.77	.74	.71	.69	.66	.64	.61	.59	.57	.55	.53	.51	.49	.48	.46	.44	.43
25	1.05	1.00	.96	.91	.88	.84	.81	.78	.75	.72	.69	.67	.64	.62	.60	.58	.56	.54	.52	.50	.48	.47	.45
26	1.09	1.05	1.00	.96	.92	.88	.84	.81	.78	.75	.72	.70	.67	.65	.62	.60	.58	.56	.54	.52	.50	.49	.47
27	1.14	1.09	1.04	1.00	.96	.92	.88	.85	.81	.78	.75	.73	.70	.68	.65	63	.61	.59	.57	.55	.53	.51	.49
28	1.19	1.14	1.09	1.04	1.00	.96	.92	.88	.85	.82	.79	.76	.73	.71	.68	.66	.63	.61	.59	.57	.55	.53	.51
29	1.24	1.19	1.14	1.09	1.04	1.00	.96	.92	.89	.85	.82	.79	.76	.74	.71	.68	.66	.64	.62	.59	.57	.55	.53
30	1.30	1.24	1.18	1.13	1.09	1.04	1.00	.96	.92	.89	.86	.82	.79	.77	.74	.71	.69	.66	.64	.62	.60	.58	.56

ТАБЛИЦА II

Значеній $\frac{tang\alpha_0}{tang\alpha}$

α / α_0	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	55°	56°	57°	58°	59°	60°	61°	62°	63°	64°	65°	66°	67°	68°	69°
10°	.16	.16	.15	.15	.14	.14	.13	.13	.12	.12	.11	.11	.11	.10	.10	.09	.09	.09	.08	.08	.07	.07	.07
11	.18	.17	.17	.16	.16	.15	.15	.14	.14	.13	.13	.12	.12	.11	.11	.10	.10	.09	.09	.09	.08	.08	.07
12	.20	.19	.18	.18	.17	.17	.16	.15	.15	.14	.14	.13	.13	.12	.12	.11	.11	.10	.10	.09	.09	.09	.08
13	.21	.21	.20	.19	.19	.18	.17	.17	.16	.16	.15	.14	.14	.13	.13	.12	.12	.11	.11	.10	.10	.09	.09
14	.23	.23	.22	.21	.20	.19	.19	.18	.17	.17	.16	.16	.15	.14	.14	.13	.13	.12	.12	.11	.11	.10	.10
15	.25	.24	.23	.22	.22	.21	.20	.19	.19	.18	.17	.17	.16	.15	.15	.14	.14	.13	.12	.12	.11	.11	.10
16	.27	.26	.25	.24	.23	.22	.22	.21	.20	.19	.19	.18	.17	.17	.16	.15	.15	.14	.13	.13	.12	.12	.11
17	.28	.27	.27	.26	.25	.24	.23	.22	.21	.21	.20	.19	.18	.18	.17	.16	.16	.15	.14	.14	.13	.12	.12
18	.30	.29	.28	.27	.26	.25	.24	.24	.23	.22	.21	.20	.19	.19	.18	.17	.17	.16	.15	.14	.14	.13	.12
19	.32	.31	.30	.29	.28	.27	.26	.25	.24	.23	.22	.21	.21	.20	.19	.18	.17	.17	.16	.15	.15	.14	.13
20	.34	.33	.32	.30	.29	.28	.27	.26	.25	.25	.24	.23	.22	.21	.20	.19	.18	.18	.17	.16	.15	.15	.14
21	.36	.35	.33	.32	.31	.30	.29	.28	.27	.26	.25	.24	.23	.22	.21	.20	.20	.19	.18	.17	.16	.15	.15
22	.38	.36	.35	.34	.33	.32	.30	.29	.28	.27	.26	.25	.24	.23	.22	.21	.21	.20	.19	.18	.17	.16	.15
23	.40	.37	.37	.36	.34	.33	.32	.31	.30	.29	.28	.26	.25	.24	.23	.23	.22	.21	.20	.19	.18	.17	.16
24	.41	.40	.39	.37	.36	.35	.34	.32	.31	.30	.29	.28	.27	.26	.25	.24	.23	.22	.21	.20	.19	.18	.17
25	.43	.43	.40	.39	.38	.36	.35	.34	.33	.31	.30	.29	.28	.27	.26	.25	.24	.23	.22	.21	.20	.19	.18
26	.45	.44	.42	.41	.39	.38	.37	.35	.34	.33	.32	.30	.29	.28	.27	.26	.25	.24	.23	.22	.21	.20	.19
27	.47	.46	.44	.43	.41	.40	.38	.37	.36	.34	.33	.32	.31	.29	.28	.27	.26	.25	.24	.23	.22	.21	.20
28	.50	.48	.46	.45	.43	.41	.40	.39	.37	.36	.34	.33	.32	.31	.29	.28	.27	.26	.25	.25	.23	.21	.20
29	.52	.50	.48	.46	.45	.43	.42	.40	.39	.37	.36	.35	.33	.32	.31	.29	.28	.27	.26	.25	.23	.22	.21
30	.54	.52	.50	.48	.47	.45	.43	.42	.40	.39	.37	.36	.35	.33	.32	.31	.29	.28	.27	.26	.24	.23	.22

ТАБЛИЦА II

Значеній $\frac{tang\alpha_0}{tang\alpha}$

α / α_0	70°	71°	72°	73°	74°	75°	76°	77°	78°	79°	80°	81°	82°	83°	84°	85°	86°	87°	88°	89°	90°
10	.06	.06	.06	.05	.05	.05	.04	.04	.04	.03	.03	.03	.02	.02	.02	.01	.01	.01	.01	.00	0
11	.07	.07	.06	.06	.06	.05	.05	.04	.04	.04	.03	.03	.03	.02	.02	.02	.01	01	.01	.00	0
12	.08	.07	.07	.06	.06	.06	.05	.05	.04	.04	.04	.03	.03	.03	.02	.02	.01	.01	.01	.00	0
13	.08	.08	.07	.07	.07	.06	.06	.05	.05	.04	.04	.04	.03	.03	.02	.02	.02	.02	.01	.00	0
14	.09	.09	.08	.08	.07	.07	.06	.06	.05	.05	.04	.04	.03	.03	.03	.02	.02	.02	.01	.00	0
15	.10	.09	.09	.08	.08	.07	.07	.06	.06	.05	.05	.04	.04	.03	.03	.02	.02	.02	.01	.00	0
16	.10	.10	.09	.09	.08	.08	.07	.07	.06	.06	.05	.04	.04	.03	.03	.02	.02	.02	.01	.00	0
17	.11	.10	.10	.09	.09	.08	.08	.07	.06	.06	.05	.05	.04	.04	.03	.03	.02	.02	.01	.00	0
18	.12	.11	.11	.10	.09	.09	.08	.07	.07	.06	.06	.05	.05	.04	.03	.03	.02	.02	.01	.00	0
19	.12	.12	.11	.10	.10	.09	.09	.08	.07	.07	.06	.05	.05	.04	.04	.03	.02	.02	.01	.01	0
20	.13	.12	.12	.11	.10	.10	.09	.08	.08	.07	.06	.06	.05	.04	.04	.03	.02	.02	.01	.01	0
21	.14	.13	.12	.12	.11	.10	.10	.09	.08	.07	.07	.06	.05	.05	.04	.03	.03	.03	.01	.01	0
22	.15	.14	.13	.12	.12	.11	.10	.09	.09	.08	.07	.06	.06	.05	.04	.03	.03	.03	.01	.01	0
23	.15	.15	.14	.13	.12	.11	.11	.10	.09	.08	.07	.07	.06	.05	.04	.04	.03	.03	.01	.01	0
24	.16	.15	.14	.14	.13	.12	.11	.10	.09	.09	.08	.07	.06	.05	.05	.04	.03	.03	.01	.01	0
25	.17	.16	.15	.14	.13	.12	.12	.11	.10	.09	.08	.07	.07	.06	.05	.04	.03	.03	.02	.01	0
26	.18	.17	.16	.15	.14	.13	.12	.11	.10	.09	.09	.08	.07	.06	.05	.04	.03	.03	.02	.01	0
27	.19	.17	.17	.16	.15	.14	.13	.12	.11	.10	.09	.08	.07	.06	.05	.04	.03	.03	.02	.01	0
28	.19	.18	.17	.16	.15	.14	.13	.12	.11	.10	.09	.08	.07	.06	.05	.05	.04	.04	.02	.01	0
29	.20	.19	.18	.17	.16	.15	.14	.13	.12	.11	.10	.09	.08	.07	.06	.05	.04	.04	.02	.01	0
30	.21	.20	.19	.18	.17	.15	.14	.13	.12	.11	.10	.09	.08	.07	.06	.05	.04	.04	.02	.01	0

ТАБЛИЦА III.

n	$\log\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}$	n	$\log\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}$	n	$\log\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}$	n	$\log\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}$
0,00	—	∞	0,35	0,15198	1,4190	0,70	0,05163	1,1262	1,50	9,94130	0,8736
0,01	0,66667	4,6416	0,36	0,14790	1,4057	0,71	0,04958	1,1209	1,60	9,93196	0,8550
0,02	0,56632	3,6840	0,37	0,14393	1,3929	0,72	0,04756	1,1106	1,70	9,92318	0,8379
0,03	0,50763	3,2183	0,38	0,14007	1,3606	0,73	0,04556	1,1106	1,80	9,91491	0,8221
0,04	0,46598	2,9240	0,39	0,13636	1,3687	0,74	0,04359	1,1056	1,90	9,90708	0,8074
0,05	0,43368	2,7144	0,40	0,13265	1,3572	0,75	0,04165	1,1006	2,00	9,89966	0,7937
0,06	0,40728	2,5544	0,41	0,12907	1,3461	0,76	0,03973	1,0958	2,10	9,89259	0,7809
0,07	0,38497	2,4264	0,42	0,12558	1,3353	0,77	0,03784	1,0910	2,20	9,88596	0,7689
0,08	0,36564	2,3208	0,43	0,12288	1,3249	0,78	0,03597	1,0863	2,30	9,87942	0,7576
0,09	0,34859	2,2314	0,44	0,11885	1,3148	0,79	0,03412	1,0817	2,40	9,87326	0,7469
0,10	0,33333	2,1544	0,45	0,11560	1,3050	0,80	0,03230	1,0772	2,50	9,86735	0,7368
0,11	0,31954	2,0871	0,46	0,11241	1,2954	0,81	0,03051	1,0728	2,60	9,86168	0,7272
0,12	0,30694	2,0274	0,47	0,10930	1,2862	0,82	0,02873	1,0684	2,70	9,85621	0,7181
0,13	0,29535	1,9740	0,48	0,10625	1,2772	0,83	0,02629	1,0641	2,80	9,85095	0,7095
0,14	0,28462	1,9259	0,49	0,10327	1,2684	0,84	0,02524	1,0598	2,90	9,84587	0,7012
0,15	0,27464	1,8821	0,50	0,10034	1,2599	0,85	0,02353	1,0557	3,00	9,84096	0,6934
0,16	0,26529	1,8420	0,51	0,09748	1,2516	0,86	0,02183	1,0516	3,10	9,83621	0,6858
0,17	0,25650	1,8051	0,52	0,09467	1,2436	0,87	0,02016	1,0475	3,20	9,83162	0,6786
0,18	0,24824	1,7711	0,53	0,09191	1,2357	0,88	0,01851	1,0435	8,30	9,82716	0,6717
0,19	0,24042	1,7395	0,54	0,08920	1,2280	0,89	0,01687	1,0396	3,40	9,82284	0,6650
0,20	0,23299	1,7100	0,55	0,08655	1,2205	0,90	0,01525	1,0357	3,50	9,81864	0,6586
0,21	0,22593	1,6824	0,56	0,08394	1,2133	0,91	0,01365	1,0319	3,60	9,81457	0,6525
0,22	0,21919	1,6565	0,57	0,08138	1,2061	0,92	0,01207	1,0282	3,70	9,81060	0,6465
0,23	0,21276	1,6321	0,58	0,07886	1,1991	0,93	0,01051	1,0245	3,80	9,80674	0,6408
0,24	0,20660	1,6091	0,58	0,07638	1,1923	0,94	0,00896	1,0208	3,90	9,80293	0,6353
0,25	0,20068	1,5874	0,60	0,07395	1,1857	0,95	0,00743	1,0172	4,00	9,79931	0,6300
0,26	0,19501	1,5668	0,61	0,07156	1,1791	0,96	0,00591	1,0137	4,10	9,79574	0,6248
0,27	0,18955	1,5472	0,62	0,06920	1,1727	0,97	0,00441	1,0102	4,20	9,79225	0,6198
0,28	0,18428	1,5286	0,63	0,06689	1,1665	0,98	0,00292	1,0068	4,30	9,78884	0,6150
0,29	0,17920	1,5108	0,64	0,06461	1,1604	0,99	0,00145	1,0034	4,40	9,78552	0,6103
0,30	0,17429	1,4938	0,65	0,06236	1,1544	1,00	0,00000	1,0000	4,50	9,78226	0,6057
0,31	0,16955	1,4776	0,66	0,06015	1,1486	1,10	9,98620	0,9687	4,60	9,77908	0,6013
0,32	0,16495	1,4620	0,67	0,05798	1,1428	1,20	9,97361	0,9410	4,70	9,77597	0,5970
0,33	0,16050	1,4471	0,68	0,05583	1,1372	1,30	9,96202	0,9163	4,80	9,77292	0,5928
0,34	0,15617	1,4328	0,69	0,05372	1,1317	1,40	9,95129	0,8939	4,90	9,76993	0,5888
0,35	0,15198	1,4190	0,70	0,05163	1,1262	1,50	9,94130	0,8736	5,00	9,76701	0,5848

$\frac{tg\,v}{tg\,v_{max}}$	$ctg\,x$	x^0	$\frac{tg\,v}{tg\,v_{max}}$	$ctg\,x$	x^0	$\frac{tg\,v}{tg\,v_{max}}$	$ctg\,x$	x^0	$\frac{tg\,v}{tg\,v_{max}}$	$ctg\,x$	x^0
0,0209	0,287	74,0	0,0090	0,213	78,0	0,0027	0,141	82,0	0,0003	0,070	86,0
0,0191	0,277	74,5	0,0079	0,203	78,5	0,0022	0,132	82,5	0,0002	0,061	86,5
0,0173	0,268	75,0	0,0069	0,194	79,0	0,0018	0,123	83,0	0,0001	0,052	87,0
0,0157	0,259	75,5	0,0060	0,185	79,5	0,0015	0,114	83,5	0,0001	0,044	87,5
0,0142	0,249	76,0	0,0052	0,176	80,0	0,0011	0,105	84,0	0,0000	0,035	88,0
0,0127	0,240	76,5	0,0045	0,167	80,5	0,0009	0,096	84,5	0,0000	0,026	88,5
0,0114	0,231	77,0	0,0038	0,158	81,0	0,0007	0,087	85,0	0,0000	0,017	89,0
0,0101	0,222	77,5	0,0032	0,149	81,5	0,0005	0,079	85,5	0,0000	0,009	89,5
									0,0000	0,000	90,0

ТАБЛИЦА IV.

Таблица натуральныхъ тангенсовъ.

0°	.000	15°	.268	30°	.577	45°	1.000	60°	1.732	75°	3.732
1°	.017	16°	.287	31°	.601	46°	1.035	61°	1.804	76°	4.011
2°	.035	17°	.306	32°	.625	47°	1.072	62°	1.881	77°	4.331
3°	.052	18°	.325	33°	.649	48°	1.111	63°	1.963	78°	4.705
4°	.070	19°	.344	34°	.674	49°	1.150	64°	2.050	79°	5.144
5°	.087	20°	.364	35°	.700	50°	1.192	65°	2.104	80°	5.671
6°	.105	21°	.384	36°	.726	51°	1.235	66°	2.246	81°	6.314
7°	.123	22°	.404	37°	.753	52°	1.280	67°	2.356	82°	7.115
8°	.140	23°	.424	38°	.781	53°	1.327	68°	2.475	83°	8.144
9°	.158	24°	.445	39°	.810	54°	1.376	69°	2.605	84°	9.514
10°	.176	25°	.466	40°	.839	55°	1.428	70°	2.747	85°	11.430
11°	.194	26°	.488	41°	.869	56°	1.482	71°	2.904	86°	14.301
12°	.212	27°	.509	42°	.900	57°	1.540	72°	3.078	87°	19.081
13°	.231	28°	.532	43°	.932	58°	1.600	73°	3.271	88°	28.636
14°	.249	29°	.554	44°	.966	59°	1.664	74°	3.487	89°	57.290

ТАБЛИЦА V.

cot x и x^0

$\frac{tg\,v}{tg\,v_{max}}$	$ctg\,x$	x^0	$\frac{tg\,v}{tg\,v_{max}}$	$ctg\,x$	x^0	$\frac{tg\,v}{tg\,v_{max}}$	$ctg\,x$	x^0	$\frac{tg\,v}{tg\,v_{max}}$	$ctg\,x$	x^0
1,0000	∞	0,0	0,8528	2,989	18,5	0,5094	1,327	37,0	0,1817	0,687	55,5
0,9999	114,589	0,5	0,8453	2,904	19,0	0,4993	1,303	37,5	0,1749	0,674	56,0
0,9995	57,290	1,0	0,8376	2,824	19,5	0,4893	1,280	38,0	0,1681	0,662	56,5
0,9990	38,188	1,5	0,8298	2,748	20,0	0,4793	1,257	38.5	0,1616	0,649	57,0
0,9982	28,636	2,0	0,8218	2,675	20,5	0,4694	1,235	39,0	0,1551	0,637	57,5
0,9971	22,904	2,5	0,8137	2,605	21,0	0,4594	1,213	39,5	0,1488	0,625	58,0
0,9959	19,081	3,0	0,8054	2,539	21,5	0,4495	1,192	40,0	0,1426	0,613	58,5
0,9944	16,350	3,5	0,7971	2,475	22,0	0,4397	1,171	40,5	0,1366	0,601	59,0
0,9927	14,310	4,0	0,7886	2,414	22,5	0,4299	1,150	41,0	0,1307	0,589	59,5
0,9908	12,706	4,5	0,7800	2,356	23,0	0,4201	1,130	41,5	0,1250	0,577	60,0
0,9886	11,430	5,0	0,7712	2,300	23,5	0,4104	1,111	42,0	0,1194	0,566	60,5
0,9863	10,385	5,5	0,7624	2,246	24,0	0,4008	1,091	42,5	0,1139	0,554	61,0
0,9837	9,514	6,0	0,7535	2,194	24,5	0,3912	1,072	43,0	0,1086	0,543	61,5
0,9808	8,777	6,5	0,7444	2,146	25,0	0,3817	1,054	43,5	0,1035	0,532	62,0
0,9778	8,144	7,0	0,7353	2,097	25,5	0,3722	1,036	44,0	0,0985	0,521	62,5
0,9746	7,596	7,5	0,7261	2,050	26,0	0,3628	1,018	44,5	0,0936	0,510	63,0
0,9711	7,115	8,0	0,7168	2,006	26,5	0,3536	1,000	45,0	0,0888	0,499	63,5
0,9674	6,691	8,5	0,7074	1,963	27,0	0,3443	0,983	45,5	0,0843	0,488	64,0
0,9635	6,314	9,0	0,6979	1,921	27,5	0,3352	0,966	46,0	0,0798	0,477	64,5
0,9594	5,976	9,5	0,6883	1,881	28,0	0,3262	0,649	46,5	0,0755	0,466	65,0
0,9551	5,671	10,0	0,6787	1,842	28,5	0,3172	0,932	47,0	0,0713	0,456	65,5
0,9506	5,396	10,5	0,6691	1,804	29,0	0,3084	0,916	47,5	0,0673	0,445	66,0
0,9459	5,145	11,0	0,6593	1,767	29,5	0,2996	0,900	48,0	0,0634	0,435	66,5
0,9410	4,915	11,5	0,6495	1,732	30,0	0,2909	0,885	48,5	0,0596	0,424	67,0
0,9359	4 705	12,0	0,6397	1,698	30,5	0,2824	0,869	49,0	0,0560	0,414	67,5
0,9306	4,511	12,5	0,6298	1,664	31,0	0,2739	0,854	49,5	0,0526	0,404	68,0
0,9251	4,332	13,0	0,6199	1,632	31,5	0,2656	0,839	50,0	0,0492	0,394	68,5
0,9194	4,165	13,5	0,6099	1,600	32,0	0,2574	0,824	50,5	0,0460	0,384	69,0
0,9135	4,011	14,0	0,5999	1,570	32,5	0,2492	0,810	51,0	0,0430	0,374	69,5
0,9075	3,867	14,5	0,5899	1,540	33,0	0,2412	0,795	51,5	0,0400	0,367	70,0
0,9012	3,732	15,0	0,5798	1,511	33,5	0,2334	0,781	52,0	0,0472	0,354	70,5
0,8948	3,606	15,5	0,5698	1,483	34,0	0,2256	0,767	52,5	0,0345	0,344	71,0
0,8882	3,487	16,0	0,5597	1,455	34,5	0,2180	0,754	53,0	0,0319	0,335	71,5
0,8815	3,376	16,5	0,5497	1,428	35,0	0,2105	0,740	53,5	0,0295	0,325	72,0
0,8746	3,271	17,0	0,5396	1,402	35,5	0,2031	0,726	54,0	0,0272	0,315	72,5
0,8675	3,172	17,5	0,5295	1,376	36,0	0,1985	0,713	54,5	0,0250	0,306	73,0
0,8602	3,078	18,0	0,5194	1,351	36,5	0,1887	0,700	55,0	0,0229	0,296	73,5

C. 3457 547

WEDEKIND, E.

Organische Chemie. Volkshochschulvorträge von E. Wedekind. Stuttgart. Verl. v. Enke, 1907, 8⁰.—VIII, 164.

C. 3458 547

GATTERMANN, LUDWIG.

Die Praxis des organischen Chemikers. Von Ludwig Gattermann. Leipzig. Verl. v. Veit u. Co. 1907. 8⁰.—XII. 352. II.

C. 3459 624.03/4

КУНИЦКІЙ, С. К.

Краткія общія указанія и главнѣйшія данныя для проектированія мостовыхъ сооруженій. С. К. Куницкій. Съ 8-ю таблицами чертежей. Спб. 1898. 8⁰.—V. 192. 8.

C. 3460 63.16+63.195.1

БУДРИНЪ, П.

Результаты опытовъ по примѣненію удобреній и изученію сѣвооборотовъ на горно-нивскомъ опытномъ полѣ Института Сельскаго Хозяйства и Лѣсоводства въ Новой Александріи. Спб. 1907. 8⁰.—188.

C. 3461 727

Handbuch der Architektur. Teil IV. 6. Halbband, Heft 2 a. und b.

EGGERT, H., JUNK, C., KORNER, C., MÜFFIGBRODT, P., SCHMITT, E. und SPIKER, P.

Hochschulen, zugehörige und verwandte wissenschaftliche Institute. 2. Aufl. Stuttgart, 1905, 8⁰.

C. 3462 725.155 + 725.91 + 727.6 — 7 — 8 + 728.98

Handbuch der Architektur Teil IV. 6. Halbband, Heft 4.

OPFERMAN RUDOLF. Archive.
KORTÜM, ALBERT. Bibliotheken.
WAGNER, HEINRICH. Museen.
SCHMITT, EDUARD. Pflanzenhäuser.
LINDHEIMER, OTTO. Aquarien.
JAFFÉ FRANZ. Ausstellungsbauten.

Zweite Auflage. Stuttgart, 1906, 8⁰.

C. 3463 726

Handbuch der Architektur. Teill IV. 8. Halbband, Heft 1.

GURLITT, CORNELIUS.

Kirchen. Stuttgart, 1906, 8.

C. 3464 726.8

Handbuch der Architektur. Teil IV. 8. Halbband, Heft 3.

FAYANS, STEFAN.

Bestattungsanlagen (Kirchen Denkmäler und Bestattungsanlagen). Stuttgart, 1907, 8⁰.—

C. 3465 745

Handbuch der Architektur. Teil I. 3. Band.

PFEIFER, HERMANN.

Die Formenlehre des Ornaments. Stuttgart. 1906, 8.

C. 3466, 3467 52.6

ЭРЕНФЕЙХТЪ, В. Э.

Геодезія. Часть I. Варшава 1904, 8⁰.—272, V.

C. 3468 547

KRAFT, F.

Kurzes Lehrbuch der Chemie. Organische Chemie von F. Kraft. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. Vierte Vermehrte und Verbesserte Auflage. Leipzig und Wien. 1905, 8⁰.—XII. 757.

C. 3469 533+542.7+544.4

TRAVERS, MORRIS W.

Experimentelle Untersuchung von Gasen. Von Morris W. Travers. Braunschweig. Vieweg u. S-n. 1905. 8⁰.—XII. 372.

C. 3470 547

BAEYER, ADOLF von

Adolf von Baeyer's gesammelte Werke herausgegeben zur Feier des siebzigsten Geburtstages des Autors von seinen Schülern und Freunden I. u. II. Band. Braunschweig, Vieweg u. S-n. 1905, 8⁰. — CXXXII, 990, 1194.

C. 3471 546

MOISSAN, HENRI.

Traité de chimie minérale. Publié sous la direction de Henri Moissan. Tome I. II. Métalloïdes. III. IV. V. Métaux. VII. 857; 642: 1078: 1065: 970, 88. Paris, 1904—6, 8⁰.

C. 3472 576.838.4 + 661.62

VAGELER, P.

Die Bindung des atmosphärischen Stickstoffs in Natur und Technik von P. Vageler. Fr. Vieweg u. Sohn in Braunschweig. 1908. 8⁰.—132.

C. 3473 531.61

OSTWALD, W.

Die Energie von W. Ostwald. Leipzig. Verlag von I. A. Barth. 1908, 8⁰.—167.

C. 3474 546

HOLLEMAN, A. F.

Lehrbuch der unorganischen Chemie von A. F. Holleman 6. verbesserte Auflage. Leipzig. Verlag von Veit u. C-o. 1908, 8⁰.—XII, 454.

C. 3475 92 (Liebig)

VOLHARD, JAKOB.

Justus von Liebig von Jakob Volhard, Band I — II mit einem Bildnis. Leipzig Verlag von Johann Ambrosius Barth 1909, 8⁰.—XI. 456: 437.

C. 3476, 3477 517.36

МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОЙ, Д.

О приведенiи Абелевыхъ интеграловъ къ внешнимъ трансцендентнымъ. Мордухай-Болтовской. Варшава 1906. 8⁰.—407.

C. 3478, 3479 517.1

АНИСИМОВЪ, В. А.

Анализъ (Дифференцiальное и интегральное исчисленiе съ приложенiями). 1901/2 ак. г. I к. Хим. отд. Варшава. 1902. 8⁰.—271.

C. 3480, 3481 531

СОМОВЪ, П. О.

Теоретическая механика съ прилож. задачъ Г. Д. Гонтарева 1902/3 уч. г. I. Часть. Варшава. 1903. 8⁰.—XIV, 475.

C. 3482 516

АНИСИМОВЪ, В.

Аналитическая геометрiя. 1901—1902 акад. годъ. Лекцiи 1 курса химическаго отдѣленiя. Варшава. 1902. 8⁰.—145.

C. 3483 517,1

БУРКХАРДТЪ, ГЕНРИХЪ.

Начала дифференцiальнаго и интегральнаго исчисленiй и ихъ приложенiя къ описанiю явленiй природы. Генрихъ Буркхардтъ. Спб. 1909. 8⁰.—232.

C. 3484 541.2

VAN'T HOFF, J. H.

Die Lagerung der Atome im Raume. Von J. H. Van't Hoff. III-tte umgearbeitete und vermehrte Auflage. Braunschweig. 1908. 8⁰.—147.

C. 3485 531.3

LOWE, A. E. H.

Theoretical mechanics an introductory treatise on the principles of dynamics. A. E. H. Lowe. II. édition. Cambridge. 1906. 8⁰.—367.

C. 3486 113

CLASSEN, J.

Vorlesungen über moderne Naturphilosophen. Dr. J. Classen. Hamburg. 1908. 8⁰.—180.

C. 3487 625.141

BAUCHAL, A. FELDPAUCH, ALEXANDRE WASIUTYNSKI.

Ballast. Paris. 1900. Bruxelles. 8⁰.—238.

C. 3488 624.22

ЧЕРЕПАШИНСКIЙ, М.

Желѣзные балочные мосты. М. Черепашинскаго. Часть практическая. Спб. Изд. Риккера. 1909. 8⁰.—164.

C. 3489 531.2 : 69

МЮЛЛЕРЪ-БРЕСЛАУ, Г.

Графическая статика сооруженiй. Переводъ Г. Кривошеина. II. рус. изданiе. Томъ I. С.-Петербургъ. Изд. Риккера. 1908. 8⁰.—505.

С. 3490 517.1

МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОЙ, Д.

Систематическій сборникъ элементарныхъ упражненій по Дифференціальному и Интегральному Исчисленіямъ. Выпускъ I. Теорія предѣловъ. Дифференцированіе и интегрированіе функцій. Варшава. 1907. 8⁰.—425.

С. 3491 621.9(083.2)

ШУХАРТЪ и ШЮТТЕ.

С.-Петербургъ. **Новѣйшіе инструменты,** вспомогательныя машины, приборы и механизмы. 1908. 8⁰.—546·

С. 3492 664.655.1

ЛУКАШЕВИЧЪ, С. Б.

Устройство хлѣбо-пекарныхъ печей. Составилъ С. Б. Лукашевичъ. С.-Петербургъ. 1883. 8⁰.—Текстъ и Атласъ 56. ix.

С. 3493 621.1.033.2

ХУДЯКОВЪ, П. К.

Графическій методъ разсчета многоцилиндровыхъ паровыхъ машинъ съ 9-ью таблиц. чертежей. II изд. Москва. 1890. 8⁰.—80. ix.

С. 3494, 3495 628.1(47.31)

ЗИМИНЪ, Н. П.

Описаніе сооруженій новаго Московскаго водопровода. Строит. періодъ 1890 — 1793 г. Состав. Н. П. Зиминъ. Текстъ. Москва, 1905. 4⁰.—343. x. (Атласы G. 547, 548).

С. 3496 628.1(47.31)

ЗИМИНЪ, Н. П.

Описаніе сооруженій новагó Мытищинскаго водопровода. Строительный періодъ 1897 — 1906 г. Составилъ Н. П. Зиминъ. Москва. 1908. 4⁰.—143. (Атласъ: G. № 549).

С. 3497 37 : 62(43.71)

VELFLÍK, ALBERT VOITĚCH.

Dějiny technického učení v Praze. Albert Vojtěch Velflík. Díl prvý. Praha, 1906. 8⁰.—470.

С. 3498 624.012 + 624.62

THULLIE, MAKSYMILIAN.

Mosty sklepione. Napisał Maksymilian Thullie. A. Tekst. Lwów 1902. Sayfart i Czajkowski. 8⁰.—137. (Atlas G. 550).

В. 3499 30 + 33

ТРОФИМОВЪ, А. И.

Теорія прибавочной стоимости К. Маркса съ технической точки зрѣнія А. И. Трофимова. 2-е изд. С. Петербургъ 1906. 8⁰.—166.

С. 3500 628.1(47.31)

ЗИМИНЪ, Н. П.

Система водоснабженія Москвы. Инженера Н. П. Зимина. Докладъ шестому Русскому Водопроводному Съѣзду. Москва 1905. 8⁰.—55.

С. 3501 517.1

FOLKIERSKI, W.

Zasady rachunku różniczkowego i całkowego z zastosowaniami. W. Folkierski. T. I. Wiadomości wstępne. Rachunek różniczkowy i zastosowania T. II. Rachunek całkowy: część I. Całkowanie różniczek. Paryż. 1870. 8⁰.—1087, 738.

С. 3502 547

Сборникъ работъ лабораторіи органической химіи Университета Св. Владиміра за періодъ завѣдыванія ею профессоромъ С. Н. Реформатскимъ. 1891—1907. Изданіе его учениковъ. Кіевъ 1907. 8⁰.—636.

С. 3503 92 (Меншуткинъ)

МЕНШУТКИНЪ, Б. Н.

Жизнь и дѣятельность Н. А. Меншуткина. С.-Петербургъ 1908 г. 8⁰.—376.

С. 3504 113

МОРОЗОВЪ, НИКОЛАЙ.

Основы качественнаго физико-математическаго анализа и новые физическіе факторы обнаруживаемые имъ въ различныхъ явленіяхъ природы. Москва. 1908. 8⁰.—402.

C. 3505 9(47)

Отчетъ по дѣлу о сдачѣ 15 мая 1905 г. непріятелю судовъ отряда бывшаго адмирала Небогатова. С.-Петербургъ. 1907 8⁰.—654.

C. 3506 624.012.3+624.623+693.55+721.992

ХЕГСТРЕМЪ, А. П.

Новый методъ разсчета желѣзобетонныхъ сооруженій и примѣненіе его къ разсчету мостовъ и гражданскихъ сооруженій. Кіевъ. 1908. 8⁰.—174. Т. 9.

C. 3507 541.8 + 542.6

МИХАЙЛЕНКО, Я. И.

Къ вопросу о соотношеніи между парціальной плотностію растворителя въ растворѣ и упругостію пара раствора. Изслѣдованіе Я И. Михайленко. Кіевъ. 1905. 8⁰.—252 т. 158.

C. 3508 621.111

УГАРОВЪ, А. В.

Шатунный полюсъ и нѣкоторыя примѣненія его свойствъ. (Съ тремя таблицами чертежей). Харьковъ. Адольфъ Дарре. 1908. 8⁰.—106. т. 3.

C. 3509 301

ИСАЕВЪ, А. А.

Вопросы соціологіи. Изданіе „Вѣстника Знанія". С.-Петербургъ, 1906. 8⁰.—240.

C. 3510 323.2+329+335

ИТОГИ И ПЕРСПЕКТИВЫ.

Сборникъ статей: Громана, Меча, Лепскаго, Бѣльскаго, Д-она. Москва, тип. Печковскаго. 1906. 8⁰.—216.

C. 3511 63.13(54)

ОСТРОВСКІЙ, С. Ф.

Ирригаціонныя системы Индіи. Отчетъ по поѣздкѣ въ Индію. С. Ф. Островскаго. С.-Петербургъ. 1907. 8⁰.—137. (Альбомъ: G. № 553).

C. 3512 351.828 + 347.247

ВЕШНЯКОВЪ, В. И.

Рыболовство и Законодательство. В. И. Вешнякова. С.-Петербургъ. 1894. 8⁰.—cxvi. 780.

C. 3513 338 : 63(489)

КРЮКОВЪ, Н. А.

Данія. Сельское хозяйство въ Даніи въ связи съ общимъ развитіемъ страны. Н. А. Крюковъ. Изданіе 2-ое. С.-Петербургъ. Г. У. З. и З. 1907. 8⁰.—327. 4 кар. 26 рис.

C. 3514 531 : 621

ЛОРЕНЦЪ, ГАНСЪ.

Техническая механика неизмѣняемой системы проф. Ганса Лоренца, переводъ А. Артемьевскаго. С.-Петербургъ, и. Риккера. 1909. 8⁰.—679, 254 фиг.

C. 3515 351.852.14/15

Deutschesmuseum von Meisterwerken der Naturwissenschaft und Technik. München. Führer durch die Sammlungen. Verlag von B. G. Teubner in Leipzig. München. 1907. 4⁰.—158.

C. 3516 625.4/5+621.86/-

BUHLE, M.

Massentransport. Ein Hand—und Lehrbuch über Förder—und Lagermittel für Sammelgut. Von M. Buhle. Mit 895 Abbildungen u. 80 Zahlen tafeln. Deutsche Verlags-Anstalt. Leipzig. 1908. 4⁰.—382.

C. 3517 537+621.3

OSTWALD, W. A.

Schule der Elektrizität. Nach G. Claude, L'electricité pour tout le monde; bearbeitet von W. A. Ostwald. Mit über 400 Abbildungen und Tafeln. Verlag von Dr. Werner Hinkhardt. Leipzig. 1909. 4⁰.—579.

C. 3518 542 : 547

GATTERMANN, LUDWIG.

Die praxis des organischen Chemikers von Dr. Ludwig Gattermann. IX. verbesserte Auflage. Mit 91 Abbildungen und zwei Tafeln. Leipzig. Verlag von Veit. 1909. 8⁰.—352. II.

C. 3519 542 : 547

HENLE, FRANZ WILH.

Anleitung für das organisch pröparative Praktikum von Franz Wilh. Henle. Mit zahlreichen Skizzen. Leipzig. 1909. 8⁰.—176.

С. 3520 546

WERNER, A.

Neuere Anschauungen auf dem Gebiete der anorganischen Chemie v. A. Werner 2 Auflage. (Die Wissenschaft. Zammlung naturwissenschaftlicher und mathematischer Monografien. Heft 8). Braunschweig, 1908. 8⁰.—292.

С. 3521 546 29

RAMSAY, WILLIAM.

Die edlen und die radioaktiven Gase. Von William Ramsay. Leipzig. 1908. 8⁰.—39.

С. 3522 667.62

GANSWINDT, A.

Theorie und praxis der moderne Färberei von A. Ganswindt. I. Theil. Die mechanische Technol. der Färberei. II Theil die chemische Technologie der Färberei. Leipzig. Vigand 1903. 8⁰—II—217. II—433.

С. 3523 541.6

STEWART, A. W.

Stereochemie von A. W. Stewart. Deutsche Bearbeitung von Karl Löffler. Berlin. Verlag von J. Springer. 1908. 8⁰.—479.

С. 3524 665.5+547.21

HÖFER, HANS.

Das erdöl und seine Verwandten. Zweite Auflage. Braunschweig. Viweg. 1906. 8⁰.—279.

С. 3525 547.21

ANGERMANN, CLAUDIUS.

Die Allgemeine Naphta-Geologie von Claudius Angermann. Verl. von Urban. Wien. 1900. 8⁰.—97.

С. 3526 621.71(083.8)

FITZNER & GAMPER.

Société Anonyme des Etablissements de Chaudronerie et de Construction Mecanique. Варшава. 1900. 4⁰.—364.

С. 3527, 3528 517.1

МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОЙ, Д.

Систематическій сборникъ элементарныхъ упражненій по Дифференціальному и Интегральному исчисленіямъ. Выпускъ I. Теорія предѣловъ, Дифференцированіе и Интегрированіе функцій. Варшава. 1904 г. 8⁰.—425.

С. 3529, 3530 517.1

МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОЙ, Д. Д.

Задачи по Дифференц. и Интегр. исчисл. Изданіе студ. М. Вѣрника. 1902/3. г. Варшава. 1903 г. 4⁰.—210.

С. 3531 531.2

ФУРМАНЪ, АРВ.

Задачи по статикѣ твердаго тѣла (съ рѣшеніями). Переводъ Б. Гущина. Изданіе Базлова. С.-Петербургъ. 1905. 4⁰.—169.

С. 3532, 3533 548/9

ВОРОБЬЕВЪ, В. И.

Кристаллографическія изслѣдованія турмалина съ Цейлона и изъ нѣкоторыхъ другихъ мѣсторожденій. В. И. Воробьева. С.-Петербургъ. 1901. 330. табл. VII.

С. 3534 615.79 (57-Забайкалье)

БАГАШЕВЪ, ИН.

Минеральные источники Забайкалья. Изд. М. Д. Бутина. Москва. 1905. 8⁰.—159.

С. 3535 91(51.5)

УОДДЕЛЬ, АУСТИНЪ.

Лхасса и ея тайны. Очеркъ Тибетской экспедиціи 1903—1904 года. Пер. съ англ. Изд. Пантелѣева. Петербургъ. 1906. 4⁰.—342.

С. 3536 627.415

ЦВИКЕЛЬ, І. Б.

Фашинныя работы. Детали устройства болѣе важныхъ сооруженій по способамъ, употребляемымъ на рѣкѣ Вислѣ. Составилъ І. Б. Цвикель. Варшава. 1895. 8⁰.—54.

C. 3537 677.06

ШАГРЕНЪ, К. де—

Учебникъ товаровѣдѣнія. I. часть. Волокнистыя вещества. К. де-Шагренъ. С.-Петербургъ. 1908. 8⁰.—xvi. 323.

C. 3538 669

HOWE, HENRY MARION.

Желѣзо, сталь и другіе сплавы. Перев. И. Жукова. Изд. Суворина. С.-Петербургъ. 1908. 8⁰.—xxi. 548.

C. 3539 622 (47)

ТИМЕ, ИВ.

Современное состояніе техники на Южнорусскихъ горныхъ заводахъ и рудникахъ. Ив. Тиме. IV вып. съ 15 табл. чертежей. С.-Петербургъ. 1907, 8⁰.—132 I—XIV.

C. 3540 547.2+665.5

REDWOOD, BOVERTON.

Petroleum and its products. by. Boverton Redwood. Second edition. In two Volumes. (1 u 2). — 29 plat. London, 1906. 4⁰.—xxxi; I—1—528; II—530—1064.

C. 3541 615.834 + 615.838 + 615.79

Труды второго всероссійскаго съѣзда дѣятелей по климатологіи, гидрологіи и бальнеологіи въ память Петра В. Томъ I. и II. С.-Петербургъ. 1905. 4⁰.—392.

C. 3542 621.9(73)

BENJAMIN, C. H.

Modern american machine Tools, by C. H. Benjamin, with 134 illustr. London. 1906. 8⁰.—320.

C. 3543 677.3

PRIESTMAN, HOWARD.

Principles of Woollen Spinning, by Howard Priestman. London. 1908. 8⁰.—ix. 319.

C. 3544 677.6

NISBET, HARRY.

Grammar of textile design. by Harry Nisbet. London, Scott, Greenwood. 1906. 8⁰.—vii. 276.

C. 3545 677.2

WINTERBOTTOM, JAMES.

Cotton Spinning Calculations and Yarn Costs; by James Winterbottom. London. 1907. 8⁰.—ix. 254.

C. 3546 347.246 + 351.828 + 343.772

Законы и Инструкціи по рыболовству, дополняющіе уставъ сельскаго хозяйства. Изд. Департамента Земледѣлія. С.-Петербургъ. 1906. 8⁰.—173.

C. 3547 624 + 693/5 + 698

ЯСЕВИЧЪ, Ѳ. К.

Общія начала Строительнаго искусства. Часть 1-ая: Земляныя, туннельныя, фашинныя, каменныя, деревянныя, свайныя, штукатурныя, малярныя и стекольныя работы. Часть 2-ая: Металлич. работы, устройство основаній и кессонныя работы. Изд. Томск. Технолог. Инст. Томскъ. 1905. 8⁰.—

C. 3548 531 : 693/5

ЯСЕВИЧЪ, Ѳ. К.

Пособія при составленіи упражненій по Строительному Искусству. I. Упражненіе по земл. работамъ. Изд. Томскаго Технолог. Инст. Томскъ. 1906. 8⁰,—

C. 3549 625.7/8

ЯСЕВИЧЪ, Ѳ. К.

Курсъ дорогъ. Часть 1-ая: Грунтовыя и шоссейныя дороги, мостовыя и подъѣздные пути. Изд. Томскаго Технолог. Инст. Томскъ. 1905. 8⁰.—

C. 3550 52.11+531.5

МОРОЗОВЪ, НИКОЛАЙ.

Законы сопротивленія упругой среды движущимся тѣламъ. Спб., 1908. 8⁰.—66.

C. 3551, 3552 624

РЫШКОВЪ, П. Н.

Курсъ мостовъ. Часть I-ая. 1903 г. Варшава 1903. 8⁰.—261. Черттеж. XII.

C. 3553, 3554 624.011

РЫШКОВЪ, П. Н.

Курсъ мостовъ. Часть II-ая. Деревянные мосты. Выпускъ первый. 1903/4 г. Варшава, 1904. 8⁰.—152.

C. 3555, 3556 — 624.013/4

РЫШКОВЪ, П.

Металлическіе мосты по программѣ 7 и 8 сем. Инж. стр. отд. 8⁰.—65.

C. 3557 — 691/8+624/5+627.415

УСОВЪ, ПЕТРЪ.

Строительное искусство. Въ 5 частяхъ. Часть I-ая, съ Атласомъ на 40 листахъ. Часть II-ая, вып. 1—4 съ Атлас. 4 вып. I — Спб., 1859. 8⁰—VIII—XVIII. 582. II ч. 1862—1864—1865. 8⁰.— Атласъ G. 559.

C. 3558 — 552

КРЕДНЕРЪ.

Петрографія II-ой отдѣлъ „Элементовъ Геологіи". Креднера. Перев. съ 9. нѣм. изд. А. Лавровскаго, Изд. Екатер. Горнаго Уч. Екатеринославъ, 1906. 8⁰.—131.

C. 3559 — 63.11(47 Азія)

ГЛИНКА, К. Д.

Предварительный отчетъ объ организаціи и исполненіи работъ по изслѣдованію почвъ Азіатской Россіи въ 1908 г. Составилъ К. Д. Глинка. Изд. Главнаго Управ. Землеустройства и Земледѣлія. Спб., 1908. 8⁰.—80.

C. 3560 — 92 (Менделѣевъ): 54

МОРОЗОВЪ, НИКОЛАЙ.

Д. И. Менделѣевъ и значеніе его періодической системы для Химіи Будущаго. Въ двухъ публичныхъ лекціяхъ съ 7 табл. Спб., 1907. 8⁰.—105. VII.

C. 3561 — 551.482 (Волховъ): 621.311.21

ЛИТОВЧЕНКО, К. П.

Волховъ и концессія на утилизацію его энергіи. Изд. Спб. Округа Путей Сообщенія. Спб., 1908. 8⁰.—147.

C. 3562 — 664.1

STAMMER, K.

Jahres-Bericht über die Untersuchungen und Vortschritte auf dem Gesammtgebiete der Zuckerfabrikation von. K. Stammer. Jahrgang XXI. 1881. XXI. 1882. Verlag von. F. Vieweg.

Braunszweig, 1882. 8⁰.—IX. 512.
„ 1883. 8⁰.— X. 444.

C. 3563 — 63.16 + 63.195.1

БУДРИНЪ, П.

Результаты опытовъ по примѣненію удобреній и изученію сѣвооборотовъ на горно-нивскомъ опытномъ полѣ Института Сельскаго Хозяйства и Лѣсоводства въ Новой Александріи. Спб., 1907. 8⁰.—188.

C. 3564 — 614.778 + 551.481 + 351.852.15

Инструкція для изслѣдованія озеръ. Изд. Император. Русскаго Географ. Общ. Спб., 1908. 8⁰.—297.

C. 3565 — 232 : 92

РЕНАНЪ, Э.

Жизнь Іисуса, переводъ съ франц. А. В. Швырова. Спб., 1906. 8⁰.—199.

C. 3566 — 62 + 69

СКРЯБУЧИНСКІЙ.

Самоучитель строительнаго искусства. Состав. Скрябучинскій. Изд. А. Ступина. Москва, 1890. 8⁰.—822, черт. 32.

C. 3567 — 677.07

LECOINTRE, ACHILLE.

Traité de L'analyse des étoffes. Par Achille Lecointre. X-me édit. H. J. Lecointre, éditeur. Lille, 1905. 8⁰.—230.

C. 3568 — 621.9

HÜLLE, FR. W.

Die Werkzeugmaschinen und ihre Konstruktionselemente von. Fr. W. Hülle 2-te Auflage mit 2 Tafeln; Verlag v. J. Springer. Berlin, 1908. 8⁰.—XI. 410. II.

C. 3569 — 621.86/7

WETTICH, HANS.

Hebzeuge. Von Hans Wettich. Hannower, 1907. 8⁰.—IX. 325. Tabel. 20.

C. 3570 — 622.41

ELLINGHAUS, O.

Tafeln zur schnellen Bestimmung der wichtigsten Verhältnisse beim Berechnen von Ventilationsanlagen für Bergwerke. Von O. Elinghaus. Verlag. v. Baedener Essen, 1905. 8⁰.—8. V.

C. 3571 677.21.05

ЗАДАРНОВСКІЙ, В. К.

Къ вопросу объ опредѣленіи числа машинъ, необходимыхъ для оборудованія бумагопряд. фабрики данной производительности. Варшава, 1907. 8⁰.—322.

C. 3572 621.832

JULLY, A.

Les roues dentées, notions théoriques et tracés pratiques. Par A. Jully. Paris, 1904. 8⁰.—148.

C. 3573 621.9(064)„1900"

SVILOKOSSITCH, M.

Les machines-outils à l'exposition universelle de 1900.
Paris, 1902. 8⁰.— I fasc.— 1 — 210.
II fasc.—210 — 412.
(Атласы см. G. 561).

C. 3574 621.9

MERLOT, JULES.

Principes de la construction des machines-outils, par Jules Merlot. Ch. Béranger, éditeur. Paris, 1907. II. 4⁰.—646.

C. 3575 59.19(26)+58.19(26)

КЕЛЛЕРЪ, К.

Жизнь моря. Животный и растительный міръ моря, его жизнь и взаимоотношенія. К. Келлера. Изданіе А. Девріена. Въ 5 выпускахъ. Спб., 1904—5. 8⁰.—688.

C. 3576 59.19(28)+58.19(28)

ЛАМПЕРТЪ, К.

Жизнь прѣсныхъ водъ; животныя и растенія прѣсныхъ водъ, ихъ жизнь, распространеніе и значеніе для человѣка. К. Ламперта. Изд. А. Девріена. Спб., 1900. 8⁰.—879. XXXVII.

C. 3577 536.7+536.8

ПОГОДИНЪ, А.

Термодинамика съ приложеніями къ газамъ, парамъ и тепловымъ машинамъ. А. Погодинъ. Изд. Риккера. Спб., 1905. VI. 8⁰.—241.

C. 3578 621.43

ПАЩЕНКО.

Очеркъ развитія газомоторовъ. П. Д. Пащенко. Спб., 1904. 8⁰.—85.

C. 3579 59

ГЕРТВИГЪ, РИХАРДЪ.

Учебникъ зоологіи. Переводъ съ нѣм. В. Заленскаго. 5-ое изданіе. Одесса, 1909. XIV. 8⁰.—796.

C. 3580 59

ХОЛОДКОВСКІЙ, Н. А.

Учебникъ зоологіи и сравнит. анатоміи. Составилъ Н. А. Холодковскій. Изданіе II-ое. А. Девріена. Спб., 1909. XII. 8⁰.—959.

C. 3581 533.3

RAMSAY, WILLIAM.

Die Gase der Atmosphäre und die Geschichte ihrer Entdeckung von. William Ramsay. Dritte Auflage. Verlag von W. Knapp. Halle, 1907. VI. 8⁰.—160.

C. 3582 542.62

JÄNECKE, ERNST.

Gesättigte Salzlösungen vom Standpunkt der Phasenlehre von Ernst Jänecke. Verlag von Knapp. Halle, 1908. IX. 8⁰.—187.

C. 3583 62—69(03)

Промышленность и техника. Энциклопедія промышленныхъ знаній. Переводъ съ IX нѣм. изд. съ оригин. дополненія ми. 2. изд. со стереотипа. Томъ I.—X. Спб., 1903. 8⁰.—

C. 3584 9(3—9)

Исторія человѣчества. Всемірная исторія. Подъ редакціей Г. Гельмольта. Переводъ съ дополненіями для Россіи. Т. I—VIII. Спб., 1903. 8⁰.—

C. 3585 621(62)

ХОЛМОГОРОВЪ, И. М.

Изъ поѣздки по Англійскимъ машиностроительнымъ заводамъ. Спб., 1907. IV. 8⁰.—124.

C. 3586 542.6 : 541.13

FOERSTER, FRITZ.

Elektrochemie. Wässeriger Lösungen von Fritz Foerster. Leipzig, 1905. XVII, 8⁰.—507. (Handbuch der Angewandten Physikalischen Chemie, Band I.)

C. 3587 535.33 + 535.6

BAUR, EMIL.

Kurzer Abriss der Spektroskopie und Kolorimetrie von Emil Baur. Verlag v. J. A. Barth. Leipzig, 1907. VIII, 8⁰.—122. (Handbuch der Angewandten physikalischen Chemie, her. v. Prof. G. Bredig. Bd. V.)

C. 3588 542.6

ROTHMUND, V.

Löslichkeit und Löslichkeitsbeeinflüssung von V. Rothmund. Verlag v. Amb. Barth. Leipzig, 1907, XI, 8⁰.—196. (Handbuch der angewandten physikalischen Chemie, her. v. Prof. G. Bredig. Bd. VII.)

C. 3589 541.14 + 541.8

MÜLLER, ARTHUR.

Allgemeine Chemie der Kolloide von Arthur Müller. Leipzig, 1907. X, 8⁰.—204. (Handbuch der angewandten physikalischen Chemie, Bd. VIII.)

C. 3590 536.7

HABER, F.

Thermodynamik technischer Gasreactionen. Sieben Vorlesungen von F. Haber. Verlag v. Oldenburg München u. Berlin. 1905. XV, 296.

C. 3591 113 + 52 3

ARRHENIUS, SVANTE.

Die Vorstellung vom Weltgebäude im Wandel der Zeiten. Das Werden der Welten. Neue Folge. Von Svante Arrhenius. Akademische Verlagsgesellschaft. Leipzig, 1908. XI, 8⁰.—191.

C. 3592 546.29

RAMSAY, WILLIAM.

Die edlen und die radioaktiven Gase von William Ramsay. Leipzig, 1908. 8⁰.—39.

C. 3593 542.6

TAMMANN, G.

Über die Beziehungen zwischen den inneren Kräften und Eigenschaften der Lösungen. Verl. v. L. Voss. Hamburg u. Leipzig, 1907. VII, 8⁰.—184.

C. 3594 113 + 52.3

ARRHENIUS, SVANTE.

Das Werden der Welten von Svante Arrhenius. Leipzig, 1907. VI, 8⁰.—208.

C. 3595 621.43

LACOIN, LOUIS.

Construction et réglage des moteurs à explosions par Louis Lacoin. Editeur—Baudry. Paris, 1908. 8⁰.—424.

C. 3596 541.1

JONES, HARRY C.

The elements of physical chemistry, by Harry C. Jones. 3. Edit. New-Jork, 1907. XI, 8⁰.—650.

C. 3597 621 + 621.18 : 620.4

GEBHARDT, G. F.

Steam power plant engineering, by G. F. Gebhardt. first edition. London, 1908. XXIX, 8⁰.—816.

C. 3598 621.43

CARPENTER, ROLLA C. and H. DIEDERICHS.

Internal combustion engines their theory, construction and operation, by Rolla C. Carpenter and H. Diederichs. London, 1908. XIV, 8⁰.—597.

C. 3599 621.43 + 669

JUNGE, F. E.

Gas power. London, 1908. XII, 8⁰.—548.

C. 3600 621.431.2 + 684.28

STRICKLAND, F.

A manual of petrol motors and motor cars, by F. Strickland. London, 1907. VIII, 8⁰.—376.

C. 3601 628.49

GOODRICH, W. FRANCIS.

Refuse disposal and power production, by W. Francis Goodrich. Westminister, 1904, xv, 8⁰.—376.

C. 3602 58.11.9

CZAPEK, FRIEDRICH.

Biochemie der Pflanzen. Band I u. II. Verlag von G. Fischer.
Jena, 1905, xv, 8⁰. — 584.
„ 1905, xii, 8⁰.—1026.

C. 3603 612.768 : 533.65

ЛІЛІЕНТАЛЬ, ОТТО.

Полетъ птицъ, какъ основа искусства летать. Перев. съ нѣмецк. Е. С. Федоровъ. Прилож. къ зап. Импер. Русскаго Техн. Общества. Спб. 1905, 8⁰.—154, VIII.

C. 3604 58.11.57

VRIES, HUGO de.

Espèces et variétés, leur naissance par mutation par Hugo de Vries. Paris, 1909, vii, 8⁰.—548.

C. 3605 621.311

KOESTER, FRANK.

Steam-electric Power Plants. A Practical Treatise on the Desing of Central Light and Power Stations and their Economical Construction and Operation. By Frank Koester. London, Ar. Constable & Company. 1908, xviii, 8⁰.—455.

C. 3606 547.2 + 612.015.1

FISCHER, EMIL.

Untersuchungen über Kohlenhydrate und Fermente (1884—1908) v. Emil Fischer. Verlag v. J. Springer. Berlin, 1909, viii, 8⁰.—912.

C. 3307 547.816

FISCHER, EMIL.

Untersuchungen in der Puringgruppe (1882—1906) v. Emil Fischer. Verlag v. J. Springer. Berlin, 1907, viii, 8⁰.—608.

C. 3608 547.7

FISCHER, EMIL.

Untersuchungen über Aminosäuren, Polypeptide und Proteïne (1899 — 1906) von Emil Fischer. Berlin. Verl. v. J. Springer. 1906, x, 8⁰.—770.

C. 3609 541.1 : 612.015

ARRHENIUS, SVANTE.

Immunochemie. Anwendungen der physikalischen Chemie auf die Lehre von den physiologischen Antiscörpern von Svante Arrhenius. Akademische Verlagsgesellschaft. Leipzig, 1907, vi, 8⁰.—203.

C. 3610 663.4(09)

MICHEL, CARL.

Geschicte des Bieres von der ältesten Zeit bis zum Jahre 1900. Verlag. v. Reichel. Augsburg, 1901, 8⁰.—155.

C. 3611 54(09)

LADENBURG, A.

Vorträge über die entwicklungsgeschichte der Chemie von Lavoisier bis zur Gegenwart. v A. Ladenburg. Vierte Auflage. Verlag v. Vieweg. Braunschweig, 1907, xiv, 8⁰.—417.

C. 3612 59

LEUNIS, JOHANNES.

Synopsis der Thierkunde. Dritte Auflage von Hubert Ludwik. Erster Band 1883, xv, 8⁰.—1083. Zweiter Band 1886, xv, 8⁰.— 1230. Hannower, Verlag v. Hahn (Johannes Leunis, Synopsis der drei Naturreiche. I Theil. Zoologie.)

C. 3613 59

SELENKA, EMIL.

Zoologisches Taschenbuch v. Emil Selenka. 5. völlig umgearbeitete und stark vermehrte Auflage v. Richard Goldschmidt. Heft I. Wirbelose. Heft II. Wirbeltiere. Leipzig, 1907, I. Heft, vii, 130.
II. Heft, iv, 147.

C. 3614 59

ЗОГРАФЪ, НИКОЛАЙ.

Курсъ зоологіи. Изданіе 2-е. Москва, 1907, 8⁰. ч. I.—514.
ч. II.—467.

C. 3615 662+665+621.3+621.43

JÜPTNER, HANNS V.

Lehrbuch der chemischen Technologie der Energien von Hanns v. Jüptner in III Bänder. Leipzig, 1905—6, 8⁰.
I Band I. Teil. 340. II. Teil. 256.
II Band I. u. II. Teil. 190.
III Band I. u. II. Teil. 393.

C. 3616 535.38

EDER, JOSEF MARIA.

Photochemie, (die chemischen Wirkungen des Lichtes). Von Josef Maria Eder. 3. Auflage. Verlag v. W. Knapp. Halle, 1906, VIII, 8⁰.—533.

C. 3617 677

Обработка волокнистыхъ веществъ. Составили: Эрнстъ Илива, Максъ Крафтъ, Ч. Фаульвассеръ, Г. Брюггеманъ, М. Гюртлеръ, Францъ Рэ, Линдъ, Р. Левенталь, І. Песслеръ, К. Шрейберъ, Э. Гейцерлингъ. Переводъ съ нѣмецкаго проф. Д. П. Коновалова и (начиная съ 7-го листа) С. А. Ганешина. (Промышленность и техника томъ VIII). Спб., XV, 8⁰.—812.

C. 3618 541.1 + 66

IHERING, ALBRECHT VON.

Maschinenkunde für Chemiker v. Alb. Ihering mit 7. Tafeln. Leipzig, 1906, IX, 8⁰.—396, VII. (Handbuch der angewandten physikalischen Chemie. Bd. III.)

C. 3619 58.11.742

SENN, GUSTAV.

Die Gestalts - und Lage veränderung der Pflanzen-Chromatophoren. Verlag v. W. Engelmann mit 9 Tafeln. Leipzig, 1908, XV, 8⁰.—397, IX.

C. 3620 614.62 + 351.776.2

HEEPKE, W.

Die Leichenverbrennungs - Anstalten (die Krematorien) v. W. Heepke. Halle, 1905, 8⁰.—118.

C. 3621 613.41 + 662.975 + 697.4

BEIELSTEIN, WILHELM.

Die Instalation der Warmwasseranlagen. Warmwasser für Leitungszwecke v. Wilhelm Beielstein. Leipzig, 1901, VI, 8⁰.—102.

C. 3622 648.162

ERICH, O. H.

Praktische Erfahrungen bei Anlage und Betrieb von Dampfwäschereien. Von O. H. Erich. Halle, 1905, 8⁰.—259.

C. 3623 58.11 + 58.12

VÖCHTING, HERMANN.

Untersuchungen zur experimentellen Anatomie und Pathologie des Pflanzenkörpers, von Hermann Vöchting mit 20 Tafeln. Tübingen, 1908, VII. 8⁰.—318.

C. 3624 613.584 + 697.9 + 622.4

RAMBOUSEK, JOSEF.

Luftverunreinigung und Ventilation mit besonderer Rücksicht auf Industrie und Gewerbe von I. Rambousek mit einer Tafel. Wien u. Leipzig, 1904, XII, 8⁰.—260, I.

C. 3625 536

FRANKENHÄUSER, FRITZ.

Die Wärmestrahlung, ihre Gesetze und ihre Wirkungen, v. Fritz Frankenhäuser. Heft 2. Leipzig, 1904, 8⁰.—50.

C. 3626 621.24

КРЖИЖАНОВСКІЙ, А. Э.

Гидравлическая теорія турбины Франциса быстроходнаго типа. Разсчетъ и построеніе лопатокъ. Томскъ, 1907, 8⁰.—37, I.

C. 3627 621.43

БАЛДИНЪ, С.

Двигатели внутренняго горѣнія съ 86 чертежами. С. Балдина. Спб., 1907, VII, 8⁰.—128.

C. 3628 666.982

АКИМОВЪ Б. Н.

Желѣзобетонныя конструкціи, ихъ разсчетъ и примѣненія. Сост. Б. Н. Акимовъ. Спб., 1903, IV, 8⁰.—133.

C. 3629 621.24

ПЕРМЯКОВЪ А. И.

Водяныя тюрбины, ихъ устройство, теорія и расчетъ. А. И. Пермяковъ. Москва. 907, VIII, 8⁰.—166

C. 3630 624.065

АУТЕНРИТЪ, ЭД.

Статистическій расчетъ купольныхъ сводовъ, перев. В. Бернгардъ. Прилож. къ ж. „Зодчій“ за 1898 г. Спб., 1898, 8°.—79, v.

D. 1541 677.054

МОНАХОВЪ, А. Д.

Ткацкій станокъ въ его современномъ видѣ. А. Д. Монаховъ. Москва, Кушнеревъ, 1905, 12°.—viii, 347, Атласъ G. 508.

D. 1542 614.48

ROSENAU, M. J.

Desinfection and desinfectants. By M. J. Rosenau. Philadelphia, Blakiston, 1902, 12°.—xii, 353.

D. 1543 52(09)

БЕРРИ, АРТУРЪ.

Краткая исторія астрономіи. Переводъ съ англійскаго С. Г. Займовскаго. Москва, Сытинъ, 1904, 12°.—xxxix, 603.

D. 1544 621.186.3

BOOTH, WM. H.

Steam pipes: their design and construction. By H. Booth. New York, Henley, 1905, 8°.—xi, 187.

D. 1545 351.812 : 625.151

Инструкція стрѣлочникамъ. (Общество Московско-Ярославско-Архангельской жел. дор.) Москва, Мамонтовъ, 1896—1897, 12°.—

D. 1546 351.812 : 351.817

Инструкція для смотрителей телеграфныхъ постовъ. Общество Рязанско-Казанской желѣзной дороги. Москва, 1893, 16°.—

D. 1547 55

DAMON, ROBERT.

Geology of Weymouth, Portland, and coast of Dorsetshire. By Robert Damon. With supplement (Atlas). London, Stanford, 1884—1888, 12°.—xii, 242, pl. 20.

D. 1548 536.4+539.3

SCHEFFLER, HERMANN.

Wärme und Elastizität. Von Hermann Scheffler. Leipzig, Foerster, 1879, 8°.—227.

D. 1549 519.8

SAWITSCH, A.

Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie, auf die Berechnung der Beobachtungen und geodätischen Messungen oder die Methode der kleinsten Quadrate. Von A. Sawitsch. Mitau, 1863, 8°.—viii, 338.

D. 1550 691.32 + 666.97

MIHÁLIK, JOHANN VON-

Praktische Anleitung zum Béton-Bau für alle Zweige des Bauwesens. Von Johann von Mihálik. 2. Aufl. Berlin, Grieben, 1860, 8°.—xvi, 466. Atlas G. 519.

D. 1551 693.13

HENZ, L.

Praktische Anleitung zum Erdbau. Von L. Henz. Berlin, Korn, 1856, 8°.—viii, 322.

D. 1552 552(022)

WINKLER, G. G.

Die Gesteinslehre. Von G. G. Winkler. München, Gummi, 1864, 8°.—x, 203.

D. 1553 3

SCHULZE, LUDWIG HEINRICH.

Erörterungen über Begriff und Einteilung der Bedürfnisse des Menschen. Philosophisch-ekonomische Abhandlung. Heidelberg, 1896, 8°.—xi, 136.

D. 1554 621.13 + 625.2

MEYER, GEORG.

Grundzüge des Eisenbahn-Maschinenbaues. Teil I. Die Locomotiven. Teil II. Die Eisenbahnwagen. Berlin, Ernst, 1883, 8°.—xi, 354, xiii, 326.

D. 1555 692.3

SCHWATLO, C.

Handbuch zur Beurtheilung und Anfertigung von Bauanschlägen. Von C. Schwatlo. 3. Aufl. Halle, Knapp, 1869, 8°.—xv, 413.

D. 1556 9(38)

CURTIUS, ERNST.

Griechische Geschichte von Ernst Curtius. Band 1—3. Berlin, 1858—1867, 8°.—548, 763, 784.

D. 1557 666.9

HEUSINGER VON WALDEGG, EDMUND.

Die Kalk-und Cementfabrication von Edmund Heusinger von Waldegg. 2. umgearb, Aufl. Leipzig, Thomas, 1867, 8°.—206.

D. 1558 666.7

HEUSINGER VON WALDEGG, EDMUND.

Die Ziegel und Röhrenfabrication. Von Edmund Heusinger von Waldegg. Leipzig, Thomas, 1867, 8°.—xvi, 416.

D. 1559 35.569

HOFFMANN-MERIAN, THEODOR.

Die Eisenbahnen zum Truppen-Transport und für den Krieg im Hinblick auf die Schweiz. Von Theodor Hoffman—Merian, Basel, Richter, 1868, 8°.—158.

D. 1560 693.132.3

WINKLER, E.

Neue Theorie des Erddruckes nebst einer Geschichte der Theorie des Erddruckes. Von E. Winkler. Wien, Waldheim, 1872, 8°.—143.

D. 1561 654

ROTHER, J. F. W.

Der Telegraphenbau. Bearbeitet von L. F. W. Rother. 2 verbesserte Aufl. Berlin, Peiser, 1867, 8°.—xiii, 366.

D. 1562 674.038+691.1

LANGE WALTHER.

Das Holz als Baumaterial. Von Walther Lange. Holzminden, 1879, 8°.—351.

D. 1563 661.9

LUHMANN, E.

Die Industrie der verdichteten und verflüssigten Gase. Von E. Luhmann. Wien, Hartleben, 1904, 12°.—viii, 320.

D. 1564 621

ROTTH, A. W. H.

Vom Werden und Wesen der Maschine. Motoren von A. W. H. Rotth. Mit 33 Textbildern. Berlin, Schall, s. a. 12°.—vii, 304.

D. 1565 625.6

HAARMANN, A.

Die Kleinbahnen. Für die Bedürfnisse der Praxis dargestellt von A. Haarmann. Berlin, Troschel, 1896, 12°.—x, 388.

D. 1566 666.8/9

FEICHTINGER, G.

Die chemische Technologie der Mörtelmaterialien. Von G. Feichtinger. Braunschweig, Vieweg, 1884, 8°.—vi, 478.

D. 1567 776

HUSNIK, I.

Das Gesammtgebiet des Lichtdrucks die Emailphotographie. Bearbeitet von I. Husnik. Mit 41 Abbildungen und 7 Tafeln. 4 vermehrte Aufl. Wien, Hartleben, 1894, 12°.—xvi, 256. Taf. 7.

D. 1568 84.3

MARGUERITTE, PIOTR i PAWEŁ.

Nowe kobiety. Tłom. z francuskiego. Warszawa. Nakładem „Gazety Polsk.“, 1900, 16°.—157, 150.

D. 1569 89

REYMONT, WŁADYSŁAW ST.

W jesienną noc. Warszawa, Nakład. „Gazety Polsk.“, 1900, 16°.—149.

D. 1570 91

TRZCIŃSKI, T.

Riwiera — Korsyka. Kartki z podróży. Warszawa, Nakład. „Gazety Polsk.“, 1900, 16°.—134.

D. 1571 91

SZUKIEWICZ, WOJCIECH.

Z wędrówek po słowiańszczyznie. Warszawa, Nakład. „Gazety Polsk.“, 1900, 16°.—160.

D. 1572 91

BARD, E.

Chinczycy u siebie. Warszawa. „Gazeta Polska", 1900, 16°.—156, 160.

D. 1573 91+63.922.6

BULLEN, FRANK T.

Wyprawa na połów wielorybów. Warszawa, „Gazeta Polska", 1900, 16°.—158, 160.

D. 1574 89

RZEWUSKI HENRYK.

Rycerz Lizdejko. Powieść z czasów panowania Jana Kazimierza. Warszawa, „Gazeta Polska", 1900, 16°.—780.

D. 1575 9(43.8)

SZAJNOCHA, KAROL.

Dwa lata dziejów naszych. 1646, 1648. Warszawa, „Gazeta Polska", 1900, 16°.—480.

D. 1576 656.222.5

SIMON, HENRY ANDREWS.

Die Haftpflicht der Eisenbahnen oder das Recht in Bezug auf Unfälle und Unregelmässigkeiten beim Eisenbahnbetriebe in England. Von Henry Andrews Simon. Weimar, Voigt, 1868, 8°.—120.

D. 1577 623.834

ГРЕНТАМЪ.

О желѣзномъ судостроеніи. Сочиненіе Грентама. Перевелъ Окуневъ. Спб., 1862, 12°.—224 (безъ чертежей).

D. 1578 666.73

ЛЕКЛЕРКЪ.

Выдѣлка дренажныхъ трубъ. Съ 2-го франц. изд. перевелъ М. Нолле. Спб., 1860, 8°.—96.

D. 1579 625.1—6(09)

STÜRMER, G.

Geschichte der Eisenbahnen. Von G. Stürmer. Bromberg, Heyfelder, 1872, 8°.—247.

D. 1580 625.1

SUSEMIHL, A. J.

Das Eisenbahn-Bauwesen für Bahnmeister und Bauaufseher. Dargestellt von A. Susemihl. Wiesbaden, Bergmann, 1882, 12°.—VIII, 292. Taf. XI.

D. 1581 62+69

РЕНКИНЪ, УИЛЬЯМЪ ДЖОНЪ МЕКУОРНЪ.

Руководство для инженеровъ-строителей. Перевелъ съ англійскаго Петръ Андреевъ. Спб., 1870, 12°.—XV, 855.

D. 1582 625.174

SCHUBERT, E.

Schneewehen und Schneeschutzanlagen. Von E. Schubert. Wiesbaden, Bergman, 1888, 12°.—V, 98. Taf. VII.

D. 1583 537

HAUCK, W. PH.

Die Grundlehren der Elektricität mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendungen in der Praxis. Von W. Ph. Hauck. Wien, Hartleben, 1883, 12°.—XVI, 277.

D. 1584 674.1 + 624

HARRES, B.

Die Schule des Zimmermanns. Bearbeitet von B. Harres. Teil I. Hochbauten. Teil II. Brückenbau. Leipzig, Spamer, 1861—1869, 12°.—X, 214, VIII, 198.

D. 1585 683.3

FINK, F.

Der Bauschlosser. Bearbeitet von F. Fink. Teil 1—2. 2. Aufl. Leipzig, Spamer, 1861—1868, 12°.—VIII, 266, VIII, 232.

D. 1586 621.832.3

ERNST. AD.

Eingriffverhältnisse der Schneckengetriebe. Von Ad. Ernst. Berlin, Springer, 1901, 12°.—VI, 92, Bl. XVII.

C. 1587 58.33.7

КИЧУНОВЪ, Н. И.

Культура розы въ открытомъ грунту и подъ стекломъ. Н. И. Кичунова. Изданіе третье, значительно дополненное. Спб., 1904, 8°.—XVI, 176.

D. 1588 84.3

ГЮИ ДЕ-МОПАССАНЪ.

Полное собраніе сочиненій. Томъ 1—12. Спб., 1906, 8⁰.—

D. 1589 669.0

ROBERTS-AUSTEN, WILLIAM C.

First report to the alloys research commitee 1891, 8⁰.—
II 1893, 8⁰.—
III 1895, 8⁰.—
IV 1897, 8⁰.—
V 1899, 8⁰.—
VI 1904, 8⁰.—

D. 1590 547

FISCHER, EMIL.

Anleitung zur Darstellung organischer Präparate. Braunschweig, 1905, 16⁰.—XIV, 100.

D. 1591 52.69

ДЕВИЛЛЬ, Е.

Фотографическая съемка со включеніемъ основаній начертательной геометріи и перспективы. Е. Девиль. Изд. главн. гидрограф. Управл. Спб., 1897, 8⁰.—XVIII, 268, 5 пл.

D. 1592 657

ПОПОВЪ, Н. У.

Математическій методъ бухгалтеріи Н. У. Попова. Красноярскъ, 1906, 8⁰.—280.

D. 1593 54

RAMSAY, WILLIAM.

Moderne Chemie von William Ramsay. Ins Deutsche übertragen, von Max Huth. I. Teil Theoretische Chemie. II. Teil Systematische Chemie. Halle a. S. 1905—6, 8⁰.—III, 1—151, V, 155—395.

D. 1594 53.01

RIGHI, AUGUSTO.

Die moderne Theorie der physikalischen Erscheinungen (Radioaktivität, Ionen, Elektronen) von Augusto Righi. Zweite Auflage. Leipzig, Verlag von I. A. Barth. 1908, 8⁰.—253.

D. 1595 547

ULLMANN, FRITZ.

Organisch - chemisches Praktikum von Fritz Ullmann. Leipzig, Verlag O. S. Hirzel. 1908, VIII, 263.

D. 1596 532.67

GOPPELSROEDER, FRIEDRICH.

Neue Capillar-und Capillaranalytische Untersuchungen, mitgeteilt der naturvorschenden Gesellschaft zu Basel. Von Friedrich Goppelsroeder Basel, 1907, 8⁰.—81, 51 Taf.

D. 1597 342

РЕФОРМЫ 1905—1906 Г.

Учрежденіе Государственной Думы и Государственнаго Совѣта. Основные законы и пр. Приложеніе къ журналу „Строитель" 1905 г. Спб., Тип. журн. „Строитель". 1906, 8⁰.—350.

D. 1598 667.38 + 677.771.022.33

POLLEYN, FRIEDERICH.

A. Hartleben's Chemisch - technische Bibliotek. Die Appreturmittel und ihre Verwendung. Dritte Auflage. Hartleben's Verlag. Wien und Leipzig. 1909, $^{1}/_{16}$, 368.

D. 1599 621.1

SŁUCKI, ADAM.

Badanie maszyn i kotłów parowych. Podręcznik praktyczny. Napisał Adam Słucki. Warszawa, 1909, 8⁰.—176.

D. 1600 333.38

Сборникъ законовъ и распоряженій по землеустройству по 1 Іюня 1908 г. Спб., 1908, 16⁰.—1294.

D. 1601 664.76 + 621.2

ДЕБУ, К.

Водяные и вѣтряные двигатели. Изд. Сойкина. Спб., 1908, 8⁰.—232.

D. 1602 621.1 + 621.4

БЕРШАДСКІЙ, Л. Я.

Техника монтажно-ремонтнаго дѣла. Руководство по установкѣ, сборкѣ, уходу и ремонту заводскихъ тепловыхъ двигателей. Изд. Суворина. Спб., 1908, 8⁰.—XIV, 768.

D. 1603 621.315.4 + 621.315.6 + 621.186.4

FELTONE, EDUARD.

Isolirmaterialien und Wärme- (Kälte-) Schutzmassen v. E. Feltone. Leipzig, Wien. Verlag Hartleben's, 1903, xiv. 12°.—320.

D. 1604 54

ШЕЙДЪ, КАРЛЪ.

Опыты по химіи для начинающихъ. Карла Шейда. Переводъ съ нѣмецкаго Н. Брянскаго. Спб., Изданіе Брокгаузъ—Эфронъ. 1906, 8°.—188.

D. 1605 113

АУЭРБАХЪ, ФЕЛИКСЪ.

Основныя понятія современнаго естествознанія. Проф. Ф. Ауэрбаха. Изданіе Брокгаузъ—Эфронъ. Вып. I. 1906, 8°.—152.

D. 1606 89.36

БОГДАНОВЪ, М. Н.

Изъ жизни русской природы. Зоологическіе очерки и разсказы. М. Н. Богданова. Изданіе Брокгаузъ—Эфронъ. Спб., 1906, 8°.—346.

D. 1607 661.92

INNES, CHAS. H.

Air compressors and blowing engines; by Chas. H. Innes. London, 1906, 16°.—290.

D. 1608 547

FISCHER, EMIL.

Anleitung zur darstellung organischer Präparate, von E. Fischer. 8-te durchgesehene Auflage. Braunschweig. 1908, 16°.—xvi, 98.

D. 1609 547.664

CROSS & BEVAN.

Cellulose an outline of the chemistry of the structural elements of plants. By Cross & Bevan. Second edition. Longmans, Green. London, 1903, 16°.—viii, 328.

D. 1610 547

BERNTHSEN, A.

Kurzes Lehrbuch der organischen Chemie, von A. Bernthsen. Zehnte Auflage. Verlag von Fr. Vieweg. Braunschweig, 1909, 8°.—xix, 640.

D. 1611 54

STÖCKHARDT, AD.

Schule der Chemie. 21 Auflage, Verlag von Friedrich Vieweg. Braunschweig, 1908, 16°.—xxxv, 797.

D. 1612 89.3

ШЕЛЛЕРЪ-МИХАЙЛОВЪ.

Полное собраніе сочиненій. Томы I—VII, книгъ 20. 1904. Томы VIII—XVI. 1905.

D. 1613 677.0

WITT, OTTO u. ARTHUR BUNTROCK.

Chemische Technologie der Gespinnstfasern von Otto Witt u. Arthur Buntrock. In 3 Lieferungen. Verlag von F. Vieweg. (Handbuch der chemischen Technologie). Braunschweig, 1888 — 1891 — 1902. 8°.—576.

D. 1614 89.3

СТАНЮКОВИЧЪ К.

Собраніе сочиненій. Морскіе разсказы. Изданіе Маркса. Спб., 1906, 12°.—

D. 1615 62

HÜTTE.

Des Jngenieurs Taschenbuch. Ausgabe des Akademischen Verein Hütte. Zwanzigste Auflage. Abteilungen I — II Verlag von W. Ernst.

Berlin, 1908, 12°.—Abt. 1 — xvi, 981.
" " " Abt. 2 — vii, 999.
" " " Abt. 3 — xii, 830.

D. 1616 62—69.00.35

JOLY, HUBERT.

Technisches Auskunftsbuch für das Jahr 1909. Leipzig, 1909, 12°.—1349.lviii.

D. 1617 677.05

LECOINTRE, ACHILLE.

Réglage des métiers à tisser mecaniques. Traité pratique. Par Achille Lecointre. 2. Edit. H. I. Lecointre. Lille, 1905, 12⁰.—316.

D. 1618 541.8+548.32

BRUNI, GIUSEPPE.

Feste Lösungen und Isomorphismus. Giuseppe Bruni. Leipzig, 1908, VI, 8⁰.—130, I.

D. 1619 547

NOYES, WILLIAM A.

Kurzes Lehrbuch der organischen Chemie von William A. Noyes. Mit Genehmigung des Verfassers ins Deutsche Übertragen von Walter Ostwald. Leipzig, 1907, 8⁰.—XXIV, 722.

D. 1620 621.43

LETOMBE, LÉON.

Les moteurs. Paris, 1909, VII, 12⁰.—436.

D. 1621 621.184.2

KINEALY, J. H.

Mechanical Draft a practical handbook, by J. Kinealy. New York, 1906, XII, 16⁰.—139.

D. 1622 541

OSTWALD, WILHELM.

Principien der Chemie. Eine Einleitung in alle chemischen Lehrbücher von Wilhelm Ostwald. Leipzig, 1907, XIV, 540.

D. 1623 59.19

MAAS, OTTO.

Lebensbedingungen und Verbreitung der Tiere. Von Otto Maas. Verlag v. Teubner in Leipzig, 1907, IV, 8⁰.—136.

D. 1624, 1625 621.3

Русское электрическое общество Вестингаузъ. Описанie завода. Москва, 1909, 12⁰.—226.

D. 1626 77

VOGEL, H. W.

H. W. Vogel's Photographie ein kurzes Lehrbuch für Liebhaber und Fachleute. Zweite vermehrte Auflage. Bearbeitet von Hans Spörl. Braunschweig, Vieweg und Sohn, 1909, IX, 8⁰.—324.

D. 1627 538.3 + 541.1

THOMSON, J. J.

Anwendungen der Dynamik auf Physik und Chemie von J. J. Thomson. Verlag v. G. Engel. Leipzig, 1890, VIII, 12⁰.—372.

D. 1628 54

SMITH, ALEXANDER.

Einführung in die allgemeine und anorganische Chemie auf elementarer Grundlage von Alexander Smith. Karlsruhe, 1909, XVI, 12⁰.—677, I.

D. 1629 629.13

NIMFÜHR, RAIMUND.

Die Luftschiffahrt. Ihre wissenschaftlichen Grundlagen und technische Entwiklung. Von Dr. Raimund Nimführ in Wien. Verlag v. Teubner in Leipzig, 1909, 16⁰.—152.

D. 1630 551.2

DECHEN, H. von-

Geognostischer Führer zu der Vulkanreihe der Vorder-Eifel. Von Dr. H. von Dechen. Zweite verb. Auflage. Mit einer Karte. Bonn. 1886. Verlag v. Max Cohen. VIII, 12⁰.—323. Karte I.

D. 1631 516

HOLZMÜLLER, GUSTAV.

Elemente der Stereometrie. Von Gustav Holzmüller. Leipzig. Göscheusche Verlagshandlung.

I Teil. Die Lehrsätze und Konstruktionen. 1900, X, 8⁰.—383.

II Teil Die Berechnung einfachgestalteter Körper. 1900, XV, 8⁰.—477.

III Teil. Die Untersuchung und Konstruction schwierigerer Raumgebilde. 1902, XII, 8⁰.—333

IV Theil. Forsetzung der schwierigeren Untersuchungen. 1902, XI, 8⁰.—311,

D. 1632 77.012

SHEPPARD, S. E. and C. E. KEUNETH MEES.

Investigations on the Theory of the Photographic Process. By S. E. Sheppard. and C. E. Keuneth Mees. Longmans, Green. New York, Bombay, and Calcuta. 1907, x, 12⁰.—342.

D. 1633 54

РАМЗАЙ, ВИЛЬЯМЪ.

Современная химія. Вильямъ Рамзай. Переводъ соч. „Modern Chemistry by W. Ramsay" С. В. Лебедева и Е. П. Остроумовой.

I часть. Теоретическая химія. Спб. Изд. Риккера, 1906, 12⁰.—119.

II часть. Системетическая химія. Спб., 1907, 12⁰.—199.

D. 1634 54(09)

OSTWALD, WILHELM.

Der Werdegang einer Wissenschaft. Sieben gemeinverständliche Vorträge aus der Geschichte der Chemie von Wilhelm Ostwald. Leipzig. Akademische Verlagsgesellschaft. 1908, x, 12⁰.—316.

D. 1635 621.365

MINET, AD.

Les Fours électriques et leurs applications. Par Ad. Minet. Encyklopédie scientifique des Aide-Mémoire. Sine Anno, 14⁰.—178.

D. 1636 541.13

GRIMM, CURT.

Die chemischen Stromquellen der Elektrizität von Curt Grimm.' Die Schwachstromtechnik in Einzeldarstellungen. Band IV. München und Berlin. Verlag von R. Oldenbourg. 1908, vii, 8⁰. –211.

D. 1637 612.768 : 629.13

WINTER, WILHELM.

Der Vogelflug. Erklärung der wichtigsten Flugarten der Vögel mit Einschluss des Segelns und Kreisens. Von Wilhelm Winter. Münhen, 1895, 12⁰.—172.

D. 1638 666.982

МОРЕЛЬ, М. А.

Желѣзо-бетонъ и его примѣненія. Переводъ съ французскаго Л. Л. Мищенко. Подъ редакціею В. В. Айвозова. Спб., 1907, 12⁰.—145.

E. 281 532.5

PRÁŠIL, F.

Ueber Flüssigkeitsbewegungen in Rotationshohlräumen. Von F. Prášil. Zürich, Rascher, 1903, 4⁰.—

E. 282 628.2(47.31)

РАЗБОРЪ

главнѣйшихъ основаній проекта канализаціи г Москвы въ Высочайше учрежденной коммиссіи по надзору за устройствомъ новаго водопровода и канализаціи въ г. Москвѣ. Б. г. и. м. изд. 8⁰.—25.

E. 283 627.2(47.921)

ПРѢСНЯКОВЪ.

О настоятельности приспособленія Потійскаго порта для усиленія пропускной его способности. Тифлисъ, 1889, fol. 22.

E. 284 625.253

FREIN

continu automatique à air comprimé système Schleifer. s. l. 1886, 4⁰.—13.

E. 285 621.024

WEISS, F. J.

Leistungs-Regulator Patent Weiss für Pumpwerks-Dampfmaschinen mit veränderlicher Expansion. Basel, 1897, 4⁰.—12.

E. 286 621.33

ГРАФТІО, Г. О.

Описаніе нѣкоторыхъ новыхъ линій электрическихъ желѣзныхъ дорогъ. Спб., 1900, 8⁰.—29.

E. 287 625.611

ВЕНДРИХЪ, А. фонъ и Н. СЛОБОДЗИНСКІЙ.

Второстепенныя желѣзныя дороги. А. фонъ Вендрихъ и Н. Слободзинскій. Кіевъ, Кушнеревъ, 1884. 4⁰.—84.

E. 288 656.211

GRÜTTEFIEN, E.

Vergleichender Ueberblick über die neueren Umgestaltungen der grösseren preussischen Bahnhöfe. Von E. Grüttefien. Berlin, Ernst, 1888, fol. 14.

E. 289 624.22

FRÄNKEL, W.

Construction eiserner Fachwerkträgerbrücken. Von. W. Fränkel. Leipzig, Felix, 1869, 4°.—22.

E. 290 624.65

SCHMITT. EDUARD.

Ueber die Construction eiserner Bogenbrücken. Von Eduard Schmitt. Leipzig, Felix, 1870, 4°.—31. Taf. 4.

E. 291 624.0

LANGER, JOSEF.

Der Eisenbrückenbau auf den neuesten Standpunkte, nebst einem Anhange über Bogenbrücken von Holz und Bogengerüste. Von Josef Langer. Wien, 1863, fol. 43.

E. 292 625.312

ЛЯРТИГЪ и ДЕКОВИЛЬ.

Разборъ и сравненіе легкихъ желѣзныхъ дорогъ системъ Ляртига и Дековиля. Спб., Пантелеевъ, 1886, фол. 19.

E. 293 627.2

HERZBRUCH u. DEMPWOLFF.

Die russischen Ostseehäfen Libau, Riga. Reval St. Petorsburg und Cronstadt. Von Herzbruch u. Dempwolff. Berlin, Ernst, 1880, fol. 10. Taf. III.

E. 294 626

HAGEN, L.

Reisebericht über die im Auftrage des Herrn Ministers der öffentlichen Arbeiten im Frühjahr 1880 ausgeführte Besichtigung einiger Ströme Frankreichs. Erstattet von L. Hagen. Berlin, Ernst, fol. 16, Bl. 6.

E. 295 621,182.12

ВОЗНЕСЕНСКІЙ, А. М.

Нефтяное отопленіе. А. М. Вознесенскаго. Кіевъ, Кульженко, 1882, фол. 39, лис. 4.

E. 296 541

NATANSON, EDWARD I WŁADYSŁAW.

Wartość chemiczna i jej zmienność. Przez Edwarda i Władysława Natansonów. Paryż 1880, 4°.—60.

E. 297 624.04

SCHMIDT, HEINRICH.

Zusammenstellung von Formeln zur Aufsuchung der Biegungskurven und zur Bestimmung der Auflagerdrücke. Von Heinrich Schmidt. Wien, 1867, 4°.—38.

E. 298 624.2

SCHMIDT, HEINRICH.

Betrachtungen über Brückenträger, welche auf zwei und mehr Stützpunkten frei aufliegen. Von Heinrich Schmidt. Wien, 1868, 8°.—32. Taf. II.

E. 299 624.0

SCHMIDT, HEINRICH.

Beiträge zum Brückenbau für angehende Ingenieure. Von Heinrich Schmidt. Wien, Ritter, 1869, 4°.—67.

E. 300 625.13

SCHOEN, JOHANN GEORG.

Der Tunnel-Bau. Von Johann Georg Schoen. Wien, Bartelmus, 1866, 8°.—48. Taf. XIV.

E. 301 92

ЛЮДИ

смутнаго времени. Подъ редакц. А. Е. Прѣснякова. Спб., Брокгаузъ-Ефронъ, 1905, 4°.—53.

E. 302 654.2

ШИМКЕВИЧЪ, П.

Желѣзнодорожная телеграфія въ ея практическомъ приложеніи. Составлено П. Шимкевичемъ. Текстъ и атласъ. Спб., Эрлихъ, 1889, 8°.—IV, 72, лис. XVI.

E. 303 621.87(064) „1900“ Paris.

KAMMERER.

Hebemaschinen auf der Weltausstellung in Paris 1900. Von Kammerer. Berlin, 1901, 4⁰.—68.

E. 304 621.343/4

KAMMERER.

Die Lastenförderung unter dem Einfluss der Elektrotechnik. Von Kammerer. Berlin, 1902, 4⁰.—16.

E. 305 621.344

NIETHAMMER, F.

Motoren und Hülfsapparate für elektrisch betriebene Hebezeuge. Von F. Niethammer. Berlin, Springer, 1897, 4⁰.—29.

F. 1884—a 547 Imidoxanthid

TSCHUGAEFF, L.

Ueber Imidoxanthide, eine neue Klasse gefärbter organischer Verbindungen. Berlin, 1902, 8⁰.—4.

F. 1884—b 547 Xanthogenamid

TSCHUGAEFF, L.

Ueber Xantogenamide der Terpenreihe. Berlin, 1902, 8⁰.—11.

F. 1884—c 547 Thujen

TSCHUGAEFF, L.

Ueber das Thujen, ein neues bicyklisches Terpen. Berlin, 1902, 8⁰—9.

F. 1884—d 547 Thujylamin

TSCHUGAEFF, L.

Ueberführung von Thujylamin in Thujen. Berlin, 1901, 8⁰.—6.

F. 1884—e 547 Triboluminscenz

TSCHUGAEFF, L.

Ueber Triboluminiscenz. Berlin, 1901, 8⁰.—

F. 1884—f 547.2

TSCHUGAEFF, L.

Ueber eine neue Methode zur Darstellung ungesättigter Kohlenwasserstoffe. Berlin, 1899, 8⁰.—4.

F. 1884—g 547 Carvon

TSCHUGAEFF, L.

Ueber die Umwandlung von Carvon in Limonen. Berlin, 1900, 8⁰.—2.

F. 1884—h 547

TSCHUGAEFF, L.

Untersuchungen über optische Activität· I Mitteilung. Berlin, 1898, 8⁰.—9.

F. 1884—i 547

TSCHUGAEFF, L.

Untersuchungen über optische Activität. II. Mitteilung. Berlin, 1898, 8⁰.—8.

F. 1885 612

ЗАКСЪ, Г.

Строеніе и дѣятельность человѣческаго тѣла. Спб., Битнеръ, 1905, 8⁰.—48, 51,

F. 1886 551.22(47)

МАТЕРІАЛЫ

для изученія землетрясеній Россіи, издаваемые подъ редакціей И. В. Мушкетова. Спб., Безобразовъ, 1899, 8⁰.—106.

F. 1887 89—3

URSYN (JAN ZAMARAJEW).

Wybór nowel. Tom II. Warszawa, 1900, 12⁰.—156.

F. 1888 351.812.5(47)+625.062(47)

ПРАВИЛА

движенія по желѣзнымъ дорогамъ (паровознымъ). Спб., 1886, 16⁰.—83.

F. 1889 351.812.5(47)+625.062(47)

ПРАВИЛА

содержанія и охраненія паровозныхъ желѣзныхъ дорогъ, открытыхъ для общественнаго пользованія. Москва, 1887, 16⁰.—124.

F. 1890 59.(074.6)

ОРЛОВЪ, М. А.

Акваріумъ, его устройство и населеніе. Съ 10 рисунками. Составилъ М. А. Орловъ. Спб., Сойкинъ. 1905, 8⁰.—64.

F. 1891 625.1(494)

FLACHAT, EUGÈNE.

De la traversée des Alpes par un chemin de fer. Par Eugène Flachat. Neuilly, 1859, 8°.—84.

F. 1892 353.2.075.1(47.713)—1

СОБРАНІЕ.

Полтавское губернское чрезвычайное собраніе 30—31 мая 1905 года. Журналы и доклады. Полтава, Фришбергъ, 1905, 8°.—76.

F. 1893 017.1(47.711) П. И. : 05

СПИСОКЪ

русскихъ и иностранныхъ періодическихъ изданій, получаемыхъ въ библіотекѣ Кіевскаго Политехнич. Института въ 1903 году. Кіевъ, Кульженко, 1903, 4°.—8.

F. 1894 017.1(47.711) П. И.

СПИСОКЪ

книгъ справочнаго отдѣла библіотеки Кіевскаго Политехн. Инст. Кіевъ, Чертовъ, 1904, 8°.—5.

F. 1895 625.1(43.6)

VORSCHRIFTEN.

Besondere Vorschriften für den Baudienst der Eisenbahn von Innsbruck nach Bozen. Wien, Hölder, 1872, 8°.—52.

F. 1896 621(01)

SCHINDLER, E.

Theorie des Modellbaues. Von E. Schindler. Weimar, Voigt, 1872, 8°.—112.

F. 1897 385(73)

KÜBECK, MAX v.

Reiseskizzen aus den Vereinigten Staaten von Nordamerika. Von Max Kübeck. Wien, Gerold, 1872, 8°.—66.

F. 1898 625.25

A. O. V.

Ueber die Zusammenhangsbremsen für Eisenbahnfahrzeuge. Von A. O. V. Wien, Hartleben, 1890, 8°.—66.

F. 1899 347.763.4(43.6)

POLLANETZ, JOSEPH u. HEINRICH EDLEM von WITTEK.

Sammlung der das oesterreichische Eisenbahnwesen betreffenden Gesetze Verordungen Staatsverträge. Von Joseph Pollanetz u. Heinrich Edlem von Wittek. Wien, 1869, 8°.—iv, 112.

F. 1900 621.132.8

BEYER, J.

Normal und zu Schmal-Spur und die Fairlie—Locomotive. Von J. Beyer. Wien, Lehmann, 1873, 8°.—28.

F. 1901 623.63

FERRARIUS, WILES.

Studien über die heutigen Eisenbahnen im Kriegsfalle. Von Wiles Ferrarius. Wien, Hartleben, s. a. 8°.—iv, 55.

F. 1902 539.4

SCHEFFLER, HERMANN.

Theorie der Festigkeit gegen das Zerknicken. Von Hermann Scheffler. Braunschweig, 1858, 8°.—x, 138.

F. 1903 538.811

NIAUDET-BREGUET, ALFRED.

Machines magnéto-electriques. Gramme. Par Alfred Niaudet-Breguet. Paris, 1875, 8°.—37.

F. 1904 624.08+624.9

FABRÉ, V.

Theorie des charpentes, donnant des règles pratiques pour la construction des fermes. Par V. Fabré. Paris, Thunot, 1851, 8°.—viii, 63.

F. 1905 624.6

DALLOT, AUGUSTE.

Description du pont de l' Escaut à Audenarde. Par Auguste Dallot. Paris, Lacroix, 1862, 8°.—47.

F. 1906 623.127+624.82

PIRON, F. P. J.

Mémoire sur un pont roulant simplifié pour les communications militaires. Par F. P. Piron. Paris, Tanera, 1863, 8°.—17.

F. 1907 526.95/6 + 526.36

КУЗНЕЦОВЪ, В. А.

Нивеллированіе и съемка секстаномъ. В. А. Кузнецова. Спб., 1902, 8⁰.—98.

F. 1908 663.11

ISSAJEW, W.

Ueber die Hefekatalase. Von. W. Issajew. Strassburg, Trübner, 1904, 8⁰.—

F. 1909 663.43

ISSAJEW, W.

Ueber die Malzoxydase. Von W. Issajew. Strassburg. Trübner, 1905, 8⁰.—

F. 1910 663.11

ISSAJEW, W.

Ueber die Hefeoxydase. Von W. Issajew. Strassburg, Trübner, 1904, 8⁰.—

F. 1911 7 „18"

УЭЛЬДСТИНЪ.

Искусство XIX вѣка. Съ введеніемъ В. Оствальда. Спб., Битнеръ, 1905, 8⁰.—54.

F. 1912 575

БЕЛЬШЕ, В.

Прогрессъ дарвинизма. Переводъ съ нѣмецк. Спб., Битнеръ, 1905, 8⁰.—87.

F. 1913 15 + 16

ЭЛЬЗЕНГАНСЪ, Т.

Психологія и логика. Введеніе въ философію. Переводъ съ 4-го нѣм. изд. Спб., Битнеръ, 1905, 8⁰.—76.

F. 1914 613

ЗЕЙЛЕРЪ, Г.

Ученіе о здоровьѣ. Гигіена. Спб., Битнеръ, 1905, 8⁰.—32.

F. 1915 623.63

BASSON, WILHELM.

Die Eisenbahnen im Kriege. Von Wilhelm Basson. Ratibor, 1867, 8⁰.—72.

F. 1916 625.85

MEYN, L.

Der Asphalt und seine Bedeutung für den Strassenbau grosser Städte. Von L. Meyn Halle, 1872, 8⁰.—92.

F. 1917 63.14

GERHARDT.

Umgestaltung der Drainagebauten von Längsdrainagen zu Querdrainagen. Von Gerhardt. Berlin, Ernst, 1891, 8⁰.—21.

F. 1918 656.22

SCHIMA, FRANZ.

Studien und Erfahrungen im Eisenbahnwesen. Von Franz Schima. I. Ueber die Beförderung der Züge. Prag, Rivnáč, 1878, 8⁰.—95.

F. 1919 625.151

RANK, GEORG.

Die Sicherung von Bahnabzweigungen mit besonderer Berücksichtigung der Industriegeleise. Von Georg Rank. Wien, Spielhagen, 1894, 8⁰.—19.

F. 1920 625.143.2

PETZHOLDT. ALPHONS.

Die Erzeugung der Eisen und Stahlschienen. Von Alphons Petzholdt. Braunschweig, Vieweg, 1874, 8⁰.—81.

F. 1921 656.03 + 691.922.2

LANG. GUSTAV.

Ueber Erdtransportkosten. Von Gustav Lang. München, Ackermann, 1879, 8⁰.—32.

F. 1922 625.122 + 691.922.2

EICKEMEYER, FRANZ.

Das Massen-Nivellement und dessen praktischer Gebrauch. Von Franz Eickemeyer. Leipzig, Taubner, 1870, 8⁰.—44, Taf. 2.

F. 1923 621.132

HUËT, A.

De Water-locomotief. Mededeeling in het Koninklijk instituut van ingenieurs door A. Huët. Gravenhage, 1872, 8⁰.—32. tab. 1.

F. 1924 626(44)

KRANTZ.

Schlussbericht über den vorzunehmenden Ausbau der Wasserstrassen in Frankreich. Von Krantz. Wien, Lehmann, 1875, 8⁰.—42.

F. 1925 624.013/4

BRIK, JOH.

Ueber die Erkenntniss abnormaler Zustände in eisernen Brücken. Von Joh. Brik. Leipzig, Engelmann, 1891, 8⁰.—27.

F. 1926 626.76

BAZIN.

Note sur service de touage à vapeur établi au souterrain de Pouilly. (Canal de Bourgogne). Par Bazin. Paris, Dunod, 1869, 8⁰.—23.

F. 1927 626.76/7

BUQUET, A.

Touage sur cable métallique système de Mesnil. Par A. Buquet. Paris, Lemoine, 1869, 8⁰.—32.

F. 1928 624.115

MARÉCHAL, C.

Notice sur l'emploi de l'air comprimé au fonçage des piles et culées du pont de Kehl sur le Rhin. Par C. Maréchal. Paris, Noblet, 1861, 8⁰.— 46, pl. 12.

F. 1929 538.811

NIAUDET-BREGUET, ALFRED.

Machines magnéto-électriques. Gramme. Par Alfred Niaudet-Breguet. Paris, Fontaine, 1875, 8⁰.—37, pl. II.

F. 1930 56(116.2)(44.26)

RIGAUX, E. et E. SAUVAGE.

Description de quelqes espèces nouvelles de l'Etage Bathonien du Bas-Boulonnais. Présentée à la Société Académique par E. Rigaux et E. Sauvage. Boulogne, 1869, 8⁰.—84, pl. VI.

F. 1931 636.51

ПОПЛАВСКIЙ, А. А.

Главнѣйшiя породы куръ въ натуральныхъ цвѣтахъ. Альбомъ куръ. Составилъ А. А. Поплавскiй. Спб., 1905, 8⁰.—46, таб. 6.

F. 1932 697.2

СТЕПАНОВЪ. П. В.

Устройство комнатныхъ печей Составилъ П. В. Степановъ. Вып. I. Комнатныя печи для всякаго рода топлива. Спб., Бенке, 1883, 8⁰.—92. Атласъ G. 524.

F. 1933 017.42

SEYDEL'S FÜHRER

durch die tchnische Litteratur. III. Nachtrag zu Seydel's Führer. 18. Aufl. vom Oktober 1904. Berlin, Seydel, 1905, 12⁰.—

F. 1934 541.2

ABEGG, R.

Die Valenz und das periodische System. Versuch einer Theorie der Molekularverbindungen. Von R. Abegg. Hamburg, Voss. s. a. 12⁰.—330—380.

F. 1935 624 + 625.13

СИСТЕМА

О наивыгоднѣйшей системѣ желѣзныхъ віадуковъ. В. г. п. м. изд. 8⁰.—56, табл. 4, Литограф.

F. 1936 385.11

ROEDER, O.

Die Cottbus - Grossenhainer - Eisenbahn. Von O. Roeder. Berlin, Ernst, 1871, 8⁰.—16.

F. 1937 625.122 + 691.922

RZIHA. FRANZ.

Der englische Einschnitts-Betrieb. Von Franz Rziha. Berlin, Ernst, 1872, 8⁰.—30. Taf. 1.

F. 1938 63.922(262.5)

СИЛАНТЬЕВЪ, А. А.

Черноморское побережье Кавказа въ сельско-хозяйственномъ и промысловомъ отношенiи. Вып. I. Дельфиновый промыселъ у береговъ Кавказа. Составилъ А. А. Силантьевъ. Спб., Киршбаумъ, 1903. 8⁰.—61.

F. 1939 697

СОКОЛОВЪ, Д.

Отопленіе и вентиляція. Б. г. и. м. изд. 8°.—45.

F. 1940 622.255

POETSCH, FRIEDRICH HERMANN.

Das Gefrierverfahren. Von Friedrich Hermann Poetsch. Freiberg, Craz, s. a. 8°.—50. Taf. IV.

F. 1941 63.94(262.5)

КАРПОВЪ, ВЛАДИМІРЪ.

Отчетъ о командировкѣ на Черное море для изученія устричнаго дѣла. Владиміра Карпова. Спб., Фролова, 1903, 8°.—77.

F. 1942 63.922.2 + 664.951.22

БОРОДИНЪ, Н. А.

Очеркъ сельдяного промысла по западному побережью Каспія. Н. А. Бородина. Спб., Киршбаумъ, 1904, 8°.—35.

F. 1943 63.922

СМИРНОВЪ, Н. А.

О зимнемъ тюленьемъ промыслѣ на Каспійскомъ морѣ. Н. А. Смирнова. Спб., 1904, 8°.—29.

F. 1944 532.54

KOSTKIEWICZ, WŁADYSŁAW.

Zasady ruchu wody w rzekach i kanałach oraz wzory teoretyczne na prędkość i objętość przepływu. Przez Władysława Kostkiewicza. Warszawa, 1906, 8°.—55.

F. 1945 626.76/7 + 624.013

BECKER, MAX.

Die Kabelschifffahrt und die Eisenbahnbrücke über den Neckar bei laxtfeld. Bearbeitet von Max Becker. Stuttgart, Mäcken, 1870, 8°.—82. (Atlas G 537).

F. 1946 531.25

WEYRAUCH, JAKOB.

Die graphische Statik. Zur Orientirung. Von Jakob Weyrauch. Leipzig, Teubner, 1874, 8°.—36.

F. 1947 625.25

BREMSEN.

Die Bremsen für Eisenbahn-Fahrzeuge. Wien, Gerold, 1891, 8°.—48. Taf. II.

F. 1948 626.1(43)

SCHLICHTING, J.

Zur Schiffbarmachung der Flüsse. Von J. Schlichting. Berlin, Ernst, 1876, 8°.—31.

F. 1949 625.87

КАВЕНЪ.

Желѣзо, сталь и чугунъ, какъ матеріалы мостовыхъ сооруженій. Кавена. Переводъ А. Недзялковскаго. Спб., Безобразовъ, 1869, 8°.—70.

F. 1950 63.49.1

СТАТКОВСКІЙ, Б. И.

Прекращеніе овражныхъ выносовъ и возобновленіе лѣсовъ на горахъ. Б. И. Статковскаго. Тифлисъ, Либерманъ, 1895, 8°.—44.

F. 1951 624.115

БРЕННЕКЕ, Л.

Объ устройствѣ основаній при помощи сгущеннаго воздуха. Л. Бреннеке. Спб., Бенке, 1881, 8°.—68.

F. 1952 624.65 + 624.913

ГОЛОВИНЪ, Х.

Упругія арки. Спб., б. г. 8°.—92. Литограф.

F. 1953 532.57

КОТЛЯРЕВСКІЙ, П. Н.

Гидрографъ. Приборъ для опредѣленія скорости движенія воды или хода судна. Спб., Бенке, 1884, 8°.—13.

F. 1954 531.25

ВЕЙРАУХЪ, Я.

О графической статикѣ. Съ нѣмецк. перевелъ Ф. Максименко. Спб., Бенке, 1880, 8°.—48.