ИЗВѢСТІЯ

ВАРШАВСКАГО

ПОЛИТЕХНИЧЕСКАГО ИНСТИТУТА

ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II.

ВЫПУСКЪ II. — 1908 г.

ВАРШАВА.
ПЕЧ. ВЪ ТИП. АКЦ. ОБЩ. С. ОРГЕЛЬБРАНДА С-ЕЙ.
1910.

Печатано по опредѣленію Совѣта Варшавскаго Политехническаго Института Императора Николая II.

Директоръ профессоръ *В. П. Амалицкій.*

СОДЕРЖАНІЕ.

Редакторъ профессоръ *И. Р. Брайцевъ.*

О кривизнѣ плоскихъ кривыхъ.

Д. Д. Мордухай-Болтовского.

---

§ 1. Мѣрой кривизны $\varkappa$ въ данной точкѣ M плоской кривой называется предѣлъ отношенія угла смежности въ безконечно близкой точкѣ M_1 къ соотвѣтственной дугѣ кривой MM_1. Какъ извѣстно $\varkappa = \frac{1}{\rho}$, гдѣ ρ радіусъ круга, соприкасающагося въ точкѣ M къ кривой. Это свойство, связывающее теорію кривизны съ изслѣдованіемъ соприкасающагося круга, даетъ возможность обобщить понятіе кривизны, разсматривая $\varkappa$ или ρ только, какъ первое опредѣленіе формы элемента кривой и характеризуя дальнѣйшія опредѣленія, зависящія отъ безконечно-малыхъ порядка выше второго другими имѣющими геометрическое значеніе элементами. Въ то время, какъ $\varkappa$ *кривизна перваго порядка* опредѣляется дугой соприкасающагося круга, мы можемъ представить себѣ *кривизны высшихъ порядковъ,* опредѣляемыя дугами соприкасающихся кривыхъ, соприкосновеніе которыхъ порядка выше второго. Такимъ образомъ, переходя отъ соприкасающагоса круга къ соприкасающимся кривымъ второго порядка и опредѣляя длину полуосей и положеніе точки, совпадающей съ M, относительно осей, мы можемъ принять элементъ дуги при этой точкѣ опредѣляющимъ кривизну второго порядка.

Опредѣленіе различныхъ элементовъ соприкасающихся кривыхъ 2-го порядка было сдѣлано [1]) *Амперомъ* (изученіе соприкас. парабо-

---

[1]) *Enneper.* Ueber die osculatorischen Kegelschnitte ebener Curven. Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1874. s. 138.

Ampère. Sur les avantages qu'on peut retirer dans la théorie des courbes de la consideration des paraboles osculatrices. Journal de l'Ecole Polytechnique. Ch. XIX t. VII. 1808. p. 159.

лы) и *Эннеперомъ* (общій типъ кривыхъ второго порядка). Слѣдуетъ замѣтить, что не всѣ параметры соприкасающейся кривой слѣдуетъ считать за опредѣляющіе кривизну, но только тѣ (A), которыя *не зависятъ отъ выбора координатъ* т. е. представляютъ изъ себя *инваріанты* *), остальные (B) опредѣляютъ положеніе заданной кривой, а вмѣстѣ съ ней и соприкасающейся на плоскости.

Для соприкасающагося круга къ (A) долженъ быть отнесенъ его радіусъ ρ, къ (B) координаты центра.

Параметровъ (B) будетъ всего три, ибо, если взять уравненіе кривой въ простѣйшемъ видѣ:

$$\varphi\,(k_1,\, k_2 \ldots k_p,\, \xi,\, \eta) = 0 \tag{1}$$

гдѣ k_i инваріанты, то черезъ преобразованіе координатъ

$$\begin{aligned} \xi &= m\,\xi_1 - \sqrt{1 - m^2}\,\eta_1 + a \\ \eta &= \sqrt{1 - m^2}\,\xi_1 + m\eta_1 + b \end{aligned} \tag{2}$$

[m косинусъ угла между направленіемъ оси ξ и оси ξ_1; a, b координаты начала координатъ (ξ, η) относительно осей (ξ_1, η_1)]

уравненіе (1) приводится къ уравненію

$$\varphi\,(k_1,\, k_2 \ldots k_p,\, m,\, a,\, b,\, \xi,\, \eta) = o \tag{3}$$

содержащему новые три параметра (m, a, b).

Чтобы обратно отъ общаго типа уравненія

$$\varphi\,(a_1,\, a_2 \ldots a_p,\, a_{p+1},\, a_{p+2},\, a_{p+3},\, \xi,\, \eta) = o \tag{3'}$$

перейти къ простѣйшему (2) слѣдуетъ принять за оси координатъ прямыя, относительно которыхъ кривая (3') обладаетъ свойствами не зависимыми отъ выбора координатъ и которые вполнѣ опредѣляютъ эти прямыя. Таковы оси элипса. Конечно такихъ уравненій будетъ безконечное множество.

Помимо параметровъ k_i къ величинамъ, характеризующимъ кривизны, слѣдуетъ еще отнести координаты (ξ, η) (или только одну, такъ какъ одна функція другой и k_i) точки, совпадающей съ M относительно осей координатъ, для которыхъ уравненіе принимаетъ

*) Объ условіяхъ этого рода инваріантности см. сочиненіе Ампера.

простѣйшій видъ. Въ то время, какъ k_i вполнѣ опредѣляютъ соприкасающуюся кривую, (ξ, η) опредѣляютъ точно элементъ дуги на этой кривой, которыми характеризуется кривизна высшаго порядка. За рядъ послѣдовательныхъ опредѣленій кривизны или за рядъ системъ величинъ, опредѣляющихъ кривизны различныхъ порядковъ или *характеристикъ кривизнъ* можно принять величины

$$k_i, \ \xi, \ \eta$$

для послѣдовательнаго ряда соприкасающихся кривыхъ:

$$\varphi_1 = o, \qquad \varphi_2 = o \ \ldots.$$

содержащихъ $\overline{n_1 + 2}$, $\overline{n_2 + 2}$ .... параметровъ.

Такимъ образомъ мы имѣемъ рядъ системъ характеристикъ:

$$k_1^{(1)} \ k_2^{(1)} \ \ldots\ldots \ k_{n_1}^{(1)} \ \xi^{(1)} \ \eta^{(1)}$$

$$k_1^{(2)} \ k_2^{(2)} \ \ldots\ldots \ k_{n_2}^{(2)} \ \xi^{(2)} \ \eta^{(2)}$$

$$\cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot$$

$$k_1^{(p)} \ k_2^{(p)} \ \ldots\ldots \ k_{n_p}^{(p)} \ \xi^{(p)} \ \eta^{(p)}$$

отвѣчающихъ кривизнамъ, 1, 2 ... р порядковъ.

Въ силу условій соприкосновенія

$$k_j^{(1)}, \quad \xi^{(1)}, \quad \eta^{(1)}$$

должны выражаться раціонально въ

$$x, \ y, \ y', \ y'', \ \ldots \ y^{(n_i+2)},$$

если (x, y) координаты точки М, при этомъ $\eta^{(i)}$ функція $k_j^{(i)}$ и $\xi^{(i)}$.

Выбирая оси X, Y, такъ что $x = o$, $y = o$ и $y' = o$, то есть принимая касательную въ точкѣ М къ заданной кривой за ось X, нормаль за ось Y, получаемъ выраженіе

$$k_j^{(i)}, \quad \xi^{(i)}, \quad \eta^{(i)}$$

въ

$$y'', \ y''' \ \ldots \ y^{(n_i+2)}$$

откуда $y^{(j)}$ $j = 2{,}3 \ \ldots \ \overline{n_i + 1}$ опредѣляются въ функціяхъ отъ

$$k_j^{(i)}, \quad \xi^{(i)}, \quad \eta^{(i)}$$

а $k_j^{(i+1)}$ въ функціяхъ отъ $k_j^{(i)}$ $j = 1.2 \ldots n_i$ и $k_j^{(i+1)}$ $j = n_i + 1 \ldots n_{i+1}$, $\xi^{(i+1)}$, $\eta^{(i+1)}$

Обозначая совокупность характеристикъ $k_j^{(i)}$ $j = n_{i-1} + 1 \ldots n_i$ черезъ $k^{(i)}$ мы можемъ систему (4) замѣнить слѣдующимъ *связнымъ рядомъ системъ характеристикъ:*

$$(k^{(1)}, \xi^{(1)}, \eta^{(1)}) \quad (k^{(2)}, \xi^{(2)}, \eta^{(2)}) \ldots . (k^{(p)}, \xi^{(p)}, \eta^{(p)}) \qquad (5)$$

гдѣ переходъ отъ одной системы къ слѣдующей ведетъ къ послѣдовательному опредѣленію формы элемента заданной кривой.

Если $n_{i+1} = n_i + 1$, то $(k^{(i)}, \xi^{(i)}, \eta^{(i)})$ замѣняется или одной величиной $k^{(i)}$ или $(\xi^{(i)}, \eta^{(i)})$.

Рядъ (5) можно замѣнять слѣдующимъ болѣе общаго типа:

$$(\mu^{(1)}, \lambda^{(1)}) \quad (\mu^{(2)}, \lambda^{(2)}) \ldots . (\mu^{(p)}, \lambda^{(p)})$$

гдѣ $\mu^{(i)}$, $\lambda^{(i)}$ какія угодно функціи $(k^{(i)}, \xi^{(i)}, \eta^{(i)})$ и потому инваріанты съ условіемъ, чтобы эти величины имѣли опредѣленное геометрическое значеніе.

Напримѣръ, можно положить

$$\lambda^{(i)} = \sqrt{\xi^{(i)\,2} + \eta^{(i)\,2}} \qquad (7)$$

равнымъ разстоянію точки $(\xi^{(i)}, \eta^{(i)})$ отъ начала координатъ $(\xi^{(i)}, \eta^{(i)})$

При $n_{i+1} = n_i + 1$ для всѣхъ значеній i, рядъ (6) приводится къ ряду:

$$\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)} \ldots . . \lambda^{(p)} \qquad (8)$$

Можно разсматривать ряды еще болѣе общаго типа:

$$(\pi^{(1)}, \rho^{(1)}) \quad (\pi^{(2)}, \rho^{(2)}) \quad (\pi^{(p)}, \rho^{(p)}) \qquad (9)$$

гдѣ $\pi^{(1)}$, $\rho^{(1)}$ какія угодно функціи величинъ:

$$k^{(1)}, k^{(2)} \ldots k^{(i)}$$

$$(\xi^{(1)}, \eta^{(1)}) \quad (\xi^{(2)}, \eta^{(2)}) \; . \; . \; (\xi^{(i)}, \eta^{(i)})$$

имѣющія геометрическія значенія.

Среди характеристикъ, $k^{(i)}$, $\lambda^{(i)}$, $\mu^{(i)}$, $\rho^{(i)}$, $\pi^{(i)}$, будемъ различать *угловыя,* опредѣляющія направленія и *линейныя,* опредѣляющія длины нѣкоторыхъ отрѣзковъ.

Когда $n_{i+1} = n_i + 2$, геометрическимъ значеніемъ каждой системы можетъ быть *величина — векторъ*, опредѣляемый *аргумен-*

томъ $\pi^{(i)}$ дающимъ его направленіе и *модулемъ* $\rho^{(i)}$, дающимъ его длину.

§ 2. Мы остановимся въ этой работѣ на этомъ послѣднемъ случаѣ. За первый векторъ кривизны мы можемъ признать радіусъ кривизны ρ, направленный по внутренней нормали въ кривой. Длина радіуса кривизны равна отрѣзку нормали до пересѣченія ея съ нормалью въ безконечно близкой точкѣ.

Такимъ же образомъ будемъ опредѣлять длины и другихъ векторовъ: $\rho^{(i)}$ *равно отрѣзку на прямой направленія* $\pi^{(i)}$ *отъ точки кривой до точки пересѣченія съ подобной же прямой въ безконечно близкой точкѣ кривой.*

Такъ какъ направленіе прямой опредѣляется угломъ, составляемымъ его съ нормалью, то $\pi^{(i)}$ можно считать равнымъ этимъ угламъ, причемъ $\pi^{(1)} = const.$

Изъ члена $(\pi^{(1)}, \rho^{(1)})$ остальные члены ряда мы будемъ выводить слѣдующимъ образомъ:

π, ρ имѣетъ направленіе, опредѣляемое заданной кривой $f(x, y) = o$ и кривой $\Phi_i = o$ *(опредѣляющей кривой)*, причемъ при переходѣ отъ одного члена къ другому мѣняется только кривая $\Phi_i = o$, а геометрическія построенія, при помощи которыхъ изъ $f = o$ и $\Phi_i = o$ получается $(\pi^{(i)}, \rho^{(i)})$ остаются неизмѣнными.

Опредѣляющая кривая $\Phi_i = o$ *дается условіемъ:*

I) $\pi^{(i-1)} = const.$ *т. е. для нея векторъ* $(\pi^{(i-1)}, \rho^{(i-1)})$ *имѣетъ относительно нормали и касательной постоянное направленіе.*

II) $\Phi_i = o$ *соприкасающаяся къ данной изъ всей совокупности кривыхъ удовлетворяющихъ I-ому условію.*

Мы сейчасъ увидимъ, что I-ое условіе равносильно слѣдующему: *для* $\Phi_i = o$ *векторъ* $(\pi^{(i-1)}, \rho^{(i-1)})$, *какъ по длинѣ, такъ и по направленію имѣетъ постоянное значеніе.*

А именно мы покажемъ что условіе

$$\pi^{(i)} = const$$

влечетъ за собой

$$\rho^{(i)} = \infty$$

если только $\pi^{(i)}$ не равно $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$ т. е. если векторъ $(\pi^{(i)}, \rho^{(i)})$ не совпадаетъ съ касательной.

Для доказательства беремъ разложенія (x, y) по степенямъ s, предполагая точку М обыкновенной точкой. Эти разложенія будутъ слѣдующія:

$$y = \beta_2 \frac{s^2}{2} + \beta_3 \frac{s^3}{6} + \cdots$$
$$x = s + \alpha_3 \frac{s^3}{6} + \cdots\cdots \tag{11}$$

гдѣ s дуга считаемая отъ точки М, если при этомъ за оси координатъ X и Y приняты касательная и нормаль въ точкѣ М.

Уравненіе прямой, опредѣляемой направленіемъ $\pi^{(i)}$ будетъ

$$Y - y = a\,(X - x),$$

гдѣ $a = tg\left(\frac{\pi}{2} - \pi^{(i)}\right) = ctg\pi^{(i)}$ или такъ какъ для точки М: $x = o, y = o$, то

$$Y = a\,X \tag{12}$$

Уравненіе $(\pi^{(i)}, \rho^{(i)})$ въ безконечно близкой съ М точкѣ кривой:

$$Y - \beta_2 \frac{s^2}{2} - \ldots = \left(a = \frac{da}{ds} s + \frac{d^2a}{ds^2} \frac{s^2}{2} + \ldots\right)\left(X - s + \ldots\right) \tag{13}$$

Вычитая изъ уравненія (13) — (12), сокращая на s и приближая s къ нулю получаемъ:

$$\frac{da}{ds} X - a = o$$

откуда для координатъ точки пересѣченія и разстоянія ея отъ точки М имѣемъ:

$$X = \frac{a}{\frac{da}{ds}}$$
$$Y = \frac{a^2}{\frac{da}{ds}} \tag{14}$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{a}{\frac{da}{ds}} \sqrt{1 + a^2} \tag{15}$$

Разстояніе M отъ точки пересѣченія двухъ смежныхъ безконечно близкихъ векторовъ $(\pi^{(i)}, \rho^{(i)})$, согласно формулѣ (15), будетъ равно безконечности, какъ только a равно постоянному отличному отъ пуля или $\pi^{(i)} = const$, причемъ $\pi^{(i)}$ отлично отъ $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$

Переходъ отъ $(\pi^{(1)}, \rho^{(1)})$ къ $(\pi^{(2)}, \rho^{(2)})$, для котораго $\pi^{(1)} = const$ не даетъ опредѣленной кривой опредѣляемъ аналогичнымъ условіемъ. Кривая $\Phi_2 = o$ постояннаго направленія и длины вектора $(\pi^{(1)}, \rho^{(1)})$. Изъ тождественнаго выполненнаго условія $\pi^{(1)} = o$ не слѣдуетъ уже $\rho = const.$ Для того, чтобы опредѣлить $\Phi_2 = o$ слѣдуетъ положить

$$\rho_i^{(1)} = \rho = const$$

т. е. опредѣляющая кривая $\Phi_2 = o$ будетъ кругъ.

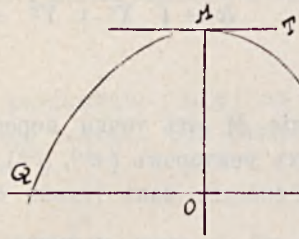
За кривую Φ_1 принимаемъ касательную.

Отмѣтимъ теперь важное слѣдствіе втораго условія. Если $\pi^{(i)}$ содержитъ производныя y до m_i ой включительно, то $\rho^{(i)}$ будетъ содержать до $m_i + 1$ ой включительно, вмѣстѣ съ тѣмъ будемъ имѣть

$$m_1 < m_2 < \ldots m_{i-1} < m_i < m_{i+1} \ldots$$

Уравненіе $\pi^{(i)} = const$ опредѣляетъ кривую содержащую $m_i + 1$ параметровъ, такъ какъ представляетъ дифференціальное уравненіе m_i — его порядка: Соприкосновеніе $\Phi_{i+1} = o$ будетъ m_i — его порядка, откуда слѣдуетъ равенство производныхъ y для $\Phi_{i+1} = o$ и заданной кривой до m_i — его порядка включительно, а отсюда и всѣхъ векторовъ $(\pi^{(j)}, \rho^{(j)})$ при $j < i$.

§ 3. Теперь мы покажемъ одно интересное свойство нормали, дающее возможность построенія подобнаго рода векторовъ.



Отъ точки M, которую предполагаемъ обыкновенной точкой, отличной отъ точекъ перегиба, отлагаемъ въ обѣ стороны дугу $MP = MQ = s\ M$ соединяемъ съ серединой хорды $PQ - O$.

Предѣльное положенiе MO при безконечномъ уменьшенiи s — нормаль въ точкѣ M.

Дѣйствительно, координаты:

$$y_1 = \beta_2 \frac{s^2}{2} + \beta_3 \frac{s^3}{6} + \dots$$

$$x_1 = s + \alpha_3 \frac{s_3}{6} + \frac{\alpha_4 s^4}{24} + \dots$$

$$y_2 = \beta_2 \frac{s^2}{2} - \beta_3 \frac{s_3}{6} + \dots$$

$$x_2 = -s - \alpha_3 \frac{s^3}{6} + \frac{\alpha_4 s^4}{24} + \dots,$$

точки O

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \beta_2 \frac{s^2}{2} + \dots$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \alpha_4 \frac{s^4}{24} + \dots$$

Уголъ, составляемый MO и MN, тангенсъ котораго равенъ

$$\frac{\alpha_4}{\beta_2} \frac{s^2}{12}$$

въ предѣлѣ стремится къ нулю.

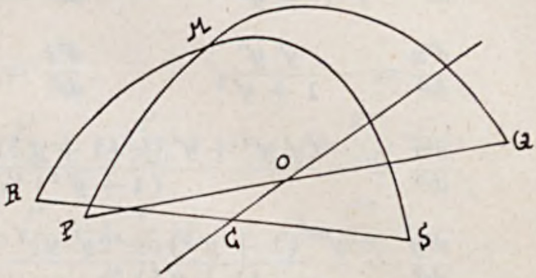
Теперь дадимъ интересное обобщенiе этого положенiя.

Замѣняемъ касательную MT какой угодно кривой, соприкасающейся съ данной.

Откладываемъ

$$MQ = MP = s$$
$$MS = MR = s$$

Обозначая координаты Q, P черезъ (x_1, y_1) (x_2, y_2) координаты R, S черезъ (ξ_1, η_1) (ξ_2, η_2) будемъ имѣть:



Черт. 2.

$$x_1 = s + \alpha_3 \frac{s^3}{6} + \alpha_4 \frac{s^4}{24} + \ldots\ldots \alpha_{2m-1} \frac{s^{2m-1}}{2m-1!} + \alpha_{2m} \frac{s^{2m}}{2m!} + \ldots$$

$$y_1 = \beta_2 \frac{s^2}{2} + \beta_3 \frac{s^3}{6} + \ldots\ldots\ldots\ldots \beta_{2m-1} \frac{s^{2m-1}}{2m-1!} + \beta_{2m} \frac{s^{2m}}{2m!} + \ldots$$

$$x_2 = -s - \alpha_3 \frac{s^3}{6} + \alpha_4 \frac{s^4}{24} + \ldots - \alpha_{m-1} \frac{s^{2m-1}}{2m-1!} + \alpha_{2m} \frac{s^{2m}}{2m!} + \ldots$$

$$y_2 = \beta_2 \frac{s^2}{2} - \beta_3 \frac{s^3}{6} + \ldots\ldots - \beta_{2m-1} \frac{s^{2m-1}}{2m-1!} + \beta_{2m} \frac{s^{2m}}{2m!} + \ldots$$

$$\xi_1 = s + \gamma_3 \frac{s^3}{6} + \gamma_4 \frac{s^4}{24} + \ldots \gamma_{2m-1} \frac{s^{2m-1}}{2m-1!} + \gamma_{2m} \frac{s^{2m}}{2m!} + \ldots$$

$$\eta_1 = \delta_2 \frac{s^2}{2} + \delta_3 \frac{s^3}{6} + \ldots\ldots\ldots \delta_{2m-1} \frac{s^{2m-1}}{2m-1!} + \delta_{2m} \frac{s^{2m}}{2m!} + \ldots$$

$$\xi_2 = -s - \gamma_3 \frac{s^3}{6} + \gamma_4 \frac{s^4}{24} + \ldots - \gamma_{2m-1} \frac{s^{2m-1}}{2m-1!} + \gamma_{2m} \frac{s^{2m}}{2m!} + \ldots$$

$$\eta_2 = \delta_2 \frac{s^2}{2} - \delta_3 \frac{s^3}{6} = \ldots\ldots - \delta_{2m-1} \frac{s^{2m-1}}{2m-1!} + \delta_{2m} \frac{s^{2m}}{2m!} + \ldots$$

Легко видѣть, что условіе соприкосновенія n-го порядка влечетъ за собой равенства:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \gamma_i \\ & \qquad i \leqslant n \\ \eta_i &= \delta_i \end{aligned} \tag{17}$$

Въ самомъ дѣлѣ

$$\frac{dx}{ds} = \sqrt{\frac{1}{1 + y'^2}} \qquad \frac{dy}{ds} = \sqrt{\frac{y'}{1 + y'^2}}$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = - \frac{y'\,y''}{1 + y'^{\,2}} \qquad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{y''}{1 + y'^{\,2}}$$

$$\frac{d^3x}{ds^3} = - \frac{(y'\,y''' + y''^{\,2})\ (1 + y'^{\,2}) - 2\,y'^{\,2}\,y''^{\,2}}{(1 + y'^{\,2})^{\,3/2}}$$

$$\frac{d^3y}{ds^3} = \frac{y'''\ (1 + y'^{\,2}) - 2y'\,y''^{\,2}}{(1 + y'^{\,2})^{\,3/2}}$$

Вообще

$$\frac{d^{2m}x}{ds^{2m}} = \frac{\Phi_{2m}\ (y',\ y''\ \dots\ y^{(2m)})}{(1 + y'^{\,2})^m} \qquad \frac{d^{2m}y}{ds^{2m}} = \frac{\Psi_{2m}\,(y,\,y''\,\dots\,y^{(2m)})}{(1 + y'^{\,2})^m}$$

$$\frac{d^{2m+1}x}{ds^{2m+1}} = \frac{\Phi_{2m+1}(y',y''\dots y^{(2m+1)}}{(1 + y'^{\,2})^{\,m+1/2}} \qquad \frac{d^{2m+1}y}{ds^{2m+1}} = \frac{\Psi_{2m+1}\,(y',y''\dots y^{\,(2m+1)}}{(1 + y'^{\,2})^{\,m+1/2}}$$

Φ_{2m}, Ψ_{2m}, Φ_{2m+1}, Ψ_{2m+1} раціональныя функціи величинъ, заключенныхъ въ скобки.

При $x = o,\ y = o,\ y = o$ получаемъ:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = 1 & \beta_1 = o \\ \alpha_2 = o & \beta_2 = y'' \\ \alpha_3 = -\ y''^{\,2} & \beta_3 = y''' \\ \alpha_4 = -\ 3y''\,y''' & \beta_4 = y^{(IV)} - 2y''^{\,3} \end{array} \tag{18}$$

. . . .

$$\alpha_{2m} = \Phi_{2m}\ (y''\ \dots\ y^{(2m)}) \quad \beta_{2m} = \Psi_{2m}\ (y''\ \dots\ y^{(2m)}),$$

$$\alpha_{2m+1} = \Phi_{2m+1}\ (y''\ \dots\ y^{(2m+1)}) \quad \beta_{2m+1} = \Psi_{2m+1}\,(y''\ \dots\ y^{(2m+1)})$$

Выражая такимъ же образомъ:

$$\gamma_{2i} = \Phi_{2i}\ (Y''\ \dots\ Y^{(2i)}) \quad \delta_{2i} = \Psi_{2i}\,(Y''\ \dots\ Y^{(2i)})$$

$$\gamma_{2i+1} = \Phi_{2i+1}\ (Y''\ \dots\ Y^{(2i+1)}) \quad \delta_{2i+1} = \Psi_{2i+1}\ (Y''\ \dots\ Y^{(2i+1)})$$

черезъ координаты кривой $\Phi_i = o$, изъ условій соприкосновенія $y_i = Y_i \qquad i \leqslant n$ выводимъ равенства (17).

Теперь предполагая соприкосновеніе $n = \overline{2m-2}$ или $\overline{2m-1}$-го порядка опредѣлимъ предѣльное положеніе прямой CO, соединяющей средины хордъ PQ и RS при безконечномъ уменьшаніи s.

Координаты O:

$$\frac{x_1+x_2}{2} = \alpha_4\frac{s^4}{24} + \alpha_6\frac{s^6}{720} + \ldots\ldots \alpha_{2m}\frac{s^{2m}}{2m!} + \ldots$$

$$\frac{y_1+y_2}{2} = \beta_2\frac{s^2}{2} + \beta_4\frac{s^4}{24} + \ldots\ldots \beta_{2m}\frac{s^{2m}}{2m!} + \ldots$$

Координаты C:

$$\frac{\xi_1+\xi_2}{2} = \alpha_4\frac{s^4}{24} + \alpha_6\frac{s^6}{720} + \ldots\ldots \gamma_{2m}\frac{s^{2m}}{2m!} + \ldots$$

$$\frac{\eta_1+\eta_2}{2} = \beta_2\frac{s^2}{2} + \beta_4\frac{s^4}{24} + \ldots\ldots \delta_{2m}\frac{s^{2m}}{2m!}$$

Если ω уголъ составляемый CO съ нормалью, то

$$tg\,\omega = \frac{\alpha_{2m} - \gamma_{2m}}{\beta_{2m} - \delta_{2m}} \tag{19}$$

Векторы такимъ образомъ опредѣляемые мы будемъ называть *векторами перваго класса.*

Принимая за $\Phi_i = o$, опредѣляющую кривую, необходимую для перехода отъ $(\pi^{(i-1)}, \rho^{(i-1)})$ къ $(\pi^{(i)}, \rho^{(i)})$, за векторы $(\pi^{(i)}, \rho^{(i)})$ мы должны принять векторы перваго класса: отрѣзокъ нормали (векторъ, отвѣчающій соприкосновенію перваго порядка), равный радіусу кривизны, векторъ отвѣчающій соприкосновенію 2-го порядка, который обозначимъ черезъ (π_1, ρ_1), векторъ съ соприкосновеніемъ 4-го порядка (π_2, ρ_2) и т. д.

Такимъ образомъ мы получаемъ слѣдующій рядъ векторовъ, опредѣляющихъ кривизну:

$$(\pi, \rho)\ \ (\pi_1, \rho_1)\ \ (\pi_2, \rho_2)\ \ldots\ldots$$

гдѣ $\pi = o$.

§ 4. Мы уже замѣтили выше, что кривой $\Phi_1 = o$ долженъ быть соприкасающійся кругъ. Уравненіе соприкасающагося круга напишемъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\xi - \alpha = \rho \sin \frac{\sigma}{\rho}$$
$$\eta - \beta = \rho \cos \frac{\sigma}{\rho} \tag{20}$$

(α, β) координаты центра, причемъ $\alpha = o$, $\beta = \rho$, ρ радіусъ кривизны, σ дуга соприкасающагося круга, отсчитываемая отъ точки M.

Изъ уравненія (20) имѣемъ:

$$\xi = \rho \left(\frac{\sigma}{\rho} - \frac{\sigma^3}{6\rho^3} + \ldots\ldots \right)$$

$$\eta = \frac{\sigma^2}{2\rho} - \frac{\sigma^4}{24\rho^3} + \ldots\ldots$$

Откуда

$$\xi_1 = s - \frac{s^3}{6\rho^2} + \ldots$$

$$\eta_1 = \frac{s^2}{2\rho} - \frac{s^4}{24\rho^3} + \ldots$$

$$\xi_2 = - s + \frac{s^3}{6\rho^2} + \ldots$$

$$\eta_2 = \frac{s^2}{2\rho} + \frac{s^4}{24\rho^3} + \ldots$$

$$\gamma_4 = o \qquad \delta_4 = - \frac{1}{24\rho^3}$$

$$tg\ \pi_1 = \frac{\alpha_4}{\beta_4 + \frac{1}{\rho^3}} \tag{21}$$

Такъ какъ при $x = o$, $y = o$, $y' = o$ (т. е. когда за оси координатъ приняты нормаль и касательная въ точкѣ M):

$$\alpha_4 = -3\,y''\,y''' \qquad \beta_4 = y^{(IV)} - 2\,y''^3$$

$$\rho = \frac{1}{y''} \qquad , \quad \frac{1}{\rho} = y'',$$

то

$$tg\pi_1 = \frac{3y''\,y'''}{y''^{\,3} - y^{(IV)}} \tag{22}$$

Чтобы перейти отсюда къ общему выраженію для $tg\pi_1$, слѣдуетъ:

1) *Выразить значеніе производныхъ* y'', y''', $y^{(IV)}$ *при упомянутомъ выше спеціальномъ выборѣ осей координатъ черезъ*

$\rho, \rho', \rho'' \ldots$ гдѣ $\rho' = \dfrac{d\rho}{d\omega}$, ω *уголъ составляемый касательной въ точкѣ* M *съ касательной въ какой либо постоянной точкѣ кривой.*

2) *Въ полученномъ такомъ выраженіи замѣнить* $\rho, \rho', \rho'' \ldots$ *ихъ выраженіями въ* $x, y, y' \ldots$

Мы имѣемъ:

$$\rho = \frac{(1 + y'^{\,2})^{3/2}}{y''} \tag{23}$$

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{y''}{1 + y'^{\,2}}$$

откуда

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\omega} = \frac{\dfrac{d\rho}{dx}}{\dfrac{d\omega}{dx}} = \frac{3y'\,y''^{\,2} - (1 + y'^{\,2})\,y'''}{y''^{\,3}}\left(\sqrt{1 + y'^{\,2}}\right)^5 \tag{24$_1$}$$

$$\rho'' = \frac{d^2\rho}{d\omega^2} = \frac{[3y''^{\,3} + 4y'\,y''\,y''' - (1 + y'^2)\,y^{(IV)}]\,y'' +}{y''^{\,5}}$$

$$\frac{+\,3\,(y'''^{\,2} + 3\,y'^{\,2}\,y''^4)\,(1 + y'^2) + 3\,(1 + y'^{\,2})^2\,y'\,y''^{\,2}\,y'''}{y''^{\,5}}\left(\sqrt{1 + y'^{\,2}}\right)^7 \tag{24$_2$}$$

Вообще

$$\rho^{(i)} = \Phi\ (y,\ y' \ldots y^{(i+2)})\ (1 + y'^2)^{1/2 + i} \tag{24}$$

гдѣ Φ раціональная функція первой степени относительно высшей производной $y^{(i+2)}$, что даетъ, если положить $y' = o$

$$y'' = \frac{1}{\rho} \qquad y''' = -\frac{\rho'}{\rho^3} \qquad y^{(IV)} = -\frac{\rho''}{\rho^2} + \frac{3\rho'^2}{\rho^6} + \frac{3}{\rho^3}$$

вообще

$$y^{(i)} = \Omega\ (\rho,\ \rho' \ldots \rho^{(i-2)}) \tag{25}$$

гдѣ Ω раціональная функція.

Подставляя выраженія (25) въ (22) имѣемъ

$$tg\pi_1 = \frac{3\rho\rho'}{\rho\rho'' - 3\rho'^2 - 2\rho^2} \tag{26}$$

куда слѣдуетъ еще подставить выраженія (24) для ρ, ρ', ρ''.

Мы могли бы поступать и нѣсколько иначе, выражая $tg\pi_1$ черезъ ρ, $\frac{d\rho}{ds}$, $\frac{d^2\rho}{ds^2}$ и замѣняя послѣднія ихъ выраженіями въ y, y', $y'' \ldots y^{(i)} \ldots$

А именно, въ виду того, что

$$\rho' = \rho\,\frac{d\rho}{ds} \qquad \rho'' = \rho\left[\frac{d\rho}{ds^2}\,\rho + \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2\right]$$

$$tg\pi_1 = \frac{3\,\frac{d\rho}{ds}}{\frac{d^2\rho}{ds^2} - 3\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 - 2} \tag{27}$$

ρ_1 опредѣляется изъ формулы

$$\rho_1 = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{\sqrt{1 + ctg^2\pi_1}}{ctg\pi_1}\,\frac{d\pi_1}{ds} =$$

$$= -\frac{\sqrt{(\rho\rho' - 3\rho'^2 - 2\rho^2)^2 + 9\rho^2\rho'^2}}{3\rho\rho'}\,\frac{d}{ds}\left[\frac{3\rho\rho'}{\rho\rho'' - 3\rho'^2 - 2\rho^2}\right]$$

§ 5. Опредѣлимъ теперь уравненіе кривой $\Phi_2 = o$. Мы имѣемъ для нея

$$\frac{\rho\rho'' - 3\rho'^2 - 2\rho^2}{3\rho\rho'} = const = c$$

$$\rho\rho'' - 3\rho'^2 - 2\rho^2 - 3c\rho\rho' = o \tag{28}$$

дифференціальное уравненіе извѣстнаго типа, для интегрированія котораго слѣдуетъ положить:

$$\rho = e^{\int z d\omega} \quad \rho = e^{\int z d\omega} z' \quad \rho'' = e^{\int z d\omega} (z^2 + z')$$

Тогда уравненіе (28) приводится къ слѣдующему

$$z' - 2z^2 - 3cz - 2 = o$$

$$\int \frac{dz}{2z^2 + 3cz + 2} = \omega - \omega_0$$

$$lg \left(\frac{z - \alpha_1}{z - \alpha_2}\right)^{\lambda} = \omega - \omega_0$$

гдѣ α_1, α_2 корни уравненія;

$$2z^2 + 3cz + 2 = o$$

$$\lambda = \frac{1}{2(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

$$z = \frac{\alpha_1 - \alpha_2 a e^{\mu\omega}}{1 - a e^{\mu\omega}} = \frac{\alpha_1 \, a_1 \, e^{-2\alpha_1\omega} - \alpha_2 \, a_2 \, e^{-2\alpha_2\omega}}{a_1 \, e^{-2\alpha_1\omega} - a_2 \, e^{-2\alpha_2\omega}}$$

$$\mu = 2(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$a = \frac{a_2}{a_1}$$

$$\int z d\omega = -\tfrac{1}{2} \, lg \left[a_1 \, e^{-2\alpha_1\omega} - a_2 \, e^{-2\alpha_2\omega} \right] + C$$

$$\rho = \frac{в}{\sqrt{a_1 \, e^{-2\alpha_1\omega} - a_2 \, e^{-2\alpha_2\omega}}} \tag{29}$$

Это уравненіе между ρ — радіусомъ кривизны и ω — угломъ смежности вполнѣ опредѣляетъ во всѣхъ точкахъ форму кривой. Оно не зависитъ отъ выбора координатъ, но только отъ выбора точки, отъ касательной, въ которой ведется счетъ угловъ ω. Уравненіе подобнаго типа:

$$\Omega\ (\rho,\ \omega) = o \tag{30}$$

обладаетъ такими же свойствами, что такъ называемое *натуральное уравненіе кривой*

$$\Theta\ (\rho\,,\ s) = o \tag{31}$$

Мы можемъ уравненія типа (30) называть тоже *натуральными уравненіями кривой II типа* въ отличіе отъ *натуральныхъ уравненій 1 типа (31).*

Замѣчая, что $arctgy' = \omega$, умножая на $cs\ d\omega = \frac{dx}{\rho}$ обѣ части уравненія (29), имѣемъ:

$$dx = \frac{bcs\omega d\omega}{\sqrt{a_1\ e^{-2\alpha_1\omega} - a_2\ e^{-2\alpha_2\omega}}}$$

Умножая на $sin\omega d\omega = \frac{dy}{d\rho}$ получаемъ

$$dy = \frac{bsin\omega d\omega}{\sqrt{a_1\ e^{-2\alpha_2\omega} - a_2\ e^{-2\alpha_2\omega}}}$$

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= \int \frac{bcs\omega d\omega}{\sqrt{a_1\ e^{-2\alpha_1\omega} - a_2\ e^{-2\alpha_2\omega}}} \\ y - y_0 &= \int \frac{bsin\omega d\omega}{\sqrt{a_1\ e^{-2\alpha_1\omega} - a_2\ e^{-2\alpha_2\omega}}} \end{aligned}\right| \tag{32}$$

исключеніе ω даетъ уравненіе между x, y.

Такимъ же образомъ можно получить натуральное уравненіе перваго типа и отъ него перейти къ обыкновенному уравненію.

§ 6. Замѣтимъ, что для опредѣленія дальнѣйшихъ членовъ ряда достаточно знать только

1) *Уравненіе*

$$\Omega\,[\rho^{(2i)},\ \rho^{(2i-1)}\ \ldots\ \rho',\ \rho,\ \omega] = o \qquad (33)$$

или

$$\Theta\left|\ \frac{d^{2i}\rho}{ds^{2i}},\ \frac{d^{2i-1}\rho}{ds^{2i-1}},\ \ldots\ \frac{d\rho}{ds},\ \rho,\ s\ \right| = o \qquad (34)$$

опредѣляющее кривую $\Phi = o$.

2) *Выраженія* $\rho^{(j)}$ или $\dfrac{d^j\rho}{ds^j}$ черезъ $y,\ y',\ y''\ \ldots\ y^{(j+2)}$

Въ самомъ дѣлѣ условія соприкосновенія n-го порядка двухъ кривыхъ могутъ быть выражены:

1) совпаденіемъ ихъ касательныхъ въ общей точкѣ

2) равенствомъ радіусовъ кривизны и ихъ производныхъ по ω (или по s).

$$\rho = R\quad \rho' = R'\quad \rho'' = R''\ \ \ldots\ \ \rho^{(n-2)} = R^{(n-2)}. \qquad (35)$$

Дѣйствительно $\rho,\ \rho'\ \ldots\ \rho^{(n)}$ мы всегда можемъ выразить раціонально черезъ

$$\sqrt{1 + y'^{\,2}},\quad y',\quad y''\quad \ldots\quad y^{(n)}$$

а $R,\ R'\ \ldots\ R^{(n)}$ черезъ

$$\sqrt{1 + Y'^{\,2}},\quad Y',\quad Y''\quad \ldots\quad Y^{(n)}$$

и при

$$y = Y,\quad y' = Y',\quad y'' = Y''\quad \ldots\quad y^{(n)} = Y^{(n)}$$

необходимо имѣютъ мѣсто условія (35).

Обратно, если при соблюденіи условія совпаденія касательныхъ въ точкѣ M за оси координатъ возьмемъ касательную и нормаль, то получимъ

$$\rho = Q\,(y'')\quad \rho' = Q_1\,(y'',\ y''')\quad \rho'' = Q_2\,(y''\ y''',\ y^{\mathrm{IV}})$$

вообще

$$\rho^{(n-2)} = Q_n \, (y'', y''' \, \ldots\ldots \, y^{(n-1)}, y^{(n-1)}) \tag{32}$$

причемъ Q_n первой степени относительно $y^{(n)}$ уравненія (36) даютъ $y^{(n)}$ въ функціи $y^{(n-1)}$ $y^{(n-2)}$, ... y'', $\rho^{(n-2)}$ ——— $y^{(n-1)}$ въ $y^{(n-2)}$ ... y'', $\rho^{(n-2)}$ и т. д., а потому $y^{(n)}$ въ реинональной функціи ρ, ρ' ... $\rho^{(n-2)}$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$y'' = Y'', \quad y''' = Y''' \quad \ldots \quad y^{(n)} = Y^{(n)}$$

и потому условія соприкосновенія n-го порядка соблюдены

Если мы теперь имѣемъ по ур. (19)

$$tg\, \pi_i = \frac{\alpha_{2i} - \gamma_{2i}}{\beta_{2i} - \delta_{2i}} \tag{37}$$

то слѣдуетъ

1) γ_{2i} δ_{2i} выразить въ y' ..... $y^{(i+2)}$ и положивъ $y' = o$ выразить затѣмъ черезъ R, R' ... $R^{(2i)}$, если R означаетъ радіусъ кривизны кривой $\Phi_i = o$.

2) $R^{(2i)}$ и $R^{(2i-1)}$ опредѣляются изъ уравненій

$$\frac{d\Omega}{d\omega} = o \qquad \frac{d^2\Omega}{d\omega^2} = o$$

гдѣ

$$\Omega = \Omega \; [R^{(2i-2)}, \; R^{(2i-3)} \; \ldots \; R', \; R, \omega]$$

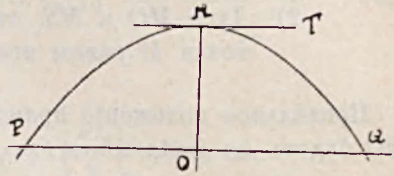
въ $R^{(2i-2)}$, $R^{(2i-3)}$ ... R_i, R, а на основаніи равенствъ $\rho^{(j)} = R^{(j)}$ $\quad j \leqslant 2i-2$ и въ $\rho^{(2i+2)}$, $\rho^{(2i-3)}$ ... ρ', ρ.

3) Остается только послѣднія выразить въ y, y', y'' ... $y^{(2i)}$.

§ 7. Въ изслѣдованномъ нами ряду векторовъ высшая производная, входящая въ $\pi^{(i)}$ четнаго, въ $\rho^{(i)}$ нечетнаго порядка. Исключеніе представляетъ только $(\pi^{(1)}, \rho^{(1)})$, гдѣ $\pi^{(1)} = o$, а порядокъ высшей производной въ ρ понижается до 2. Мы можемъ построить другой рядъ величинъ векторовъ представляющихъ тоже рядъ постепенныхъ опредѣленій формы элементовъ съ тѣми свойствами, что высшая производная, входящая въ $\pi^{(i)}$ нечетнаго, а въ $\rho^{(i)}$ четнаго порядка, это будетъ *векторы II-го класса*.

За прямую отвѣчающую первому члену, мы принимаемъ прямую, характерную для плоскихъ кривыхъ, такъ называемую *ось отклоненія. открытую Трансономъ* (*).

Если мы черезъ точку P, безконечно близкую къ M. приведемъ хорду $PQ \parallel MT$ параллельную касательной, то предѣльное положеніе прямой MO, соединяющей M съ серединой PQ будетъ ось отклоненія.



Черт. 3.

Трансонъ даетъ слѣдующую формулу для $tg\delta$, гдѣ δ уголъ OMN между осью отклоненія и нормалью.

$$tg\delta = \frac{1}{3}\,\frac{\rho'}{\rho} \tag{38}$$

$$tg\delta = y' - \frac{(1 + y'^2)\, y''}{3\, y''^3}. \tag{39}$$

Здѣсь было бы умѣстно напомнить одну теорему Трансона, изъ которой слѣдуетъ важное значеніе открытой Трансономъ прямой при изслѣдованіи соприкасающихся кривыхъ втораго порядка.

Такимъ образомъ за первый членъ ряда векторовъ $(\pi^{(1)}, \rho^{(1)})$ принимаемъ

$$\pi^{(1)} = \delta$$

и

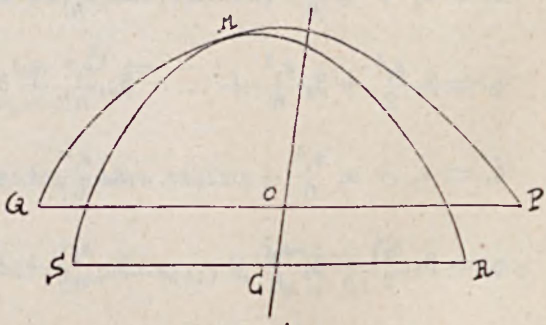
$$\rho^{(1)} = \tau,$$

гдѣ τ представляетъ отрѣзокъ оси отклоненія отъ M до точки пересѣченія съ осью отклоненія въ безконечно близкой точкѣ.

Понятіе Трансона объ оси отклоненія мы обобщаемъ слѣдующимъ образомъ.

Отложимъ на кривыхъ $f = o$, и $\Phi = o$ соприкасающейся къ первой

$$\smile MP = \smile NR$$



черт. 4.

(*) *Transon.* Recherche sur la courbure des lignes et des surfaces. Journal de Lionville. 1841. t. IV, p. 191.

Salmon-Fiedler. Analytische Géometrie des höheren ebenen Kurven. Leipzig. 1882.

Болѣе сложное опредѣленіе Трансона сводится согласно Сальмону къ этому болѣе простому.

Проведемъ PQ и RS, удовлетворяющія двумъ условіямъ (когда это возможно, мы покажемъ ниже):

1) $PQ \parallel RS$

2) Дуги MQ и MS, отсѣкаемыя на обоихъ кривыхъ отъ точки M равны между собой.

Предѣльное положеніе прямой OO, соединяющей середины RS и PQ будетъ *ось отклоненія* $f = o$ *относительно* $\Phi = o$.

Обозначая координаты P, Q черезъ (x_1, y_1) (x_2, y_2) R, S черезъ (ξ_1, η_1) (ξ_2, η_2) должны имѣть, какъ условіе параллельности:

$$(y_2, -y_1)(\xi_2 - \xi_3) - (x_2 - x_1)(\eta_2 - \eta_1) = o \qquad (40)$$

Кромѣ того, согласно второму условію:

$$y_1 = \beta_2 \frac{s_1^2}{2} + \beta_3 \frac{s_1^3}{6} + \beta_4 \frac{s_1^4}{24} + \ldots \beta_n \frac{s_1^n}{n!} + \beta_{n+1} \frac{s_1^{n+1}}{n+1!} + \ldots$$

$$x_1 = s_1 + \alpha_3 \frac{s_1}{6} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \alpha_n \frac{s_1^n}{n!} + \alpha_{n+1} \frac{s_1^{n+1}}{n+1!} + \ldots$$

$$y_2 = \beta_2 \frac{s_2^2}{2} + \beta_3 \frac{s_2^3}{6} + \beta_4 \frac{s_2^4}{24} + \ldots \beta_n \frac{s_{2n}}{n!} + \beta_{n+1} \frac{s_2^{n+1}}{n+1!} + \ldots$$

$$x_2 = s_2 + \alpha_3 \frac{s_2^3}{6} + \ldots\ldots \alpha_n \frac{s_2^n}{n!} + \alpha_{n+1} \frac{s_2^{n+1}}{n+1!} + \ldots$$

$$\eta_1 = \beta_2 \frac{s_1^3}{2} + \beta_3 \frac{s_1^3}{6} + \ldots \beta_n \frac{s_1^n}{n!} + \delta_{n+1} \frac{s_1^{n+1}}{n+1!} + \ldots$$

$$\xi_1 = s_1 + \alpha_3 \frac{s_1^3}{6} + \ldots\ldots \alpha_n \frac{s_1^n}{6!} + \gamma_{n+1} \frac{s_1^{n+1}}{n+1!} + \ldots \qquad (41)$$

$$\eta_2 = \beta_2 \frac{s_2^3}{2} + \beta_3 \frac{s_2^3}{6} + \ldots \beta_n \frac{s_2^n}{n!} + \delta_{n+1} \frac{s_2^{n+1}}{n+1!} + \ldots$$

$$\xi_2 = s_2 - \alpha_3 \frac{s_2^3}{6} = \ldots\ldots \alpha_n \frac{s_2^n}{n!} + \gamma_{n+1} \frac{s_2^{n+1}}{n+1!} + \ldots$$

Уравненіе (40) будетъ девать зависимость между s_1 и s_2. Всѣ члены $s_1^n\ s_2^l$ $(k \leqslant n,\ l < n)$ сократятся и мы будемъ имѣть:

сокращая на $s_2 - s_1$ уравненіе между s_2, s_1, въ которомъ выписываемъ только члены $n+1$ и $n+2$ степени относительно s_1, s_2:

$$(\beta_{n+1} - \delta_{n+1}) \frac{s_2^{n+1} - s^{n+1}}{n+1!} + (\beta_{n+2} - \delta_{n+2}) \frac{s_2^{n+2} - s_1^{n+2}}{n+2!} + \ldots \quad (42)$$

Въ разложеніи:

$$s_2 = (s_2)_0 + (s'_2)_0\, s_1 + \left(\frac{s''_2}{2}\right)_0 s_1^2 + \ldots \quad (43)$$

необходимо, чтобы всѣ коэффиціенты были бы вещественны. Изъ уравненія (42) ясно что $(s_2)_0 = o$.

$(s'_2)_0 = \lim\limits_{s_1 = o} \left(\frac{s_2}{s_1}\right)$ должна быть величиной не только вещественной, но и отрицательной, такъ какъ MP и MQ отличаются по знаку.

Уравненіе (42) даетъ:

$$(\beta_{n+1} - \delta_{n+1}) \frac{s'^{\,n+1}_2 - 1}{n+1!} + (\beta_{n+2} - \delta_{n+2})\, s_1 \frac{(s'_2)^{n+2} - 1}{n+2!} + \ldots$$

при $s_2 = o$: $(s'_2)^{n+1} = 1$. Уравненіе это можетъ имѣть вещественный и отрицательный корень лишь, когда $n+1$ четное, а n нечетное число. Въ послѣднемъ случаѣ имѣемъ:

$$\lim_{s_1 = o} \frac{s_2}{s_1} = -1$$

Полагая $\frac{s_2}{s_1} = \omega$ должны имѣть дальше

$$(\beta_{n+1} - \delta_{n+1}) \frac{\omega^{n+1} - 1}{n+1!} + (\beta_{n+2} - \delta_{n+2})\, s_1 \frac{\omega^{n+2} - 1}{n+2!} + \ldots = o$$

$$(\beta_{n+1} - \delta_{n+1}) \frac{\omega^{n} + \omega^{n-1} + \ldots 1}{n+1!} +$$

$$+ (\beta_{n+2} - \delta_{n+2})\, s_1 \frac{\omega^{n+1} + \omega^{n+2} + \ldots 1}{n+2!} + \ldots = o.$$

Дифферензируя имѣемъ

$$(\beta_{n+1} - \delta_{n+1})\left[\frac{(n\omega^{n-1} + \overline{n-1}\,\omega^{n-1} + \ldots 1)\,\omega}{\overline{n+2}\,!}\right] +$$

$$+ (\beta_{n+2} - \delta_{n+2})\frac{\omega^{n+1} + \ldots 1}{\overline{n+2}\,!} + \ldots = o$$

При $s_1 = o \qquad \omega_1 = -1$

$$\omega'_0 = -\frac{2(\beta_{n+2} - \delta_{n+2})}{(n+1)(n+2)(\beta_{n+1} - \delta_{n+1})}$$

$$\frac{s_2}{s_1} = \omega = \omega_0 + \omega_0\, s_1 + \ldots = -1 - \frac{2(\beta_{n+2} - \delta_{n+2})\, s_1}{(n+1)(n+2)(\beta_{n+2} - \delta_{n+1})} + \ldots$$

$$s_2 = -s_1 - \frac{2(\beta_{n+2} - \delta_{n+2})\, s_1^2}{(n+1)(n+2)(\beta_{n+1} - \delta_{n+1})} + \ldots$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{(\beta_{n+2} - \delta_{n+2})\, s_1^2}{(n+1)(n+2)(\beta_{n+1} - \delta_{n+1})} \ldots + \ldots$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{\beta_2\, s_1^2}{2} + \ldots$$

$$tg\,\sigma = \frac{\frac{x_1 + x_2}{2}}{\frac{y_1 + y_2}{2}} = -\frac{2(\beta_{n+2} - \delta_{n+2})}{(n+1)(n+2)\,\beta_2\,(\beta_{n+1} - \delta_{n+1})} \qquad (44)$$

гдѣ σ_n уголъ между осью отклоненія и нормалью.

При $n = 1$ имѣемъ

$$tg\,\sigma_1 = -\frac{2\beta_3}{\beta_2^2},$$

а такъ какъ $\beta_2 = \frac{1}{\rho}$ $\beta_3 = -\frac{\rho''}{\rho^2}$, то согласно Трансону

$$tg\,\sigma_1 = \frac{\rho'}{3\rho} \qquad (38)$$

Такимъ образомъ *проводимое нами понятіе оси отклоненія кривой $f = o$ относительно кривой $\Phi = o$ имѣетъ реальный смыслъ въ случаѣ соприкосновенія кривой $\Phi = o$ только нечетнаго порядка.*

Принимая за образующую кривую, кривую, опредѣляемую условіемъ

$$\sigma_1 = const$$

а потому (согласно § 2) $\tau_1 = \infty$ и слѣдовательно

$$(\sigma_1, \tau_1) = const$$

мы принимаемъ за слѣдующій членъ въ рядѣ векторовъ ось отклоненія (σ_2, τ_2) относительно этой кривой (соприкосновеніе которой 3-го порядка). Такимъ же образомъ опредѣляются и остальные члены ряда, принимая за образующія кривыя, кривыя опредѣляемыя условіями $\sigma_i = const$, а за направленія векторовъ оси отклоненія относительно этихъ кривыхъ.

§ 8. Опредѣлимъ кривую отвѣчающую условію $\sigma_1 = const$, иначе говоря, кривую съ постоянной осью отклоненія.

Дифференціальное уравненіе:

$$\frac{\rho'}{\rho} = const = C \tag{45}$$

даетъ натуральное уравненіе II типа:

$$\rho = De^{c\omega} \tag{46}$$

гдѣ C и D постоянныя или

$$\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} = De^{c\,\mathrm{arctg}\,p'}$$

Полагая $y' = p$ имѣемъ:

$$\frac{De^{c\,\mathrm{arctg}\,p}\,dp}{(1+p^2)^{3/2}} = dx \tag{47}$$

$$\int De^{c\,\mathrm{arctg}\,p}\frac{dp}{(1+p^2)^{3/2}} = x - x_0 \tag{48}$$

Интегралъ

$$J = \int\frac{e^{c\,\mathrm{arctg}\,p}\,dp}{(1+p^2)^{3/2}}$$

можетъ быть найденъ въ конечномъ видѣ.

А, именно:

$$J = \int e^{c\, arctg p}\, d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = \frac{e^{c\omega}\, p}{\sqrt{1+p^2}} - c\int \frac{e^{c\omega}\, p dp}{(1+p^2)^{3/2}}$$

если ω $arctg p$.

Далѣе $J = \dfrac{e^{c\omega}\, p}{\sqrt{1+p^2}} - c\displaystyle\int e^{c\omega}\, d\left(-\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\right) =$

$$= \frac{e^{c\omega}\, p}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{c e^{c\omega}}{\sqrt{1+p^2}} - c^2\int \frac{e^{c\omega}\, dp}{(1+p^2)^{3/2}} \quad \text{откуда}$$

$$J = \frac{e^{c\omega}\,(p+c)}{(1+c^2)\,\sqrt{1+p^2}}$$

Уравненіе (48) поэтому даетъ:

$$\frac{D\, e^{c\omega}\quad (p+c)}{(1+c^2)\;\sqrt{1+p^2}} = x - x_0$$

Умножая уравненіе (47) на $p = y'$ имѣемъ

$$\int \frac{e^{c\omega}\, pdp}{(1+p^2)^{3/2}} = y - y_0$$

Интегралъ $J' = \displaystyle\int \frac{e^{c\omega}\, pdp}{(1+p^2)^{3/2}}$, какъ J находится въ конечномъ видѣ.

А, именно:

$$J' = \int e^{c\omega}\, d\left(-\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\right) = -\frac{e^{c\omega}}{\sqrt{1+p^2}} + J$$

Итакъ мы имѣемъ кромѣ (48) еще уравненіе

$$-\frac{e^{c\omega}}{\sqrt{1+p^2}} + c\,(x - x_0) = y - y_0 \tag{49}$$

Изъ него имѣемъ

$$-\frac{p+c}{1+c^2} = \frac{x - x_0}{(y-y_0) + c\,(x-x_0)}$$

Откуда:

$$p = \frac{-(x - x_0) + c\,(y - y_0)}{(y - y_0) + c\,(x - x_0)}$$

$$1 + p^2 = \frac{[(y - y_0)^2 + (x - x)^2]\,[1 + c^2]}{[y - y_0 - c\,(x - x_0)]}$$

$$arctgp = \omega$$

Подставляя въ уравненіе (46) имѣемъ:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y)^2} = \frac{D}{\sqrt{1 + c^2}}\, e^{c\,arctg \frac{-(x - x_0) + c\,(y - y_0)}{(y - y_0) + c\,(x - x_0)}} \tag{50}$$

Преобразуемъ координаты, полагая

$$X = (x - x_0)\,cs\,\alpha - (y - y_0)\,sin\,\alpha$$

$$Y = (x - x_0)\,sin\,\alpha + (x - x_0)\,cs\,\alpha$$

гдѣ $c = tg\alpha$, уравненіе (50) приводится тогда въ виду:

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = a\,e^{c\,arctg\,\frac{Y}{X}}$$

$$a = \frac{D}{\sqrt{1 + c^2}}$$

или, переходя къ полярнымъ координатамъ, къ виду:

$$r = ae^{c\vartheta} \tag{51}$$

т. е. искомая *кривая съ постоянной осью отклоненія есть логариѳмическая спираль.*

§ 9. Общія замѣчанія, относящіяся къ теоріи соприкасающихся кривыхъ, сдѣланныя нами въ §§ 3, 5, весьма полезны при разысканіи соприкасающейся логариѳмической спирали къ данной кривой и опредѣленія формулъ для дальнѣйшихъ членовъ ряда (σ_i, τ_i).

Въ прямоугольныхъ Декартовыхъ координатахъ уравненіе логариѳмической спирали можно написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\xi = mx_1 - \sqrt{1 - m^2}\, y_1 + \xi_1 \tag{52}$$

$$\eta = \sqrt{1 - m^2}\, x_1 + m y_1 + \eta_1 \tag{52}$$

$$x_1 = r cs\vartheta = a e^{\alpha\vartheta}\, cs\vartheta \tag{54}$$

$$y_1 = r sin\vartheta = a e^{\alpha\vartheta}\, sin\vartheta \tag{55}$$

Для дуги въ предѣлахъ отъ (ϑ_0, γ_0) до (ϑ, γ) имѣемъ слѣдующее выраженіе:

$$\gamma - \gamma_0 = \lambda s \tag{56}$$

$$\lambda = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \tag{57}$$

Будемъ отсчитывать долготу отъ точки касанія, такъ что послѣдняя отвѣчаетъ $\vartheta = o$, тогда имѣемъ:

$$a + \lambda s = a e^{\alpha\vartheta}$$

$$e^{\alpha\vartheta} = 1 + q, \qquad q = \frac{\lambda s}{a}$$

$$\vartheta = \frac{1}{\alpha}\, lg\,(1 + q) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - q + \frac{q^2}{2} - \frac{q^3}{3} + \dots\right)$$

$$cs\vartheta = 1 - \frac{\vartheta^2}{2} + \frac{\vartheta^4}{24} - \frac{\vartheta^6}{720} + \dots$$

$$\frac{\vartheta^2}{2} = \frac{q^2}{2\alpha^2}\left(1 - \frac{q}{2} + \frac{q^2}{3} - \frac{q^3}{4} + \dots\right)^2 = \frac{q^2}{2\alpha^2}\left(1 - q + \right.$$

$$\left. + \frac{11}{12} q^2 - \frac{5}{6} q^3 + -\right)$$

$$\frac{\vartheta^4}{24} = \frac{q^4}{24\alpha^4}\left(1 - q + \dots\right)^2 = \frac{q^4}{24\alpha^4}\left(1 - 2q + \dots\right)$$

$$cs\vartheta = 1 - \frac{q^2}{2\alpha^2} + \frac{q^3}{2\alpha^3} + \frac{q^4}{24\alpha^4}\,(11\alpha^2 - 1) + \frac{q^5}{12\alpha^5}\,(\alpha^2 + 1) + \dots$$

$$x_1 = (1 + q)\, cs\,\omega = a\left[1 + q - \frac{q^2}{2\alpha^2} + \frac{q^4}{24\alpha^2}\,(\alpha^2 + 1) - \right.$$

$$\left. - \frac{q^5}{24\alpha^4}\,(\alpha^2 + 1) + \dots\right] \tag{58}$$

$$\sin\vartheta = \vartheta - \frac{\vartheta^3}{6} + \frac{\vartheta^5}{120} - \dots$$

$$\vartheta = \frac{q}{\alpha}\left(1 - \frac{q}{2} + \frac{q^2}{3} - \frac{q^3}{4} + \dots\right)$$

$$\frac{\vartheta^3}{6} = \frac{q^2}{6\alpha^3}\left(1 - \frac{q}{2} + \frac{q^2}{3} - \dots\right)\left(1 - q + \frac{11}{12}q^2 + \dots\right) =$$

$$= \frac{q^3}{6\alpha^3}\left(1 - \frac{3}{2}q + \frac{7}{4}q^2 + \dots\right)$$

$$\frac{\vartheta^5}{120} = \frac{q^5}{120\alpha^5} + \dots$$

$$\sin\vartheta = \frac{q}{\alpha} - \frac{q^2}{2\alpha} + \frac{q^3}{6\alpha^3}(-1 + 2\alpha^2) + \frac{q^4}{4\alpha^3}(1 - \alpha^2) +$$

$$+ \frac{q^5}{120\alpha^5}(24\alpha^4 - 35\alpha^2 + 1) + \dots$$

$$y_1 = a(1 + q)\sin p = a\left[\frac{q}{\alpha} + \frac{q^2}{2\alpha} - \frac{q^3}{6\alpha^3}(1 + \alpha^2) +\right.$$

$$\left. + \frac{q^4}{12\alpha^3}(1 + \alpha^2) + \frac{q^5}{120\alpha^5}(-6\alpha^4 - 5\alpha^2 + 1) + \dots\right] \quad (59)$$

Замѣняя q черезъ $\frac{\lambda s}{a}$ и, подставляя эти значенія (x_1, y_1) въ выраженія (52) (53) для ξ, η, потомъ, сравнивая съ разложеніями (x, y), получаемъ слѣдующія условныя уравненія соприкосновенія, которое можетъ быть только 3-го порядка:

$$ma + \xi_1 = o \quad (\mathrm{I})$$

$$\sqrt{1 - m^2}\, a + \eta_1 = o \quad (\mathrm{I'})$$

$$\left(-\frac{m}{\alpha} - \sqrt{1 - m^2}\right)\frac{\lambda}{2\alpha a} = o \quad (\mathrm{II})$$

$$\left(\sqrt{1 - m^2} + \frac{m}{\alpha}\right)\lambda = o \quad (\mathrm{II'})$$

$$\left(m - \frac{\sqrt{1 - m^2}}{\alpha}\right)\lambda = 1 \quad (\mathrm{III})$$

$$\left(-\frac{\sqrt{1 - m^2}}{\alpha} + m\right)\frac{\lambda^2}{\alpha a} = \frac{\beta_2}{2} \quad (\mathrm{III'})$$

$$\frac{\sqrt{1 - m^2}}{6\alpha^3}(1 + \alpha^2)\frac{\lambda^3}{a} = \frac{\alpha^3}{6} \quad (\mathrm{IV})$$

$$-\frac{m\lambda^3}{6\alpha^3}(1 + \alpha^2)\frac{1}{a^2} = \frac{\beta_3}{6} \quad (\mathrm{IV'})$$

Изъ (III) имѣемъ $$\alpha = -\frac{m}{\sqrt{1 - m^2}}$$

(II′ слѣдствіе II)

Изъ (II) $$\lambda = m$$

Подставляя въ (IV′) $$-\frac{m^4}{\alpha^3}\frac{1+\alpha^2}{a^2} = \beta_3 \tag{V}$$

(IV) Даетъ $$-\frac{m^4}{\alpha^4}\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2} = \alpha_3 \tag{VI}$$

По раздѣленіи (V) на (VI): $$\alpha = \frac{\beta_3}{\alpha_3} \tag{VII}$$

Изъ уравненія (V), которое можно переписать въ видѣ:

$$-\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\frac{1}{a^2} = \beta_3$$

Откуда на основаніи (VII)

$$\frac{1}{a^2} = -\frac{\alpha_3^2 + \beta_3^2}{\alpha_3},$$

Имѣемъ:

$$a = \sqrt{-\frac{\alpha_3}{\alpha_3^2 + \beta_3^2}}$$

$$\xi_1 = -\frac{\beta_3\sqrt{-\alpha_3}}{\alpha_3^2 + \beta_3^2}$$

$$\eta_1 = -\frac{\alpha_3\sqrt{-\alpha_3}}{\alpha_3^2 + \beta_3^2}$$

Тотчасъ на основаніи выраженій α_i въ $\rho^{(i)}$ получаемъ:

$$\alpha = -\frac{\rho'}{\rho} \tag{60}$$

$$m = -\frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} \tag{61}$$

$$a = \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} \qquad (62)$$

$$\xi_1 = \frac{\rho' \rho^2}{\rho^2 + \rho'^2} \qquad (53)$$

$$\eta_1 = \frac{\rho^3}{\rho^2 + \rho'^2} \qquad (64)$$

а, подставляя вмѣсто ρ, ρ' изъ общаго выраженія будемъ имѣть, независимо отъ выбора координатъ:

$$\alpha = 3\, y' - \frac{(1 + y'^2)}{y''^2}\, y''' \qquad (65)$$

$$a = \frac{y'' (1 + y'^2) \sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y''^4 (1 + 9y'^2) - 6y' (1 + y'^2)\, y''^2\, y''' + (1 + y'^2)^2\, y'''^2}} \qquad (66)$$

§ 10. Формулы (52) (53) (58) (59) даютъ также выраженія δ_4, δ_5 входящихъ въ формулу:

$$tg\sigma_2 = - \frac{\beta_5 - \delta_5}{10\,\beta_2\, (\beta_4 - \delta_4)} \qquad (67)$$

въ функціи m, a, ξ_1, η_1, а потомъ и ρ, ρ'.

Послѣ весьма утомительныхъ, но совершенно элементарныхъ вычисленій имѣемъ:

$$tg\sigma_2 = - \frac{1}{10}\, \frac{\rho^2 \rho''' + 24\, \rho^2 \rho' - 10\, \rho\, \rho'\, \rho'' + 21\, \rho'^3}{(-\rho\, \rho'' + 2\, \rho'^2 + \rho^2)\, \rho}$$

Слѣдующая за логариѳмической спирально кривая опредѣляется дифференціальнымъ уравненіемъ

$$\rho^2 \rho''' + 24\, \rho^2 \rho' - 10\, \rho\, \rho'\, \rho'' + 21\, \rho'^3 + c\, (\rho\, \rho'' - 2\, \rho'^2 + \rho^2)\, \rho = o$$

гдѣ c постоянное подстановкой

$$\rho = e^{\int z d\omega}$$

приводящееся къ уравненію:

$$z'' + z'\, (a + 24 - 7z) + (12z^3 - az^2 + a + 24z^2) = o$$

Полагая же $z' = u,\ z'' = \frac{du}{d\omega} = \frac{du}{dz}\frac{dz}{d\omega} = u\,\frac{du}{dz}$

приводимъ послѣднее уравненіе къ дифференціальному уравненію перваго порядка типа:

$$udu + [(\alpha z + \beta)\, u + az^3 + bz^2 + cz + d]\, dz = o$$

§ 11. Въ теоріи, какъ плоскихъ, такъ и пространственныхъ кривыхъ слѣдуетъ различать 4 класса величинъ:

I) Зависящія отъ выбора осей координатъ.

II) Независящія отъ выбора координатъ, но зависящія отъ выбора нѣкоторой точки на кривой. Такова дуга s, которая можетъ отсчитываться отъ любой точки или уголъ смежности ω.

III) Величины зависящія только отъ формы элемента кривой въ точкѣ M.

Натуральныя уравненія обоихъ типовъ

$$\Omega\ (\rho,\ \omega) = o$$

$$\Theta\ (\rho,\ s) = o$$

представляютъ зависимости между величинами II и III-го классовъ и потому независимыя отъ выбора координатъ.

Онѣ даютъ для y дифференціальныя уравненія 2-го порядка, содержащія еще произвольную постоянную, зависящую отъ выбора начальныхъ точекъ для s и ω. Поэтому интегралы ихъ будутъ содержать по 3 произвольныхъ постоянныхъ, опредѣляемыхъ, какъ только даны оси координатъ.

Натуральное уравненіе Шефферса:

$$\frac{dk}{dt} = \omega\ (k)$$

гдѣ
$$\tau = \int \frac{ds}{\rho}$$

k кривизна содержитъ только величины II класса и даетъ дифф. ур. 3 порядка, интегралъ котораго содержитъ 3 производительныя постоянныя.

Таково же слѣдующее уравненіе имѣющее преимущество передъ уравненіемъ Шefферса въ томъ отношеніи, что величины, въ него входящія, имѣютъ болѣе опредѣленный смыслъ:

$$H(\rho, \delta) = o$$

гдѣ δ уголъ между осью отклоненія и нормалью.

Это характерное уравненіе можно обозначить какъ *натуральное уравненіе III типа.*

Хопне *) были отмѣчены въ теоріи кривыхъ двоякой кривизны уравненія, которыя остаются неизмѣнными при измѣненіи размѣровъ элемента кривой, но при сохраненіи подобія, иначе говоря, при переходѣ къ всякому конформному изображенію въ пространствѣ.

Эти уравненія, названныя *специфическими,* характеризуютъ *внутреннія* свойства кривой въ отличіе отъ *внѣшнихъ,* опредѣляемыхъ *маштабами* данной фигуры и выборомъ координатъ. Таково уравненіе между угломъ смежности и угломъ крученія въ теоріи пространственныхъ кривыхъ.

Уравненіе:

$$Q(\delta, \varepsilon) = o$$

между углами составляемыми съ нормалью векторами, перваго и второго класса (ρ_1, τ_1) будетъ *специфическимъ* уравненіемъ плоской кривой. Интегрированіе этого уравненія даетъ 4 произвольно-постоянныхъ, опредѣляемыхъ заданіемъ осей координатъ и маштаба.

Замѣтимъ, что изъ рядовъ

$$(\omega, \rho) \qquad (\pi_1, \rho_1)\,(\pi_2\, \rho_2) \ldots (\pi_i, \rho_i) \ldots$$

$$, \qquad (\sigma_1, \tau_1)\,(\sigma_2, \tau_2) \ldots (\sigma_i, \tau_i) \ldots$$

---

*) *Hoppe.* Darstellung der Curven durch Krümmung und Torsion. Journal de Crelle. B. 63. 1863. p. 122.

Можно составить производный рядъ

$$\rho \quad \sigma_1 \quad \pi_1 \quad \sigma_2 \quad \pi_2 \quad \dots$$

первымъ членомъ котораго опредѣляется маштабъ, а остальными, имѣющими опредѣленныя геометрическія значенія, опредѣляется постепенно форма элемента кривой.

2-го Іюля 1907 г.

Новый методъ изысканія особыхъ точекъ функціи, опредѣляемой строкою Тэйлора.

И. Р. БРАЙЦЕВА.

ГЛАВА I.

Выводъ первой основной формулы для опредѣленія особыхъ точекъ строки Тэйлора, лежащихъ на границѣ полигона Бореля. Приложеніе этой формулы въ одномъ случаѣ.

§ 1. Область сходимости и расходимости безконечной суммы $\sum_{0}^{\infty} e^{-\frac{p}{\rho}} \left| \vartheta \left(pe^{\varphi i} \right) \right|$. Выводъ первой основной формулы.

Разсмотримъ строку Тэйлора:

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n, \tag{1}$$

гдѣ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ суть постоянныя числа.

Мы будемъ предполагать, что

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l = \frac{1}{r}; \tag{2}$$

при чемъ r число опредѣленное, отличное отъ нуля.

Допустимъ на время, что извѣстны особыя точки основной [1])

[1]) т. е., вѣтви функціи $f(z)$, разлагающейся въ рядъ (1).

вѣтви функціи $f(z)$ во всей области аналитическаго продолженія ряда (1). Пусть эти точки будутъ:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k, \ldots\ldots \qquad (3)$$

Вообразимъ, что точка $z = 0$ соединена съ точками (3) при помощи радіусъ-векторовъ: $\overline{0\alpha_1}$, $\overline{0\alpha_2}$, $\overline{0\alpha_3}$, ..., $\overline{0\alpha_k}$, ... Далѣе, черезъ каждую изъ точекъ (3) проведемъ прямую, перпендикулярную къ радіусъ-вектору, соединяющему эту точку съ точкой $z = 0$. Проведенныя такимъ образомъ прямыя раздѣлятъ всю плоскость перемѣннаго z на многоугольники. Изъ этихъ послѣднихъ выбираемъ тотъ, который, содержа внутри себя точку $z = 0$, не заключаетъ внутри себя ни одной изъ точекъ (3). Этотъ многоугольникъ есть не что иное, какъ основной полигонъ Бореля [1]). Его мы будемъ называть полигономъ K.

Такимъ же образомъ строится многоугольникъ K и въ томъ случаѣ, если особыя точки функціи $f(z)$ составляютъ не счетную послѣдовательность, но одну или нѣсколько послѣдовательностей высшаго порядка.

Изъ самаго построенія многоугольника K ясно, что, если всѣ особыя точки функціи $f(z)$ изолированныя, то полигонъ K ограниченъ прямолинейными сторонами конечной длины. Если же функція $f(z)$ содержитъ и неизолированныя особыя точки, то стороны полигона K могутъ представлять прямолинейные элементы безконечно-малой длины, или же могутъ быть по величинѣ нулями, какъ, напр., въ случаѣ, если окружность $|z| = r$ представляетъ особую линію функціи $f(z)$. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ полигонъ K совпадаетъ съ кругомъ $|z| < r$.

Очевидно, что во всѣхъ случаяхъ основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точки $z = 0$ на границу полигона K, служатъ особыми точками функціи $f(z)$.

Назовемъ далѣе ρ и φ полярныя координаты точки какой-либо стороны полигона K, которая представляетъ прямолинейный элементъ конечной длины, или же таковой элементъ безконечно-малой длины. Обозначая черезъ α_k особую точку ряда (1), расположенную на этой сторонѣ, и предполагая, что ρ и φ текущія полярныя координаты точекъ этой стороны, уравненіе послѣдней представимъ въ формѣ:

---

[1]) *Borel:* „Leçons sur les séries divergentes“, p. 120 et suiv..

$$\rho \cos(\varphi - \vartheta_k) = |\alpha_k|, \tag{4}$$

гдѣ $|\alpha_k|$ есть модуль, а ϑ_k аргументъ α_k, т. е.,

$$\alpha_k = |\alpha_k| \, e^{i\vartheta_k}. \tag{5}$$

Если разсматриваемый элементъ—сторона полигона К безконечно-малой длины, то число $|\varphi - \vartheta_k|$ безконечно-мало. Если же полигонъ К совпадаетъ съ кругомъ сходимости ряда (1), то элементъ обращается въ точку и, слѣдовательно, $\varphi - \vartheta_k = 0$.

Здѣсь умѣстно обратить вниманіе на важный для послѣдующаго пунктъ: если ρ и φ суть полярныя координаты какой-либо вершины многоугольника К, то соотношеніе (4) удовлетворяется не только особой точкою α_k, но также и особою точкою, которая расположена на слѣдующемъ прямолинейномъ элементѣ—сторонѣ полигона К, выходящей изъ разсматриваемой вершины.

Замѣтимъ, что въ уравненіи (4) разность $\varphi - \vartheta_k$ удовлетворяетъ условію:

$$|\varphi - \vartheta_k| < \frac{\pi}{2}. \tag{6}$$

Это соотношеніе непосредственно усматривается изъ того, что φ представляетъ амплитуду какой-либо точки стороны полигона К, а ϑ_k служитъ амплитудой основанія перпендикуляра, опущеннаго изъ точки $z = 0$ на эту сторону.

Пользуясь безконечной суммой

$$\sum_0^{\infty} e^{-\frac{p}{\rho}} \left| \vartheta\left(pe^{\varphi i}\right) \right|, \tag{7}$$

гдѣ

$$\vartheta\left(pe^{\varphi i}\right) = \sum_0^{\infty} \frac{a_s p^s e^{s\varphi i}}{s!}, \tag{8}$$

можно вывести другое, весьма важное выраженіе для ρ.

Пусть будетъ

$$z = \rho e^{\varphi i}; \tag{9}$$

при чемъ подъ ρ и φ здѣсь разумѣемъ модуль и аргументъ числа z.

Въ своей работѣ: „Mémoire sur les séries divergentes“ Борель установилъ, что интегралъ

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{\rho}} \left| \vartheta\left(pe^{\varphi i}\right) \right| dp \tag{10}$$

сходится внутри полигона K и расходится внѣ его. Что же касается до границы этого полигона, то, въ зависимости отъ состава чиселъ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, интегралъ (10) можетъ, какъ сходиться, такъ и расходиться въ ея точкахъ. Согласно извѣстной теоремѣ Коши [1]), безконечная сумма (7) сходится и расходится въ тѣхъ же областяхъ, какъ и интегралъ (10).

Такимъ образомъ мы получили важный результатъ, который формулируемъ въ особую теорему.

Теорема. Безконечная сумма сходится внутри полигона K и расходится внѣ его. Что же касается до границы многоугольника K, то, въ зависимости отъ состава чиселъ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, *сумма* (7) *можетъ сходиться и расходиться въ ея точкахъ.*

Обозначимъ черезъ ρ_0 и φ_0 полярныя координаты какой-либо точки полигона K. Возьмемъ далѣе два положительныхъ числа ρ_1 и ρ_2 подъ условіемъ, чтобы

$$\rho_1 \angle \rho_0 \angle \rho_2.$$

Тогда, на основаніи извѣстной теоремы [2]), можемъ написать:

$$e^{-\frac{p}{\rho_1}} \left| \vartheta\left(p e^{\varphi_0 i}\right) \right| < 1 \qquad (12)$$

при $p > P$, гдѣ P нѣкоторое цѣлое положительное число.

Съ другой стороны, въ виду расходимости суммы (7) внѣ области K, существуетъ безконечный рядъ безгранично-возрастающихъ значеній p: $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots$, для котораго должно быть:

$$e^{-\frac{p}{\rho_2}} p^2 \left| \vartheta\left(p e^{\varphi i}\right) \right| > 1. \qquad (13)$$

Беря отъ обѣихъ частей каждаго изъ неравенствъ (12) и (13) логариѳмъ при основаніи числа e, получимъ въ концѣ-концовъ:

$$\frac{1}{p}\, lg \left| \vartheta\left(p e^{\varphi_0 i}\right) \right| < \frac{1}{\rho_1} - \frac{lgp}{p};$$

$$p > P \qquad (14)$$

$$\frac{1}{p}\, lg \left| \vartheta\left(p e^{\varphi_0 i}\right) \right| > \frac{1}{\rho_2} - \frac{2\, lgp}{p}.$$

$$p = p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots.$$

---

[1]) См., напр., *E. Picard:* Traité d'analyse, t. 1, 1891, p. 27.

[2]) *Borel:* „Leçons sur les fonctions entières.“ Paris, 1900, p. 17.

Пусть будетъ:

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{1+\eta}; \ \rho_2 = \frac{\rho_0}{1-\zeta}, \tag{15}$$

гдѣ η и ζ суть положительныя числа, которыя могутъ быть какъ-угодно малыми.

Тогда неравенства (14) перепишутся слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{1}{p}\, lg \left| \vartheta \left(pe^{\varphi_0 i}\right)\right| < \frac{1}{\rho_0} + \frac{\eta}{\rho_0} - \frac{lgp}{p};$$

$$p > P$$

$$\frac{1}{p}\, lg \left| \vartheta \left(pe^{\varphi_0 i}\right)\right| > \frac{1}{\rho_0} - \frac{\zeta}{\rho_0} - \frac{2\, lgp}{p}. \tag{16}$$

$$p = p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots,\ p_n,\ \ldots$$

Пусть ε будетъ сколь-угодно малое положительное число. Выберемъ тогда η и ζ, а также цѣлыя положительныя числа P и N подъ условіемъ, чтобы

$$\eta - \rho_0 \frac{lgp}{p} < \varepsilon \tag{17}$$

при $p > P$ и

$$\zeta + 2\, \rho_0 \frac{lgp_n}{p_n} < \varepsilon \tag{17'}$$

при $n > N$. Въ такомъ случаѣ будемъ имѣть:

$$\frac{1}{p}\, lg \left| \vartheta \left(pe^{\varphi_0 i}\right)\right| < \frac{1+\varepsilon}{\rho_0};$$

$$p > P \tag{18}$$

$$\frac{1}{p_n}\, lg \left| \vartheta \left(p_n e^{\varphi_0 i}\right)\right| > \frac{1-\varepsilon}{\rho_0}.$$

$$n > N$$

Соотношенія (18) обнаруживаютъ, что

$$\overline{lim}_{p=\infty} \frac{1}{p}\, lg \left| \vartheta \left(pe^{\varphi_0 i}\right)\right| = \frac{1}{\rho_0}. \tag{19}$$

Для того же ρ_0 Борель нашелъ такое выраженіе:

$$\overline{lim}_{b=\infty} \frac{1}{b}\, lg \left| \vartheta \left(be^{\varphi_0 i}\right)\right| = \frac{1}{\rho_0}.\ ^{1)} \tag{20}$$

---

1) *Borel:* „Leçons sur les séries divergentes“, p. 141.

Къ этому предѣлу приводитъ выраженіе $\frac{1}{b}\ lg \left| \vartheta \left(b e^{\varphi_0 i}\right) \right|$ нѣкоторый безконечный рядъ безгранично-возрастающихъ значеній b: $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$, который, какъ предполагалъ Борель, надо искать между всѣми положительными числами. Наши же изслѣдованія обнаружили, что числа безконечнаго ряда, которыя приводятъ вышеозначенное выраженіе къ его предѣлу $\frac{1}{\rho_0}$, можно искать между натуральными числами. Въ этомъ состоитъ существенная особенность символа $\vartheta\left(pe^{\varphi i}\right)$, благодаря которой его можно положить въ основу новой плодотворной методы, служащей для опредѣленія особыхъ точекъ функціи $f(z)$.

Условимся далѣе черезъ l_φ обозначать выраженіе:

$$l_\varphi = \lim_{p=\infty} \frac{1}{p}\ lg \left| \vartheta \left(pe^{\varphi i}\right) \right|. \tag{21}$$

Сопоставляя формулу (21) съ соотношеніемъ (19) послѣ замѣны въ этомъ послѣднемъ ρ_0 и φ_0 соотвѣтственнаго черезъ ρ и φ, находимъ:

$$l_\varphi = \frac{1}{\rho};\ \rho = \frac{1}{l_\varphi}. \tag{22}$$

Исключивъ изъ уравненія (4) число ρ при помощи втораго изъ соотношеній (22), будемъ имѣть:

$$\frac{\cos\ (\varphi - \vartheta_k)}{|\alpha_k|} = l_\varphi. \tag{23}$$

Это есть первая основная формула для опредѣленія особыхъ точекъ строки (1), лежащихъ на границѣ полигона K. Въ ней разность $\varphi - \vartheta_k$ удовлетворяетъ условію (6), а $\rho = \frac{1}{l_\varphi}$ и φ суть радіусъ-векторъ и амплитуда точки, расположенной на той-же сторонѣ полигона K, на которой лежитъ особая точка α_k функціи $f(z)$.

§ 2. Вспомогательныя теоремы.

Теорема 1. Пусть u_p будетъ нѣкоторой функціей p и

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|u_p|} = \alpha. \tag{24}$$

Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$\lim_{p=\infty} \frac{1}{p} \lg |u_p| = \lg \alpha. \tag{25}$$

Доказательство.

На основаніи равенства (24) имѣемъ:

$$\begin{gathered} \sqrt[p]{|u_p|} < \alpha\,(1+\eta); \\ p > N \\ \sqrt[p]{|u_p|} > \alpha\,(1-\eta). \\ p = p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots\ldots \end{gathered} \tag{26}$$

Замѣтимъ, что положительное число η можетъ быть сколь-угодно малымъ. Логариѳмируя обѣ части каждаго изъ соотношеній (26), принявъ за основаніе логариѳмовъ Неперово число e, получимъ:

$$\begin{gathered} \frac{1}{p} \lg |u_p| < \lg \alpha + \lg (1+\eta); \\ p > N \\ \frac{1}{p} \lg |u_p| > \lg \alpha + \lg (1-\eta). \\ p = p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots\ldots \end{gathered} \tag{27}$$

Будемъ здѣсь различать три случая: $\alpha > 1$, $\alpha = 1$ и $\alpha < 1$.

Въ первомъ случаѣ выбираемъ малое положительное число ε подъ условіемъ, чтобы

$$\frac{\lg (1+\eta)}{\lg \alpha} < -\frac{\lg (1-\eta)}{\lg \alpha} < \varepsilon. \tag{28}$$

Изъ этихъ неравенствъ ясно, что, если η произвольно-мало, то и ε можно считать также произвольно-малой положительной величиной.

Въ виду неравенствъ (28), на основаніи соотношеній (27) имѣемъ:

$$\begin{gathered} \frac{1}{p} \lg |u_p| < \lg \alpha\,(1+\varepsilon); \\ p > N \\ \frac{1}{p} \lg |u_p| > \lg \alpha\,(1-\varepsilon). \\ p = p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots\ldots \end{gathered} \tag{29}$$

Эти неравенства обнаруживаютъ справедливость соотношенія (25) въ разсматриваемомъ случаѣ.

Пусть будетъ далѣе $\alpha = 1$. Тогда, полагая, что

$$lg\,(1+\eta) < -lg\,(1-\eta) < \varepsilon, \tag{30}$$

гдѣ ε произвольно-малое положительное число, если η произвольно-мало, на основаніи соотношеній (29) имѣемъ:

$$\begin{gathered} \frac{1}{p}\,lg\,|u_p| < \varepsilon; \\ p > N \\ \frac{1}{p}\,lg\,|u_p| > -\varepsilon. \\ p = p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots. \end{gathered} \tag{31}$$

Неравенства (31) обнаруживаютъ, что

$$\overline{\lim_{p=\infty}}\,\frac{1}{p}\,lg\,|u_p| = 0, \tag{32}$$

т. е., въ разсматриваемомъ случаѣ оправдывается равенство (25).

Предположимъ наконецъ, что $\alpha < 1$. Изобразимъ тогда соотношенія (27) слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{gathered} -\frac{1}{p}\,lg\,|u_p| > lg\,\frac{1}{\alpha} - lg\,(1+\eta); \\ p > N \\ -\frac{1}{p}\,lg\,|u_p| < lg\,\frac{1}{\alpha} - lg\,(1-\eta). \\ p = p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots. \end{gathered} \tag{33}$$

Пусть ε выбрано подъ условіемъ, чтобы

$$\frac{lg\,(1+\eta)}{lg\,\frac{1}{\alpha}} < -\frac{lg\,(1-\eta)}{lg\,\frac{1}{\alpha}} < \varepsilon. \tag{34}$$

Если η произвольно-мало, то, въ силу неравенствъ (34), положительное число ε можно считать также произвольно-малымъ.

Въ виду неравенствъ (34), на основаніи соотношеній (33) находимъ:

$$\underline{\lim_{p=\infty}} -\frac{1}{p}\,lg\,|u_p| = lg\,\frac{1}{\alpha}. \tag{35}$$

Значитъ, $lg\alpha$ представляетъ верхній предѣлъ выраженія $\frac{1}{p}\,lg\,|u_p|$ при $p = \infty$.

Выходитъ такимъ образомъ, что во всѣхъ трехъ случаяхъ равенство (25) сохраняетъ силу.

Теорема 2. Пусть выполняется равенство (25). *Въ такомъ случаѣ справедливо соотношеніе* (24).

Доказательство.

Допустимъ, что, вопреки теоремѣ,

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|u_p|} = \beta, \tag{36}$$

гдѣ $\beta \neq \alpha$. Тогда, въ силу теоремы 1, имѣемъ:

$$\lim_{p=\infty} \frac{1}{p}\, lg\, |u_p| = lg\beta. \tag{36'}$$

Сопоставляя результатъ (36′) съ предполагаемымъ въ теоремѣ условіемъ (25), заключаемъ, что $lg\beta = lg\alpha$ и, слѣдовательно, $\beta = \alpha$.

Выходитъ такимъ образомъ, что равенство (36) возможно только при $\beta = \alpha$, т. е., теорема справедлива.

Теорема 3. Пусть будетъ

$$u_p = v_p + w_p. \tag{37}$$

Допустимъ, что

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|v_p|} > \lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|w_p|}. \tag{38}$$

Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|u_p|} = \lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|v_p|}. \tag{39}$$

Доказательство.

Пусть будетъ:

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|v_p|} = \alpha;\quad \lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|w_p|} = \beta; \tag{40}$$

при чемъ, согласно условію, $\alpha > \beta$.

Разобьемъ доказательство теоремы на двѣ части.

I. Выберемъ число λ подъ условіемъ, чтобы

$$\lambda > 1. \tag{41}$$

Допустимъ далѣе, что, вопреки теоремѣ,

$$\sqrt[p]{|u_p|} > \alpha\lambda, \qquad (42)$$
$$p = p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots\ldots,$$

или:

$$|u_p| > (\alpha\lambda)^p. \qquad (42')$$
$$p = p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots\ldots$$

Въ силу опредѣленія верхняго предѣла выраженія $\sqrt[p]{|w_p|}$, при $p = \infty$, имѣемъ:

$$\sqrt[p]{|w_p|} < \beta\lambda, \qquad (43)$$
$$p > N$$

или:

$$|w_p| < (\beta\lambda)^p. \qquad (43')$$
$$p > N$$

Обнаружимъ, что неравенство (42) противорѣчитъ первому изъ равенствъ (40).

Въ самомъ дѣлѣ, изъ соотношенія (37) находимъ:

$$|v_p| > |u_p| - |w_p|. \qquad (44)$$

Въ виду неравенствъ (42′) и (43′), имѣемъ:

$$|v_p| > (\alpha\lambda)^p \left[1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^p\right]. \qquad (45)$$
$$p = p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots\ldots$$

Отсюда находимъ:

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|v_p|} > \alpha\lambda \lim_{p=\infty} \sqrt[p]{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^p}. \qquad (46)$$

А такъ какъ

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^p} = 1, \qquad (47)$$

то

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|v_p|} > \alpha\lambda. \qquad (48)$$

Этотъ же результатъ противорѣчитъ первому изъ соотношеній (40). А если такъ, то допущеніе (42) не можетъ быть сдѣлано.

II. Предположимъ теперь, что число λ содержится въ границахъ

$$0 < \lambda < 1 \tag{49}$$

и, при томъ, весьма близко къ единицѣ.

Допустимъ, что, вопреки теоремѣ,

$$\sqrt[p]{|u_p|} < \alpha\lambda, \quad p > N \tag{50}$$

или:

$$|u_p| < (\alpha\lambda)^p. \quad p > N \tag{50'}$$

Пусть при этомъ λ выбрано такъ, что

$$\sqrt[p]{|w_p|} < \alpha\lambda. \quad p > N \tag{51}$$

Такъ какъ верхній предѣлъ выраженія $\sqrt[p]{|w_p|}$, при $p = \infty$, равенъ $\beta < \alpha$, то, при значеніяхъ λ, достаточно близкихъ къ 1, неравенство (51) всегда возможно.

Принимая тогда во вниманіе равенство (37), можемъ написать:

$$|v_p| < |u_p| + |w_p| < 2\,(\alpha\lambda)^p. \quad p > N \tag{52}$$

Отсюда находимъ:

$$\overline{lim}_{p=\infty} \sqrt[p]{|v_p|} < \alpha\lambda. \tag{53}$$

Неравенство (53) противорѣчитъ первому изъ соотношеній (40). А потому допущеніе (50) не вѣрно.

Итакъ, нельзя предположить, что

$$\sqrt[p]{|u_p|} > (1+\eta)\,\alpha \quad p = p_1, p_2, p_3, \ldots \tag{54}$$

или

$$\sqrt[p]{|u_p|} < (1-\eta)\,\alpha, \quad p > N \tag{55}$$

какой бы малости положительное число η ни было.

Слѣдовательно, возможно только

$$\sqrt[p]{|u_p|} < (1+\eta)\,\alpha;$$
$$p > N \tag{56}$$
$$\sqrt[p]{|u_p|} > (1-\eta)\,\alpha,$$
$$p = p',\ p'',\ p''',\ \ldots\ldots$$

гдѣ η положительное число, которое можетъ быть сдѣлано сколь-угодно малымъ.

Соотношенія (56) обнаруживаютъ, что

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|u_p|} = \alpha. \tag{57}$$

Имѣя тогда въ виду первое изъ равенствъ (40), утверждаемъ, что соотношеніе (39) справедливо.

Теорема 4. Пусть функціи u_p, v_p и w_p связаны между собою соотношеніемъ (37). *Допустимъ далѣе, что*

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \frac{1}{p}\, lg\, |v_p| > \overline{\lim_{p=\infty}} \frac{1}{p}\, lg\, |w_p|. \tag{58}$$

Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \frac{1}{p}\, lg\, |u_p| = \overline{\lim_{p=\infty}} \frac{1}{p}\, lg\, |v_p|. \tag{59}$$

Доказательство.

Пусть будетъ

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \frac{1}{p}\, lg\, |v_p| = lg\,\alpha;\ \overline{\lim_{p=\infty}} \frac{1}{p}\, lg\, |w_p| = lg\beta; \tag{60}$$

при чемъ, согласно условію, $\beta < \alpha$.

Принимая во вниманіе теорему 2, имѣемъ:

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|v_p|} = \alpha;\ \overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|w_p|} = \beta. \tag{61}$$

Такъ какъ $\alpha > \beta$, то, въ силу теоремы 3, заключаемъ, что

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|u_p|} = \alpha. \tag{62}$$

Примѣняя къ этому результату теорему 1, находимъ равенство (25) Сопоставляя это послѣднее съ первымъ изъ соотношеній (60), заключаемъ о справедливости равенства (59).

Теорема 5. *Допустимъ, что функціи u_p, v_p и w_p перемѣннаго p связаны между собою соотношеніемъ* (37). *Пусть при этомъ удовлетворяется условіе:*

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|u_p|} > \overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|w_p|}. \tag{63}$$

Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|v_p|} = \overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|u_p|}. \tag{64}$$

Доказательство.

Представимъ соотношеніе (37) слѣдующимъ образомъ:

$$v_p = u_p - w_p. \tag{65}$$

Примѣняя теперь теорему 3, получимъ соотношеніе (64).

Теорема 6. *Допустимъ, что*

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \frac{1}{p} \lg |u_p| > \overline{\lim_{p=\infty}} \frac{1}{p} \lg |w_p|. \tag{66}$$

Если функціи u_p, v_p и w_p связаны между собою соотношеніемъ (37), *то имѣемъ:*

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \frac{1}{p} \lg |v_p| = \overline{\lim_{p=\infty}} \frac{1}{p} \lg |u_p|. \tag{67}$$

Доказательство.

Примѣняя къ функціямъ v_p, u_p и $-w_p$, связаннымъ между собою соотношеніемъ (65), теорему 4, получимъ соотношеніе (67).

Теорема 7. *Допустимъ, что*

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|v_p|} = \overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|w_p|} = \alpha. \tag{68}$$

Въ такомъ случаѣ утверждаемъ, что, если u_p, v_p и w_p связаны между собою соотношеніемъ (37), *то*

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|u_p|} \leqq \alpha. \tag{69}$$

Доказательство.

Допустимъ, что справедливо не соотношеніе (69), но неравенство:

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|u_p|} > \alpha. \tag{70}$$

Примѣнимъ тогда къ равенству (65) теорему 3. Получимъ:

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|v_p|} > \alpha. \tag{71}$$

А такъ какъ результатъ (71) противорѣчитъ условію (68), то допущеніе (70) не вѣрно. Это означаетъ, что возможно только соотношеніе (69).

Теорема 8. Допустимъ, что функціи u_p, v_p и w_p связаны между собою условіемъ (37) *и*

$$\lim_{p=\infty} \frac{1}{p} \lg |v_p| = \lim_{p=\infty} \frac{1}{p} \lg |w_p| = \lg\alpha. \tag{72}$$

Въ такомъ случаѣ

$$\lim_{p=\infty} \frac{1}{p} \lg |u_p| < \lg\alpha. \tag{73}$$

Доказательство.

Пусть будетъ справедливо не соотношеніе (73), но равенство:

$$\lim_{p=\infty} \frac{1}{p} \lg |u_p| = \lg\beta, \tag{74}$$

гдѣ $\beta > \alpha$.

Тогда, въ силу теоремы 6, заключаемъ, что и

$$\lim_{p=\infty} \frac{1}{p} \lg |v_p| = \lg\beta > \lg\alpha, \tag{75}$$

что противорѣчитъ условію (72).

А если такъ, то возможно только соотношеніе (73).

Теорема 9. Допустимъ, что функціи u_p, v_p и w_p связаны между собою соотношеніемъ (37). *Пусть будетъ*

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|u_p|} = \lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|w_p|} = \alpha. \tag{76}$$

Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|v_p|} \leqslant \alpha. \tag{77}$$

Доказательство.

Представимъ соотношеніе (37) въ формѣ (65). Примѣняя тогда къ нему теорему 7, получимъ соотношеніе (77).

Теорема 10. *Предположимъ, что функціи u_p, v_p и w_p связаны между собою соотношеніемъ* (37) *и*

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \frac{1}{p} lg\, |u_p| = \overline{\lim_{p=\infty}} \frac{1}{p} lg\, |w_p| = lg\alpha. \tag{78}$$

Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \frac{1}{p} lg\, |v_p| \leqslant lg\alpha \tag{79}$$

Доказательство.

Примѣняя къ равенству (65) теорему 8, получимъ соотношеніе (79).

3. Упрощенія при вычисленіи символа $\overline{\lim_{p=\infty}} \frac{1}{p} lg\, |\vartheta\,(pe^{\varphi i})|$.

Теоремами предыдущаго параграфа мы будемъ часто пользоваться впослѣдствіи. Здѣсь же приложимъ ихъ къ упрощенію символа $\vartheta\,(pe^{\varphi i})$ при изысканіи предѣла (21). Предварительно представимъ соотношеніе (21) въ нѣсколько иной формѣ. Пользуясь теоремой 2 предыдущаго параграфа, соотношеніе (21) изобразимъ такъ:

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|\vartheta\,(pe^{\varphi i})|} = e^{l\varphi}. \tag{80}$$

Въ виду соотношенія (23), а также и того, что $l_\varphi = \frac{1}{\rho}$, равенство (80) можемъ изобразить въ слѣдующей формѣ:

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|\vartheta\,(pe^{\varphi i})|} = e^{\frac{1}{\rho}} = e^{\frac{\cos\,(\varphi-\vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|}}. \tag{81}$$

Мы займемся сперва упрощеніемъ символа $\vartheta\ (pe^{\varphi i})$ при изысканіи предѣла (81).

Для этой цѣли обозначимъ черезъ $\psi\ (p)$ какую-либо положительную функцію p, безгранично-возрастающую одновременно съ безконечнымъ возрастаніемъ p и при томъ такъ, что отношеніе $\frac{p}{\psi\,(p)}$ при этомъ тоже безгранично растетъ.

Обозначимъ послѣ этого черезъ Δ_p наибольшее цѣлое число, содержащееся въ $\frac{p}{\psi\,(p)}$, т. е.:

$$\Delta_p = E\left(\frac{p}{\psi\,(p)}\right). \tag{82}$$

Далѣе, будемъ предполагать, что радіусъ круга сходимости ряда (1) равенъ единицѣ, т. е.:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|\,a_n\,|} = 1. \tag{83}$$

Такъ какъ къ этому случаю рядъ (1) приводится при помощи подстановки

$$z \mid rz, \tag{84}$$

гдѣ r величина радіуса круга сходимости ряда (1), то допущеннымъ ограниченіемъ нисколько не умаляется общность нашихъ изслѣдованій.

Теорема 1. Если Δ_p *имѣетъ составъ* (82), *а* ρ *число конечное, то*

$$e^{\frac{1}{\rho}} = \lim_{p=\infty} \sqrt[p]{\left|\sum_{\Delta_p}^{\infty} \frac{a_n\,(pe^{\varphi i})^n}{n!}\right|}. \tag{85}$$

Доказательство.

Пусть будетъ:

$$\Lambda = \sum_{0}^{\Delta_p - 1} \frac{a_n\,(pe^{\varphi i})^n}{n!}. \tag{86}$$

Отсюда находимъ:

$$|\,\Lambda\,| < \sum_{0}^{\Delta_p - 1} \frac{|\,a_n\,|\,p^n}{n!}. \tag{87}$$

Въ виду условія (83), можемъ написать:

$$| a_n | < M (1 + \varepsilon)^n, \tag{88}$$

гдѣ M опредѣленное большое положительное число, а ε малое положительное число.

Имѣя въ виду неравенство (88), на основаніи соотношенія (87) находимъ:

$$| \Lambda | < M \sum_{0}^{\Delta_p - 1} \frac{[p(1+\varepsilon)]^n}{n!}. \tag{89}$$

Отношеніе $n+1$-го слагаемаго суммы (89) къ ея n—тому слагаемому равно $\frac{p(1+\varepsilon)}{n}$. Это отношеніе, при измѣненіи n отъ 0 до $\Delta_p - 1$, остается все время больше 1. А потому члены разсматриваемой суммы все время растутъ при измѣненіи n отъ $n = 0$ до $n = \Delta_p - 1$; при чемъ наибольшій изъ нихъ есть $\frac{[p(1+\varepsilon)]^{\Delta_p - 1}}{(\Delta_p - 1)!}$.

Значитъ, можемъ написать:

$$| \Lambda | < M \Delta_p \frac{[p(1+\varepsilon)]^{\Delta_p - 1}}{(\Delta_p - 1)!}. \tag{90}$$

На основаніи извѣстной формулы Стирлинга

$$(\Delta_p - 1)! > \sqrt{2\pi}\, (\Delta_p - 1)^{\Delta_p - \frac{1}{2}} e^{-\Delta_p + 1} (1 - \tau), \tag{91}$$

гдѣ $0 < \tau < 1$, находимъ:

$$| \Lambda | < \frac{M_1 \Delta_p [(1+\varepsilon) pe]^{\Delta_p - 1}}{(\Delta_p - 1)^{\Delta_p - \frac{1}{2}}}, \tag{92}$$

гдѣ M_1 опредѣленное положительное число, удовлетворяющее условію:

$$M_1 > \frac{M}{\sqrt{2\pi}\,(1-\tau)}. \tag{92'}$$

А такъ какъ

$$\frac{p}{\psi(p)} - 1 < \Delta_p \leqslant \frac{p}{\psi(p)}, \tag{93}$$

то имѣемъ:

$$| \Lambda | < M_1 \frac{p}{\psi(p)} \frac{[(1+\varepsilon) pe]^{\frac{p}{\psi(p)}}}{\left(\frac{p}{\psi(p)} - 2\right)^{\frac{p}{\psi(p)} - \frac{3}{2}}}. \tag{94}$$

Отсюда, послѣ надлежащихъ упрощеній, получаемъ:

$$lg\,|\Lambda| < lg\, M_1 + lg\,\frac{p}{\psi(p)} + \frac{p}{\psi(p)}\,lg\,(1+\varepsilon) +$$
$$+ \frac{p}{\psi(p)} + \frac{3}{2}\,lg\,\frac{p}{\psi(p)} + \frac{p}{\psi(p)}\,lg\,\psi(p) - \tag{95}$$
$$- \left(\frac{p}{\psi(p)} - \frac{3}{2}\right) lg\left(1 - \frac{2\,\psi(p)}{p}\right).$$

Значитъ, находимъ:

$$\overline{lim}_{p=\infty}\ \frac{1}{p}\ lg\,|\Lambda| \leqq 0. \tag{96}$$

Принимая во вниманіе теорему 2 предыдущаго параграфа, имѣемъ:

$$\overline{lim}_{p=\infty}\ \sqrt[p]{|\Lambda|} \leqq 1. \tag{97}$$

Такъ какъ $e^{\frac{1}{\rho}} > 1$ при ρ конечномъ, а Λ удовлетворяетъ условію (97), то на основаніи теоремы 5 предыдущаго параграфа заключаемъ о справедливости теоремы.

Примѣчаніе. Допустимъ теперь, что $\rho = \infty$ и, слѣдовательно,

$$\overline{lim}_{p=\infty}\ \sqrt[p]{|\vartheta(pe^{\varphi i})|} = 1. \tag{98}$$

Въ виду результата (97), можемъ сдѣлать два допущенія:

$$\overline{lim}_{p=\infty}\ \sqrt[p]{|\Lambda|} < 1 \text{ или } \overline{lim}_{p=\infty}\ \sqrt[p]{|\Lambda|} = 1.$$

Если имѣетъ мѣсто первый случай, то, въ силу теоремы 5 § 2, равенство (98) не измѣнится, если въ символѣ $\vartheta(pe^{\varphi i})$ устранить сумму (86).

Остается, слѣдовательно, разсмотрить случай, когда

$$\overline{lim}_{p=\infty}\ \sqrt[p]{|\Lambda|} = 1.$$

Назовемъ $\overline{\vartheta}(pe^{\varphi i})$ выраженіе, которое останется отъ $\vartheta(pe^{\varphi i})$, если въ этомъ послѣднемъ символѣ отбросить сумму (86). Примѣняя тогда къ разсматриваемому случаю теорему 9 § 2, получимъ:

$$\overline{lim}_{p=\infty}\ \sqrt[p]{|\overline{\vartheta}(pe^{\varphi i})|} \leqq 1. \tag{99}$$

Если лѣвая часть соотношенія (99) равна 1, то въ равенствѣ (98) символъ $\vartheta\,(pe^{\varphi i})$ очевидно можно замѣнить $\bar{\vartheta}\,(pe^{\varphi i})$. Значитъ, остается единственный случай, когда лѣвая часть соотношенія (99) меньше 1. Во всякомъ подобномъ случаѣ символъ $\lim\limits_{p=\infty} \sqrt[p]{|\vartheta\,(pe^{\varphi i})|}$ мы условимся считать равнымъ единицѣ. При такомъ соглашеніи теорема 1 сохраняетъ силу, какъ при ρ конечномъ, такъ и при $\rho=\infty$.

Теорема 2. Если ρ число конечное, то

$$e^{\frac{1}{\rho}} = \lim_{p=\infty} \sqrt[p]{\left|\sum_{\Delta_p}^{3p} \frac{a_n\,(pe^{\varphi i})^n}{n\,!}\right|}. \tag{100}$$

Доказательство.

Пусть будетъ

$$N = \sum_{3p+1}^{\infty} \frac{a_n\,(pe^{\varphi i})^n}{n\,!}. \tag{101}$$

Отсюда получаемъ:

$$|N| < \sum_{3p+1}^{\infty} \frac{|a_n|\,p^n}{n\,!}. \tag{102}$$

Въ виду неравенства (88), имѣемъ:

$$|N| < M \sum_{3p+1}^{\infty} \frac{[p\,(1+\varepsilon)]^n}{n\,!}. \tag{103}$$

Замѣтимъ, что здѣсь ε можно считать какъ-угодно малымъ, если $p > P$, гдѣ P какъ-угодно большое положительное число.

Пользуясь формулой Стирлинга

$$n\,! > \sqrt{2\,\pi}\; n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}\,(1-\tau_n), \tag{104}$$

гдѣ $o < \tau_n < 1$, можемъ написать:

$$|N| < D \sum_{3p+1}^{\infty} \frac{[e\,(1+\varepsilon)\,p]^n}{n^n}; \tag{105}$$

при чемъ D опредѣленное положительное число, удовлетворяющее условію:

$$D > \frac{M}{\sqrt{2\pi(1-\tau)}}, \tag{106}$$

гдѣ τ означаетъ наибольшее значеніе τ_n при измѣненіи n отъ $3p+1$ до ∞.

Далѣе, такъ какъ при достаточно маломъ ε

$$e(1+\varepsilon)p < 3p+1,$$

то имѣемъ:

$$\sum_{3p+1}^{\infty} \frac{[e(1+\varepsilon)p]^n}{n^n} < \left[\frac{e(1+\varepsilon)p}{3p+1}\right]^{3p+1} \left[1+\frac{e(1+\varepsilon)p}{3p+1}+\left(\frac{e(1+\varepsilon)p}{3p+1}\right)^2+\ldots\ldots\right]=$$

$$=\left[\frac{e(1+\varepsilon)p}{3p+1}\right]^{3p+1} \frac{1}{1-e\dfrac{(1+\varepsilon)p}{3p+1}}. \tag{107}$$

Значитъ, можемъ написать:

$$|N| < \overline{D}\left[\frac{(1+\varepsilon)pe}{3p+1}\right]^{3p+1}, \tag{108}$$

гдѣ $\overline{D}$ опредѣленное положительное число, обусловливаемое неравенствомъ:

$$\overline{D} > \frac{D}{1-e\dfrac{(1+\varepsilon)p}{3p+1}}.$$

На основаніи неравенства (108) получаемъ:

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|N|} < \left[\frac{e(1+\varepsilon)}{3}\right]^3 < 1. \tag{109}$$

при достаточно маломъ ε.

Принимая во вниманіе результатъ (109), на основаніи теоремы 5-ой предыдущаго параграфа заключаемъ, что правая часть соотношенія (85) не перестаетъ выражать $e^{\frac{1}{\rho}}$, если изъ суммы $\sum\limits_{\Delta_\rho}^{\infty} \frac{a_n(\rho e^{\varphi i})^n}{n!}$ устранить выраженіе (101).

Теорема такимъ образомъ доказана.

Примѣчаніе. Принимая во вниманіе предыдущее примѣчаніе, а также результатъ (109), на основаніи теоремы 5 § 2 утверждаемъ, что теорема 2 допустима и при $\rho = \infty$.

Теорема 3. Имѣемъ:

$$\frac{1}{\rho} = l_\varphi = \overline{\lim_{p=\infty}} \frac{1}{p} lg \left| \sum_{\Delta_p}^{\infty} \frac{a_n (pe^{\varphi i})^n}{n!} \right|$$

$$= \overline{\lim_{p=\infty}} \frac{1}{p} lg \left| \sum_{\Delta_p}^{3p} \frac{a_n (pe^{\varphi i})^n}{n!} \right|. \tag{110}$$

Доказательство.

Соотношенія (110) получаются непосредственно изъ формулъ (85) и (100), а также въ виду того, что сказано въ предыдущихъ примѣчаніяхъ, на основаніи теоремы 1 § 2.

Какъ въ формулѣ (21), такъ и въ соотношеніяхъ (110), на мѣсто a_n можно поставить $a_n\, e^{-\beta_p i}$, гдѣ β_p какая-либо вещественная функція p.

Тогда будемъ имѣть:

$$l_\varphi = \overline{\lim_{p=\infty}} \frac{1}{p} lg \left| \sum_{0}^{\infty} \frac{a_n p^n e^{(n\varphi - \beta_p)i}}{n!} \right|$$

$$= \overline{\lim_{p=\infty}} \frac{1}{p} lg \left| \sum_{\Delta_p}^{\infty} \frac{a_n p^n e^{(n\varphi - \beta_p)i}}{n!} \right|$$

$$= \overline{\lim_{p=\infty}} \frac{1}{p} lg \left| \sum_{\Delta_p}^{3p} \frac{a_n p^n e^{(n\varphi - \beta_p)i}}{n!} \right|. \tag{111}$$

Далѣе, полагая, что

$$a_s = \rho_s\, e^{i\varphi_s}, \tag{112}$$

гдѣ ρ_s и φ_s суть модуль и аргументъ a_s, введемъ слѣдующія обозначенія:

$$\lambda_{p,\varphi} = \sum_{0}^{\infty} \frac{\rho_s\, p^s \cos(\varphi_s + s\varphi - \beta_p)}{s!},$$

$$\mu_{p,\varphi} = \sum_{0}^{\infty} \frac{\rho_s\, p^s \sin(\varphi_s + s\varphi - \beta_p)}{s!}; \tag{113}$$

$$l_{p,\varphi} = \sum_{\Delta_p}^{\infty} \frac{\rho_s\, p^s \cos(\varphi_s + s\varphi - \beta_p)}{s!},$$
$$m_{p,\varphi} = \sum_{\Delta_p}^{\infty} \frac{\rho_s\, p^s \sin(\varphi_s + s\varphi - \beta_p)}{s!}, \tag{114}$$

$$\tau_{p,\varphi} = \sum_{\Delta_p}^{3p} \frac{\rho_s\, p^s \cos(\varphi_s + s\varphi - \beta_p)}{s!},$$
$$\rho_{p,\varphi} = \sum_{\Delta_p}^{3p} \frac{\rho_s\, p^s \sin(\varphi_s + s\varphi - \beta_p)}{s!}. \tag{115}$$

Значитъ, имѣемъ:

$$e^{-i\beta_p}\, \vartheta\,(pe^{\varphi i}) = \lambda_{p,\varphi} + i\,\mu_{p,\varphi};$$
$$e^{-i\beta_p} \sum_{\Delta_p}^{\infty} \frac{a_s\, p^s\, e^{s\varphi i}}{s!} = l_{p,\varphi} + i\, m_{,\varphi}; \tag{116}$$
$$e^{-i\beta_p} \sum_{\Delta_p}^{3p} \frac{a_s\, p^s\, e^{s\varphi i}}{s!} = \tau_{,\varphi} + i\,\rho_{p,\varphi}.$$

Принимая во вниманіе первое изъ соотношеній (116), первую формулу (111) изобразимъ такъ:

$$l_\varphi = \lim_{p=\infty} \frac{1}{2p}\, lg\left[\lambda^2_{p,\varphi} + \mu^2_{p,\varphi}\right]. \tag{117}$$

Такъ какъ далѣе

$$\frac{1}{2}\, lg\left[\lambda^2_{p,\varphi} + \mu^2_{p,\varphi}\right] > lg\,|\,\lambda_{p,\varphi}\,|;$$
$$\frac{1}{2}\, lg\left[\lambda^2_{p,\varphi} + \mu^2_{p,\varphi}\right] > lg\,|\,\mu_{p,\varphi}\,|, \tag{118}$$

то, въ виду равенства (117), имѣемъ:

$$l_\varphi \geqslant \lim_{p=\infty} \frac{1}{p}\, lg\,|\,\lambda_{p,\varphi}\,|;$$
$$l_\varphi \geqslant \lim_{p=\infty} \frac{1}{p}\, lg\,|\,\mu_{p,\varphi}\,|. \tag{119}$$

Правыя части соотношеній (119) одновременно не могутъ быть меньше l_φ, такъ какъ въ противномъ случаѣ, въ силу теоремъ 4 и 8 предыдущаго параграфа, равенство (117) не могло бы имѣть мѣсто.

А если такъ, то сохраняетъ силу по крайней мѣрѣ одно изъ равенствъ:

$$l_\varphi = \lim_{p=\infty} \frac{1}{p} \lg |\lambda_{p,\varphi}| \tag{120}$$

и

$$l_\varphi = \lim_{p=\infty} \frac{1}{p} \lg |\mu_{p,\varphi}|. \tag{121}$$

Но $\lambda_{p,\varphi}$ переходитъ въ $\mu_{p,\varphi}$ послѣ замѣны β_p черезъ $\beta_p + \frac{\pi}{2}$, а $\mu_{p,\varphi}$ обращается въ $\lambda_{p,\varphi}$, если въ первомъ символѣ β_p замѣнить черезъ $\beta_p - \frac{\pi}{2}$. Въ виду этого, всегда можно β_p подобрать такъ, чтобы имѣло мѣсто равенство (120).

На тѣхъ же самыхъ основаніяхъ всегда можно выбрать β_p подъ условіемъ, чтобы сохраняло силу любое изъ двухъ соотношеній:

$$l_\varphi = \lim_{p=\infty} \frac{1}{p} \lg |\iota_{p,\varphi}| \tag{122}$$

и

$$l_\varphi = \lim_{p=\infty} \frac{1}{p} \lg |\tau_{p,\varphi}|. \tag{123}$$

§ 4. Недостаточность вообще формулы (23) для опредѣленія особыхъ точекъ строки (1), лежащихъ на границѣ полигона К. Случай, когда эта формула достаточна для опредѣленія такихъ точекъ.

Функція l_φ, какъ гласитъ первое изъ соотношеній (22), равна $\frac{1}{\rho}$, гдѣ ρ представляетъ разстояніе точки $z = 0$ до точки границы полигона K, имѣющей амплитудой φ.

Такъ какъ ρ мѣняется непрерывно при измѣненіи φ и въ нуль не обращается, то и l_φ непрерывна въ области $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ измѣненія числа φ; при чемъ въ нуль она обращается лишь при такихъ значеніяхъ φ, которыя представляютъ амплитуды безконечно-удаленныхъ точекъ границы полигона K, если только эти послѣднія существуютъ на этой границѣ.

Изъ формулы (23) находимъ:

$$\frac{\sin(\varphi - \vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|} = -l'_\varphi, \qquad (124)$$

гдѣ символъ l'_φ означаетъ производную l_φ по φ.

Такъ какъ $l_\varphi = \frac{1}{\rho}$, то

$$-l'_\varphi = \frac{\frac{d\rho}{d\varphi}}{\rho^2} = \frac{ctg\,\mu}{\rho}, \qquad (125)$$

гдѣ μ означаетъ величину угла наклоненія радіусъ-вектора ρ съ касательной къ границѣ многоугольника K въ ея точкѣ $M(\rho, \varphi)$.

Очевидно, что μ и, слѣдовательно, $-l'_\varphi$ представляютъ опредѣленныя числа, если разсматриваемое значеніе φ не совпадаетъ съ амплитудой какой-либо вершины полигона K; если же φ представляетъ амплитуду какой-либо вершины многоугольника K, то μ и, слѣдовательно, $-l'_\varphi$ имѣютъ по два значенія: μ выражаетъ величину любого изъ двухъ угловъ, которые радіусъ-векторъ ρ образуетъ съ каждой изъ двухъ сторонъ многоугольника, сходящихся въ разсматриваемой его вершинѣ.

Если-бы было напередъ извѣстно аналитическое выраженіе для функціи l_φ, годное для всѣхъ значеній φ, содержащихся въ границахъ $o \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, и, значитъ, была бы извѣстна и функція l'_φ для тѣхъ-же значеній φ, то всѣ особыя точки функціи $f(z)$ (1), лежащія на границѣ полигона K, нашлись бы съ помощью формулъ:

$$\frac{\cos(\varphi - \vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|} = l_\varphi, \quad \frac{\sin(\varphi - \vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|} = -l'_\varphi; \qquad (126)$$

при чемъ сюда надо было-бы присоединить условіе (6). Но бѣда въ томъ, что изыскать такое выраженіе для l_φ можно лишь въ рѣдкихъ случаяхъ. Вообще же приходится вычислять значенія l_φ при каждомъ значеніи φ, содержащемся въ границахъ

$$o \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \qquad (127)$$

Въ виду этого соотвѣтствующія значенія l'_φ должны быть вычисляемы независимо отъ значеній функціи l_φ.

Путь вычисленія l'_φ при различныхъ значеніяхъ φ, заключенныхъ въ границахъ (127), будетъ развитъ нами впослѣдствіи. Теперь же мы видоизмѣнимъ нѣсколько форму соотношеній (126), изъ которыхъ пока извѣстнымъ можно считать только первое.

Условимся обозначать m_φ функцію $-l'_\varphi$, т. е.:

$$m_\varphi = - l'_\varphi. \tag{128}$$

Возвышая тогда обѣ части каждаго изъ равенствъ (126) въ квадратъ и складывая почленно полученныя такимъ образомъ соотношенія, будемъ имѣть:

$$\frac{1}{|\alpha_\kappa|^2} = l_\varphi^2 + m_\varphi^2.$$

Отсюда находимъ:

$$|\alpha_\kappa| = \frac{1}{\sqrt{l_\varphi^2 + m_\varphi^2}}. \tag{129}$$

Въ виду результата (129), формулы (126) можно привести къ виду:

$$\left.\begin{aligned} cos\,(\varphi - \vartheta_\kappa) &= \frac{l_\varphi}{\sqrt{l_\varphi^2 + m_\varphi^2}}; \\ sin\,(\varphi - \vartheta_\kappa) &= \frac{m_\varphi}{\sqrt{l_\varphi^2 + m_\varphi^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{130}$$

Въ такомъ видѣ мы будемъ пользоваться формулами (126), когда будетъ изложенъ способъ опредѣлять значенія функціи m_φ при различныхъ значеніяхъ φ. Формулъ (129) и (130) будетъ вполнѣ достаточно для разысканія особыхъ точекъ функціи $f(z)$ (1), лежащихъ на границѣ полигона K. Но пока мы имѣемъ только одну формулу: (23). Содержа два неизвѣстныхъ: $|\alpha_\kappa|$ и ϑ_κ, она вообще недостаточна для опредѣленія особыхъ точекъ строки (1), расположенныхъ на границѣ многоугольника K.

Однако существуетъ одинъ случай, когда на основаніи этой формулы можно опредѣлить полигонъ K и, слѣдовательно, особыя точки функціи $f(z)$, расположенныя на его границѣ —, это случай, когда всѣ особыя точки функціи $f(z)$ лежатъ на какой-либо прямой, проходящей черезъ точку $z = 0$.

На немъ мы сейчасъ и остановимся. При этомъ сдѣлаемъ предварительно одно замѣчаніе. Такъ какъ при помощи подстановки

$$z \mid z\, e^{\vartheta i},$$

гдѣ ϑ вещественное число, всякую прямую, проходящую черезъ точку $z = 0$, можно привести въ совпаденіе съ осью дѣйствительныхъ z, то мы ограничимся разсмотрѣніемъ этой послѣдней.

Теорема 1. Допустимъ, что, кромѣ равенства (83), *выполняются условія:*

$$l_\pi = 0,\ l_{\pm\frac{\pi}{2}} = 0. \qquad (131)$$

Въ такомъ случаѣ всѣ особыя точки строки (1) *расположены на отрѣзкѣ* $\overline{1 + \infty}$ *дѣйствительной оси; при чемъ* $z = 1$ *служитъ ея особой точкой.*

Доказательство.

Согласно второй изъ формулъ (22), имѣемъ: $\rho = \frac{1}{l_\varphi}$; при чемъ ρ означаетъ разстояніе точки $z = 0$ до точки границы полигона K, амплитуда которой есть φ.

Такъ какъ, при $\varphi = \pi$ и $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, $l_\varphi = 0$, то, при тѣхъ же значеніяхъ φ, имѣемъ: $\rho = \infty$. Значитъ, полигонъ K разомкнутъ въ направленіи отрицательной части вещественной оси и имѣетъ своею стороною нѣкоторую прямую $R(z) = \alpha$, гдѣ α опредѣленное положительное число, параллельную оси мнимыхъ z. Въ виду того, что прямая $R(z) = \alpha$ не встрѣчаютъ сторонъ полигона K въ точкахъ, отстоящихъ отъ точки $z = 0$ на конечныхъ разстояніяхъ, ясно, что полигонъ K въ разсматриваемомъ случаѣ представляетъ часть плоскости, расположенную налѣво отъ вышеозначенной прямой. Такой полигонъ возможенъ лишь при условіи, если всѣ особыя точки строки (1) расположены на отрѣзкѣ $\overline{\alpha + \infty}$ вещественной оси. А такъ какъ радіусъ круга сходимости ряда (1), въ силу условія (83), равенъ единицѣ, то $\alpha = 1$ и $z = 1$ представляетъ особую точку функціи $f(z)$.

Такимъ образомъ теорема установлена.

Теорема 2. Пусть, при наличности равенства (83), *выполняются условія:*

$$l_\pi = \alpha;\ l_{\pm\frac{\pi}{2}} = 0. \qquad (132)$$

Въ такомъ случаѣ особыя точки строки (1) *расположены на отрѣзкахъ* $\overline{-\frac{1}{\alpha} - \infty}$ и $\overline{1 + \infty}$ *оси вещественныхъ* z; *при чемъ* $z = -\frac{1}{\alpha}$ *служитъ ея особою точкой.*

Доказательство.

Прежде всего имѣемъ: $l_{\pm\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\rho} = 0$ и, слѣдовательно, $\rho = \infty$. Отсюда слѣдуетъ, что полигонъ K имѣетъ своею стороною нѣкоторую прямую $R(z) = \delta$, гдѣ $\delta > 0$, параллельную оси мнимыхъ z. Далѣе, такъ какъ другія стороны не встрѣчаютъ этой прямой въ точкахъ, отстоящихъ отъ $z = 0$ въ конечныхъ разстояніяхъ, то отсюда заключаемъ, что полигонъ K или простирается въ безконечность налѣво отъ прямой $R(z) = \delta$, или же имѣетъ своею стороною другую прямую $R(z) = -\Delta$, гдѣ $\Delta > o$, параллельную первой. Но $l_\pi = \frac{1}{\rho} = \alpha$. Значитъ, ось вещественныхъ z встрѣчаетъ границу полигона K налѣво отъ точки $z = 0$ въ точкѣ $z = -\frac{1}{\alpha}$. А если такъ, то полигонъ K ограниченъ, кромѣ прямой $R(z) = \delta$, еще прямой: $R(z) = -\Delta$, гдѣ $\Delta = \frac{1}{\alpha}$. Это же возможно лишь при условіи, что всѣ особыя точки строки (1) лежатъ на отрѣзкахъ $\overline{-\frac{1}{\alpha} - \infty}$ и $\overline{1 + \infty}$ вещественной оси. Такъ какъ далѣе точки $z = \delta$ и $z = -\frac{1}{\alpha}$ представляютъ основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ $z = o$ на эти прямыя, то онѣ являются особыми точками строки (1).

Замѣтимъ, что $\alpha \leq 1$; при чемъ, въ силу условія (83), если $\alpha = 1$, то $\delta \geq 1$; если же $\alpha < 1$, то $\delta = 1$.

Въ своей работѣ: „Изысканіе особыхъ точекъ функціи, опредѣляемой рядомъ Тэйлора", нами приведено множество примѣровъ на приложеніе теоремы I. Здѣсь же мы ограничимся разсмотрѣніемъ двухъ новыхъ случаевъ.

Примѣръ 1. Разсмотримъ строку Тэйлора:

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} e^{i\varphi(s)} z^s, \tag{133}$$

гдѣ функція $\varphi(s)$ обладаетъ слѣдующими свойствами: 1) $\varphi(s)$ положительна для $s > S$; 2) съ безграничнымъ возрастаніемъ s, начиная съ $s \geq S$, она послѣдовательно убываетъ до нуля, и, наконецъ, 3) можно выбрать такое Δ_p, что

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\varphi(\Delta_p)|} \leq e^{-1}.$$

Обнаружимъ, что всѣ особыя точки строки (133) расположены на отрѣзкѣ $\overline{1 + \infty}$ дѣйствительной оси; при чемъ $z = 1$ служитъ ея особой точкой.

Обозначимъ через L_p^φ выраженіе:

$$L_p^\varphi = \sum_{\Delta_p}^{\infty} \frac{p^s \cos[\varphi(s) + s\varphi]}{s!}. \qquad (134)$$

Пусть будетъ:

$$S_\varphi = \lim_{p=\infty} \frac{1}{p} \lg |L_p^\varphi|. \qquad (135)$$

Предположимъ въ выраженіи (134) сперва $\varphi = \pi$. Будемъ имѣть:

$$L_p^\pi = \sum_{\Delta_p}^{\infty} \frac{(-1)^s p^s \cos[\varphi(s)]}{s!}. \qquad (136)$$

$\cos[\varphi(s)]$ можно представить въ формѣ:

$$\cos[\varphi(s)] = 1 - \frac{[\varphi(s)]^2}{2} \delta_s, \qquad (137)$$

гдѣ

$$\delta_s = 1 - \frac{[\varphi(s)]^2}{3.\ 4.} + \frac{[\varphi(s)]^4}{3.\ 4.\ 5.\ 6.} - \dots \qquad (137')$$

и при $s > \Delta_p$

$$o < \delta_s < 1.$$

Имѣя въ виду формулу (137), представимъ L_p^π слѣдующимъ образомъ:

$$L_p^\pi = \sum_{\Delta_p}^{\infty} \frac{(-1)^s p^s}{s!} - \frac{1}{2} \sum_{\Delta_p}^{\infty} \frac{(-1)^s p^s [\varphi(s)]^2 \delta_s}{s!}. \qquad (138)$$

Пусть будетъ:

$$K_p = \sum_{\Delta_p}^{\infty} \frac{(-1)^s p^s}{s!} = e^{-p} - \sum_{o}^{\Delta_p - 1} \frac{(-1)^s p^s}{s!};$$

$$(139)$$

$$R_p = \frac{1}{2} \sum_{\Delta_p}^{\infty} \frac{(-1)^s p^s [\varphi(s)]^2 \delta_s}{s!}.$$

Принимая во вниманіе соотношеніе (97), гдѣ Λ означаетъ сумму (86), можемъ написать:

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{\left|\sum_{0}^{\Delta_p-1} \frac{(-1)^s p^s}{s!}\right|} \leqslant 1. \tag{140}$$

Далѣе, имѣемъ:

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{e^{-p}} = e^{-1} < 1. \tag{141}$$

Въ силу результатовъ (140) и (141), теоремы 3 и 7 § 2, приложенныя къ выраженію K_p (139), даютъ:

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|K_p|} \leqslant 1. \tag{142}$$

Далѣе, на основаніи второго изъ соотношеній (139), находимъ:

$$|R_p| < \frac{1}{2} \sum_{\Delta_p}^{\infty} \frac{p^s [\varphi(s)]^2 \delta_s}{s!}. \tag{143}$$

Такъ какъ $o < \delta_s < 1$ при $s \geqslant \Delta_p$, то, значитъ, имѣемъ:

$$|R_p| < \frac{1}{2} [\varphi(\Delta_p)]^2 \sum_{\Delta_p}^{\infty} \frac{p^s}{s!} < \frac{e^p [\varphi(\Delta_p)]^2}{2}. \tag{144}$$

Отсюда, въ виду третьяго свойства функціи $\varphi(s)$, находимъ:

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|R_p|} \leqslant e^{-1} < 1. \tag{145}$$

Послѣ этого примѣнимъ къ выраженію (138) теоремы 3 и 7 § 2. Въ силу результатовъ (142) и (145), получимъ:

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|L_p^\pi|} \leqslant 1. \tag{146}$$

Имѣя въ виду теорему 1 § 2, находимъ:

$$S_\pi \leqslant 0. \tag{147}$$

Пусть будетъ далѣе:

$$\sigma_\varphi = \overline{\lim_{p=\infty}} \frac{1}{p} lg |M_p^\varphi|, \tag{148}$$

гдѣ

$$M_p^{\varphi} = \sum_{\Delta_p}^{\infty} \frac{p^s \sin[\varphi(s) + s\varphi]}{s!}. \tag{149}$$

Если $\varphi = \pi$, то

$$M_p^{\pi} = \sum_{\Delta_p}^{\infty} \frac{(-1)^s p^s \sin[\varphi(s)]}{s!}. \tag{150}$$

Но

$$\sin[\varphi(s)] = \varphi(s)\left[1 - \frac{[\varphi(s)]^2}{1.\,2.\,3} + \ldots\right]; \tag{151}$$
$$= \varphi(s)\, d_s;$$

при чемъ при $s \geqslant \Delta_p$

$$o < d_s < 1. \tag{152}$$

А потому можемъ написать:

$$|M_p^{\pi}| < \varphi(\Delta_p) \sum_{\Delta_p}^{\infty} \frac{p^s}{s!} < e^p \varphi(\Delta_p). \tag{153}$$

Отсюда находимъ:

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|M_p^{\pi}|} \leqslant 1. \tag{154}$$

Значитъ, на основаніи теоремы 1 § 2 имѣемъ:

$$\sigma_{\pi} \leqslant 0. \tag{155}$$

Далѣе, имѣемъ:

$$l_{\varphi} = \overline{\lim_{p=\infty}} \frac{1}{p} lg \left| \sum_{\Delta_p}^{\infty} \frac{e^{i[\varphi(s)+s\varphi]} p^s}{s!} \right| = \tag{156}$$
$$= \overline{\lim_{p=\infty}} \frac{1}{p} lg \left| L_p^{\varphi} + i M_p^{\varphi} \right|.$$

Принимая во вниманіе результаты (147) и (155), на основаніи теоремъ 4 и 8 § 2 заключаемъ, что

$$l_{\pi} = \overline{\lim_{p=\infty}} \frac{1}{p} lg \left| L_p^{\pi} + i M_p^{\pi} \right| \leqslant 0. \tag{157}$$

Но l_{π} не можетъ быть числомъ отрицательнымъ. А потому

$$l_{\pi} = 0. \tag{158}$$

Такимъ образомъ первое изъ условій (131) осуществляется Полагаемъ далѣе въ выраженіи (134): $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$. Будемъ имѣть:

$$L_p^{\pm\frac{\pi}{2}} = \sum_{\Delta_p}^{\infty} \frac{p^s \cos\left[\varphi(s) \pm \frac{s\pi}{2}\right]}{s!}. \tag{159}$$

При s четномъ

$$\cos\left[\varphi(s) \pm \frac{s\pi}{2}\right] = (-1)^{\frac{s}{2}} \cos\left[\varphi(s)\right], \tag{160}$$

а при s нечетномъ

$$\cos\left[\varphi(s) \pm \frac{s\pi}{2}\right] = \mp (-1)^{\frac{s-1}{2}} \sin\left[\varphi(s)\right]. \tag{161}$$

А потому выраженіе (159) можно переписать такъ:

$$L_p^{\pm\frac{\pi}{2}} = \sum_{\frac{\Delta_p}{2}}^{\infty} \frac{(-1)^s p^{2s} \cos\left[\varphi(2s)\right]}{(2s)!} \mp \sum_{\frac{\Delta_p}{2}}^{\infty} \frac{(-1)^s p^{2s+1} \sin\left[\varphi(2s+1)\right]}{(2s+1)!}. \tag{162}$$

При этомъ мы предполагаемъ, что Δ_p число четное.

При помощи формулы (137) выраженіе (162) изобразимъ такъ:

$$L_p^{\pm\frac{\pi}{2}} = P_p + \overline{P}_p, \tag{163}$$

гдѣ

$$\overline{P}_p = P'_p + P''_p; \tag{164}$$

при чемъ:

$$P_p = \sum_{\frac{\Delta_p}{2}}^{\infty} \frac{(-1)^s p^{2s}}{(2s)!};$$

$$P'_p = -\frac{1}{2} \sum_{\frac{\Delta_p}{2}}^{\infty} \frac{(-1)^s p^{2s} \left[\varphi(2s)\right]^2 \delta_{2s}}{(2s)!}; \tag{165}$$

$$P''_p = \mp \sum_{\frac{\Delta_p}{2}}^{\infty} \frac{(-1)^s p^{2s+1} \sin\left[\varphi(2s+1)\right]}{(2s+1)!}.$$

Займемся изысканіемъ верхнихъ предѣловъ $\sqrt[p]{|P_p|}$, $\sqrt[p]{|P_p'|}$ и $\sqrt[p]{|P_p''|}$ при $p = \infty$.

Прежде всего имѣемъ:

$$P_p = cos\,(p) - \sum_{0}^{\frac{\Delta_p}{2}-1} \frac{(-1)^s\, p^{2s}}{(2s)!}. \tag{166}$$

Значитъ:

$$|\,P_p\,| < |\,cos\,(p)\,| + \sum_{0}^{\Delta_p} \frac{p^s}{(s)!}. \tag{167}$$

Но

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\,cos\,(p)\,|} = 1; \tag{168}$$

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{\sum_{0}^{\Delta_p} \frac{p^s}{s!}} \leqslant 1.$$

Принимая во вниманіе теоремы 3 и 7 § 2, находимъ:

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\,P_p\,|} \leqslant 1. \tag{169}$$

Далѣе, изъ второго изъ соотношеній (165) имѣемъ:

$$|\,P_p'\,| < \frac{1}{2} \sum_{\frac{\Delta_p}{2}}^{\infty} \frac{p^{2s}\,[\,\varphi\,(2s)\,]^2\,\delta_{2s}}{(2s)!}$$
$$< \frac{[\,\varphi\,(\Delta_p)\,]^2}{2} \sum_{0}^{\infty} \frac{p^s}{s!} = \frac{e^p\,[\,\varphi\,(\Delta_p)\,]^2}{2}. \tag{170}$$

Отсюда получаемъ:

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\,P_p'\,|} \leqslant e^{-1} < 1. \tag{171}$$

Обратимся теперь къ третьему изъ соотношеній (165).

Имѣемъ:

$$|\,P_p''\,| < \sum_{\frac{\Delta_p}{2}}^{\infty} \frac{p^{2s+1}}{(2s+1)!}\, sin\,[\,\varphi\,(2s+1)\,]. \tag{172}$$

Имѣя въ виду формулу (151), можемъ написать:

$$|P_p''| < \varphi(\Delta_p+1) \sum_{\frac{\Delta_p}{2}}^{\infty} \frac{p^{2s+1}}{(2s+1)!} < \varphi(\Delta_p+1)\, e^p. \tag{173}$$

Отсюда получаемъ:

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|P_p''|} \leqslant 1. \tag{174}$$

Примѣнимъ теперь теоремы 3 и 7 § 2 къ выраженіямъ (163) и (164).

Въ силу результатовъ (169), (171) и (174) получимъ:

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{\left|L_p^{\pm\frac{\pi}{2}}\right|} \leqslant 1. \tag{175}$$

Значитъ:

$$S_{\pm\frac{\pi}{2}} \leqslant 0. \tag{176}$$

Полагая теперь $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ въ выраженіи (149), будемъ имѣть:

$$M_p^{\pm\frac{\pi}{2}} = \sum_{\Delta_p}^{\infty} \frac{p^s \sin\left[\varphi(s) \pm \frac{s\pi}{2}\right]}{s!}. \tag{177}$$

Если s четное, то

$$\sin\left[\varphi(s) \pm \frac{s\pi}{2}\right] = (-1)^{\frac{s}{2}} \sin[\varphi(s)]; \tag{178}$$

если же s число нечетное, то

$$\sin\left[\varphi(s) \pm \frac{s\pi}{2}\right] = \pm(-1)^{\frac{s-1}{2}} \cos[\varphi(s)]. \tag{179}$$

А потому имѣемъ:

$$M_p^{\pm\frac{\pi}{2}} = \sum_{\frac{\Delta_p}{2}}^{\infty} \frac{(-1)^s p^{2s} \sin[\varphi(2s)]}{(2s)!} \pm$$

$$\pm \sum_{\frac{\Delta_p}{2}}^{\infty} \frac{(-1)^s p^{2s+1} \cos[\varphi(2s+1)]}{(2s+1)!}; \tag{180}$$

при чемъ и здѣсь число Δ_p предполагается четнымъ

Поступая съ этимъ выраженіемъ такъ же, какъ мы дѣлали съ $L_p^{\pm\frac{\pi}{2}}$ (162), придемъ къ выводу:

$$\lim_{p=\infty} \frac{1}{p} lg \left| M_p^{\pm\frac{\pi}{2}} \right| \leqslant 0. \qquad (181)$$

Значитъ:

$$\sigma_{\pm\frac{\pi}{2}} \leqslant 0. \qquad (182)$$

Принимая во вниманіе результаты (176) и (182), на основаніи теоремъ 4 и 8 § 2 заключаемъ, что

$$l_{\pm\frac{\pi}{2}} = \lim_{p=\infty} \frac{1}{p} lg \left| L_p^{\pm\frac{\pi}{2}} + i\, M_p^{\pm\frac{\pi}{2}} \right| \leqslant 0. \qquad (183)$$

А такъ какъ $l_{\pm\frac{\pi}{2}}$ не можетъ быть числомъ отрицательнымъ, то, слѣдовательно,

$$l_{\pm\frac{\pi}{2}} = 0. \qquad (184)$$

Такимъ образомъ выполняется и второе изъ условій (131).

Въ силу теоремы 1 утверждаемъ, что особыя точки строки (133) лежатъ на отрѣзкѣ $1 + \infty$ вещественной оси. А такъ какъ

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{\left| e^{i\varphi(p)} \right|} = 1,$$

то въ числѣ особыхъ точекъ этой функціи содержится и $z = 1$.

Строка (133) заключаетъ въ себѣ неограниченное число частныхъ случаевъ. Такъ, напр., можно положить: $\varphi(s) = e^{-s^m}$, гдѣ m какое-либо опредѣленное число, большее 1, $\varphi(s) = e^{-e^s}$, $\varphi(s) = e^{-e^{(lgs)^\mu}}$, гдѣ μ опредѣленное какое-либо число, большее 1, и т. д.

Примѣръ 2. Допустимъ, что коэффиціентъ a_n строки (1) имѣетъ такое выраженіе:

$$a_n = \sum_0^\infty \frac{\lambda_q\, n^{\delta(q)}}{\Gamma[\delta(q)+1]}; \qquad (185)$$

при чемъ $\delta(q)$ означаетъ положительную функцію q, которая для $q > Q$ удовлетворяетъ условію:

$$\delta(q) > \eta\, lgq, \tag{186}$$

гдѣ η какое-угодно опредѣленное положительное число, а

$$\lim_{q=\infty} \sqrt[\delta(q)]{|\lambda_q|} = 0. \tag{187}$$

Представимъ a_n предварительно въ формѣ опредѣленнаго интеграла одного типа.

Назовемъ, согласно Погхаммеру, $\overline{\Gamma}(s+1)$ интегралъ Hankel'я:

$$\overline{\Gamma}(s+1) = \int_{-\infty}^{(o)} e^{u} u^{s} du. \tag{188}$$

Здѣсь путь интеграціи $-\infty\,(0)$ представляетъ петлю, начало и конецъ которой совпадаетъ съ точкой $-\infty$ и которая огибаетъ точку o въ положительномъ направленіи.

Между функціями $\overline{\Gamma}(-s)$ и $\Gamma(s+1)$ существуетъ извѣстное соотношеніе:

$$\overline{\Gamma}(-s) = \frac{2\pi i}{\Gamma(s+1)}. \tag{189}$$

Послѣ этого разсмотримъ интегралъ:

$$j = \int_{-\infty}^{(o)} e^{nu} u^{-\delta(q)-1} du, \tag{190}$$

гдѣ

$$u^{-\delta(q)} = e^{-\delta(q)\, lgu}; \tag{191}$$

при чемъ предполагаемъ, что при отрицательномъ $u = -v$

$$lg\, u = lg\,(-v) = \pi i + lgv, \tag{192}$$

гдѣ lgv имѣетъ ариѳметическое значеніе.

Полагая въ интегралѣ (190):

$$nu = v;\; u = \frac{v}{n}, \tag{193}$$

получимъ:

$$j = n^{\delta(q)} \int_{-\infty}^{(o)} e^{v}\, v^{-\delta(q)-1}\, dv =$$

$$= n^{\delta(q)}\, \Gamma(-\delta_{(q)}) = \tag{194}$$

$$= \frac{2\pi i\, n^{\delta(q)}}{\Gamma[\delta_{(q)}+1]}.$$

Отсюда, въ виду соотношенія (190), выводимъ:

$$\frac{n^{\delta(q)}}{\Gamma[\delta_{(q)}+1]} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(o)} e^{nu}\, u^{-\delta(q)-1}\, du. \tag{195}$$

Перемѣнимъ въ интегралѣ (195) u на $-u$. Получимъ:

$$\frac{n^{\delta(q)}}{\Gamma[\delta_{(q)}+1]} = \frac{e^{-\pi\delta(q)i}}{2\pi i} \int_{\infty}^{(o)} e^{-nu}\, u^{-\delta(q)-1}\, du. \tag{196}$$

Преобразуемъ интегралъ (196) при помощи подстановки:

$$e^{-u} = x;\; u = lg\,\frac{1}{x}. \tag{197}$$

Будемъ имѣть:

$$\frac{n^{\delta(q)}}{\Gamma[\delta(q)+1]} = -\frac{e^{-\pi\delta(q)i}}{2\pi i} \int_{o}^{(1)} x^{n-1} \left(lg\,\frac{1}{x}\right)^{-\delta(q)-1} dx. \tag{198}$$

Здѣсь путь интеграціи $o\,(1)$ можно считать состоящимъ изъ слѣдующихъ частей: прямолинейнаго отрѣзка $\overline{or}$, гдѣ r положительное число, произвольно-близкое къ 1, но меньшее 1, окружности $r\,(1)$ произвольно-малаго радіуса δ съ центромъ въ точкѣ 1 и, наконецъ, отрѣзка $\overline{ro}$.

Замѣтимъ, что $\left(lg\,\frac{1}{x}\right)^{-\delta(q)-1}$ берется подъ условіемъ, что при $x = r$ это выраженіе имѣетъ положительное значеніе: $\left(lg\,\frac{1}{r}\right)^{-\delta(q)-1}$.

При помощи формулы (198) выраженіе (185) представится такъ:

$$a_n = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{0}^{\infty} \lambda_q\, e^{-\pi\delta(q)i} \int_{o}^{(1)} x^{n-1} \left(lg\,\frac{1}{x}\right)^{-\delta(q)-1} dx. \tag{199}$$

Назовемъ P_N выраженіе:

$$P_N = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{N+1}^{\infty}\lambda_q e^{-\pi\delta(q)i}\int_0^{(1)} x^{n-1}\left(lg\frac{1}{x}\right)^{-\delta(q)-1} dx. \qquad (200)$$

Имѣемъ:

$$|P_N| < \frac{1}{2\pi}\sum_{N+1}^{\infty}|\lambda_q|\int_0^{(1)}|x|^{n-1}\,|lgx|^{-\delta(q)-1}\,|dx|. \qquad (201)$$

Наибольшее значеніе $|x|$ на пути интеграціи $o\,(1)$ есть $1+\delta$, гдѣ δ означаетъ величину радіуса окружности $r\,(1)$ и есть число произвольно-малое. Допустимъ далѣе, что наименьшее значеніе $|lgx|$ на томъ же пути интеграціи есть β. Тогда, называя s длину пути $o\,(1)$, можемъ написать:

$$|P_N| < \frac{s\,(1+\delta)^{n-1}}{2\,\pi\beta}\sum_{N+1}^{\infty}|\lambda_q|\,\beta^{-\delta(q)}. \qquad (202)$$

Въ силу условія (187), можемъ написать:

$$|\lambda_q| < \varepsilon^{\delta(q)}, \qquad (203)$$

гдѣ положительное число ε, съ безграничнымъ возрастаніемъ N, можно считать сколь-угодно малымъ.

Значитъ:

$$|P_N| < \frac{s\,(1+\delta)^{n-1}}{\beta}\sum_{N+1}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\delta(q)}. \qquad (204)$$

Замѣтимъ, что, при данномъ положеніи пути интеграціи $o\,(1)$ въ интегралахъ (200), число β представляетъ нѣкоторую опредѣленную величину. Что же касается до ε, то, съ возрастаніемъ N, какъ мы уже говорили, его можно считать какъ-угодно малымъ.

А потому отношеніе $\frac{\varepsilon}{\beta}$ можно считать сколь-угодно малой положительной величиной, предполагая, что N произвольно-большое положительное число.

Пусть

$$\frac{\beta}{\varepsilon} = \alpha, \qquad (205)$$

гдѣ α, въ зависимости отъ N, можно считать какъ-угодно большимъ.

Тогда неравенство (204) перепишется такъ:

$$| P_N | < \frac{s(1+\delta)^{n-1}}{\beta} \sum_{N+1}^{\infty} e^{-\delta(q)\, lg\alpha}. \qquad (206)$$

Имѣя въ виду неравенство (186), на основаніи соотношенія (206) находимъ:

$$| P_N | < \frac{s(1+\delta)^{n-1}}{\beta} \sum_{N+1}^{\infty} e^{-\eta\, lg\alpha\, lgq}. \qquad (207)$$

Такъ какъ при произвольно-большомъ α и $lg\alpha$ произвольно великъ, то можемъ положить:

$$\eta\, lg\alpha = 1 + \zeta, \qquad (208)$$

гдѣ $\zeta > o$.

Тогда неравенство (207) изобразится такъ:

$$| P_N | < \frac{s(1+\delta)^{n-1}}{\beta} \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{q^{1+\zeta}}. \qquad (209)$$

Сличая между собою площади, выражаемыя суммой $\sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{q^{1+\zeta}}$ и опредѣленнымъ интеграломъ $\int_{N+1}^{\infty} \frac{dq}{q^{1+\zeta}}$, легко усматриваемъ, что

$$\sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{q^{1+\zeta}} < \frac{1}{(N+1)^{1+\zeta}} + \int_{N+1}^{\infty} \frac{dq}{q^{1+\zeta}} =$$

$$= \frac{1}{(N+1)^{1+\zeta}} + \frac{1}{\zeta\,(N+1)^{\zeta}}. \qquad (210)$$

Значитъ:

$$| P_N | < \frac{s(1+\delta)^{n-1}}{\beta} \left[\frac{1}{(N+1)^{1+\zeta}} + \frac{1}{\zeta\,(N+1)^{\zeta}} \right]. \qquad (211)$$

Отсюда заключаемъ: $\lim_{N=\infty} | P_N | = 0$ и, слѣдовательно,

$$\lim_{N=\infty} P_N = 0. \qquad (212)$$

Послѣ этого выраженіе (199) представимъ въ формѣ:

$$a_n = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{0}^{N}\lambda_q\, e^{-\pi\delta(q)i}\int_0^{(1)} x^{n-1}\left(lg\frac{1}{x}\right)^{-\delta(q)-1} dx + P_N =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{(1)} x^{n-1}\frac{dx}{lgx}\sum_{0}^{N}\lambda_q\, e^{-\pi\delta(q)i}\left(lg\frac{1}{x}\right)^{-\delta(q)} + P_N. \tag{213}$$

Заставимъ число N въ соотношеніи (213) безгранично расти. Въ силу результата (212), въ предѣлѣ тогда получимъ:

$$a_n = \int_0^{(1)} x^{n-1}\, K(x)\, dx, \tag{214}$$

гдѣ

$$K(x) = \frac{1}{2\pi i\, lgx}\sum_{0}^{\infty}\lambda_q\, e^{-\pi\delta(q)i}\left(lg\frac{1}{x}\right)^{-\delta(q)}. \tag{215}$$

Вмѣсто строки (1), гдѣ a_n имѣетъ составъ (185), разсмотримъ строку:

$$\sum_{0}^{\infty} a_{n+1}\, z^n, \tag{216}$$

которая выражается черезъ строку (1) такъ:

$$\sum_{0}^{\infty} a_{n+1}\, z^n = \frac{1}{z}\left[\sum_{0}^{\infty} a_n\, z^n - a_n\right]. \tag{217}$$

Отсюда ясно, что строки (1) и (216) содержатъ однѣ и тѣ же особыя точки.

Составимъ теперь выраженіе:

$$L_p^{\varphi} = \sum_{0}^{\infty}\frac{a_{n+1}\, p^n e^{n\varphi i}}{n!}. \tag{218}$$

Пользуясь выраженіемъ (214) для a_n, изобразимъ соотношеніе (218) въ формѣ:

$$L_p^{\varphi} = \sum_{0}^{\infty}\frac{p^n\, e^{n\varphi i}}{n!}\int_0^{(1)} x^n\, K(x)\, dx \tag{219}$$

Пусть будетъ:

$$M_N = \sum_{N+1}^{\infty} \frac{p^n e^{n\varphi i}}{n!} \int_0^{(1)} x^n K(x)\, dx. \tag{220}$$

Тогда соотношеніе (219) можемъ представить слѣдующимъ образомъ:

$$L_p^\varphi = \sum_0^N \frac{p^n e^{n\varphi i}}{n!} \int_0^{(1)} x^n K(x)\, dx + M_N =$$

$$= \int_0^{(1)} K(x)\, dx \sum_0^N \frac{(x\, pe^{\varphi i})^n}{n!} + M_N. \tag{221}$$

На основаніи соотношенія (220) находимъ:

$$| M_N | < \sum_{N+1}^{\infty} \frac{p^n}{n!} \int_0^{(1)} | x |^n \, | K(x) | \, | dx | . \tag{222}$$

Такъ какъ наибольшее значеніе $| x |$ на пути интеграціи 0 (1) есть $1 + \delta$, то

$$| M_N | < \sum_{N+1}^{\infty} \frac{[\, p(1+\delta)\,]^n}{n!} \int_0^{(1)} | K(x) | \, dx. \tag{223}$$

Назовемъ M наибольшее значеніе функціи $| K(x) |$ на пути интеграціи 0 (1), а s длину этого пути. Число M, какъ непосредственно усматривается изъ выраженія (215), конечное.

Тогда получимъ:

$$| M_N | < M s \sum_{N+1}^{\infty} \frac{[\, p(1+\delta)\,]^n}{n!} =$$

$$= M s \left[e^{p(1+\delta)} - \sum_0^N \frac{[\, p(1+\delta)\,]^n}{n!} \right]. \tag{224}$$

Отсюда заключаемъ, что $\lim\limits_{N=\infty} | M_N | = 0$ и, слѣдовательно,

$$\lim_{N=\infty} M_N = 0. \tag{225}$$

Заставимъ теперь въ соотношеніи (221) число N расти безгранично. Въ силу результата (225), въ предѣлѣ тогда получимъ:

$$L_p^{\varphi} = \int_0^{(1)} e^{xpe^{\varphi i}} K(x)\, dx. \tag{226}$$

Интегралъ (226) можно изобразить въ видѣ суммы двухъ интеграловъ:

$$L_p^{\varphi} = \int_0^r F(x)\, e^{xpe^{\varphi i}} dx + \int_{r}^{(1)} e^{xpe^{\varphi i}} K(x)\, dx, \tag{227}$$

гдѣ

$$F(x) = K(x) - K_1(x); \tag{227'}$$

при чемъ $K_1(x)$ означаетъ $K(x)$ послѣ обхода перемѣннымъ x точки $x = 1$ въ положительномъ направленіи.

Полагаемъ теперь въ выраженіи (227): $\varphi = \pi$. Будемъ имѣть:

$$L_p^{\pi} = \int_0^r F(x)\, e^{-xp} dx + \int_{r}^{(1)} e^{-xp} K(x)\, dx. \tag{228}$$

Полагаемъ во второмъ изъ интеграловъ (228):

$$x = 1 + \delta e^{\psi i}. \tag{229}$$

Будемъ имѣть:

$$L_p^{\pi} = \int_0^r F(x)\, e^{-xp}\, dx + i\,\delta e^{-p} \int_0^{2\pi} K(1 + \delta e^{\psi i})\, e^{-p\delta e^{\psi i} + \psi i}\, d\psi. \tag{230}$$

Отсюда находимъ:

$$|L_p^{\pi}| < \int_0^r |F(x)|\, dx + \delta e^{-p} \int_0^{2\pi} |K(1 + \delta e^{\psi i})|\, e^{-p\delta\cos\psi}\, d\psi. \tag{231}$$

Назовемъ T_δ наибольшее значеніе $|K(1 + \delta e^{\psi i})|$, которое оно принимаетъ при измѣненіи φ отъ o до 2π. Тогда можемъ написать:

$$|L_p^{\pi}| < \int_0^r |F(x)|\, dx + 2\pi\delta\, T_\delta\, e^{-p(1-\delta)} < A, \tag{232}$$

гдѣ A при данномъ δ опредѣленное число.

Отсюда слѣдуетъ:

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|L_p^{\pi}|} \leqslant 1. \tag{233}$$

Значитъ:

$$l_\pi = \lim_{p=\infty} \frac{1}{p} \lg \left| L_p^\pi \right| \leqslant 0. \tag{234}$$

Но l_π не можетъ быть числомъ отрицательнымъ.

А потому

$$l_\pi = 0. \tag{235}$$

Пусть будетъ теперь въ выраженіи (227): $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$.

Будемъ имѣть:

$$L_p^{\pm\frac{\pi}{2}} = \int_0^r F(x)\, e^{\pm ixp}\, dx + \int_{r\,(1)} e^{\pm ixp} K(x)\, dx. \tag{236}$$

Преобразуя второй изъ интеграловъ (236) при помощи подстановки (229), выраженію (236) дадимъ слѣдующій видъ:

$$L_p^{\pm\frac{\pi}{2}} = \int_0^r F(x)\, e^{\pm ixp}\, dx +$$

$$+ i\,\delta\, e^{\pm ip} \int_0^{2\pi} K(1+\delta e^{\psi i})\, e^{\pm i\delta p e^{\psi i} + \psi i}\, d\psi. \tag{237}$$

Отсюда находимъ:

$$\left| L_p^{\pm\frac{\pi}{2}} \right| < \int_0^r \left| F(x) \right| dx + \delta \int_0^{2\pi} \left| K(1+\delta e^{\psi i}) \right| e^{\mp \delta p \sin\psi}\, d\psi$$

$$< \int_0^r \left| F(x) \right| dx + \delta e^{\delta p} \int_0^{2\pi} \left| K(1+\delta e^{\psi i}) \right| d\psi.$$

$$< e^{\delta p} B, \tag{238}$$

гдѣ B опредѣленное число при данномъ δ.

Отсюда имѣемъ:

$$l_{\pm\frac{\pi}{2}} = \lim_{p=\infty} \frac{1}{p} \lg \left| L_p^{\pm\frac{\pi}{2}} \right| < \delta, \tag{239}$$

гдѣ δ произвольно-малое положительное число.

Такъ какъ число $l_{\pm\frac{\pi}{2}}$ отрицательнымъ быть не можетъ, то на основаніи результата (239) заключаемъ, что

$$l_{\pm\frac{\pi}{2}} = 0. \tag{240}$$

Такимъ образомъ осуществляется и второе изъ условій (131).

Въ виду теоремы 1, утверждаемъ, что всѣ особыя точки строки (1), гдѣ коэффиціентъ a_n имѣетъ составъ (185), лежатъ на отрѣзкѣ $\overline{1 + \infty}$ дѣйствительной оси.

Давая функціямъ λ_q и $\delta(q)$ въ выраженіи (185) различныя формы, при которыхъ выполняются условія (186) и (187), получимъ неограниченное число выраженій для коэффиціентовъ строки (1), особыя точки которой расположены на отрѣзкѣ $\overline{1 + \infty}$ дѣйствительной оси.

Пусть, напр., $\delta(q) = q$. Тогда получимъ:

$$a_n = \sum_0^\infty \frac{\lambda_q n^q}{q!}, \tag{241}$$

гдѣ

$$\lim_{q=\infty} \sqrt[q]{|\lambda_q|} = 0, \tag{242}$$

выраженіе, представляющее цѣлую функцію, видимый порядокъ которой меньше 1.

Далѣе, возьмемъ функцію:

$$e^{\Delta n^\mu} = \sum_0^\infty \frac{\Delta^q n^{q\mu}}{q!}, \tag{243}$$

гдѣ $o < \mu < 1$, а Δ какое-либо опредѣленное число.

Число $q!$ можно представить такъ:

$$q! = \Gamma\,(E\,(\mu q) + 1)\quad (E\,(\mu q) + 1) \ldots\ldots (q-1)\,q, \tag{244}$$

гдѣ $E\,(\mu q)$ означаетъ наибольшее цѣлое число, заключенное въ μq.

Тогда соотношеніе (243) изобразится такъ:

$$e^{\Delta n^\mu} = \sum_0^\infty \frac{\lambda_q n^{\mu q}}{\Gamma\,(E\,(\mu q) + 1)}, \tag{245}$$

гдѣ

$$\lambda_q = \frac{\Delta^q}{[E\,(\mu q) + 1] \ldots (q-1)\,q}. \tag{245'}$$

Удостовѣримся теперь, что выполняется условіе (187). Имѣемъ:

$$|\lambda_q| = \frac{|\Delta|^q \Gamma(E(\mu q)+1)}{\Gamma(q+1)} < \frac{|\Delta|^q \Gamma(\mu q+1)}{\Gamma(q+1)}. \tag{246}$$

Въ силу извѣстной формулы Стирлинга

$$\Gamma(s+1) = \sqrt{2\pi s}\, s^s (1+\delta_s), \tag{247}$$

гдѣ s большое положительное число, а

$$\lim_{s=\infty} \delta_s = 0, \tag{247'}$$

можемъ написать:

$$|\lambda_q| < \frac{|\Delta|^q e^{q(1-\mu)} (\mu q)^{\mu q+\frac{1}{2}}}{q^{q+\frac{1}{2}}} (1+\sigma_q), \tag{248}$$

гдѣ

$$\lim_{q=\infty} \sigma_q = 0. \tag{248'}$$

Неравенство (248) можно изобразить такъ:

$$|\lambda_q| < (1+\sigma_q)\, e^{-q r_q}, \tag{249}$$

гдѣ

$$r_q = (1-\mu)\, lg q - \mu\, lg \mu - lg|\Delta| - \frac{lg \mu}{2q} + \mu - 1 \tag{250}$$

и для $q > Q$ представляетъ величину положительную.

А если такъ, то

$$\overline{\lim_{q=\infty}} \sqrt[\mu q]{|\lambda_q|} = 0. \tag{251}$$

ГЛАВА II.

Основныя теоремы и формулы.

§ 1. Основныя равенства и неравенства, рѣшающія вопросъ, будетъ ли разсматриваемая точка окружности круга сходимости строки Тэйлора особой или нѣтъ.

Цѣль дальнѣйшихъ нашихъ изслѣдованій состоитъ въ изысканіи способа вычислять значенія функціи m_φ (128) главы I при различныхъ значеніяхъ φ, содержащихся въ границахъ $o \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

Этотъ способъ основывается на нѣкоторыхъ теоремахъ, выводомъ которыхъ мы и займемся въ настоящей главѣ.

Будемъ предполагать, что радіусъ круга сходимости ряда

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

равенъ 1, т. е.,

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1. \tag{2}$$

Теорема 1. Пусть выполняется равенство:

$$l_\varphi = 1, \tag{3}$$

гдѣ

$$l_\varphi = \frac{1}{\rho} = \overline{\lim_{p=\infty}} \frac{1}{p} \, lg \, |\vartheta(pe^{\varphi i})|. \tag{4}$$

Въ такомъ случаѣ $e^{\varphi i}$ служитъ особой точкой строки (1) или представляетъ предѣльное положеніе ея особыхъ точекъ.

Если же

$$l_\varphi < 1, \tag{5}$$

то $e^{\varphi i}$ не есть особая точка ряда (1) и не представляетъ предѣльнаго положенія его особыхъ точекъ.

Обратно: если $e^{\varphi i}$ есть особая точка строки (1) или служитъ предѣльнымъ положеніемъ ея особыхъ точекъ, то выполняется условіе (3); если же $e^{\varphi i}$ не служитъ особой точкой ряда (1) и не представляетъ предѣльнаго положенія его особыхъ точекъ, то имѣетъ мѣсто условіе (5).

Доказательство.

Изъ построенія полигона K ясно, что его стороны касаются окружности $|z| = 1$ круга сходимости ряда (1) въ его особыхъ точкахъ, расположенныхъ на этой окружности, или же въ точкахъ, лежащихъ на этой окружности и представляющихъ предѣльныя положенія его особыхъ точекъ.

Пусть $l_\varphi = 1$. Въ такомъ случаѣ разстояніе $\rho = \frac{1}{l_\varphi}$ отъ $z = 0$ до точки $M(\rho, \varphi)$ границы полигона K равно 1. Значитъ, $e^{\varphi i}$ служить точкой прикосновенія стороны полигона K съ окружностью $|z| = 1$. А потому точка $e^{\varphi i}$, являясь основаніемъ перпендикуляра, опущеннаго изъ $z = 0$ на границу многоугольника K, служить особой точкой ряда (1) или же предѣльнымъ положеніемъ его особыхъ точекъ.

Пусть теперь будетъ: $l_\varphi = \frac{1}{\rho} < 1$. Значитъ, $\rho > 1$, т. е., разстояніе точки $z = 0$ до точки границы полигона K, амплитуда которой φ больше 1.

А если такъ, то точка $e^{\varphi i}$ лежитъ внутри полигона K и, слѣдовательно, не можетъ быть ни особой, ни предѣльнымъ положеніемъ особыхъ точекъ строки (1).

Обратно: пусть $e^{\varphi i}$ будетъ особой точкой строки (1) или предѣльнымъ положеніемъ ея особыхъ точекъ Тогда разстояніе точки $z = 0$ до точки $e^{\varphi i}$, лежащей на границѣ полигона K, равно 1. Значитъ, $\rho = \frac{1}{l_\varphi} = 1$ и, слѣдовательно, $l_\varphi = 1$.

Если же $e^{\varphi i}$ не есть особая точка ряда (1) и не представляетъ предѣльнаго положенія его особыхъ точекъ, то разстояніе точки $z = 0$ до точки границы полигона K, амплитуда которой есть φ, больше 1. Значитъ, $\rho = \frac{1}{l_\varphi} > 1$ и, слѣдовательно, $l_\varphi < 1$.

Такимъ образомъ теорема установлена.

Принимая во вниманіе теорему 2 § 2 главы 1, соотношенія (3) и (5) можемъ изобразить соотвѣтственно такъ:

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|\vartheta(pe^{\varphi i})|} = e \tag{6}$$

и

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|\vartheta(pe^{\varphi i})|} < e. \tag{7}$$

Обратно, въ силу теоремы 1 § 2 главы 1, соотношенія (3) и (5) являются слѣдствіемъ соотношеній (6) и (7).

А потому теорему 1 можно формулировать еще иначе. Отмѣтимъ ее тогда, какъ теорему 2.

Теорема 2. Пусть выполняется условіе (6). *Въ такомъ случаѣ* $e^{\varphi i}$ *есть особая точка строки* (1) *или предѣльное положеніе ея особыхъ точекъ.*

Если же сохраняетъ силу равенство (7), *то* $e^{\varphi i}$ *не есть особая точка строки* (1) *и не представляетъ предѣльнаго положенія ея особыхъ точекъ.*

Обратно: если $e^{\varphi i}$ *есть особая точка ряда* (1) *или служитъ предѣльнымъ положеніемъ его особыхъ точекъ, то выполняется условіе* (6); *если же* $e^{\varphi i}$ *не есть особая точка ряда* (1) *и не является предѣльнымъ положеніемъ его особыхъ точекъ, то имѣетъ мѣсто условіе* (7).

Значитъ, равенство (6) есть необходимое и достаточное условіе того, что $z = e^{\varphi i}$ служитъ особой точкой строки (1) или предѣльнымъ положеніемъ ея особыхъ точекъ.

Такъ какъ $\overline{\lim\limits_{p=\infty}} \sqrt[p]{|\vartheta(pe^{\varphi i})|}$ не можетъ быть больше e, то то же самое можно выразить слѣдующимъ образомъ:

Пусть существуетъ такой безконечный рядъ безгранично-возрастающихъ значеній p: $p_1, p_2, p_3, \ldots$, *что, каково бы ни было малое положительное число* ε, *всегда можно подобрать такое положительное число* N, *что при* $n > N$

$$\sqrt[p_n]{|\vartheta(p_n e^{\varphi i})|} > e^{1-\varepsilon}. \tag{8}$$

Въ такомъ случаѣ $e^{\varphi i}$ *служитъ особой точкой ряда* (1) *или предѣльнымъ положеніемъ его особыхъ точекъ.*

Обратно: Пусть $e^{\varphi i}$ *будетъ особой точкой ряда* (1) *или предѣльнымъ положеніемъ его особыхъ точекъ. Въ такомъ случаѣ существуетъ такой безконечный рядъ безгранично-возрастающихъ значеній* p: $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots$, *что, каково бы ни было малое положительное число* ε, *всегда можно подобрать такое положительное* N, *что при* $n > N$ *сохраняетъ силу условія* (8).

Примѣръ. Для поясненія предыдущаго, разсмотримъ примѣръ, который уже трактовался Hadamard'омъ [1])

Пусть будетъ

$$a_n = g_n\, e^{i\beta_n}, \tag{9}$$

[1]) *Hadamard:* „Essai etc.", p. 111 et suiv..

гдѣ g_n число положительное и β_n вещественное; при чемъ

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{g_n} = 1, \tag{10}$$

а для большихъ s и σ

$$|\beta_s - \beta_\sigma| < \psi < \frac{\pi}{2}. \tag{11}$$

Такъ какъ символъ, стоящій въ лѣвой части соотношенія (10), представляетъ обыкновенный предѣлъ, то, какой бы малости положительное число ε ни было, всегда можно подобрать такое положительное число N, что при $n > N$

$$(1-\varepsilon)^n < g_n < (1+\varepsilon)^n. \tag{12}$$

Обозначимъ далѣе черезъ $\vartheta_1(p)$ выраженіе:

$$\vartheta_1(p) = \sum_{\Delta_p}^{\infty} \frac{g_n\, e^{i\beta_n}}{n!}\, p^n, \tag{13}$$

гдѣ $\Delta_p > N$.

Въ виду теоремы 1 § 3 главы 1, имѣемъ:

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|\vartheta(p)|} = \overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|\vartheta_1(p)|}, \tag{14}$$

гдѣ положено:

$$\vartheta(p) = \sum_{0}^{\infty} \frac{g_n\, e^{i\beta_n}\, p^n}{n!}. \tag{14'}$$

Далѣе, находимъ:

$$|\vartheta_1(p)|^2 = g^2_{\Delta_p} \left(\frac{p^{\Delta_p}}{\Delta_p!}\right)^2 + g^2_{\Delta_p+1} \left(\frac{p^{\Delta_p+1}}{(\Delta_p+1)!}\right)^2 + \dots$$

$$\dots + 2 g_{\Delta_p} g_{\Delta_p+1} \cos(\beta_{\Delta_p+1} - \beta_{\Delta_p}) \frac{p^{2\Delta_p+1}}{\Delta_p!\,(\Delta_p+1)!} + \dots \tag{15}$$

$$> \cos\psi \left(\sum_{\Delta_p}^{\infty} \frac{g_n\, p^n}{n!}\right)^2 > \cos\psi \left[\sum_{\Delta_p}^{\infty} \frac{[(1-\varepsilon)\, p]^n}{n!}\right]^2.$$

Значитъ, имѣемъ:

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\vartheta(p)|} = \lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\vartheta_1(p)|} >$$

$$> \lim_{p=\infty} \sqrt[p]{\sum_{\Delta_p}^{\infty} \frac{[(1-\varepsilon)\,p]^n}{n!}}. \tag{16}$$

Согласно формулѣ (85) главы 1, можемъ написать:

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{\sum_{\Delta_p}^{\infty} \frac{[(1-\varepsilon)\,p]^n}{n!}} = \lim_{p=\infty} \sqrt[p]{\sum_{0}^{\infty} \frac{[(1-\varepsilon)\,p]^n}{n!}} = e^{1-\varepsilon}. \tag{17}$$

Итакъ:

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\vartheta(p)|} > e^{1-\varepsilon}, \tag{18}$$

какой-бы малости положительное число ε ни было.

На основаніи результата (18) заключаемъ: существуетъ такой безконечный рядъ безгранично-возрастающихъ значеній p: p_1, p_2, p_3, ..., что, каково-бы ни было малое положительное число ε_1, всегда можно подобрать такое положительное число N, что при $n > N$

$$\sqrt[p_n]{|\vartheta(p_n)|} > e^{1-\varepsilon_1}. \tag{19}$$

А если такъ, то $z = 1$ есть особая точка строки (1) при составѣ (9) ея коэффиціента a_n или же представляетъ предѣльное положеніе ея особыхъ точекъ.

§ 2. Обобщеніе результатовъ предыдущаго параграфа.

Въ предыдущемъ амплитуду φ точки M границы полигона K мы считали постоянной и разсматриваемая точка $e^{\varphi i}$, при измѣненіи p, оставалась неподвижной. Предположимъ теперь, что $\varphi = \varphi_p$ и представляетъ вещественную функцію p; при чемъ

$$\lim_{p=\infty} \varphi_p = \varphi_0.$$

Лемма 1. Пусть будетъ $\lim\limits_{p=\infty} \varphi_p = \varphi_0$. Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\vartheta(pe^{\varphi_p i})|} = \lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\vartheta(pe^{\varphi_0 i})|}. \tag{21}$$

Доказательство.

Будемъ исходить изъ предположенія, что

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\vartheta(pe^{\varphi_p i})|} = e^{\alpha}, \tag{22}$$

или:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|\vartheta(p_n e^{\varphi_{p_n} i})|} = e^{\alpha}. \tag{23}$$

Значитъ, выраженіе $\sqrt[p_n]{|\vartheta(p_n e^{\varphi_{p_n} i})|}$ стремится къ своему предѣлу e^{α} по мѣрѣ того, какъ n стремится къ безконечности, принимая послѣдовательно значенія: 1, 2, 3, 4, ... Намъ пока не извѣстно, стремится ли при этомъ $\sqrt[p_n]{|\vartheta(p_n e^{\varphi_{p_n} i})|}$ къ опредѣленному числу или нѣтъ. Допустимъ, что e^{β} есть верхній предѣлъ этого выраженія при $n = \infty$.

Пусть будетъ при этомъ:

$$\lim_{k=\infty} \sqrt[p_{n_k}]{|\vartheta(p_{n_k} e^{\varphi_{p_{n_k}} i})|} = e^{\beta}. \tag{24}$$

Ясно, что

$$\lim_{k=\infty} \sqrt[p_{n_k}]{|\vartheta(p_{n_k} e^{\varphi_{p_{n_k}} i})|} = e^{\alpha}. \tag{25}$$

Напишемъ далѣе очевидное соотношеніе:

$$\begin{aligned} L_k &= \left| \sqrt[p_{n_k}]{|\vartheta(p_{n_k} e^{\varphi_{p_{n_k}} i})|} - \sqrt[p_{n_k}]{|\vartheta(p_{n_k} e^{\varphi_0 i})|} \right| \\ &< \left| \sqrt[p_{n_k}]{\vartheta(p_{n_k} e^{\varphi_{p_{n_k}} i})} - \sqrt[p_{n_k}]{\vartheta(p_{n_k} e^{\varphi_0 i})} \right|. \end{aligned} \tag{26}$$

Здѣсь подъ $\sqrt[p_{n_\kappa}]{\vartheta\,(p_{n_\kappa} e^{\varphi_0 i})}$ разумѣемъ какое-либо значеніе этого символа, а $\sqrt[p_{n_\kappa}]{\vartheta\,(p_{n_\kappa} e^{\varphi_{p_{n_\kappa}} i})}$ есть результатъ подстановки въ первомъ символѣ на мѣсто φ_0 числа $\varphi_{p_{n_\kappa}}$, безконечно-близкаго къ нему.

Далѣе, будемъ пользоваться извѣстной формулой:

$$f\,(x) = f\,(o) + \lambda\, x\, f'\,(x\vartheta), \tag{27}$$

гдѣ

$$|\,\lambda\,| \leqslant 1 \tag{28}$$

и

$$0 < \vartheta < 1; \tag{29}$$

при чемъ x число вещественное.

Находимъ:

$$\begin{aligned} M_\kappa &= \sqrt[p_{n_\kappa}]{\vartheta\,(p_{n_\kappa} e^{\varphi_{p_{n_\kappa}} i})} - \sqrt[p_{n_\kappa}]{\vartheta\,(p_{n_\kappa} e^{\varphi_0 i})} = \\ &= \lambda\, \delta_{p_{n_\kappa}} \frac{d}{d\varphi} \sqrt[p_{n_\kappa}]{\vartheta\,(p_{n_\kappa} e^{\varphi i})}, \\ &\qquad \varphi = \varphi_0 + \vartheta \delta_{p_{n_\kappa}} \end{aligned} \tag{30}$$

гдѣ $\delta_{p_{n_\kappa}} = \varphi_{p_{n_\kappa}} - \varphi_0$, а λ и ϑ суть числа, удовлетворяющія условіямъ (28) и (29).

Легко видѣть, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} \sqrt[p_{n_\kappa}]{\vartheta\,(p_{n_\kappa} e^{\varphi i})}\Bigg|_{\varphi = \varphi_0 + \vartheta\delta_{p_{n_\kappa}}} &= i\, e^{(\varphi_0 + \vartheta\delta_{p_{n_\kappa}})i} \frac{d}{dz} \sqrt[p_{n_\kappa}]{\vartheta\left[p_{n_\kappa}\left(e^{(\varphi_0+\vartheta\delta_{p_{n_\kappa}})i} + z\right)\right]}\Bigg|_{z=0} \\ &= \frac{e^{(\varphi_0+\vartheta\delta_{p_{n_\kappa}})i}}{2\pi} \int_c \sqrt[p_{n_\kappa}]{\vartheta\left[p_{n_\kappa}\left(e^{(\varphi_0+\vartheta\delta_{p_{n_\kappa}})i} + z\right)\right]}\, \frac{dz}{z^2}. \end{aligned} \tag{31}$$

Здѣсь c означаетъ замкнутый малаго размѣра контуръ, содержащій внутри себя точку $z = 0$; при чемъ интегрированіе по немъ выполняется въ положительномъ направленіи (т. е., противъ движенія часовой стрѣлки). Значитъ, имѣемъ:

$$M_\kappa = i\mu\delta_{t_{n_\kappa}} \int_C \sqrt[p_{n_\kappa}]{\vartheta\left[p_{n_\kappa}\left(e^{(\varphi_0+\vartheta\delta_{p_{n_\kappa}})^i} + z\right)\right]}\ \frac{dz}{z^2}, \tag{32}$$

гдѣ

$$\mu = \frac{\lambda\, e^{(\varphi_0+\vartheta\delta_{p_{n_\kappa}})^i}}{2\pi}. \tag{32'}$$

Полагаемъ въ интегралѣ (32):

$$z = \rho\, e^{\psi i}, \tag{33}$$

гдѣ ρ малое положительное число.

Будемъ имѣть:

$$M_\kappa = \frac{i\mu\delta_{p_{n_\kappa}}}{\rho} \int_0^{2\pi} \sqrt[p_{n_\kappa}]{\vartheta\left[p_{n_\kappa}\left(e^{(\varphi_0+\vartheta\delta_{p_{n_\kappa}})^i} + \rho\, e^{\psi i}\right)\right]}\, e^{-\psi i}\, d\psi. \tag{34}$$

Отсюда получаемъ:

$$|\, M_\kappa \,| < \frac{\delta_{p_{n_\kappa}}}{\rho} \int_0^{2\pi} \sqrt[p_{n_\kappa}]{P_\psi}\ \ d\psi, \tag{35}$$

гдѣ

$$P_\psi = \left|\ \vartheta\left[p_{n_\kappa}\left(e^{(\varphi_0+\vartheta\delta_{p_{n_\kappa}})^i} + \rho\, e^{\psi i}\right)\right]\right|. \tag{36}$$

Имѣемъ:

$$P_\psi < \sum_0^\infty \frac{|\, a_s\,|}{s\,!}\, p_{n_\kappa}^s \left|\, e^{(\varphi_0+\vartheta\delta_{p_{n_\kappa}})^i} + p\, e^{\psi i}\,\right|^s. \tag{37}$$

Въ виду неравенства (88) главы 1, находимъ:

$$P_\psi < M \sum_0^\infty \frac{[(1+\varepsilon)\, p_{n_\kappa}]^s}{s\,!}\,(1+\rho)^s = M\, e^{(1+\varepsilon')\, p_{n_\kappa}}, \tag{38}$$

гдѣ

$$\varepsilon' = \varepsilon + \rho + \varepsilon\rho. \tag{38'}$$

А потому

$$\begin{aligned} |\, M_\kappa \,| &< \frac{\delta_{p_{n_\kappa}}}{\rho} \int_0^{2\pi} \sqrt[p_{n_\kappa}]{M\, e^{(1+\varepsilon')p_{n_\kappa}}}\ d\psi \\ &= \frac{2\pi\delta p_{n_\kappa}}{\rho}\, e^{1+\varepsilon'} \sqrt[p_{n_\kappa}]{M} = S_\kappa; \end{aligned} \tag{39}$$

при чемъ

$$\lim_{k=\infty} S_к = 0. \tag{39'}$$

Въ силу результата (39), на основаніи неравенства (26) имѣемъ:

$$L_к < S_к. \tag{40}$$

Отсюда находимъ:

$$\lim_{k=\infty} L_к = 0,$$

т. е.,

$$\lim_{k=\infty} \sqrt[p_{n_к}]{|\vartheta(p_{n_к} e^{\varphi_{p_{n_к}} i})|} = \lim_{k=\infty} \sqrt[p_{n_к}]{|\vartheta(p_{n_к} e^{\varphi_0 i})|}. \tag{41}$$

Допустимъ теперь, что безконечный рядъ значеній p_n: p_{n_1}, p_{n_2}, p_{n_3}, ... приводитъ выраженіе $\sqrt[p_n]{|\vartheta(p_n e^{\varphi_0 i})|}$ къ его нижнему предѣлу при $n = \infty$. Тогда, какъ очевидно, и въ этомъ случаѣ сохраняютъ силу формулы 26—41. А если такъ, то

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|\vartheta(p_n e^{\varphi_{p_n} i})|} = \lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|\vartheta(p_n e^{\varphi_0 i})|}, \tag{42}$$

или:

$$\underline{\lim}_{p=\infty} \sqrt[p]{|\vartheta(p\, e^{\varphi_p i})|} = \lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|\vartheta(p_n e^{\varphi_0 i})|}. \tag{43}$$

Пусть будетъ:

$$\underline{\lim}_{p=\infty} \sqrt[p]{|\vartheta(p\, e^{\varphi_0 i})|} = e^{\gamma}. \tag{44}$$

Принимая во вниманіе равенства (22) и (44), на основаніи соотношенія (43) заключаемъ, что

$$e^{\alpha} \leqslant e^{\gamma}. \tag{45}$$

Будемъ теперь исходить изъ равенства (44). Ради простоты разсужденій, предположимъ, что выраженіе $\sqrt[p]{|\vartheta(p\, e^{\varphi_0 i})|}$ стремится къ своему предѣлу e^{γ}, если p безгранично растетъ, принимая послѣдовательно тотъ же самый рядъ значеній: $p_1, p_2, p_3, \ldots$, о которомъ говорилось выше.

Допустимъ также, что выраженіе $\sqrt[p_n]{|\vartheta(p_n e^{\varphi_{p_n}' i})|}$ стремится къ своему верхнему предѣлу при $n = \infty$, если n послѣдовательно принимаетъ безконечный рядъ безгранично-возрастающихъ значеній: $n_1, n_2, n_3, \ldots$. Тогда остаются въ силѣ формулы 26—40.

Значитъ, можемъ написать:

$$\lim_{k=\infty} \sqrt[p_{n_k}]{|\vartheta(p_{n_k} e^{\varphi_0 i})|} = \lim_{k=\infty} \sqrt[p_{n_k}]{|\vartheta(p_{n_k} e^{\varphi_{p_{n_k}}' i})|}. \tag{46}$$

Къ тому же результату очевидно придемъ, если предположимъ, что безконечный рядъ значеній p_n: $p_{n_1}, p_{n_2}, p_{n_3}, \ldots$ приводитъ выраженіе $\sqrt[p_n]{|\vartheta(p_n e^{\varphi_{p_n}' i})|}$ къ его нижнему предѣлу при $n = \infty$.

А если такъ, то имѣемъ:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|\vartheta(p_n e^{\varphi_0 i})|} = \lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|\vartheta(p_n e^{\varphi_{p_n}' i})|},$$

или:

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|\vartheta(p\, e^{\varphi_0 i})|} = \lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|\vartheta(p_n e^{\varphi_{p_n}' i})|}. \tag{47}$$

Имѣя въ виду соотношенія (22) и (44), на основаніи результата (47) находимъ:

$$e^{\gamma} \leqq e^{\alpha}. \tag{48}$$

Сопоставляя между собою соотношенія (45) и (48), приходимъ къ выводу:

$$e^{\alpha} = e^{\gamma},$$

т. е., получимъ равенство (21).

Такимъ образомъ лемма установлена.

Слѣдствіе. Символъ $\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|\vartheta(p\, e^{\varphi_p i})|}$, *гдѣ* $\lim_{p=\infty} \varphi_p = \varphi_0$, *удовлетворяетъ условію:*

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|\vartheta(p\, e^{\varphi_p' i})|} \leqq e. \tag{49}$$

Выводъ.

Въ разсматриваемомъ случаѣ, въ силу леммы 1, символы $\lim\limits_{p=\infty} \sqrt[p]{|\vartheta(p\, e^{\varphi_p i})|}$ и $\lim\limits_{p=\infty} \sqrt[p]{|\vartheta(p\, e^{\varphi_0 i})|}$ равны. А такъ какъ второй изъ нихъ, какъ извѣстно изъ § 1 настоящей главы, не превосходитъ e, то, слѣдовательно, первый символъ удовлетворяетъ условію (49).

Теорема 1. Пусть будетъ $\varphi_0 = \lim\limits_{p=\infty} \varphi_p$.

Если

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\vartheta(p\, e^{\varphi_p i})|} = e, \tag{50}$$

то $e^{\varphi_0 i}$ *служитъ особой точкой строки* (1) *или предѣльнымъ положеніемъ ея особыхъ точекъ.*

Если же

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\vartheta(p\, e^{\varphi_p i})|} < e, \tag{51}$$

то $e^{\varphi_0 i}$ *не есть особая точка ряда* (1) *и не служитъ предѣльнымъ положеніемъ его особыхъ точекъ.*

Доказательство.

Въ силу леммы 1, соотношенія (50) и (51) перепишутся слѣдующимъ образомъ:

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\vartheta(p\, e^{\varphi_0 i})|} = e \tag{52}$$

и

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\vartheta(p\, e^{\varphi_0 i})|} < e. \tag{53}$$

Принимая теперь во вниманіе теорему 2 § 1 настоящей главы, утверждаемъ, что трактуемая теорема справедлива.

Въ предыдущемъ мы предполагали, что φ_p стремится къ опредѣленному числу φ_0, когда p какъ-угодно растетъ до безконечности (p цѣлое число). Но составъ функціи φ_p можетъ быть такой, что символъ $\lim\limits_{p=\infty} \varphi_p$ можетъ не имѣть опредѣленнаго значенія. Такова, напр., функція $|\cos p|$ при $p = \infty$. Въ подобныхъ случаяхъ особенное вниманіе надлежитъ обратить на нижній и верхній предѣлы φ_p для разсматриваемаго безконечнаго ряда значеній p.

Лемма 2. Допустимъ, что

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|\vartheta(p\, e^{\varphi_p i})|} = \lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|\vartheta(p_n\, e^{\varphi_{p_n} i})|}. \tag{54}$$

Предположимъ, что φ_0 и φ_1 суть соотвѣтственно нижній и верхній предѣлы φ_{p_n} при $n = \infty$; при чемъ

$$\lim_{k=\infty} \varphi_{p_{n_k}} = \varphi_0, \quad \lim_{k=\infty} \varphi_{p_{n(k)}} = \varphi_1. \tag{55}$$

Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|\vartheta(p\, e^{\varphi_p i})|} = \lim_{k=\infty} \sqrt[p_{n_k}]{|\vartheta(p_{n_k} e^{\varphi_0 i})|} = \tag{56}$$

$$= \lim_{k=\infty} \sqrt[p_{n(k)}]{|\vartheta(p_{n(k)} e^{\varphi_1 i})|}.$$

Доказательство.

Обратимъ сперва вниманіе на безконечный рядъ значеній p_n: $p_{n_1}, p_{n_2}, p_{n_3}, \ldots\ldots$

Ясно, что

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|\vartheta(p\, e^{\varphi_0 i})|} = \lim_{k=\infty} \sqrt[p_{n_k}]{|\vartheta(p_{n_k} e^{\varphi_{p_{n_k}} i})|}. \tag{57}$$

Обозначимъ черезъ L_k выраженіе (26) и въ данномъ случаѣ. Тогда сохраняютъ силу формулы 26—40. А потому

$$\lim_{k=\infty} L_k = 0,$$

или:

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|\vartheta(p\, e^{\varphi_p i})|} = \lim_{k=\infty} \sqrt[p_{n_k}]{|\vartheta(p_{n_k} e^{\varphi_{p_{n_k}} i})|} = \tag{58}$$

$$= \lim_{k=\infty} \sqrt[p_{n_k}]{|\vartheta(p_{n_k} e^{\varphi_0 i})|}.$$

Такимъ образомъ первая изъ формулъ (56) установлена.

Перейдемъ теперь къ безконечному ряду значеній p_n: p_n', p_n'', p_n''', ...

Имѣемъ:

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|\vartheta(p\, e^{\varphi_p i})|} = \lim_{k=\infty} \sqrt[p_{n^{(\kappa)}}]{|\vartheta(p_{n^{(\kappa)}}\, e^{\varphi_{p_n^{(\kappa)}} i})|}. \tag{59}$$

Обозначимъ черезъ L'_κ выраженіе (26), гдѣ на мѣсто n_κ поставлено $n^{(\kappa)}$. Тогда будутъ имѣть мѣсто формулы 26—40 послѣ замѣны n_κ черезъ $n^{(\kappa)}$. А если такъ, то

$$\lim_{k=\infty} L'_\kappa = 0$$

и, слѣдовательно,

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|\vartheta(p\, e^{\varphi_p i})|} = \lim_{k=\infty} \sqrt[p_{n^{(\kappa)}}]{|\vartheta(p_{n^{(\kappa)}}\, e^{\varphi_{p_n^{(\kappa)}} i})|} =$$

$$= \lim_{k=\infty} \sqrt[p_{n^{(\kappa)}}]{|\vartheta(p_{n^{(\kappa)}}\, e^{\varphi_1 i})|}. \tag{60}$$

Значитъ, соотношенія (56) установлены.

Теорема 2. Допустимъ, что для безконечнаго ряда безгранично-возрастающихъ значеній p: p_1, p_2, p_3, ... выполняется условіе:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|\vartheta(p_n\, e^{\varphi_{p_n} i})|} = e. \tag{61}$$

Пусть φ_0 и φ_1 будутъ соотвѣтственно нижній и верхній предѣлы φ_{p_n} при $n=\infty$. Въ такомъ случаѣ $e^{\varphi_0 i}$ и $e^{\varphi_1 i}$ служатъ особыми точками строки (1) или предѣльными положеніями ея особыхъ точекъ.

Доказательство.

Предположимъ, что $\varphi_0 = \lim_{k=\infty} \varphi_{p_{n_\kappa}}$ и $\varphi_1 = \lim_{k=\infty} \varphi_{p_n^{(\kappa)}}$.

Тогда, принимая во вниманіе лемму 2, утверждаемъ, что

$$\lim_{k=\infty} \sqrt[p_{n_k}]{|\vartheta(p_{n_k} e^{\varphi_0 i})|} = \lim_{k=\infty} \sqrt[p_{n(k)}]{|\vartheta(p_{n(k)} e^{\varphi_1 i})|} = e,$$

или:

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|\vartheta(p e^{\varphi_0 i})|} = \overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|\vartheta(p e^{\varphi_1 i})|} = e. \tag{62}$$

На основаніи теоремы 2 § 1 настоящей главы заключаемъ о справедливости трактуемой теоремы.

§ 3. Замѣна въ результатахъ предыдущаго параграфа символа $\vartheta(p e^{\varphi_p i})$ болѣе простымъ выраженіемъ.

Принимая во вниманіе теорему 2 § 3 главы 1, соотношенія (6) и (7) настоящей главы можемъ замѣнить соотвѣтственно слѣдующими:

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{\left|\sum_{\Delta_p}^{3p} \frac{a_n p^n e^{n\varphi i}}{n!}\right|} = e \tag{63}$$

и

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{\left|\sum_{\Delta_p}^{3p} \frac{a_n p^n e^{n\varphi i}}{n!}\right|} < e \tag{64}$$

Значитъ: *равенство* (63) *есть необходимое и достаточное условіе того, что* $e^{\varphi i}$ *есть особая точка строки* (1) *или служитъ предѣльнымъ положеніемъ ея особыхъ точекъ; неравенство же* (64) *является необходимымъ и достаточнымъ условіемъ того, что* $e^{\varphi i}$ *не есть особая точка ряда* (1) *и не представляетъ предѣльнаго положенія его особыхъ точекъ.*

Замѣтимъ, что, при выводѣ формулъ (85) и (100) главы 1, число φ никакого значенія не имѣло, такъ какъ принимались во вниманіе только абсолютныя значенія членовъ суммъ (86) и (101) тойже главы. А потому, слѣдовательно, можемъ написать:

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{\left|\vartheta(p\,e^{\varphi_p i})\right|} = \lim_{p=\infty} \sqrt[p]{\left|\sum_{\Delta_p}^{\infty} \frac{a_s p^s e^{s\varphi_p i}}{s!}\right|} =$$

$$= \lim_{p=\infty} \sqrt[p]{\left|\sum_{\Delta_p}^{3p} \frac{a_s p^s e^{s\varphi_p i}}{s!}\right|}, \tag{65}$$

гдѣ Δ_p имѣетъ тотъ же составъ, что и въ формулѣ (85) главы 1.

Пусть будетъ далѣе $\lim\limits_{p=\infty} \varphi_p = \varphi_0$. Тогда, принимая во вниманіе лемму 1 предыдущаго параграфа и соотношенія (65), найдемъ:

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{\left|\sum_{\Delta_p}^{3p} \frac{a_s p^s e^{s\varphi_p i}}{s!}\right|} = \lim_{p=\infty} \sqrt[p]{\left|\vartheta(p\,e^{\varphi_0 i})\right|}. \tag{66}$$

Но

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{\left|\vartheta(p\,e^{\varphi_0 i})\right|} = e^{l\varphi_0}. \tag{67}$$

А потому имѣемъ:

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{\left|\sum_{\Delta_p}^{3p} \frac{a_s p^s e^{s\varphi_p i}}{s!}\right|} = e^{l\varphi_0}. \tag{68}$$

Принимая во вниманіе теорему 1 § 2 главы 1, изобразимъ соотношеніе (68) и такъ:

$$\lim_{p=\infty} \frac{1}{p}\, lg \left|\sum_{\Delta_p}^{3p} \frac{a_s p^s e^{s\varphi_p i}}{s!}\right| = l_{\varphi_0}. \tag{69}$$

Пусть будетъ:

$$\bar{\vartheta}(p\,e^{\varphi_p i}) = \sum_{\Delta_p}^{3p} \frac{a_s p^s e^{s\varphi_p i}}{s!}. \tag{70}$$

Пользуясь этимъ символомъ, теорему 1 предыдущаго параграфа формулируемъ слѣдующимъ образомъ:

Теорема 1. Допустимъ, что $\lim\limits_{p=\infty} \varphi_p = \varphi_0$.

Если

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|\vartheta(p\, e^{\varphi_p i})|} = e, \tag{71}$$

то $e^{\varphi_0 i}$ *есть особая точка строки* (1) *или предѣльное положеніе ея особыхъ точекъ; если же*

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{|\bar{\vartheta}(p\, e^{\varphi_p i})|} < e, \tag{72}$$

то $e^{\varphi_0 i}$ *не есть особая точка ряда* (1) *и не служитъ предѣльнымъ положеніемъ его особыхъ точекъ.*

Точно также, замѣняя въ соотношеніи (61) символъ $\vartheta\,(p_n\, e^{\varphi_{p_n} i})$ выраженіемъ $\bar{\vartheta}\,(p_n\, e^{\varphi_{p_n} i})$ (70), теорему 2 предыдущаго параграфа формулируемъ такъ:

Теорема 2. Пусть будетъ:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|\bar{\vartheta}(p_n\, e^{\varphi_{p_n} i})|} = e. \tag{73}$$

Допустимъ, что φ_0 *и* φ_1 *суть соотвѣтственно нижній и верхній предѣлы* φ_{p_n} *при* $n = \infty$. *Въ такомъ случаѣ* $e^{\varphi_0 i}$ *и* $e^{\varphi_1 i}$ *служатъ особыми точками строки* (1) *или предѣльными положеніями ея особыхъ точекъ.*

Не нарушая соотношенія (73), символъ $\bar{\vartheta}\,(p_n\, e^{\varphi_{p_n} i})$ въ немъ можно замѣнить болѣе простымъ.

На изысканіи этого послѣдняго мы сейчасъ и остановимся.

Обозначимъ черезъ λ нѣкоторую функцію p, удовлетворяющую слѣдующимъ условіямъ: 1) λ для каждаго разсматриваемаго значенія p представляетъ правильную ариѳметическую дробь и, значитъ, подчиненную условію:

$$0 < \lambda < 1; \tag{74}$$

2) для разсматриваемыхъ значеній p число

$$\nu = \lambda p \tag{75}$$

цѣлое [1]), и 3) $\lim\limits_{p=\infty} \lambda = \sigma$ представляетъ опредѣленное число, не выходящее изъ границъ: $0 < \sigma < 1$.

Таковы, напр., слѣдующія функціи:

$$\frac{\mathrm{E}\left(\frac{p}{2}\right)}{p}, \quad \frac{\mathrm{E}\left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right)}{p}, \quad \frac{\mathrm{E}\left(\frac{p}{\sqrt{3}}\right)}{p}, \quad \ldots.$$

Обозначимъ далѣе черезъ $\theta\,(p\,e^{\varphi_p i})$ выраженіе:

$$\theta\,(p\,e^{\varphi_p i}) = \sum_{p-\nu}^{p+\nu} \frac{a_n\,(p\,e^{\varphi_p i})^n}{n!}. \tag{76}$$

Лемма 1. Символы.

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\,\vartheta\,(p\,e^{\varphi_p i})\,|} \quad и \quad \lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\,\theta\,(p\,e^{\varphi_p i})\,|} \tag{77}$$

одновременно или равны e, или же меньше e.

Доказательство.

Обозначимъ черезъ K выраженіе:

$$K = \sum_{p+\nu+1}^{3p} \frac{a_n\,(p\,e^{\varphi_p i})^n}{n!}. \tag{78}$$

Принимая во вниманіе неравенство (88) главы 1, можемъ написать:

$$|\,K\,| < \sum_{p+\nu+1}^{3p} \frac{|\,a_n\,|\,p^n}{n!} < M \sum_{p+\nu+1}^{3p} \frac{[\,(1+\varepsilon)\,p\,]^n}{n!}, \tag{79}$$

гдѣ положительное число ε произвольно-мало, если значенія p произвольно-велики.

Пусть будетъ $\varepsilon < \lambda$. Разсмотримъ тогда сумму $\sum\limits_{\Delta_p}^{3p} \frac{[\,(1+\varepsilon)\,p\,]^n}{n!}$.

---

[1]) λ можно считать какою-угодно функціей p, подчиненной условіямъ (74) и 3). Тогда $\nu = \mathrm{E}\,(\lambda p)$.

Отношеніе послѣдующаго слагаемаго этой суммы къ ему предшествующему есть $\frac{p(1+\varepsilon)}{n}$ и представляетъ величину, меньшую 1, такъ какъ при наименьшемъ значеніи n, а именно: при $n = p + \nu + 1$, это отношеніе равно $\frac{p(1+\varepsilon)}{p+\nu+1} = \frac{1+\varepsilon}{1+\lambda+\frac{1}{p}} < 1$. Значитъ, члены этой суммы послѣдовательно убываютъ. А потому можемъ написать:

$$|K| < \frac{3Mp\,[\,p(1+\varepsilon)\,]^{p+\nu+1}}{(p+\nu+1)!}. \qquad (80)$$

Въ виду неравенства для большихъ значеній p:

$$(p+\nu+1)! > (1-\delta)\sqrt{2\pi}\,(p+\nu+1)^{p+\nu+\frac{3}{2}}\,e^{-p-\nu}, \qquad (81)$$

гдѣ $o < \delta < 1$, находимъ:

$$|K| < \frac{\overline{M}p\,[e\,p\,(1+\varepsilon)]^{p+\nu+1}}{(p+\nu+1)^{p+\nu+\frac{3}{2}}}, \qquad (82)$$

гдѣ $\overline{M}$ опредѣленное число, удовлетворяющее условію:

$$\overline{M} > \frac{3M}{e(1-\delta)\sqrt{2\pi}}. \qquad (83)$$

Отсюда выводимъ:

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|K|} < \left[\frac{e(1+\varepsilon)}{1+\sigma}\right]^{1+\sigma}, \qquad (84)$$

гдѣ $\sigma = \lim\limits_{p=\infty} \lambda.$

Обнаружимъ, что

$$\left[\frac{e(1+\varepsilon)}{1+\sigma}\right]^{1+\sigma} < e, \qquad (85)$$

или:

$$e(1+\varepsilon) < (1+\sigma)\,e^{\frac{1}{1+\sigma}}. \qquad (86)$$

Чтобы обнаружить справедливость неравенства (86), условимся считать σ на время перемѣннымъ числомъ, значенія котораго содержатся въ границахъ:

$$0 < \sigma < 1. \qquad (87)$$

Обозначимъ черезъ P выраженіе:

$$P = (1+\sigma)\, e^{\frac{1}{1+\sigma}}. \tag{88}$$

Будемъ имѣть:

$$\frac{dP}{d\sigma} = \frac{\sigma}{1+\sigma}\, e^{\frac{1}{1+\sigma}}. \tag{99}$$

Если $\sigma > 0$, то $\frac{dP}{d\sigma} > 0$. А если такъ, то функція P, при возрастаніи σ отъ 0 до 1, тоже растетъ; при чемъ ея наименьшее значеніе при $\sigma = 0$ равно e. Значитъ, если постоянное число σ содержится въ границахъ (87), то, въ виду произвольной малости числа ε, можемъ считать осуществленными неравенство (86) и, слѣдовательно, соотношеніе (85).

Итакъ:

$$\overline{lim}_{p=\infty} \sqrt{|K|} < e. \tag{90}$$

Пусть будетъ символъ $\overline{lim} \sqrt[p]{\left| \bar{\vartheta}\,(p\, e^{\varphi_p i}) \right|}$ равенъ e. Тогда, обозначая черезъ $\bar{\theta}\,(p\, e^{\varphi_p i})$ выраженіе:

$$\bar{\theta}\,(p\, e^{\varphi_p i}) = \sum_{\Delta_p}^{p+\nu} \frac{a_n\,(p\, e^{\varphi_p i})^n}{n!}, \tag{91}$$

на основаніи теоремы 5 § 2 главы 1 имѣемъ:

$$\overline{lim}_{p=\infty} \sqrt[p]{\left| \bar{\theta}\,(p\, e^{\varphi_p i}) \right|} = e. \tag{92}$$

Пусть будетъ далѣе:

$$L = \sum_{\Delta_p}^{p-\nu-1} \frac{a_n\,(p\, e^{\varphi_p i})^n}{n!}. \tag{93}$$

Въ виду неравенства (88) главы 1, имѣемъ:

$$|L| < \sum_{\Delta_p}^{p-\nu-1} \frac{|a_n|\, p^n}{n!} < M \sum_{\Delta_p}^{p-\nu-1} \frac{[(1+\varepsilon)\, p]^n}{n!}. \tag{94}$$

Отношеніе послѣдующаго члена суммы $\sum\limits_{\Delta_p}^{p-\nu-1} \frac{[(1+\varepsilon)p]^n}{n!}$ къ ему предшествующему равно $\frac{(1+\varepsilon)p}{n}$. А такъ какъ наименьшее значеніе этого отношенія, при измѣненіи n отъ Δ_p до $p-\nu-1$, есть $\frac{(1+\varepsilon)p}{(p-\nu-1)!}$ и оно больше 1, то слагаемыя этой суммы последовательно растутъ; при чемъ наибольшее изъ нихъ есть $\frac{[(1+\varepsilon)p]^{p-\nu-1}}{(p-\nu-1)!}$. А потому можемъ написать:

$$|L| < Mp\,\frac{[(1+\varepsilon)p]^{p-\nu-1}}{(p-\nu-1)!}. \tag{95}$$

Въ силу неравенства (81), гдѣ $p+\nu+1$ надо замѣнить черезъ $p-\nu-1$, имѣемъ:

$$|L| < M_1 p\,\frac{[(1+\varepsilon)ep]^{p-\nu-1}}{(p-\nu-1)^{p-\nu-\frac{1}{2}}}, \tag{96}$$

гдѣ M_1 означаетъ нѣкоторое опредѣленное положительное число.

Отсюда находимъ:

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|L|} < \left[\frac{(1+\varepsilon)\sigma}{1-\sigma}\right]^{1-\sigma}. \tag{97}$$

Обнаружимъ, что

$$\left[\frac{(1+\varepsilon)e}{1-\sigma}\right]^{1-\sigma} < e, \tag{98}$$

или:

$$(1+\varepsilon)e < (1-\sigma)\,e^{\frac{1}{1-\sigma}}. \tag{99}$$

Условимся и здѣсь σ на время считать перемѣннымъ числомъ, значенія котораго не выходятъ изъ границъ (87).

Обозначимъ черезъ Q выраженіе:

$$Q = (1-\sigma)\,e^{\frac{1}{1-\sigma}}. \tag{100}$$

Будемъ имѣть:

$$\frac{dQ}{d\sigma} = \frac{\sigma}{1-\sigma}\,e^{\frac{1}{1-\sigma}}. \tag{101}$$

Для всѣхъ значеній σ, содержащихся въ границахъ (87), имѣемъ: $\frac{dQ}{d\sigma} > 0$. Слѣдовательно, съ возрастаніемъ σ отъ 0 до 1, Q все время растетъ; при чемъ наименьшее значеніе Q при $\sigma = 0$ есть e. Значитъ, въ виду произвольной малости ε, неравенство (99) и, слѣдовательно, неравенство (98) можно считать осуществленными, если разсматриваемое постоянное число σ не выходитъ изъ границъ (87).

Итакъ:

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|L|} < e. \qquad (102)$$

Въ силу теоремы 5 § 2 главы 1, соотношеніе (92) не нарушится, если въ немъ изъ выраженія $\theta(p\, e^{\varphi_p i})$ устранитъ сумму (93). Значитъ, слѣдствіемъ равенства (92) является слѣдующее:

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\theta(p\, e^{\varphi_p i})|} = e. \qquad (103)$$

Это соотношеніе, слѣдовательно, имѣетъ мѣсто, если справедливо соотношеніе (71), гдѣ φ_p какая-либо вещественная функція p.

Справедливо также и обратное положеніе. Въ самомъ дѣлѣ, въ виду результата (102), на основаніи теоремы 3 § 2 главы 1 заключаемъ о справедливости равенства (92). Далѣе, въ силу результата (90), на основаніи той же теоремы утверждаемъ, что выполняется равенство (71).

Такимъ образомъ установлено, что символы (77) могутъ равняться e только одновременно.

Обратимся теперь къ доказательству второй части леммы.

Допустимъ, что первый изъ символовъ (77) меньше e. Тогда и второй изъ нихъ также меньше e. Въ самомъ дѣлѣ, если бы онъ равнялся e, то, въ силу первой части леммы, и первый изъ этихъ символовъ тоже равнялся бы e.

Значитъ, если первый изъ символовъ (77) меньше e, то и второй изъ нихъ тоже меньше e.

Предположимъ теперь, что второй изъ символовъ (77) меньше e. Въ такомъ случаѣ первый изъ нихъ не можетъ быть равнымъ e, такъ какъ въ противномъ случаѣ, въ силу первой части леммы, и второй изъ нихъ былъ бы равенъ e.

Кромѣ того, второй изъ символовъ (77) не можетъ быть больше e, такъ какъ въ противномъ случаѣ, въ виду результатовъ (102) и (90), на основаніи теоремы 3 § 2 главы 1 слѣдовало бы, что и первый изъ символовъ (77) былъ бы больше e, что, въ виду равенствъ (65), противорѣчитъ условію (49).

А если такъ, то и вторая часть доказываемой леммы установлена.

Теорема 3. Пусть будетъ $\varphi_0 = \lim_{p=\infty} \varphi_p$ *и*

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\,\theta\,(p\,e^{\varphi_p i})\,|} = e. \tag{104}$$

Въ такомъ случаѣ $e^{\varphi_0 i}$ *служитъ особой точкой строки* (1) *или предѣльнымъ положеніемъ ея особыхъ точекъ.*

Если же

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\,\theta\,(p\,e^{\varphi_p i})\,|} < e, \tag{105}$$

то $e^{\varphi_0 i}$ *не есть особая точка ряда* (1) *и не представляетъ предѣльнаго положенія его особыхъ точекъ.*

Доказательство.

Въ виду леммы 1, соотношенія (104) и (105) можно замѣнить соотвѣтственно слѣдующими:

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\,\vartheta\,(p\,e^{\varphi_p i})\,|} = e, \tag{106}$$

и

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\,\vartheta\,(p\,e^{\varphi_p i})\,|} < e. \tag{107}$$

Имѣя теперь въ виду теорему 1 настоящаго параграфа, утверждаемъ, что доказываемая теорема справедлива.

Лемма 2. Допустимъ, что

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\theta(p\,e^{\varphi_p i})|} = \lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|\theta(p_n\,e^{\varphi_{p_n} i})|}. \qquad (108)$$

Пусть φ_0 и φ_1 будутъ соотвѣтственно нижній и верхній предѣлы φ_{p_n} при $n=\infty$; при чемъ $\varphi_0 = \lim\limits_{k=\infty} \varphi_{p_{n_k}}$ и $\varphi_1 = \lim\limits_{k=\infty} \varphi_{p_{n(k)}}$.

Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\theta(p\,e^{\varphi_p i})|} = \lim_{k=\infty} \sqrt[p_{n_k}]{|\theta(p_{n_k}\,e^{\varphi_0 i})|} =$$
$$= \lim_{k=\infty} \sqrt[p_{n(k)}]{|\theta(p_{n(k)}\,e^{\varphi_1 i})|}. \qquad (109)$$

Доказательство.

Обозначимъ черезъ L_k и здѣсь выраженіе (26) послѣ замѣны символовъ $\vartheta(p_{n_k} e^{\varphi_{p_{n_k}} i})$ и $\vartheta(p_{n_k} e^{\varphi_0 i})$ соотвѣтственно черезъ $\theta(p_{n_k} e^{\varphi_{p_{n_k}} i})$ и $\theta(p_{n_k} e^{\varphi_0 i})$. Тогда и здѣсь сохраняютъ силу формулы 26—36.

Далѣе, неравенство (37) замѣнится здѣсь слѣдующимъ:

$$P_\psi < \sum_{p-\nu}^{p+\nu} \frac{|a_s|\,p_{n_k}^s}{s!} \left| e^{(\varphi_0+\vartheta\delta_{p_{n_k}})i} + \rho\, e^{\psi i} \right|^s$$
$$< M \sum_{p-\nu}^{p+\nu} \frac{[(1+\varepsilon)(1+\rho)\,p_{n_k}]^s}{s!}. \qquad (110)$$

А такъ какъ

$$\sum_{p-\nu}^{p+\nu} \frac{[(1+\varepsilon)(1+\rho)\,p_{n_k}]^s}{s!} < M \sum_{0}^{\infty} \frac{[(1+\varepsilon')\,p_{n_k}]^s}{s!} =$$
$$= M\, e^{(1+\varepsilon')\,p_{n_k}}, \qquad (111)$$

гдѣ ε' имѣетъ составъ (38'), то, слѣдовательно, въ разсматриваемомъ случаѣ сохраняютъ силу формулы 39—41, гдѣ символы $\vartheta(p_{n_k} e^{\varphi_{p_{n_k}} i})$

и $\vartheta\,(p_{n_\kappa}\, e^{\varphi_0 i})$ замѣнены соотвѣтственно выраженіями: $\theta\,(p_{n_\kappa}\, e^{\varphi_{p_{n_\kappa}} i})$ и $\theta\,(p_{n_\kappa}\, e^{\varphi_0 i})$. А если такъ, то первое изъ соотношеній (109) установлено.

Такимъ же образомъ выводится и вторая изъ формулъ (109).

Теорема 4. Пусть будетъ:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{\left|\,\theta\,(p_n\, e^{\varphi_{p_n} i})\,\right|} = e. \tag{112}$$

Назовемъ φ_0 и φ_1 *соотвѣтственно нижній и верхній предѣлы* φ_{p_n} *при* $n=\infty$. *Въ такомъ случаѣ* $e^{\varphi_0 i}$ *и* $e^{\varphi_1 i}$ *служатъ особыми точками строки* (1) *или предѣльными положеніями ея особыхъ точекъ.*

Доказательство.

Пусть будетъ: $\varphi_0 = \lim\limits_{k=\infty} \varphi_{p_{n_\kappa}}$ и $\varphi_1 = \lim\limits_{k=\infty} \varphi_{p_{n(\kappa)}}$. Въ силу леммы 2 имѣемъ:

$$\lim_{k=\infty} \sqrt[p_{n_\kappa}]{\left|\,\theta\,(p_{n_\kappa}\, e^{\varphi_0 i})\,\right|} = e \tag{113}$$

и

$$\lim_{k=\infty} \sqrt[p_{n(\kappa)}]{\left|\,\theta\,(p_{n(\kappa)}\, e^{\varphi_1 i})\,\right|} = e, \tag{114}$$

или:

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{\left|\,\theta\,(p\, e^{\varphi_0 i})\,\right|} = e \tag{115}$$

и

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{\left|\,\theta\,(p\, e^{\varphi_1 i})\,\right|} = e. \tag{116}$$

На основаніи леммы 1 находимъ:

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \sqrt[p]{\left|\,\vartheta\,(p\, e^{\varphi_0 i})\,\right|} = e \tag{117}$$

и

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\vartheta(p\,e^{\varphi_1 i})|} = e. \tag{118}$$

Принимая во вниманіе формулы (65), находимъ:

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\vartheta(p\,e^{\varphi_0 i})|} = e \tag{119}$$

и

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\vartheta(p\,e^{\varphi_1 i})|} = e. \tag{120}$$

Въ силу теоремы 2 § 1 настоящей главы, на основаніи результатовъ (119) и (120) заключаемъ о справедливости доказываемой теоремы.

Введемъ теперь въ разсмотрѣніе слѣдующій символъ:

$$\begin{aligned}\varphi(pe^{\varphi_p i}) &= e^{-p\varphi_p i}\, p^{-p}\, p!\, \theta(p\,e^{\varphi_p i}) = \\ &= \sum_{-\nu}^{+\nu} \frac{a_{n+p}\, p^n\, p!\, e^{n\varphi_p i}}{(n+p)!}.\end{aligned} \tag{121}$$

Такъ какъ

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{p^{-p}\, p!} = e^{-1}, \tag{122}$$

то

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\varphi(p\,e^{\varphi_p i})|} = e^{-1} \lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\theta(p\,e^{\varphi_p i})|}. \tag{123}$$

Въ силу соотношенія (123) теорема 4 формулируется слѣдующимъ образомъ:

Теорема 5. Пусть будетъ:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|\varphi(p_n\, e^{\varphi_{p_n} i})|} = 1. \tag{124}$$

Обозначимъ черезъ φ_0 *и* φ_1 *соотвѣтственно нижній и верхній предѣлы* φ_{p_n} *при* $n = \infty$. *Въ такомъ случаѣ* $e^{\varphi_0 i}$ *и* $e^{\varphi_1 i}$ *служатъ особыми точками ряда* (1) *или предѣльными положеніями его особыхъ точекъ.*

Очевидно, что соотношеніе (124) не нарушится, если въ немъ символъ $\varphi\,(p_n\; e^{\varphi_{p_n} i})$ замѣнить черезъ $e^{-i\beta_{p_n}}\;\varphi\,(p_n\; e^{\varphi_{p_n} i})$, гдѣ β_{p_n} какая-либо вещественная функція p_n.

§ 4. Основная теорема.

Разумѣя подъ β_p, какъ и въ концѣ предыдущаго параграфа, какую-либо вещественную функцію p, полагаемъ:

$$e^{-i\beta_p}\, a_n = a'_n + i\, b'_n, \tag{125}$$

гдѣ a'_n и b'_n вещественныя числа.

Разсмотримъ тогда слѣдующіе два ряда чиселъ:

$$a'_{p-\nu},\ a'_{p-\nu+1},\ \ldots,\ a'_{p+\nu} \tag{126}$$

и

$$b'_{p-\nu},\ b'_{p-\nu+1},\ \ldots,\ b'_{p+\nu}. \tag{127}$$

Замѣтимъ, что, если

$$a_n = \rho_n\, e^{i\varphi_n}, \tag{128}$$

гдѣ ρ_n и φ_n соотвѣтственно модуль и аргументъ a_n, то

$$a'_n = \rho_n \cos(\varphi_n - \beta_p);\ b'_n = \rho_n \sin(\varphi_n - \beta_p). \tag{129}$$

Изъ соотношенія (125) находимъ:

$$|\,a_n\,| = \sqrt{a'^2_n + b'^2_n}\,. \tag{130}$$

Отсюда заключаемъ:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|\,a_n\,|} \geq \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|\,a'_n\,|}\,; \\ &\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|\,a_n\,|} \geq \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|\,b'_n\,|}\,. \end{aligned}\right\} \tag{131}$$

А такъ какъ a_n удовлетворяетъ условію 2, то

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a'_n|} \leqslant 1 \tag{132}$$

и

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|b'_n|} \leqslant 1. \tag{133}$$

Лѣвыя части соотношеній (132) и (133) одновременно не могутъ быть меньше 1, такъ какъ въ противномъ случаѣ, въ виду теоремъ 3 и 7 § 2 главы 1, условіе 2 не имѣло бы мѣста.

Итакъ, должно сохранять силу по крайней мѣрѣ одно изъ равенствъ:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a'_n|} = 1 \tag{134}$$

и

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|b'_n|} = 1. \tag{135}$$

А такъ какъ a'_n переходитъ въ b'_n послѣ замѣны β_p черезъ $\frac{\pi}{2} + \beta_p$, а b'_n обращается въ a_n послѣ замѣны β_p черезъ $\beta_p - \frac{\pi}{2}$, то, слѣдовательно, всегда можно подобрать такое β_p, чтобы равенство (134) сохраняло силу.

Впредь мы будемъ предполагать, что одновременно съ условіемъ (2) осуществляется и равенство (134).

Въ настоящемъ параграфѣ мы установимъ одну существенной важности основную теорему теоріи строки Тэйлора. Предварительно займемся выводомъ одной леммы.

Обозначимъ черезъ R_φ слѣдующую функцію φ:

$$R_\varphi = \sin\left(\nu_1\omega - \frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\nu_2\omega - \frac{\varphi}{2}\right) \ldots \sin\left(\nu_\mu\omega - \frac{\varphi}{2}\right)$$
$$\sin\left(\nu_1'\omega + \frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\nu_2'\omega + \frac{\varphi}{2}\right) \ldots \sin\left(\nu'_{\mu'}\omega + \frac{\varphi}{2}\right), \tag{136}$$

гдѣ ω вещественная функція p, а $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\mu, \nu_1', \nu_2', \ldots, \nu'_{\mu'}$, суть цѣлыя положительныя числа, зависящія отъ p.

Послѣ этого разсмотримъ m_1+1 чиселъ $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_{m_1}$, опредѣляемыхъ на основаніи соотношенія:

$$\sum_0^{m_1} B_\kappa\, e^{\varphi i\,(m_1-k)} = R_\varphi\, e^{\frac{m_1\varphi i}{2}}. \tag{137}$$

Лемма. Обозначимъ черезъ $|B_{\kappa_1}|$ *наибольшее изъ чиселъ*: $|B_0|, |B_1|, \ldots, |B_{m_1}|$. *Будемъ имѣть*:

$$|B_{\kappa_1}|^2 = \frac{\mu_p^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_\varphi^2\, d\varphi, \tag{138}$$

гдѣ

$$1 > \mu_p > \frac{1}{\sqrt{m_1+1}}. \tag{138'}$$

Доказательство.

Назовемъ B'_κ число, сопряженное съ B_κ. Тогда, мѣняя въ формулѣ (137) i на $-i$, получимъ:

$$\sum_0^{m_1} B'_\kappa\, e^{-\varphi i\,(m_1-k)} = R_\varphi\, e^{\frac{-m_1\varphi i}{2}}. \tag{139}$$

Перемножимъ между собою почленно соотношенія (137) и (139). Обнаруживая при этомъ только члены, свободные отъ тригонометрическихъ функцій, будемъ имѣть:

$$\sum_0^{m_1} |B_\kappa|^2 + \ldots = R_\varphi^2. \tag{140}$$

Умножая обѣ части соотношенія (140) на $d\varphi$ и беря отъ нихъ интегралъ по φ въ предѣлахъ отъ 0 до 2π, получимъ:

$$\sum_0^{m_1} |B_\kappa|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_\varphi^2\, d\varphi. \tag{141}$$

Изъ соотношенія (141) прежде всего находимъ:

$$|B_{\kappa_1}|^2 < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_\varphi^2\, d\varphi. \tag{142}$$

Далѣе, такъ какъ между числами $|B_0|, |B_1|, \ldots, |B_{m_1}|$ нѣтъ большаго, чѣмъ $|B_{\kappa_1}|$, то можемъ написать:

$$|B_{\kappa_1}|^2 < \frac{1}{2\pi(m_1+1)} \int_0^{2\pi} R_\varphi^2 \, d\varphi. \tag{143}$$

На основанін результатовъ (142) и (143) заключаемъ о справедливости формулъ (138) и (138′).

Замѣчаніе. Пусть будетъ въ интегралѣ (138)

$$\varphi = 2\psi,\ R_\varphi = R_{2\psi} = P_\psi. \tag{144}$$

Тогда соотношеніе (138) представится такъ:

$$|B_{\kappa_1}|^2 = \frac{\mu_p^2}{\pi} \int_0^\pi P_\psi^2 \, d\psi. \tag{145}$$

Теорема (основная). Пусть будетъ:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|a'_{p_n}|} = 1. \tag{146}$$

Обозначимъ черезъ q число перемѣнъ знака въ рядѣ чиселъ (126) *при $p = p_n$. Назовемъ тогда α нижній предѣлъ отношенія $\frac{q}{2\nu}$ при $n = \infty$. Въ такомъ случаѣ рядъ* (1) *имѣетъ особую точку на дугѣ окружности $|z| = 1$ своего круга сходимости, содержащейся между $+\alpha\pi$ и $-\alpha\pi$.*

Доказательство.

Разобьемъ совокупность чиселъ:

$$a_p',\ a'_{p+1},\ \ldots,\ a'_{p+\nu} \tag{147}$$

на m равныхъ группъ по h членовъ въ каждой; при чемъ послѣдующая группа начинается съ послѣдняго члена предшествующей ей группы.

Назовемъ далѣе

$$\alpha_1 h,\ \alpha_2 h,\ \ldots,\ \alpha_m h \tag{148}$$

число перемѣнъ знака послѣдовательно въ этихъ группахъ.

Такимъ же образомъ раздѣлимъ совокупность чиселъ:

$$a'_p,\ a'_{p-1},\ \ldots,\ a'_{p-\nu} \tag{149}$$

на m группъ по h членовъ въ каждой. При этомъ черезъ

$$\beta_1 h,\ \beta_2 h,\ \ldots,\ \beta_m h \tag{150}$$

обозначимъ число перемѣнъ знака послѣдовательно въ этихъ группахъ.

Замѣтимъ, что, съ безграничнымъ возрастаніемъ p, h также безгранично растетъ.

Далѣе, введемъ слѣдующія обозначенія:

$$\mu = h \sum_1^m \alpha_\kappa, \quad \mu' = h \sum_1^m \beta_\kappa, \tag{151}$$

$$\mu + \mu' = 2\,\varkappa\,\alpha',$$

гдѣ

$$\varkappa = m\,h, \tag{152}$$

а

$$\alpha' = \frac{1}{2m} \sum_1^m (\alpha_\kappa + \beta_\kappa). \tag{153}$$

Легко видѣть, что

$$\varkappa = m + \nu. \tag{154}$$

Обозначимъ, кромѣ того, черезъ ω отношеніе

$$\omega = \frac{\pi}{2\,\varkappa}. \tag{155}$$

Послѣ этого разсмотримъ выраженіе:

$$\psi(p) = (-1)^{\mu'}\, i^{2\varkappa\alpha'} \sum_0^{2\varkappa\alpha'} A_\kappa\, \varphi\left(p\, e^{2(\varkappa\alpha' - k)\,\omega i}\right). \tag{156}$$

При этомъ A_κ опредѣляется изъ слѣдующаго соотношенія:

$$\sum_0^{2\varkappa\alpha'} A_\kappa\, z^{2\varkappa\alpha' - k} =$$

$$= \left(z\, e^{-\nu_1 \omega i} - e^{\nu_1 \omega i}\right) \ldots \left(z\, e^{-\nu_\mu \omega i} - e^{\nu_\mu \omega i}\right). \tag{157}$$

$$\left(z\, e^{\nu_1' \omega i} - e^{-\nu_1' \omega i}\right) \ldots \left(z\, e^{\nu'_{\mu'} \omega i} - e^{-\nu'_{\mu'} \omega i}\right).$$

Здѣсь $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\mu, \nu_1', \nu_2', \ldots, \nu'_{\mu'}$ суть цѣлыя положительныя числа, которыя мы точнѣе опредѣлимъ впослѣдствіи.

Выраженіе (156) можно изобразить слѣдующимъ образомъ:

$$\psi(p) =$$

$$= (-1)^{\mu'}\, i^{2\varkappa\alpha'} \sum_{-\nu}^{+\nu} \frac{a_{n+p}\, p^n\, p!}{(n+p)!} \sum_0^{2\varkappa\alpha'} A_\kappa\, e^{2n(\varkappa\alpha' - k)\omega i}. \tag{158}$$

Замѣнивъ въ соотношеніи (157) z черезъ $e^{2n\omega i}$, послѣ надлежащихъ преобразованій получимъ:

$$\sum_{o}^{2ка'} A_к \, e^{2n(ка'-k)\omega i} =$$

$$= (-1)^{\mu} \, (2i)^{2ка'} \sin(\nu_1 - n)\,\omega \ldots \sin(\nu_\mu - n)\,\omega$$
$$\sin(\nu_1' + n)\,\omega \ldots \sin(\nu'_{\mu'} + n)\,\omega. \tag{159}$$

А потому имѣемъ:

$$\psi(p) =$$
$$= 2^{2ка'} \sum_{-\nu}^{+\nu} \frac{a_{n+p}\, p^n \, p! \, L_n}{(n+p)!}, \tag{160}$$

гдѣ

$$L_n = \sin(\nu_1 - n)\,\omega \ldots \sin(\nu_\mu - n)\,\omega$$
$$\sin(\nu_1' + n)\,\omega \ldots \sin(\nu'_{\mu'} + n)\,\omega. \tag{161}$$

Обозначимъ черезъ $\vartheta(p)$ выраженіе:

$$\vartheta(p) = 2^{2ка'} \sum_{-\nu}^{+\nu} \frac{e^{-i\beta_p} \, a_{n+p}\, p^n \, p! \, L_n}{(n+p)!}. \tag{162}$$

Принимая во вниманіе равенство (125), разобьемъ комплексный символъ (162) на два вещественныхъ:

$$\vartheta_1(p) = 2^{2ка'} \sum_{-\nu}^{+\nu} \frac{a'_{n+p}\, p^n \, p! \, L_n}{(n+p)!};$$
$$\vartheta_2(p) = 2^{2ка'} \sum_{-\nu}^{+\nu} \frac{b'_{n+p}\, p^n \, p! \, L_n}{(n+p)!}. \tag{163}$$

Значитъ, имѣемъ:

$$\vartheta(p) = \vartheta_1(p) + i\,\vartheta_2(p). \tag{164}$$

Выберемъ теперь числа ν и ν' слѣдующимъ образомъ:

Пусть $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_\mu$ совпадаютъ соотвѣтственно съ нумерами членовъ группы (147), мѣняющихъ знакъ; точно также пусть $\nu'_1, \nu'_2, \ldots, \nu'_{\mu'}$ совпадаютъ соотвѣтственно съ нумерами членовъ группы (149), мѣняющихъ знакъ.

Въ такомъ случаѣ, какъ непосредственно усматривается, всѣ слагаемыя суммы $\vartheta_1(p)$ (163) одного знака.

А потому можемъ написать:

$$|\vartheta(p)| > |\vartheta_1(p)| > 2^{2н\alpha'} |a'_p| L_0, \tag{165}$$

гдѣ

$$L_0 = sin(\nu_1\omega)\, sin(\nu_2\omega) \dots sin(\nu_\mu\omega)$$
$$sin(\nu_1'\omega)\, sin(\nu_2'\omega) \dots sin(\nu'_{\mu'}\omega). \tag{166}$$

Такъ какъ $\vartheta(p)$ отличается отъ $\psi(p)$ (160) только множителемъ $e^{-i\beta_p}$, то можемъ написать:

$$|\psi(p)| > 2^{2н\alpha'} |a'_p| L_0. \tag{167}$$

Отсюда находимъ:

$$\sum_0^{2н\alpha'} |A_к| \cdot |\varphi(pe^{2(н\alpha'-k)\omega i})| > 2^{2н\alpha'} |a'_p| L_0. \tag{168}$$

Пусть между числами $|A_0|$, $|A_1|$, ..., $|A_{2н\alpha'}|$ нѣтъ числа, большаго $|A_{к_1}|$. Тогда на основаніи неравенства (168) можемъ написать:

$$\sum_0^{2н\alpha'} |\varphi(p\, e^{2(н\alpha'-k)\omega i})| > \frac{2^{2н\alpha'} |a'_p| L_0}{|A_{к_1}|}. \tag{169}$$

Пусть, при измѣненіи k отъ 0 до $2н\alpha'$, выраженіе $|\varphi(p\, e^{2(н\alpha'-k)\omega i})|$ принимаетъ наибольшее значеніе при $k = k_2$. Тогда можемъ написать:

$$|\varphi(pe^{\varphi_p i})| > \frac{2^{2н\alpha'} |a'_p| L_0}{(2н\alpha'+1)|A_{к_1}|}, \tag{170}$$

гдѣ

$$\varphi_p = 2(н\alpha' - k_2)\,\omega. \tag{170'}$$

Разсмотримъ сперва случай, когда всѣ члены ряда (126) одного знака, т. е., $2н\alpha' = 0$ и, слѣдовательно, $\alpha' = 0$.

Выраженіе (156) приметъ видъ:

$$\psi(p) = A_0\, \varphi(p) = \varphi(p), \tag{171}$$

гдѣ A_0 предполагается равнымъ 1.

Такъ какъ, въ силу соотношенія (159), и $L_0 = 1$ въ разсматриваемомъ случаѣ, то на основаніи неравенства (170) имѣемъ:

$$|\varphi(p)| > |a'_p| \tag{172}$$

и, слѣдовательно,

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\varphi(p)|} \geqslant 1. \tag{173}$$

А такъ какъ лѣвая часть соотношенія (173) не можетъ быть больше 1, то

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\varphi(p)|} = 1. \tag{174}$$

Принимая во вниманіе теорему 5 предыдущаго параграфа, утверждаемъ, что $z = 1$ есть особая точка строки (1).[1])

Въ разсматриваемомъ случаѣ, слѣдовательно, оправдывается доказываемая теорема.

Будемъ теперь предполагать, что $2н\alpha' > 0$. Предварительно сдѣлаемъ одно существенное замѣчаніе. Обратимъ вниманіе на составъ выраженіе для φ_p (170′). Такъ какъ

$$0 \leqslant k_2 \leqslant 2н\alpha', \tag{175}$$

а $\omega = \frac{\pi}{2н}$, то

$$-\alpha'\pi \leqslant \varphi_p \leqslant +\alpha'\pi. \tag{176}$$

Имѣя въ виду составъ (153) функціи α', можемъ написать:

$$\alpha' = \frac{h\sum\limits_{1}^{m}(\alpha_\kappa + \beta_\kappa)}{2н} = \frac{2н\alpha'}{2\nu + 2m} = \frac{q}{2\nu}\cdot\frac{1}{1+\sigma_p}, \tag{177}$$

гдѣ

$$\lim_{p=\infty} \sigma_p = \lim_{p=\infty} \frac{m}{\nu} = 0. \tag{177′}$$

Пусть будетъ:

$$\alpha' = l\,(p_н). \tag{178}$$

---

[1]) Слова: „или предѣльное положеніе особыхъ точекъ ряда (1)", какъ здѣсь, такъ и въ другихъ послѣдующихъ теоремахъ мы пропускаемъ.

Принимая во вниманіе условія теоремы, изъ соотношенія

$$\alpha' = \frac{q}{2\nu} \cdot \frac{1}{1+\sigma_{p_n}}$$

видимъ, что нижній предѣлъ α' при $n=\infty$ есть α, а верхній предѣлъ $-\alpha'$ при $n=\infty$ есть $-\alpha$. Имѣя въ виду условіе (176), отсюда заключаемъ, что нижній предѣлъ φ_{p_n} при $n=\infty$ не превосходитъ α, если $\varphi_{p_n} > 0$, а верхній предѣлъ φ_{p_n} при $n=\infty$ не меньше $-\alpha$, если $\varphi_{p_n} < 0$. А если такъ, то, въ силу теоремы 5 предыдущаго параграфа, трактуемая теорема будетъ установлена, если удастся обнаружить, что

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|\varphi(p_n e^{\varphi_{p_n} i})|} = 1. \tag{179}$$

Сейчасъ мы постараемся убѣдиться въ справедливости соотношенія (179).

Введемъ обозначеніе:

$$B_\kappa = \frac{(-1)^\mu A_\kappa}{(2i)^{2n\alpha'}}. \tag{180}$$

Тогда неравенство (170) перепишется слѣдующимъ образомъ:

$$|\varphi(p e^{\varphi_p i})| > \frac{|a'_p|\, L_0}{(2n\alpha'+1)\, |B_{\kappa_1}|}. \tag{181}$$

Очевидно, что $|B_{\kappa_1}|$ есть такое число, больше котораго нѣтъ чиселъ въ рядѣ: $|B_0|$, $|B_1|$, ..., $|B_{2n\alpha'}|$.

Пусть будетъ, ради краткости,

$$P = |\varphi(p e^{\varphi_p i})|. \tag{182}$$

Тогда, послѣ возвышенія обѣихъ частей неравенства (181) въ квадратъ, получимъ:

$$P^2 > \frac{|a'_p|^2\, L_0^2}{(2n\alpha'+1)^2\, |B_{\kappa_1}|^2}. \tag{183}$$

Пользуясь леммой, дадимъ этому неравенству важную для нашихъ цѣлей форму.

Предположимъ, что въ означенной леммѣ $m_1 = 2n\alpha'$, а числа ω, μ и μ', ν и ν' имѣютъ тѣ же значенія, что и въ выраженіи (166). Тогда будемъ имѣть прежде всего: $L_0{}^2 = R_0{}^2$. Далѣе, полагаемъ въ соотношеніи (159): $2n\omega = \varphi$. Будемъ имѣть:

$$\sum_{o}^{2n\alpha'} A_\kappa \, e^{\varphi i(n\alpha'-k)} = (-1)^\mu \, (2i)^{2n\alpha'} \, R_\varphi,$$

или:

$$\sum_{o}^{2n\alpha'} A_\kappa \, e^{\varphi i(2n\alpha'-k)} = (-1)^\mu \, (2i)^{2n\alpha'} \, R_\varphi \, e^{n\alpha'\varphi i}. \tag{184}$$

Устранимъ изъ этого соотношенія $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{2n\alpha'}$ на основаніи равенства (180). Тогда получимъ соотношеніе (137), гдѣ $m_1 = 2n\alpha'$.

Такимъ образомъ убѣждаемся, что $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_{2n\alpha'}$ удовлетворяютъ условію (137). Но въ такомъ случаѣ $|B_{\kappa_1}|^2$ выражается по формулѣ (138) или (145). Принимая теперь во вниманіе эту послѣднюю, представимъ неравенство (183) слѣдующимъ образомъ:

$$P^2 > \frac{\pi \, |a'_p|^2 \, L_0{}^2}{\mu_p{}^2 \, (2n\alpha'+1)^2 \int_o^\pi P_\psi{}^2 \, d\psi}. \tag{185}$$

Интегралъ $\int_o^\pi P_\psi{}^2 \, d\psi$ можно изобразить такъ:

$$\int_o^\pi P_\psi{}^2 \, d\psi = (\sigma\psi_1+1)^2 \int_o^\pi P_\psi{}^2 \frac{d\psi}{(\sigma\psi+1)^2}, \tag{186}$$

гдѣ σ какое-либо положительное число, а

$$0 < \psi_1 < \pi. \tag{187}$$

Значитъ:

$$P^2 > \frac{\pi \, |a'_p|^2}{\mu_p{}^2 \, (2n\alpha'+1)^2} \; \frac{L_0{}^2}{(\sigma\psi_1+1)^2 \int_o^\pi P_\psi{}^2 \frac{d\psi}{(\sigma\psi+1)^2}}. \tag{188}$$

Полагаемъ теперь въ интегралѣ правой части неравенства (188):

$$\sigma\psi = x. \tag{189}$$

Будемъ имѣть:

$$P^2 > \frac{\pi \mid a'_p \mid^2}{\mu_p^2 (2n\alpha'+1)^2 [\psi_1 \sqrt{\sigma} + \frac{1}{\sqrt{\sigma}}]^2} \frac{L_0^2}{\int_0^{\sigma\pi} P_{\frac{x}{\sigma}}^2 \frac{dx}{(x+1)^2}}. \quad (190)$$

Такъ какъ правая часть неравенства (190) по существу отъ σ не зависитъ, то, не нарушая этого неравенства, число σ можетъ заставить расти до безконечности ко какому-либо закону. Въ предѣлѣ тогда получимъ:

$$P^2 > \frac{\pi \mid a'_p \mid^2}{\mu_p^2 (2n\alpha'+1)^2} \frac{1}{[\lim\limits_{\sigma=\infty} (\psi_1 \sqrt{\sigma})]^2} \frac{L_0^2}{\lim\limits_{\sigma=\infty} \int_0^{\sigma\pi} P_{\frac{x}{\sigma}}^2 \frac{dx}{(x+1)^2}}; \quad (191)$$

при чемъ:

$$[\lim_{\sigma=\infty} (\psi_1 \sqrt{\sigma})]^2 \lim_{\sigma=\infty} \int_0^{\sigma\pi} P_{\frac{x}{\sigma}}^2 \frac{dx}{(x+1)^2} = \int_0^{\pi} P_\psi^2 \, d\psi \quad (192)$$

и для опредѣленнаго значенія p представляетъ величину опредѣленную.

Вычислимъ сперва второй изъ предѣловъ правой части неравенства (191).

Пусть будетъ:

$$Q_\sigma = \int_0^{\sigma\pi} P_{\frac{x}{\sigma}}^2 \frac{dx}{(x+1)^2}. \quad (193)$$

Обозначая черезъ R нѣкоторое большое положительное число, изобразимъ интегралъ (193) слѣдующимъ образомъ:

$$Q_\sigma = \int_0^{R} P_{\frac{x}{\sigma}}^2 \frac{dx}{(x+1)^2} + \int_R^{\sigma\pi} P_{\frac{x}{\sigma}}^2 \frac{dx}{(x+1)^2}. \quad (194)$$

Отсюда находимъ:

$$\lim_{\sigma=\infty} Q_\sigma = P_0^2 \int_0^{R} \frac{dx}{(x+1)^2} + \lim_{\sigma=\infty} M_\sigma, \quad (195)$$

гдѣ

$$M_\sigma = \int_R^{\sigma\pi} P_{\frac{x}{\sigma}}^2 \frac{dx}{(x+1)^2}. \quad (196)$$

Такъ какъ $P^2_{\frac{x}{\sigma}} < 1$, то

$$M_\sigma < \int_R^{\sigma\pi} \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{1}{R+1} - \frac{1}{\sigma\pi+1}. \tag{197}$$

Значитъ:

$$\lim_{\sigma=\infty} M_\sigma < \frac{1}{R+1},$$

т. е.,

$$\lim_{\sigma=\infty} M_\sigma = \frac{\lambda}{R+1}, \tag{198}$$

гдѣ $0 < \lambda < 1$.

Съ другой стороны

$$\int_0^R \frac{dx}{(x+1)^2} = 1 - \frac{1}{R+1} \tag{199}$$

и $P_0^2 = L_0^2$. А потому соотношеніе (195) изобразимъ такъ:

$$\lim_{\sigma=\infty} Q_\sigma = L_0^2\ (1 - \frac{1}{R+1}) + \frac{\lambda}{R+1}. \tag{200}$$

Заставимъ R расти до безконечности. Въ предѣлѣ получимъ:

$$\lim_{\sigma=\infty} Q_\sigma = L_0^2. \tag{201}$$

Въ виду результата (201), изъ соотношенія (192) имѣемъ:

$$\left[\lim_{\sigma=\infty} (\psi_1 \sqrt{\sigma})\right]^2 = \frac{\int_0^\pi P_\psi^2\, d\psi}{L_0^2}. \tag{202}$$

Значитъ, для каждаго опредѣленнаго значенія p выраженіе $\lim_{\sigma=\infty} [\psi_1 \sqrt{\sigma}]$ представляетъ величину опредѣленную.

Пусть будетъ:

$$\psi_1 \sqrt{\sigma} = \theta, \tag{203}$$

гдѣ положительное число σ велико.

Въ силу условія (187) имѣемъ:

$$0 < \frac{\theta}{\sqrt{\sigma}} < \pi. \tag{204}$$

Условіе (204) выполняется при всякомъ цѣломъ положительномъ p и $\sigma > 0$. Значитъ, если p растетъ до безконечности, принимая послѣдовательно какой-либо рядъ безгранично-возрастающихъ значеній: $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots, \frac{\theta}{\sqrt{\sigma}}$ не выходитъ изъ границъ (204). А если такъ, то

$$0 < \theta < A, \tag{205}$$

гдѣ A нѣкоторое опредѣленное положительное число, не зависящее ни отъ p, ни отъ σ.

А если такъ, то

$$0 < \lim_{\sigma = \infty} \theta < A,$$

или:

$$0 < \lim_{\sigma = \infty} [\psi_1 \sqrt{\sigma}] < A. \tag{206}$$

Принимая во вниманіе результаты (201) и (206), на основаніи неравенства (191) находимъ:

$$P^2 > \frac{\pi \mid a'_p \mid^2}{A^2 \mu_p^2 (2n\alpha' + 1)^2}$$

и, слѣдовательно,

$$\mid \varphi (p\, e^{\varphi_p i}) \mid > \frac{\sqrt{\pi} \mid a'_p \mid}{A\, \mu_p (2n\alpha' + 1)}. \tag{207}$$

Отсюда находимъ:

$$\lim_{n = \infty} \sqrt[p_n]{\mid \varphi (p_n e^{\varphi_{p_n} i}) \mid} \geqslant 1. \tag{208}$$

А такъ какъ лѣвая часть этого соотношенія не можетъ быть больше 1, то мы, слѣдовательно, получили соотношеніе (179), и теорема такимъ образомъ доказана.

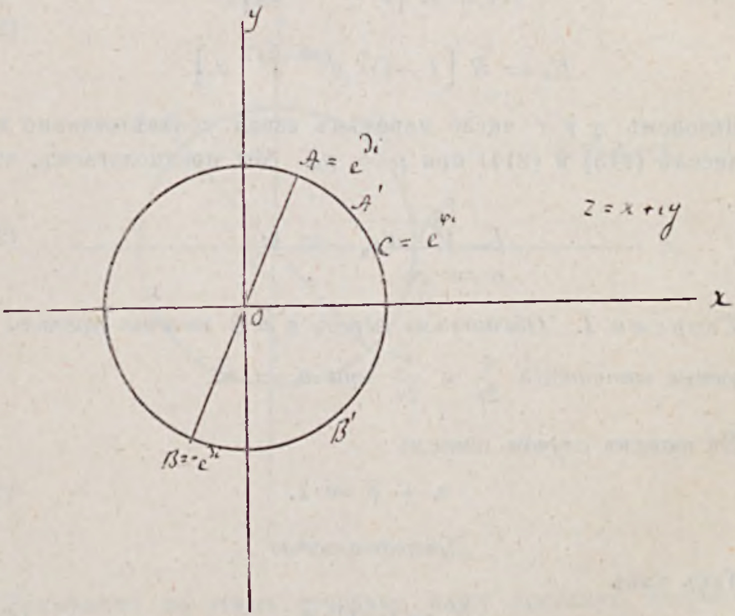
§ 5. Приложеніе основной теоремы къ случаю строки Тэйлора, когда на окружности ея круга сходимости лежитъ ея одна или двѣ особыя точки.

Основная теорема, установленная въ предыдущемъ параграфѣ, только въ одномъ случаѣ приводитъ къ опредѣленному результату, а именно, когда $\alpha = \lim\limits_{p=\infty} \frac{q}{2\nu} = 0$. Тогда, если $|z| = 1$ есть окружность круга сходимости ряда (1), то $z = 1$ служитъ ея особой точкой.

Однако существуетъ классъ строкъ Тэйлора, основной въ нашихъ дальнѣйшихъ изслѣдованіяхъ, въ приложеніи къ которымъ наша основная теорема приводитъ къ существенно-важному результату, — мы разумѣемъ тутъ рядъ Тэйлора, изъ которыхъ каждый имѣетъ лишь одну особую точку, расположенную на окружности его круга сходимости.

На этихъ строкахъ мы сейчасъ остановимся.

Итакъ, допустимъ, что на окружности $|z| = 1$ круга сходимости ряда (1) лежитъ только его одна особая точка: $C = e^{\varphi i}$.



Возьмемъ на этой окружности двѣ діаметрально-противоположныхъ точки: $A = e^{\vartheta i}$ и $B = -e^{\vartheta i}$.

Потомъ преобразуемъ рядъ (1) при помощи подстановокъ:

$$z \mid z\, e^{\vartheta i} \tag{209}$$

и

$$z_1 = z\,e^{\vartheta i}. \tag{210}$$

Будемъ имѣть:

$$\sum_{0}^{\infty} a_n\, e^{n\vartheta i}\, z^n \tag{211}$$

и

$$\sum_{0}^{\infty} (-1)^n\, a_n\, e^{n\vartheta i}\, z^n. \tag{212}$$

Составимъ далѣе два ряда чиселъ:

$$a'_{p-\nu},\ a'_{p-\nu+1},\ \ldots,\ a'_{p+\nu} \tag{213}$$

и

$$b'_{p-\nu},\ b'_{p-\nu+1},\ \ldots,\ b'_{p+\nu}, \tag{214}$$

гдѣ положено:

$$\begin{aligned} a'_s &= R\left[e^{(s\vartheta-\beta_p)i}\, a_s\right]; \\ b'_s &= R\left[(-1)^s\, e^{(s\vartheta-\beta_p)i}\, a_s\right]. \end{aligned} \tag{215}$$

Назовемъ q и r число перемѣнъ знака соотвѣтственно въ рядахъ чиселъ (213) и (214) при $p = p_n$. Мы предполагаемъ, что

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{a'_{p_n}} = 1. \tag{216}$$

Теорема 1. Обозначимъ черезъ α и β нижніе предѣлы соотвѣтственно отношеній $\frac{q}{2\nu}$ и $\frac{r}{2\nu}$ при $n = \infty$.

Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$\alpha + \beta = 1. \tag{217}$$

Доказательство

Такъ какъ

$$b'_s = (-1)^s\, a'_s, \tag{218}$$

то, какъ непосредственно усматриваемъ,

$$r = 2\nu - q,$$

или:

$$\frac{r}{2\nu} = 1 - \frac{q}{2\nu}. \tag{219}$$

Отсюда находимъ:

$$\lim_{n=\infty} \frac{r}{2\nu} \leqslant 1 - \lim_{n=\infty} \frac{q}{2\nu},$$

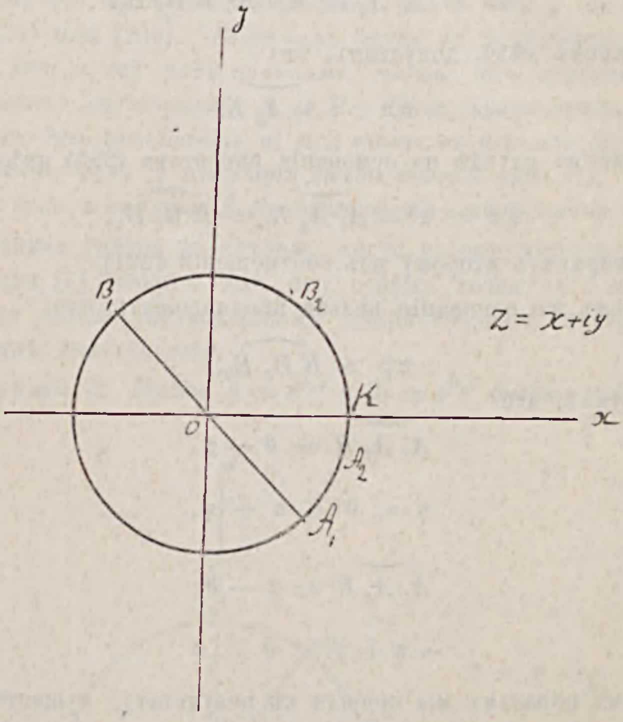
или:

$$\beta \leqslant 1 - \alpha.$$

Значитъ, имѣемъ:

$$\pi\alpha + \pi\beta \leqslant \pi. \tag{220}$$

Далѣе, особыя точки строкъ (211) и (212), лежащія на окружности $|z| = 1$, суть соотвѣтственно: $A_1 = e^{(\varphi-\vartheta)i}$ и $B_1 = e^{(\pi+\varphi-\vartheta)i}$.



Примѣнимъ къ этимъ строкамъ нашу основную теорему. Будемъ имѣть:

$$\pi\alpha \geqslant \overparen{A_1\,A_2\,K};\ \pi\beta \geqslant \overparen{K\,B_2\,B_1}. \tag{221}$$

Складывая почленно эти соотношенія, получимъ:

$$\pi\alpha + \pi\beta \geqslant \overparen{A_1\,A_2\,K} + \overparen{K\,B_2\,B_1}. \tag{222}$$

Но

$$\overset{\frown}{A_1 A_2 K} + \overset{\frown}{K B_2 B_1} = \pi. \tag{223}$$

А потому

$$\pi\alpha + \pi\beta \geqslant \pi. \tag{224}$$

Сопоставляя между собою соотношенія (220) и (224), находимъ:

$$\pi\alpha + \pi\beta = \pi, \tag{225}$$

или соотношеніе (217).

Слѣдствіе. Въ виду результата (225), въ соотношеніяхъ (221) можетъ имѣть мѣсто только знакъ равенства, т. е.:

$$\pi\alpha = \overset{\frown}{A_1 A_2 K};\ \pi\beta = \overset{\frown}{K B_2 B_1}. \tag{226}$$

Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что

$$\pi\alpha > \overset{\frown}{A_1 A_2 K}.$$

Въ такомъ случаѣ на основаніи равенства (225) имѣли бы:

$$\pi\beta < \pi - \overset{\frown}{A_1 A_2 K} = \overset{\frown}{K B_2 B_1},$$

что противорѣчитъ второму изъ соотношеній (221).

На томъ же основаніи нельзя предположить, что

$$\pi\beta > \overset{\frown}{K B_2 B_1}.$$

Замѣтимъ, что

$$\overset{\frown}{A_1 A_2 K} = \vartheta - \varphi, \tag{227}$$

если

$$\varphi \leqslant \vartheta \leqslant \pi + \varphi, \tag{228}$$

и

$$\overset{\frown}{A_1 A_2 K} = \varphi - \vartheta, \tag{229}$$

если

$$-\pi + \varphi \leqslant \vartheta \leqslant \varphi. \tag{230}$$

Такимъ образомъ мы пришли къ результату, существенно важному для нашихъ цѣлей, который мы формулируемъ въ особую теорему.

Т е о р е м а 2. *Пусть число перемѣнъ знака въ рядѣ чиселъ* (213) *будетъ q при $p = p_n$. Обозначимъ черезъ α нижній предѣлъ отношенія $\frac{q}{2\nu}$ при $n = \infty$. Въ такомъ случаѣ имѣемъ:*

$$\pi\alpha = \vartheta - \varphi, \tag{231}$$

если ϑ *удовлетворяетъ условію* (228), *и*

$$\pi\alpha = \varphi - \vartheta, \tag{232}$$

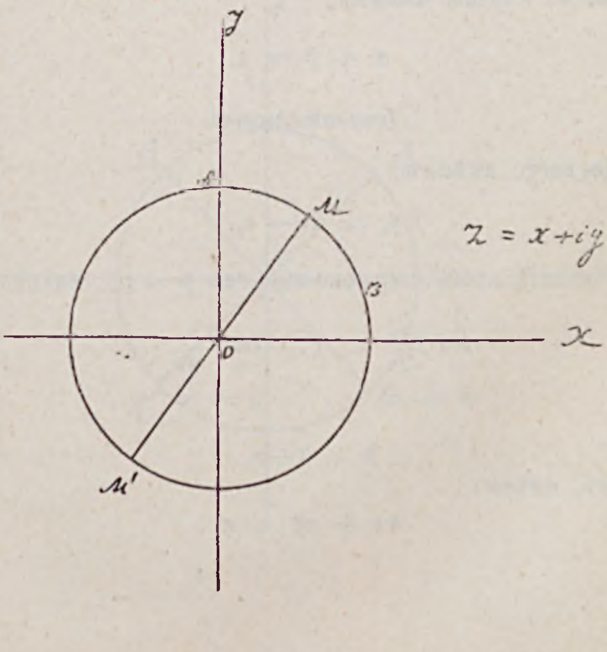
если ϑ *содержится въ границахъ* (230).

Эта теорема ляжетъ въ основу нашихъ дальнѣйшихъ изслѣдо ваній.

Допустимъ, что какимъ-либо путемъ мы убѣдились, что на окружности $|z| = 1$ круга сходимости ряда (1) расположена только одна его особая точка; при чемъ ея положеніе на этой окружности не извѣстно. Тогда ее можно опредѣлить на основаніи *правила*, къ которому непосредственно приводятъ формулы (231) и (232): *Возьмемъ на окружности* $|z| = 1$ *какія-либо двѣ точки: A и B и вычислимъ для нихъ соотвѣтственно числа* α *и* β *согласно формуламъ* (231) *или* (232). *Выдѣлимъ далѣе на окружности* $|z| = 1$ *двѣ дуги:* $2\pi\alpha$ *и* $2\pi\beta$ *подъ условіемъ, чтобы ихъ средины совпали соотвѣтственно съ точками A и B. Тогда оказывается, что два конца этихъ дугъ совпадаютъ и, при томъ, въ искомой особой точкѣ. Въ частности, если A служитъ особой точкой ряда* (1), *то* $\alpha = 0$ *и обратно: если* $\alpha = 0$, *то A представляетъ особую точку строки* (1).

Обратимся теперь къ случаю, когда на окружности круга сходимости ряда (1) лежатъ двѣ его особыя точки: $e^{\vartheta_1 i}$ и $e^{\vartheta_2 i}$. Мы ограничимся здѣсь установленіемъ одной теоремы, которая будетъ полезна намъ впослѣдствіи.

Теорема 3. Пусть $A = e^{\vartheta_1 i}$ и $B = e^{\vartheta_2 i}$ *будутъ особыя точки строки* (1).



Разобьемъ дуги $\overset{\frown}{AB}$ *и* $\overset{\smile}{AB}$ *пополамъ и обозначимъ черезъ* M *и* M' *ихъ средины.*

Разсмотримъ послѣ этого два ряда чиселъ:

$$\alpha_{p-\nu},\ \alpha_{p-\nu+1},\ \ldots,\ \alpha_{p+\nu} \tag{233}$$

и

$$\beta_{p-\nu},\ \beta_{p-\nu+1},\ \ldots,\ \beta_{p+\nu}, \tag{234}$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} \alpha_s &= R\left[e^{\frac{s(\vartheta_1+\vartheta_2)i}{2}-\beta_p i}\,a_s\right];\\ \beta_s &= R\left[(-1)^s\, e^{\frac{s(\vartheta_1+\vartheta_2)i}{2}-\beta_p i}\,a_s\right]. \end{aligned}\right. \tag{235}$$

При этомъ β_p *выбирается подъ условіемъ, чтобы*

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|\alpha_{p_n}|} = \lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|\beta_{p_n}|} = 1. \tag{236}$$

Обозначимъ черезъ s_1 *и* s_2 *число перемѣнъ знака соотвѣтственно въ рядахъ* (233) *и* (234) *при* $p = p_n$, *а черезъ* α *и* β *нижніе предѣлы при* $n = \infty$ *соотвѣтственно отношеній* $\frac{s_1}{2\nu}$ *и* $\frac{s_2}{2\nu}$.

Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$\alpha + \beta = 1. \tag{237}$$

Доказательство.

Прежде всего имѣемъ:

$$s_2 = 2\nu - s_1. \tag{238}$$

На основаніи этого соотношенія, гдѣ $p = p_n$, находимъ:

$$\underline{\lim}_{n=\infty} \frac{s_2}{2\nu} < 1 - \underline{\lim}_{n=\infty} \frac{s_1}{2\nu},$$

или:

$$\beta < 1 - \alpha.$$

Значитъ, имѣемъ:

$$\pi\alpha + \pi\beta < \pi. \tag{239}$$

Далѣе, обозначая черезъ ϑ выраженіе

$$\vartheta = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}, \tag{240}$$

преобразуемъ рядъ (1) при помощи подстановокъ:

$$z \mid z\, e^{\vartheta i}$$

и

$$z \mid -z\, e^{\vartheta i}.$$

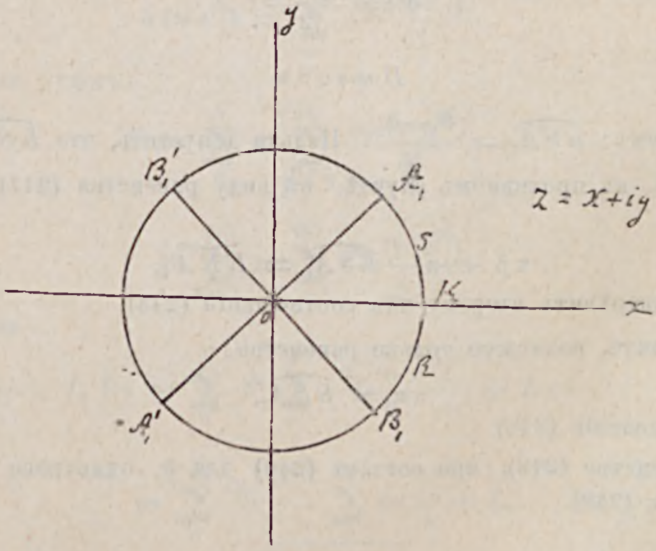
Будемъ имѣть:

$$\sum_0^\infty a_s\, e^{s\vartheta i}\, z^s \tag{241}$$

и

$$\sum_0^\infty (-1)^s\, a_s\, z^{s\vartheta i}. \tag{242}$$

Такъ какъ $e^{\vartheta_1 i}$ и $e^{\vartheta_2 i}$ особыя точки строки (1), то, въ силу предыдущихъ подстановокъ, утверждаемъ, что особыя точки строки (241) суть: $A_1 = e^{\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2} i}$ и $B_1 = e^{\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2} i}$, а особыя точки ряда (242) таковы: $A'_1 = e^{(\pi + \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}) i}$ и $B'_1 = e^{(\pi + \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2}) i}$.



Имѣя теперь въ виду нашу основную теорему, находимъ:

$$\pi\alpha \geqslant \overparen{KSA_1};$$
$$\pi\beta \geqslant \overparen{KRA'_1}. \tag{243}$$

Отсюда получаемъ:

$$\pi\alpha + \pi\beta \geqslant \overparen{KSA_1} + \overparen{KBA'_1}. \tag{244}$$

Изъ чертежа видно, что

$$\overparen{KSA_1} + \overparen{KBA'_1} = \pi. \tag{245}$$

А потому имѣемъ:

$$\pi\alpha + \pi\beta \geqslant \pi. \tag{246}$$

Сопоставляя между собою соотношенія (239) и (246), заключаемъ, что сохраняетъ силу равенство:

$$\pi\alpha + \pi\beta = \pi, \tag{247}$$

что равносильно соотношенію (237).

Слѣдствіе. Пусть будетъ $\vartheta_1 > \vartheta_2$. *Въ такомъ случаѣ должно быть:*

$$\vartheta - \vartheta_2 = \pi\alpha, \tag{248}$$

или

$$\vartheta_1 - \vartheta = \pi\alpha, \tag{249}$$

гдѣ

$$\vartheta = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}.$$

Выводъ.

Имѣемъ: $\overparen{KSA_1} = \dfrac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}$. Нельзя допустить, что $\overparen{KSA_1} < \pi\alpha$, такъ какъ въ противномъ случаѣ, въ виду равенства (247), оказалось бы:

$$\pi\beta < \pi - \overparen{KSA_1} = \overparen{KRA'_1},$$

что противорѣчитъ второму изъ соотношеній (243).

Значитъ, возможно только равенство:

$$\pi\alpha = \overparen{KSA_1}, \tag{250}$$

или соотношеніе (248).

Равенство (249), при составѣ (240) для ϑ, одинаково съ соотношеніемъ (248).

ГЛАВА III.

Опредѣленіе положенія особыхъ точекъ строки Тэйлора, расположенныхъ на границѣ полигона Бореля.

§ 1. Функція $f_\varphi(z)$. Связь особыхъ точекъ этой функціи съ особыми точками функціи $f(z)$.

Будемъ предполагать, что коэффиціентъ a_n строки

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n \tag{1}$$

удовлетворяетъ условію:

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1. \tag{2}$$

Разсмотримъ тогда слѣдующій рядъ:

$$f_\varphi(z) = \sum_0^\infty \vartheta(n e^{\varphi i}) z^n, \tag{3}$$

гдѣ

$$\vartheta(n e^{\varphi i}) = \sum_0^\infty \frac{a_q (n e^{\varphi i})^q}{q!}. \tag{4}$$

Пусть будетъ:

$$L = \sum_0^N z^n \sum_{P+1}^\infty \frac{a_q (n e^{\varphi i})^q}{q!} + \\ + \sum_{N+1}^\infty z^n \sum_0^\infty \frac{a_q (n e^{\varphi i})^q}{q!}. \tag{5}$$

Тогда

$$f_\varphi(z) = \sum_0^N z^n \sum_0^P \frac{a_q (n e^{\varphi i})^q}{q!} + L = \\ = \sum_0^P \frac{a_q e^{q\varphi i}}{q} \sum_0^N n^q z^n + L. \tag{6}$$

Такъ какъ

$$n^q = (-1)^q \frac{d^q}{d\lambda^q}_{\lambda=o} e^{-n\lambda}, \tag{7}$$

то

$$f_\varphi(z) = \sum_o^P \frac{(-1)^q a_q e^{q\varphi i}}{q!} \frac{d^q}{d\lambda^q}_{\lambda=o} \frac{1-e^{-(N+1)} z^{N+1}}{1-e^{-\lambda} z} + L. \tag{8}$$

Далѣе, имѣемъ:

$$\begin{aligned} |L| < \sum_o^N |z|^n \sum_{P+1}^\infty \frac{|a_q| n^q}{q!} + \\ + \sum_{N+1}^\infty |z|^n \sum_o^\infty |a_q| n^q. \end{aligned} \tag{9}$$

Принимая во вниманіе неравенство

$$|a_q| < M (1+\varepsilon)^q, \tag{10}$$

являющееся слѣдствіемъ соотношенія (2), — при чемъ M опредѣленное большое положительное число, а ε опредѣленное малое положительное число, — можемъ написать:

$$\begin{aligned} |L| < M \sum_o^N |z|^n \sum_{P+1}^\infty \frac{(1+\varepsilon)^q n^q}{q!} + \\ + M \sum_{N+1}^\infty |z|^n \sum_o^\infty \frac{(1+\varepsilon)^q n^q}{q!} = M K, \end{aligned} \tag{11}$$

гдѣ

$$\begin{aligned} K = \sum_o^N |z|^n \sum_{P+1}^\infty \frac{(1+\varepsilon)^q n^q}{q!} + \sum_{N+1}^\infty |z|^n e^{(1+\varepsilon)n} = \\ = \sum_o^N |z|^n e^{(1+\varepsilon)n} - \sum_o^N |z|^n \sum_o^P \frac{(1+\varepsilon)^q n^q}{q!} + \sum_{N+1}^\infty |z|^n e^{(1+\varepsilon)n}. \end{aligned} \tag{12}$$

Пусть значенія z ограничены условіемъ:

$$|z|\, e^{1+\varepsilon} < \alpha < 1, \tag{13}$$

гдѣ α опредѣленное число.

Такъ какъ при этомъ

$$\lim_{N=\infty} \sum_{N+1}^{\infty} |z|^n e^{(1+\varepsilon)n} = \lim_{N=\infty} \frac{|z|^{N+1} e^{(1+\varepsilon)(N+1)}}{1-|z|\, e^{1+\varepsilon}} = 0,$$

то можемъ написать:

$$K_1 = \lim_{N=\infty} K = \sum_{0}^{\infty} |z|^n e^{(1+\varepsilon)n} - \sum_{0}^{\infty} |z|^n \sum_{0}^{P} \frac{(1+\varepsilon)^q n^q}{q!}. \tag{14}$$

Первая изъ этихъ двухъ суммъ сходится въ силу условія (13), а вторая въ виду того, что

$$\sum_{0}^{P} \frac{(1+\varepsilon)^q n^q}{q!} < e^{(1+\varepsilon)n}.$$

Далѣе, обозначая черезъ R нѣкоторое цѣлое положительное число, изобразимъ выраженіе (14) слѣдующимъ образомъ:

$$K_1 = \sum_{0}^{\infty} |z|^n e^{(1+\varepsilon)n} - \sum_{0}^{R} |z|^n \sum_{0}^{P} \frac{(1+\varepsilon)^q n^q}{q!} - \tag{15}$$
$$- \sum_{R+1}^{\infty} |z|^n \sum_{0}^{P} \frac{(1+\varepsilon)^q n^q}{q!}.$$

Имѣя въ виду, что $K_1 > 0$ и

$$\sum_{R+1}^{\infty} |z|^n \sum_{0}^{P} \frac{(1+\varepsilon)^q n^q}{q!} < \sum_{R+1}^{\infty} |z|^n e^{(1+\varepsilon)n} < \sum_{R+1}^{\infty} \alpha^n = \tag{16}$$
$$= \frac{\alpha^{R+1}}{1-\alpha},$$

находимъ:

$$0 < K_1 < \sum_{o}^{\infty} |z|^n e^{(1+\varepsilon)n} - \sum_{o}^{R} |z|^n \sum_{o}^{P} \frac{(1+\varepsilon)^q n^q}{q!} + \frac{\alpha^{R+1}}{1-\alpha}. \quad (17)$$

Заставимъ въ этихъ послѣднихъ соотношеніяхъ число P расти до безконечности. Въ предѣлѣ получимъ:

$$0 < K_2 = \lim_{P=\infty} K_1 < \sum_{R+1}^{\infty} |z|^n e^{(1+\varepsilon)n} + \frac{\alpha^{R+1}}{1-\alpha} < \frac{2\alpha^{R+1}}{1-\alpha}. \quad (18)$$

Такъ какъ число R можетъ быть сколь-угодно большимъ, то на основаніи результата (18) заключаемъ, что

$$K_2 = \lim_{P=\infty} K_1 = 0. \quad (19)$$

Такимъ образомъ мы пришли къ выводу:

$$\lim_{\substack{N=\infty \\ P=\infty}} K = 0.$$

На основаніи соотношеній (11) теперь можемъ заключить, что

$$\lim_{\substack{N=\infty \\ P=\infty}} |L| = 0.$$

и, слѣдовательно,

$$\lim_{\substack{N=\infty \\ P=\infty}} L = 0. \quad (20)$$

Послѣ этого обратимся къ выраженію (8). Допустимъ, что въ немъ сперва N, а потомъ P растутъ безгранично. Въ виду результата (20), будемъ имѣть:

$$f_\varphi(z) = \sum_{o}^{\infty} \frac{(-1)^q a_q e^{q\varphi i}}{q!} \frac{d^q}{d\lambda^q} \frac{1}{1-z e^{-\lambda}}\Bigg|_{\lambda=o}. \quad (21)$$

Теорема 1. Рядъ (21) сходится равномѣрно и абсолютно внутри области, опредѣляемой неравенствомъ:

$$|lgz| > r, \tag{22}$$

гдѣ число r больше 1 и какъ-угодно близко къ единицѣ.

Доказательство.

Назовемъ P_N выраженіе:

$$P_N = \sum_{N+1}^{\infty} \frac{(-1)^q a_q e^{q\varphi i}}{q!} \frac{d^q}{d\lambda^q} \frac{1}{1-z e^{-\lambda}}_{\lambda=o}. \tag{23}$$

Тогда $f_\varphi(z)$ изобразится такъ:

$$f_\varphi(z) = \sum_{o}^{N} \frac{(-1)^q a_q e^{q\varphi i}}{q!} \frac{d^q}{d\lambda^q} \frac{1}{1-z e^{-\lambda}}_{\lambda=o} + P_N. \tag{24}$$

Но

$$\frac{1}{q!} \frac{d^q}{d\lambda^q} \frac{1}{1-z e^{-\lambda}}_{\lambda=o} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{dt}{t^{q+1}(1-z e^{-t})}, \tag{25}$$

гдѣ c простой замкнутый контуръ, содержащій внутри себя точку $t=o$ и не заключающій внутри себя точки lgz.

А потому

$$P_N = \frac{1}{2\pi i} \sum_{N+1}^{\infty} (-1)^q a_q e^{q\varphi i} \int_c \frac{dt}{t^{q+1}(1-z e^{-t})},$$

или, если

$$t = (1+\eta) e^{\psi i}, \tag{26}$$

гдѣ

$$1 < 1+\eta < r,$$

то

$$P_N = \frac{1}{2\pi i} \sum_{N+1}^{\infty} \frac{(-1)^q a_q}{(1+\eta)^q} e^{q\varphi i} \int_o^{2\pi} \frac{e^{-q\psi i}\, d\psi}{\left(1-z e^{-(1+\eta) e^{\psi i}}\right)}. \tag{27}$$

Отсюда находимъ:

$$|P_N| < \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi}\frac{d\psi}{|1-z\,e^{-(1+\eta)\,e^{\psi i}}|}\sum_{N+1}^{\infty}\frac{|a_q|}{(1+\eta)^q}$$
$$< \frac{M}{2\pi}\int_o^{2\pi}\frac{d\psi}{|1-z\,e^{-(1+\eta)\,e^{\psi i}}|}\sum_{N+1}^{\infty}\left(\frac{1+\varepsilon}{1+\eta}\right)^n; \tag{28}$$

при чемъ положительное число ε, въ зависимости отъ величины N, можетъ быть сдѣлано какъ-угодно малымъ.

Мы будемъ предполагать, что $\varepsilon < \eta$. Въ такомъ случаѣ

$$\sum_{N+1}^{\infty}\left(\frac{1+\varepsilon}{1+\eta}\right)^q = \frac{\left(\frac{1+\varepsilon}{1+\eta}\right)^{N+1}}{1-\frac{1+\varepsilon}{1+\eta}} = \frac{\delta^{N+1}}{1-\delta}, \tag{29}$$

гдѣ

$$\delta = \frac{1+\varepsilon}{1+\eta},$$

и

$$|P_N| < \frac{M\,\delta^{N+1}}{2\pi\,(1-\delta)}\int_o^{2\pi}\frac{d\psi}{|1-z\,e^{-(1+\eta)e^{\psi i}}|}. \tag{30}$$

Въ виду того, что δ отъ z не зависитъ, на основанiи результата (30) утверждаемъ, что рядъ (21) сходится равномѣрно внутри области (22).

Далѣе, имѣемъ:

$$\sum_o^{\infty}\frac{|a_q|}{q!}\left|\frac{d^q}{d\lambda^q}\frac{1}{1-z\,e^{-\lambda}}\right|_{\lambda=o} < \sum_o^{N}\frac{|a_q|}{q!}\left|\frac{d^q}{d\lambda^q}\frac{1}{1-z\,e^{-\lambda}}\right|_{\lambda=o} +$$
$$+\frac{M\delta^{N+1}}{2\pi\,(1-\delta)}\int_o^{2\pi}\frac{d\,\psi}{|1-z\,e^{-(1+\eta)\,e^{\psi i}}|}. \tag{31}$$

Правая часть неравенства (31) представляетъ опредѣленное число для каждаго значенiя z, удовлетворяющаго условiю (22). Значитъ, и лѣвая его часть для каждаго такого значенiя z тоже оказывается числомъ опредѣленнымъ, т. е., строка (21) сходится въ области (22) абсолютно.

Теорема 2. Если $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\kappa, \ldots$ *всевозможныя особыя точки основной вѣтви функціи* $f(z)$, *то*

$$e^{-\frac{e^{\varphi i}}{\alpha_\kappa}} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots\ldots) \tag{32}$$

служатъ всевозможными особыми точками основной вѣтви функціи $f_\varphi(z)$.

Доказательство.

При доказательствѣ теоремы мы будемъ пользоваться слѣдующей теоремой Гадамара:[1] *Пусть даны двѣ строки Маклорена*:

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n \tag{33}$$

и

$$\varphi(z) = \sum_0^\infty b_n z^n. \tag{34}$$

Составимъ рядъ:

$$F(z) = \sum_0^\infty a_n b_n z^n. \tag{35}$$

Въ такомъ случаѣ основная вѣтвь функціи $F(z)$ *не имѣетъ другихъ особыхъ точекъ, кромѣ тѣхъ, которыя можно получить, умножая различныя особыя точки основной вѣтви функціи* $f(z)$ *на всевозможныя особыя точки основной вѣтви функціи* $\varphi(z)$.

Пусть $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\kappa, \ldots$ будутъ особыя точки основной вѣтви функціи $f(z)$, а $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_s, \ldots$ особыя точки основной вѣтви функціи $\varphi(z)$. Согласно теоремѣ Гадамара, особыя точки основной вѣтви функціи $F(z)$ таковы:

$$\beta_\kappa \gamma_s \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, 3, \ldots \\ s = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}. \tag{36}$$

---

[1]) *Hadamard:* „Théorème sur les séries entières." Acta Mathematica, t. 22, 1898, p. 55.

Какъ было обнаружено самимъ Гадамаромъ [1]), каждое изъ произведеній (36) представляетъ особую точку функціи $F(z)$, если между ними нѣтъ равныхъ. Если же между ними есть равныя, то точка, опредѣляемая такою изъ равныхъ величинъ, можетъ и не оказаться особой функціи $F(z)$.

Послѣ этихъ предварительныхъ замѣчаній разсмотримъ два слѣдующіе ряда:

$$\sum_{0}^{\infty} (-1)^q \, a_q \, e^{q\varphi i} \, \lambda^q \tag{37}$$

и

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{\lambda^q}{q!} \frac{d^q}{d\lambda^q} \frac{1}{1-z\, e^{-\lambda}} \Bigg|_{\lambda=0}. \tag{38}$$

Послѣдній изъ нихъ опредѣляетъ функцію:

$$\frac{1}{1-z\, e^{-\lambda}}, \tag{39}$$

особыя точки которой при какомъ-либо данномъ z представляютъ рѣшенія уравненія:

$$e^{\lambda} = z, \tag{40}$$

т. е.,

$$\lambda = [\, lgz\,], \tag{41}$$

гдѣ $[\, lgz\,]$ выражаетъ всевозможныя значенія lgz.

Далѣе, особыя точки основной вѣтви функціи (37) таковы:

$$\lambda = -\alpha_k \, e^{-\varphi i} \; (k = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots\ldots). \tag{42}$$

На основаніи теоремы Гадамара утверждаемъ, что возможныя особыя точки основной вѣтви функціи, опредѣляемой рядомъ:

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^q \, \lambda^q \, a_q \, e^{q\varphi i}}{q!} \frac{d^q}{d\lambda^q} \frac{1}{1-z\, e^{-\lambda}} \Bigg|_{\lambda=0}, \tag{43}$$

---

[1]) См., напр., *Hadamard:* „La série de Taylor et son prolongement analytique.“ Scientia, mai 1901, pp. 70—71.

при какомъ-либо данномъ значеніи z суть:

$$\lambda = -\alpha_k e^{-\varphi i} [\lg z] \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (44)$$

Обратно:

$$z = e^{-\frac{\lambda e^{\varphi i}}{\alpha_k}} \quad (k = 1, 2, 3, 4, \ldots) \qquad (45)$$

служатъ возможными особыми точками ряда (43) при какомъ-либо данномъ λ.

Въ частности, если $\lambda = 1$, то

$$z = e^{-\frac{e^{\varphi i}}{\alpha_k}} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (46)$$

представляютъ возможныя особыя точки ряда (21).

При этомъ, какъ легко удостовѣриться, между числами (46) нѣтъ равныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что, при $k \neq p$, сохраняетъ силу равенство:

$$e^{-\frac{e^{\varphi i}}{\alpha_k}} = e^{-\frac{e^{\varphi i}}{\alpha_p}}. \qquad (47)$$

Отсюда находимъ:

$$\frac{e^{\varphi i}}{\alpha_k} + 2s\pi i = \frac{e^{\varphi i}}{\alpha_p}, \qquad (48)$$

гдѣ s цѣлое положительное или отрицательное число или же нуль.

Соотношеніе (48) разбивается на два слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos(\varphi - \vartheta_k)}{|\alpha_k|} &= \frac{\cos(\varphi - \vartheta_p)}{|\alpha_p|}; \\ \frac{\sin(\varphi - \vartheta_k)}{|\alpha_k|} + 2\pi s &= \frac{\sin(\varphi - \vartheta_p)}{|\alpha_p|}. \end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

Такъ какъ $|\alpha_k| \geqslant 1$ и $|\alpha_p| \geqslant 1$, то второе изъ предыдущихъ равенствъ возможно лишь при условіи, что $s = 0$.

Значитъ, имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos(\varphi - \vartheta_k)}{|\alpha_k|} &= \frac{\cos(\varphi - \vartheta_p)}{|\alpha_p|}; \\ \frac{\sin(\varphi - \vartheta_k)}{|\alpha_k|} &= \frac{\sin(\varphi - \vartheta_p)}{|\alpha_p|}. \end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

Дѣля почленно второе изъ этихъ равенствъ на первое, получимъ:

$$tg\ (\varphi-\vartheta_\kappa) = tg\ (\varphi-\vartheta_p). \tag{51}$$

Отсюда находимъ:

$$\vartheta_\kappa = \vartheta_p + \sigma\pi, \tag{52}$$

гдѣ σ цѣлое положительное или отрицательное число или же нуль.

Принимая во вниманіе соотношенія (50), утверждаемъ, что σ есть цѣлое четное число или нуль, т. е., $\sigma = 2\sigma_1$. Значитъ:

$$\vartheta_\kappa = \vartheta_p + 2\,\sigma_1\,\pi. \tag{53}$$

Въ виду результата (53), на основаніи соотношеній (50) находимъ: $|\alpha_\kappa| = |\alpha_p|$ и, слѣдовательно, $\alpha_\kappa = \alpha_p$.

Такимъ образомъ мы удостовѣряемся, что равенство (47) возможно лишь, если $k = p$.

Теорему еще нельзя считать установленной, такъ какъ мы убѣдились только, что между точками (46) содержатся также и особыя точки строки (21) или ряда (3), но еще не обнаружено, что каждая изъ этихъ точекъ служитъ особой для функціи $f_\varphi(z)$.

Постараемся сейчасъ удостовѣриться, что каждая изъ точекъ (46) является особой для функціи $f_\varphi(z)$. Полагаемъ для этой цѣли въ строкѣ (43) $z = z_0$, гдѣ z_0 означаетъ какое-либо изъ чиселъ (46). Тогда, согласно формулѣ (44), получимъ возможныя особыя точки строки (43) при $z = z_0$:

$$\lambda = -\alpha_\kappa\, e^{-\varphi i}\,[\, lgz_0\,]\ \ (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{54}$$

Между числами (54) только одно равно 1. Дѣйствительно, допустимъ противное, а именно: пусть

$$\lambda = 1 = -\alpha_\kappa\, e^{-\varphi i}\,[\, lgz_0\,]_1 = -\alpha_p\, e^{-\varphi i}\,[\, lgz_0\,]_2, \tag{55}$$

гдѣ $[\,lgz_0\,]_1$ и $[\,lgz_0\,]_2$ суть какія-либо два значенія lgz_0; при чемъ предполагается, что $k \neq p$.

Отсюда находимъ:

$$z_0 = e^{-\frac{e^{\varphi i}}{\alpha_\kappa}} = e^{-\frac{e^{\varphi i}}{\alpha_p}},$$

что, какъ видѣли въ предыдущемъ, невозможно, разъ $k \neq p$.

Соотношенія (55) очевидно не мыслимы также, если, при $k = p$, $[\,lgz_0\,]_1 \neq [\,lgz_0\,]_2$.

А если такъ, то, согласно изслѣдованіямъ Гадамара, $\lambda = 1$ есть особая точка ряда (43) при $z = z_0$.

Обратно: z_0 есть особая точка ряда (21) или (3).

Такъ какъ подъ z_0 мы разумѣемъ любое изъ чиселъ (46), то каждое изъ нихъ, слѣдовательно, представляетъ особую точку строки (3).

Замѣчаніе. Теорема Гадамара примѣнима не только въ случаѣ, когда особыя точки каждой изъ функцій (33) и (34) составляютъ счетную послѣдовательность, но также и тогда, когда онѣ представляютъ одну или нѣсколько послѣдовательностей высшаго порядка.

Обозначаемъ черезъ ξ какую-либо особую точку функціи (33), а черезъ η какую-либо особую точку функціи (34). Тогда $\xi\eta$ вообще служитъ особой точкой строки (35); при чемъ только такимъ путемъ получаются всевозможныя особыя точки основной вѣтви функціи (35). Повторяя тогда дословно доказательство предыдущей теоремы, расширяемъ ее и на случай, когда особыя точки основной вѣтви функціи $f(z)$ (1) составляютъ одну или нѣсколько послѣдовательностей высшаго порядка: *Если ξ служитъ какою-либо особою точкой основной вѣтви функціи $f(z)$, то $e^{-\frac{e^{\varphi i}}{\xi}}$ представляетъ особую точку основной вѣтви функціи $f_2(z)$; при чемъ только такимъ путемъ получаются всевозможныя особыя точки основной вѣтви этой функціи.*

Примѣръ. Допустимъ, что на коэффиціенты строки (1) не наложено иныхъ ограниченій, кромѣ условія (2). Тогда, какъ впервые указалъ Pringsheim [1]) и строго обосновали Borel [2]), Fabry [3]) и Leau [4]), окружность $|z| = 1$ представляетъ дѣйствительный купюръ строки (1), т. е., любая ея точка оказывается особой для ряда (1). Значитъ, $z = e^{\psi i}$, гдѣ ψ какое-либо число, заключенное въ границахъ: $o \leqslant \psi < 2\pi$, представляетъ особую точку строки (1).

---

[1]) *Pringsheim*: „Ueber Functionen, welche in gewissen Puncten endliche Differential-Quotienten jeder endlichen ordnung, aber keine Taylor'sche Reihenentwickelung besitzen." Math. Ann., t. 44, 1894.

[2]) *Borel*: „Sur les séries de Taylor." C. R., 14 décembre 1896.
„Sur les séries de Taylor." Acta Mathematica, t. 21, 1897.

[3]) *Fabry*: „Sur les séries de Taylor qui ont une infinité de points singuliers." Acta Mathematica, t. 22, 1899.

[4]) *Leau*: „Recherche des singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor." Journal de Mathématiques, 5-e série, t. 5, 1899.

На основаніи замѣчанія къ предыдущей теоремѣ утверждаемъ, что строка (3) имѣетъ своею особой точкой

$$z = e^{-e^{(\varphi-\psi)i}}. \tag{56}$$

Пусть будетъ:

$$z = x + iy, \tag{57}$$

гдѣ x и y суть прямоугольныя координаты точки плоскости перемѣннаго z.

Имѣемъ:

$$\begin{aligned} x &= e^{-\cos(\varphi-\psi)} \cos\left[\sin(\varphi-\psi)\right]; \\ y &= -e^{-\cos(\varphi-\psi)} \sin\left[\sin(\varphi-\psi)\right]. \end{aligned} \tag{58}$$

Уравненіе (58) опредѣляетъ на плоскости перемѣннаго z особую линію функціи (3), соотвѣтствующую дѣйствительному купюру $|z| = 1$ строки (1).

Исключивъ изъ уравненій (58) число $\varphi-\psi$, найдемъ уравненіе этой линіи между координатами x и y:

$$\frac{1}{4}\left[lg\,(x^2+y^2)\right]^2 + \left[arctg\,\frac{y}{x}\right]^2 = 1. \tag{59}$$

Пусть будетъ:

$$x = \rho\cos\varphi,\; y = \rho\sin\varphi. \tag{60}$$

Тогда соотношеніе (59) изобразится такъ:

$$(lg\,\rho)^2 + \varphi^2 = 1. \tag{61}$$

Это соотношеніе представляетъ уравненіе трактуемой особой линіи функціи (3) въ полярныхъ координатахъ.

Такъ какъ

$$z = \rho\, e^{\varphi i}, \tag{62}$$

то соотношеніе (61) можно представить такъ:

$$|\,lgz\,| = 1. \tag{63}$$

Сопоставляя уравненіе (63) съ неравенствомъ (22), гдѣ $r > 1$ и произвольно-близко къ единицѣ, заключаемъ, что кривая (63) составляетъ границу безконечно-большой области, внутри которой рядъ (21) въ данномъ случаѣ равномѣрно и абсолютно сходится.

Замѣтимъ, что кривая (61) замкнутая, симметрично расположена относительно оси иксовъ, помѣщается всѣми своими точками между прямыми $x = e^{-1}$ и $x = e$ и касается этихъ послѣднихъ въ точкахъ $M(e^{-1}, o)$ и $N(e, o)$.

На основаніи предыдущей теоремы и замѣчанія къ ней находятся всѣ особыя точки функціи (3), если извѣстны всѣ особыя точки функціи (1). Обратно: если извѣстны особыя точки функціи (3), то особыя точки функціи $f_\varphi(z)$ находятся при помощи простыхъ выкладокъ.

Пусть, напр.,

$$\beta = \beta_1 + i\beta_2, \tag{64}$$

гдѣ β_1 и β_2 вещественныя числа, представляетъ особую точку функціи $f_\varphi(z)$. Тогда соотвѣтствующая особая точка α_κ функціи $f(z)$ опредѣлится изъ уравненія:

$$\beta_1 + i\beta_2 = e^{-\frac{e^{\varphi i}}{\alpha_\kappa}}, \tag{65}$$

которое разбивается на два слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= e^{-\frac{\cos(\varphi-\vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|}} \cos\left[\frac{\sin(\varphi-\vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|}\right]; \\ \beta_2 &= -e^{-\frac{\cos(\varphi-\vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|}} \sin\left[\frac{\sin(\varphi-\vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Отсюда прежде всего имѣемъ:

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = e^{-\frac{2\cos(\varphi-\vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|}}$$

и

$$\frac{\cos(\varphi-\vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|} = -\frac{1}{2} \lg(\beta_1^2+\beta_2^2) = \gamma. \tag{67}$$

Далѣе, изъ уравненій (66) имѣемъ:

$$\operatorname{tg}\left[\frac{\sin(\varphi-\vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|}\right] = -\frac{\beta_2}{\beta_1}$$

и

$$\frac{\sin(\varphi-\vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|} = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right) = \Delta; \tag{68}$$

при чемъ Δ есть значеніе символа $-\operatorname{arctg}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)$, численно меньшее единицы.

Изъ уравненій (67) и (68) находимъ:

$$tg(\varphi-\vartheta_\kappa) = \frac{\Delta}{\gamma} = \delta. \tag{69}$$

Рѣшая это уравненіе, находимъ сперва два значенія ϑ_κ: $\vartheta_{0\kappa}$ и $\vartheta_{1\kappa}$, содержащіяся въ границахъ между o и 2π. Изъ этихъ двухъ рѣшеній уравненія (69) надо выбрать то, которое не противорѣчитъ соотношеніямъ (67) и (68).

Пусть оно будетъ $\vartheta_{0\kappa}$. $\vartheta_{0\kappa}$ будетъ амплитудой искомой особой точки функціи $f(z)$. $|\alpha_\kappa|$ опредѣлится тогда изъ соотношеній (67) и (68):

$$|\alpha_\kappa| = \frac{\sin(\varphi-\vartheta_{0\kappa})}{\Delta} = \frac{\cos(\varphi-\vartheta_{0\kappa})}{\gamma}. \tag{70}$$

Значитъ, искомая особая точка функціи $f(z)$ есть:

$$z = \frac{\sin(\varphi-\vartheta_{0\kappa})}{\Delta} e^{i\vartheta_{0\kappa}}. \tag{71}$$

§ 2. Выводъ второй основной формулы для опредѣленія особыхъ точекъ функціи $f(z)$ (1), расположенныхъ на границѣ полигона Бореля.

Въ § 1 главы 1 выведена была нами первая основная формула (23) для опредѣленія особыхъ точекъ строки (1), лежащихъ на границѣ полигона Бореля K. Въ § 4 той же главы нами была отмѣчена другая основная формула:

$$\frac{\sin(\varphi-\vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|} = m_\varphi, \tag{72}$$

которая еще нужна для полнаго рѣшенія интересующаго насъ вопроса.

Въ формулѣ (72) не извѣстна еще функція m_φ. Ея опредѣленіе основывается на двухъ теоремахъ, на выводѣ которыхъ мы сейчасъ и остановимся.

Теорема 1. Рядъ (3) *имѣетъ на окружности своего круга сходимости одну или двѣ особыя точки; при чемъ двѣ его особыя точки расположены на ней только въ томъ случаѣ, если* φ *представляетъ амплитуду какой-либо вершины полигона* K.

Доказательство.

Изъ § 1 главы 1 мы знаемъ, что

$$\frac{1}{r_\varphi} = e^{\frac{1}{\rho}} = \lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\vartheta(p\, e^{\varphi i})|} = e^{\frac{\cos(\varphi - \vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|}}. \tag{73}$$

Здѣсь α_κ означаетъ особую точку ряда (1), которая принадлежитъ къ тому же прямолинейному элементу—сторонѣ полигона K, какъ и точка $M(\rho, \varphi)$.

Изъ соотношеній (73) находимъ:

$$r_\varphi = e^{-\frac{\cos(\varphi - \vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|}}. \tag{74}$$

Это выраженіе представляетъ величину радіуса круга сходимости ряда (3). При этомъ предполагается, что

$$|\varphi - \vartheta_\kappa| < \frac{\pi}{2}. \tag{75}$$

На основаніи выраженія (74) утверждаемъ, что на окружности $|z| = r_\varphi$ круга сходимости ряда (3) лежитъ его особая точка $e^{-\frac{e^{\varphi i}}{\alpha_\kappa}}$. Легко видѣть, что, если φ не совпадаетъ съ амплитудой какой-либо вершины полигона K, то на этой окружности не лежитъ иной особой точки функціи (3). Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что и точка $e^{-\frac{e^{\varphi i}}{\alpha_p}}$, гдѣ $p \neq k$, также расположена на окружности $|z| = r_\varphi$. Въ такомъ случаѣ должно выполняться условіе:

$$e^{-\frac{\cos(\varphi - \vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|}} = e^{-\frac{\cos(\varphi - \vartheta_p)}{|\alpha_p|}},$$

или:

$$\frac{\cos(\varphi - \vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|} = \frac{\cos(\varphi - \vartheta_p)}{|\alpha_p|}. \tag{76}$$

Какъ было выяснено въ § 1 главы 1, послѣднее равенство возможно лишь въ томъ случаѣ, если φ представляетъ амплитуду какой-либо вершины многоугольника K, а α_k и α_p суть особыя точки строки (1), расположенныя на двухъ прямолинейныхъ элементахъ-сторонахъ полигона K, которыя сходятся въ разсматриваемой вершинѣ.

Вмѣстѣ съ тѣмъ ясно, что, если φ представляетъ амплитуду какой-либо вершины полигона K, то на окружности $|z| = r_\varphi$ лежатъ двѣ особыя точки: $e^{-\frac{e^{\varphi i}}{\alpha_k}}$ и $e^{-\frac{e^{\varphi i}}{\alpha_p}}$, гдѣ α_k и α_p удовлетворяютъ условію (76). При этомъ никакой третьей особой точки строки (3) не можетъ лежать на окружности $|z| = r_\varphi$. Дѣйствительно, допустимъ, что $e^{-\frac{e^{\varphi i}}{\alpha_s}}$, гдѣ число s отлично отъ p и k, тоже расположена на разсматриваемой окружности. Тогда должны выполняться условія:

$$\frac{\cos(\varphi-\vartheta_k)}{|\alpha_k|} = \frac{\cos(\varphi-\vartheta_p)}{|\alpha_p|} = \frac{\cos(\varphi-\vartheta_s)}{|\alpha_s|}. \tag{77}$$

Въ виду результатовъ, полученныхъ въ § 1 главы 1, утверждаемъ, что соотношенія возможны лишь при условіи, что s совпадаетъ съ k или p. Это означаетъ, что α_s совпадаетъ съ α_k или α_p и, слѣдовательно, точка $e^{-\frac{e^{\varphi i}}{\alpha_s}}$ совпадаетъ съ $e^{-\frac{e^{\varphi i}}{\alpha_k}}$ или $e^{-\frac{e^{\varphi i}}{\alpha_p}}$.

Такимъ образомъ теорема установлена.

Примѣръ. Пусть окружность $|z| = 1$ представляетъ дѣйствительный купюръ для строки (1). Тогда полигонъ K совпадаетъ съ кругомъ $|z| < 1$.

Такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ $|\alpha_k| = 1$ и $\rho = 1$, то на основаніи соотношеній (73) находимъ:

$$e = e^{\cos(\varphi-\vartheta_k)}.$$

Такъ какъ $|\varphi-\vartheta_k| < \frac{\pi}{2}$, то на основаніи этого соотношенія находимъ: $\vartheta_k = \varphi$. Формула (74) тогда обращается въ слѣдующую:

$$r_\varphi = e^{-1}. \tag{78}$$

Значитъ, при всякомъ φ радіусъ круга сходимости строки (3) равенъ e^{-1}. При разсмотрѣніи примѣра предыдущаго параграфа мы видѣли, что въ трактуемомъ случаѣ на окружности $|z| = e^{-1}$ круга сходимости ряда (3) лежитъ одна его особая точка: $z = e^{-1}$.

Обозначимъ далѣе черезъ b_n выраженіе:

$$b_n = e^{(n\vartheta - \beta_p)\,i}\ \vartheta\,(n\,e^{\varphi i}) = \beta'_n + i\,\beta''_n, \tag{79}$$

гдѣ

$$\beta'_n = \sum_0^\infty \frac{a_s'\,n^s}{s!};$$

$$\beta''_n = \sum_0^\infty \frac{a''_s\,n^s}{s!}; \tag{80}$$

при чемъ

$$a'_s = R\left[e^{(n\vartheta + s\varphi - \beta_p)\,i}\,a_s\right];$$

$$a''_s = R\left[-i\,e^{(n\vartheta + s\varphi - \beta_p)\,i}\,a_s\right]. \tag{81}$$

Разсмотримъ тогда одинъ изъ слѣдующихъ рядовъ чиселъ:

$$\beta'_{p-\nu},\ \beta'_{p-\nu+1},\ \cdots,\ \beta'_{p+\nu} \tag{82}$$

и

$$\beta''_{p-\nu},\ \beta''_{p-\nu+1},\ \cdots,\ \beta''_{p+\nu}. \tag{83}$$

Пусть это будетъ первый изъ нихъ.

Теорема 2. Пусть будетъ:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|\,\vartheta\,(p_n\,e^{\varphi i})\,|} = \frac{1}{r_\varphi} = e^{\frac{\cos\,(\varphi - \vartheta_\kappa)}{|\,\alpha_\kappa\,|}}, \tag{84}$$

гдѣ r_φ совпадаетъ съ такимъ же символомъ (73). *а число перемѣнъ знака въ рядѣ* (82) *при $p = p_n$ будетъ q. Назовемъ $\alpha\,(\vartheta)$ нижній предѣлъ отношенія $\frac{q}{2\nu}$ при $n = \infty$.*

Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$\frac{\sin\,(\varphi - \vartheta_\kappa)}{|\,\alpha_\kappa\,|} = \pi\,\alpha\,(\vartheta) - \vartheta, \tag{85}$$

если

$$1 \leqslant \vartheta \leqslant \pi - 1, \tag{86}$$

и

$$\frac{\sin\,(\varphi - \vartheta_\kappa)}{|\,\alpha_\kappa\,|} = -\pi\,\alpha\,(\vartheta) - \vartheta, \tag{87}$$

если

$$-\pi + 1 \leqslant \vartheta \leqslant -1. \tag{88}$$

Доказательство.

Допустимъ сперва, что φ не представляетъ амплитуды какой-либо вершины полигона K. Тогда строка (3), въ силу теоремы 1, имѣетъ на окружности $|\,z\,| = r_\varphi$ своего круга сходимости только одну особую точку: $e^{-\frac{e^{\varphi i}}{\alpha_\kappa}}$. Полярныя координаты этой послѣдней суть:

$$r_\varphi = e^{-\frac{\cos\,(\varphi - \vartheta_\kappa)}{|\,\alpha_\kappa\,|}}\ ;\ \theta_\kappa = -\frac{\sin\,(\varphi - \vartheta_\kappa)}{|\,\alpha_\kappa\,|}. \tag{89}$$

Преобразуемъ рядъ (3) при помощи подстановки:

$$z \mid r_\varphi\, z. \tag{90}$$

Будемъ имѣть:

$$\sum_{0}^{\infty} r_\varphi^{\,n}\, \vartheta\,(n\, e^{\varphi i})\, z^n. \tag{91}$$

Этотъ рядъ имѣетъ только одну особую точку

$$z = e^{i\,\theta_\kappa} \tag{92}$$

на окружности $|\,z\,| = 1$ своего круга сходимости.

Въ виду состава (89) числа θ_κ, гдѣ $|\,\alpha_\kappa\,| > 1$, находимъ:

$$-1 \leqslant \theta_\kappa \leqslant +1. \tag{93}$$

Ряду чиселъ (82) будетъ соотвѣтствовать здѣсь новый рядъ:

$$r_\varphi^{\,p-\nu}\, \beta'_{p-\nu},\ r_\varphi^{\,p-\nu+1}\, \beta'_{p-\nu+1},\ \ldots\ ,\ r_\varphi^{\,p+\nu}\, \beta'_{p+\nu}, \tag{94}$$

элементы котораго отличаются отъ элементовъ ряда (82) только положительными множителями: $r_\varphi^{\,n}$ $(n = p-\nu,\ p-\nu+1,\ \ldots,\ p+\nu)$.

А потому число перемѣнъ знака въ рядѣ (94) при $p = p_u$ будетъ то же q, что и въ рядѣ (82).

Приложимъ здѣсь теорему 2 § 5 главы 2. Для этого полагаемъ тамъ: $\varphi = \theta_\kappa$. На основаніи этой теоремы находимъ:

$$\vartheta - \theta_\kappa = \pi\,\alpha\,(\vartheta), \tag{95}$$

если

$$o \leqslant \vartheta - \theta_\kappa \leqslant \pi, \tag{96}$$

и

$$\theta_\kappa - \vartheta = \pi\,\alpha\,(\vartheta), \tag{97}$$

если

$$o \leqslant \theta_\kappa - \vartheta \leqslant \pi. \tag{98}$$

Условіе (96) выполняется, если ϑ содержится въ границахъ (86), а условіе (98) выполняется, если ϑ заключено въ границахъ (88).

Такъ какъ при этомъ соотношенія (95) и (97) совпадаютъ соотвѣтственно съ формулами (85) и (87), то теорему надо считать установленной въ случаѣ, если φ не представляетъ амплитуды какой-либо вершины полигона K.

Обратимся теперь къ случаю, когда $\varphi = \varphi_0$ служитъ амплитудой какой-либо вершины многоугольника K. Но предварительно сдѣлаемъ одно замѣчаніе относительно формулъ (95) и (97), предполагая, что въ нихъ φ есть амплитуда какой-либо точки, лежащей на сторонѣ l_κ полигона K, къ которой принадлежитъ и точка α_κ, но не совпадающей съ какимъ-либо концомъ этой стороны.

Такъ какъ

$$\theta_\kappa = -\frac{sin\ (\varphi - \vartheta_\kappa)}{|\,\alpha_\kappa\,|}$$

отъ ϑ не зависитъ, то въ силу формулъ (95) и (97) утверждаемъ, что, какъ $\pi\,\alpha\,(\vartheta) - \vartheta$, такъ и $-\pi\,\alpha\,(\vartheta) - \vartheta$ въ этихъ формулахъ отъ ϑ тоже не зависятъ. А потому каждое изъ выраженій $\pi\,\alpha\,(\vartheta) - \vartheta$ и $-\pi\,\alpha\,(\vartheta) - \vartheta$ представляетъ одну и ту же функцію φ:

$$A\,(\varphi) = \pi\,\alpha\,(\vartheta) - \vartheta, \tag{99}$$

если ϑ содержится въ границахъ (96), и

$$A\,(\varphi) = -\pi\,\alpha\,(\vartheta) - \vartheta, \tag{100}$$

если ϑ заключено въ границахъ (98).

Функцію $A\,(\varphi)$ будемъ называть отнесенной къ сторонѣ l_κ.

Соотношенія (95) и (97) изобразятся въ видѣ одной формулы:

$$\frac{\sin(\varphi - \vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|} = A(\varphi). \tag{101}$$

Амплитуду одного изъ концовъ стороны l_κ мы обозначили черезъ φ_0. Назовемъ амплитуду другого конца той же стороны φ_1; при чемъ пусть будетъ $\varphi_0 > \varphi_1$. Тогда равенство (101) сохраняетъ силу при всѣхъ значеніяхъ φ, удовлетворяющихъ условію:

$$\varphi_1 < \varphi < \varphi_0. \tag{102}$$

Разсмотримъ далѣе смежную съ l_κ сторону l_ρ полигона K, на которой расположена особая точка α_ρ строки (1) и которая встрѣчается съ l_κ въ точкѣ $M(\rho_0, \varphi_0)$; при чемъ

$$\frac{1}{\rho_0} = \lim_{p=\infty} \frac{1}{p} \lg |\vartheta(p e^{\varphi_0 i})|. \tag{103}$$

Обозначимъ черезъ φ_2 амплитуду другого конца стороны l_ρ; при чемъ пусть будетъ $\varphi_2 > \varphi_0$.

Назовемъ $B(\varphi)$ функцію $\pi\alpha(\vartheta) - \vartheta$ или $-\pi\alpha(\vartheta) - \vartheta$ при условіи, что

$$\varphi_0 < \varphi < \varphi_2. \tag{104}$$

Тогда будемъ имѣть равенство для всѣхъ значеній φ, удовлетворяющихъ условію (104):

$$\frac{\sin(\varphi - \vartheta_\rho)}{|\alpha_\rho|} = B(\varphi). \tag{105}$$

Принимая во вниманіе составъ лѣвыхъ частей соотношеній (101) и (105), утверждаемъ, что функціи $A(\varphi)$ и $B(\varphi)$ непрерывны соотвѣтственно въ границахъ (102) и (104).

При этомъ, считая $\varepsilon > o$, имѣемъ:

$$\lim_{\varepsilon = o} A(\varphi_0 - \varepsilon) = \frac{\sin(\varphi_0 - \vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|} = \delta_1 \tag{106}$$

и

$$\lim_{\varepsilon = o} B(\varphi_0 + \varepsilon) = \frac{\sin(\varphi_0 - \vartheta_\rho)}{|\alpha_\rho|} = \delta_2. \tag{107}$$

Такъ какъ функція $\alpha(\vartheta)$ при каждомъ опредѣленномъ значеніи для φ и ϑ имѣетъ опредѣленное значеніе, то тѣмъ же характеромъ обладаютъ и функціи $\pi\alpha(\vartheta) - \vartheta$ и $-\pi\alpha(\vartheta) - \vartheta$.

Отсюда ясно, что

$$A(\varphi_0) = B(\varphi_0). \tag{108}$$

Въ силу равенства (108), функціи $A(\varphi)$ и $B(\varphi)$ можно разсматривать, какъ взаимныя продолженія.

Выдѣляя функціи, аналогичныя $A(\varphi)$ и $B(\varphi)$ и отнесенныя къ прочимъ сторонамъ полигона K, мы такимъ же путемъ убѣждаемся, что ихъ можно разсматривать, какъ элементы одной и той же функціи:

$$m_\varphi = \pi\alpha(\vartheta) - \vartheta, \tag{109}$$

если ϑ содержится въ границахъ (96), и

$$m_\varphi = -\pi\alpha(\vartheta) - \vartheta, \tag{110}$$

если ϑ заключено въ границахъ (98).

При этомъ для всѣхъ значеній φ, представляющихъ амплитуды точекъ стороны l_κ полигона K, кромѣ ея концовъ, имѣетъ мѣсто соотношеніе:

$$\frac{\sin(\varphi - \vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|} = m_\varphi. \tag{111}$$

Точно также, если φ служитъ амплитудой какой-либо точки стороны l_ρ, кромѣ ея концовъ, то

$$\frac{\sin(\varphi - \vartheta_\rho)}{|\alpha_\rho|} = m_\varphi. \tag{112}$$

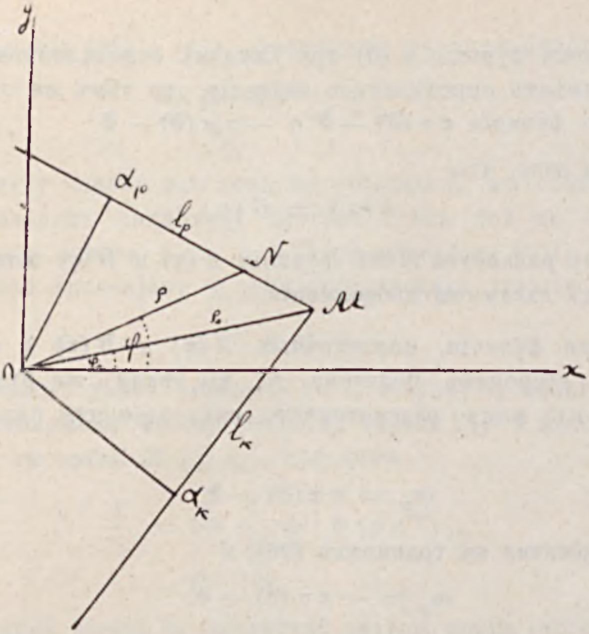
Теперь мы постараемся обнаружить, что при $\varphi = \varphi_0$, гдѣ φ_0 означаетъ амплитуду точки встрѣчи сторонъ l_κ и l_ρ полигона K, выполняется одно изъ равенствъ:

$$\frac{\sin(\varphi_0 - \vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|} = m_{\varphi_0} \tag{113}$$

или

$$\frac{\sin(\varphi_0 - \vartheta_\rho)}{|\alpha_\rho|} = m_{\varphi_0}. \tag{114}$$

Согласно предположенію, $\vartheta_\rho > \vartheta_\kappa$.



Пусть будетъ $\varphi > \varphi_0$ и произвольно-близко къ φ_0. Тогда ясно, что первое изъ чиселъ:

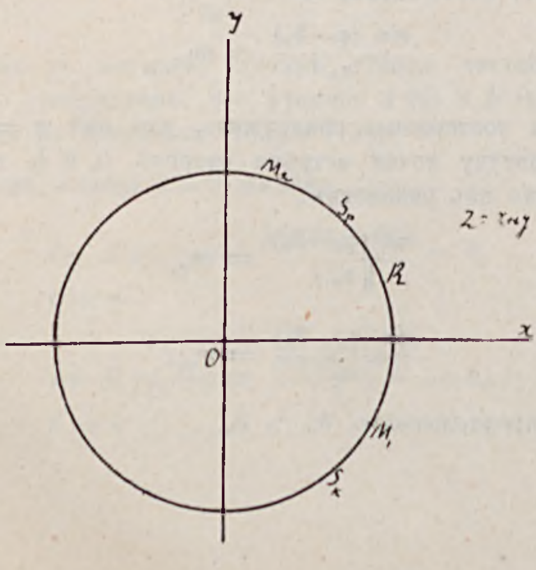
$$\theta_k = -\frac{\sin(\varphi - \vartheta_k)}{|\alpha_k|} \tag{115}$$

и

$$\theta_p = -\frac{\sin(\varphi - \vartheta_p)}{|\alpha_p|} \tag{116}$$

отрицательно, а второе положительно.

Назовемъ точки $e^{\theta_k i}$ и $e^{\theta_p i}$ соотвѣтственно S_k и S_p.



Одновременно съ числами (115) и (116) разсмотримъ числа (106) и (107). Такъ какъ $\varphi - \vartheta_\kappa > \varphi_0 - \vartheta_\kappa$ и каждая изъ этихъ положительныхъ величинъ не превосходитъ $\frac{\pi}{2}$, то, слѣдовательно,

$$sin\ (\varphi - \vartheta_\kappa) > sin\ (\varphi_0 - \vartheta_\kappa). \tag{117}$$

Принимая во вниманіе соотношенія (106) и (115), въ виду неравенства (117) находимъ:

$$\theta_\kappa < -\delta_1 < o. \tag{118}$$

Далѣе, имѣемъ:

$$\vartheta_p - \varphi_0 > \vartheta_p - \varphi,$$

и такъ какъ каждое изъ положительныхъ чиселъ $\vartheta_p - \varphi_0$ и $\vartheta_p - \varphi$ не превосходитъ $\frac{\pi}{2}$, то

$$sin\ (\varphi_0 - \vartheta_p) < sin\ (\varphi - \vartheta_p). \tag{119}$$

Сопоставляя между собою соотношенія (107) и (116), въ виду неравенства (119) находимъ:

$$o < \theta_p < -\delta_2. \tag{120}$$

Обозначимъ черезъ M_1 и M_2 соотвѣтственно $e^{-i\delta_1}$ и $e^{-i\delta_2}$. Раздѣлимъ дугу $\widehat{M_1 M_2}$ пополамъ и пусть R служитъ срединой этой дуги. Вслѣдствіе большой близости φ къ φ_0, точка R расположена между точками M_1 и S_p.

Такъ какъ формула (95) сохраняетъ силу для всѣхъ значеній ϑ, удовлетворяющихъ условію (96), то она будетъ имѣть мѣсто также и въ томъ случаѣ, если въ ней на мѣсто ϑ поставить амплитуду ϑ_1 точки R:

$$\vartheta_1 = -\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}. \tag{12}$$

Значитъ, имѣемъ:

$$-\theta_\kappa = \frac{sin\ (\varphi - \vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|} = m_\varphi = \pi\,\alpha\,(\vartheta) - \vartheta = \pi\,\alpha\,(\vartheta_1) - \vartheta_1. \tag{122}$$

Принимая теперь во вниманіе слѣдствіе теоремы 3 послѣдняго параграфа главы 2, находимъ:

$$\underset{\varphi=\varphi_0}{\vartheta_1 - \theta_\kappa} = \underset{\varphi=\varphi_0}{\pi\,\alpha\,(\vartheta_1)},$$

или:

$$-\theta_{\kappa} = \pi\,\alpha\,(\vartheta_1) - \vartheta_1 = m_{\varphi_0}. \qquad (123)$$
$$\varphi=\varphi_0 \qquad \varphi=\varphi_0$$

Результатъ (123) тождественъ съ соотношеніемъ (113).

Такъ какъ съ другой стороны

$$\vartheta_1 - \theta_{\kappa} = -\delta_2 - \vartheta_1,$$
$$\varphi = \varphi_0$$

то имѣемъ также:

$$-\delta_2 - \vartheta_1 = \pi\,\alpha\,(\vartheta_1),$$
$$\varphi = \varphi_0$$

или, въ виду результата (107),

$$\frac{\sin\,(\varphi_0 - \vartheta_p)}{|\,\alpha_p\,|} = -\pi\,\alpha\,(\vartheta_1) - \vartheta_1. \qquad (124)$$
$$\varphi = \varphi_0$$

Къ тому же результату мы пришли бы, если бы исходили изъ формулы (97).

Теорема такимъ образомъ установлена.

Слѣдствіе. Имѣемъ:

$$\frac{\sin\,|\,\varphi_0 - \vartheta_{\kappa}\,|}{|\,\alpha_{\kappa}\,|} = \pi\,\alpha\,(\vartheta). \qquad (125)$$
$$\vartheta = 0$$

Выводъ.

Мы видѣли, что формулы (95) и (97) сохраняютъ силу при всѣхъ значеніяхъ φ, содержащихся въ границахъ $o \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, если въ ней при переходѣ точки $M\,(\rho,\,\varphi)$ съ одной стороны полигона Бореля на другую мѣнять надлежащимъ образомъ $|\,\alpha_{\kappa}\,|$ и ϑ_{κ}. Въ виду условій (96) и (98), одна изъ формулъ (95) сохраняетъ силу при $\vartheta = o$, и тогда она совпадаетъ съ соотношеніемъ (125).

Теперь мы имѣемъ способъ вычислять функцію m_{φ} въ формулахъ (130) главы 1 при любомъ значеніи φ, содержащемся въ границахъ $o \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

§ 3. Вычисленіе особыхъ точекъ строки (1), лежащихъ на границѣ полигона K.

Теперь для опредѣленія особыхъ точекъ строки (1), расположенныхъ на границѣ полигона K, имѣемъ формулы (129) и (130) главы 1:

$$|\alpha_\kappa| = \frac{1}{\sqrt{l_\varphi^2 + m_\varphi^2}};$$

$$\cos(\varphi - \vartheta_\kappa) = \frac{l_\varphi}{\sqrt{l_\varphi^2 + m_\varphi^2}}; \qquad (126)$$

$$\sin(\varphi - \vartheta_\kappa) = \frac{m_\varphi}{\sqrt{l_\varphi^2 + m_\varphi^2}}.$$

Здѣсь l_φ опредѣляется по формуламъ: (120), (122) и (123) главы 1, а m_φ имѣетъ составъ (109) или (110) настоящей главы.

Второе изъ соотношеній (126) можетъ быть замѣнено условіемъ (75). Значитъ, для вычисленія особыхъ точекъ ряда (1), лежащихъ на границѣ полигона K, имѣемъ формулы:

$$|\alpha_\kappa| = \frac{1}{\sqrt{l_\varphi^2 + m_\varphi^2}};$$

$$\sin(\varphi - \vartheta_\kappa) = \frac{m_\varphi}{\sqrt{l_\varphi^2 + m_\varphi^2}}; \qquad (127)$$

$$|\varphi - \vartheta_\kappa| \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

При пользованіи формулами (127) надо держаться слѣдующаго порядка. Давъ φ какое-либо значеніе φ_0, содержащееся въ границахъ $\leqslant \varphi_0 \leqslant 2\pi$, вычислимъ l_{φ_0} и m_{φ_0} (точно или приближенно). Тогда

$$|\alpha_\kappa| = \frac{1}{\sqrt{l_{\varphi_0}^2 + m_{\varphi_0}^2}}. \qquad (128)$$

Два же остальныя условія (127) опредѣлятъ одно значеніе $\varphi_0 - \vartheta_\kappa$ и, слѣдовательно, одно значеніе ϑ_κ. При чемъ, если $\varphi = \varphi_0$ не представляетъ амплитуды какой-либо вершины полигона K, то особая точка α_κ, вычисленная такимъ образомъ, принадлежитъ къ той же сторонѣ полигона K, къ которой принадлежитъ точка $M\ (\rho_0 = \frac{1}{l_{\varphi_0}},\ \varphi_0)$. Если же $\varphi = \varphi_0$ совпадаетъ съ вершиною полигона K, то α_κ принадлежитъ къ одной изъ двухъ сторонъ многоугольника K, которыя сходятся въ этой вершинѣ.

Такъ какъ на каждой сторонѣ полигона K лежитъ только одна особая точка ряда (1), то изъ предыдущаго ясно, что, если φ представляетъ амплитуду точки стороны полигона K, то формулы (127) приводятъ къ одной и той же особой точкѣ α_κ строки (1), гдѣ бы точка $M\ (\rho,\ \varphi)$, отличная отъ любого изъ концовъ разсматриваемой стороны, на ней ни лежала.

Отсюда становится понятнымъ слѣдующее правило, которое всегда нужно имѣть въ виду, желая облегчить задачу вычисленія особыхъ точекъ строки (1), расположенныхъ на границѣ полигона K: *Допустимъ, что два значенія* φ: $\varphi = \varphi_\kappa$ *и* $\varphi = \varphi_{\kappa+1}$ *удовлетворяютъ условію* $|\varphi_\kappa - \varphi_{\kappa+1}| < \pi$. *Вычислимъ* $l_{\varphi_{\kappa+1}}$ *и* l_{φ_κ}, m_{φ_κ} *и* $m_{\varphi_{\kappa+1}}$. *Предположимъ, что формулы* (127) *приводятъ къ одной и той же особой точкѣ* α_κ *строки* (1), *какъ при* $\varphi = \varphi_\kappa$, *такъ и при* $\varphi = \varphi_{\kappa+1}$. *Въ такомъ случаѣ формулы* (127) *приводятъ къ той же особой точкѣ* α_κ *ряда* (1) *при всякомъ значеніи* φ, *заключенномъ между* φ_κ *и* $\varphi_{\kappa+1}$. *Въ виду этого, подобныя значенія* φ *не надо и разсматривать.*

На основаніи этого результата становится ясно, что, если на границѣ полигона K лежитъ конечное число особыхъ точекъ строки (1), то достаточно дать φ опредѣленное число значеній, чтобы при помощи формулъ (127) вычислить эти ея особыя точки.

Въ предыдущемъ мы предполагали, что ϑ содержится въ границахъ (86) или (88). Но допустимъ, что $\vartheta = 0$. Тогда справедлива формула (125). Значитъ, для опредѣленія α_κ имѣемъ тогда формулы:

$$\frac{\cos\ (\varphi - \vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|} = l_\varphi; \quad \frac{\sin\ |\varphi - \vartheta_\kappa|}{|\alpha_\kappa|} = m_\varphi, \tag{129}$$

гдѣ

$$m_\varphi = \pi\,\alpha\,(\vartheta). \tag{130}$$
$$\vartheta = 0$$

При этомъ

$$\alpha(\vartheta) = \lim_{\substack{\vartheta=0 \\ n=\infty}} \frac{q}{2\nu}, \tag{131}$$

гдѣ q означаетъ число перемѣнъ знака въ рядѣ чиселъ:

$$\gamma_{p-\nu},\ \gamma_{p-\nu+1},\ \cdots,\ \gamma_{p+\nu} \tag{132}$$

при $p = p_n$; при чемъ

$$\gamma_n = \sum_0^\infty \frac{\gamma'_s\, n^s}{s!};\ \gamma'_s = R\left[e^{(s\varphi-\beta_p)i}\, a_s\right]. \tag{133}$$

Изъ уравненій (129) находимъ:

$$|\alpha_\kappa| = \frac{1}{\sqrt{l_\varphi^2+\overline{m}_\varphi^2}};$$

$$\cos(\varphi-\vartheta_\kappa) = \frac{l_\varphi}{\sqrt{l_\varphi^2+\overline{m}_\varphi^2}}; \tag{134}$$

$$\sin|\varphi-\vartheta_\kappa| = \frac{\overline{m}_\varphi}{\sqrt{l_\varphi^2+\overline{m}_\varphi^2}}.$$

Вмѣсто третьяго изъ уравненій (134), можно взять условіе (75). Тогда будемъ имѣть:

$$|\alpha_\kappa| = \frac{1}{\sqrt{l_\varphi^2+\overline{m}_\varphi^2}};$$

$$\cos(\varphi-\vartheta_\kappa) = \frac{l_\varphi}{\sqrt{l_\varphi^2+\overline{m}_\varphi^2}}; \tag{135}$$

$$|\varphi-\vartheta_\kappa| \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

При помощи формулъ (135) непосредственно нельзя вычислить особую точку α_κ строки (1), если извѣстны l_φ и $\overline{m}_\varphi$ при $\varphi = \varphi_0$. Въ самомъ дѣлѣ, пусть вычислены l_{φ_0} и $\overline{m}_{\varphi_0}$. Тогда, послѣ замѣны въ формулахъ (135) l_φ и $\overline{m}_\varphi$ черезъ l_{φ_0} и $\overline{m}_{\varphi_0}$ и φ черезъ φ_0, при помощи первой изъ этихъ формулъ находимъ $|\alpha_\kappa|$. Далѣе, на основаніи двухъ послѣднихъ изъ этихъ формулъ находимъ два значенія ϑ_κ:

$$\vartheta'_\kappa = \varphi_0 - \delta;\ \vartheta''_\kappa = \varphi_0 + \delta. \qquad (136)$$

Предположимъ, что ϑ'_κ представляетъ амплитуду искомой особой точки. Замѣнимъ въ третьемъ изъ уравненій (134) число ϑ_κ черезъ ϑ'_κ. Будемъ имѣть:

$$sin\,|\varphi - \vartheta'_\kappa| = \frac{\overline{m}_\varphi}{\sqrt{l_\varphi^2 + \overline{m}_\varphi^2}}. \qquad (137)$$

Если теперь въ формулѣ (137) на мѣсто φ поставимъ ϑ'_κ, то будемъ имѣть:

$$\overline{m}_{\vartheta'_\kappa} = 0. \qquad (138)$$

Обратно: если $\overline{m}_{\vartheta'_\kappa} = 0$, то $sin\ |\vartheta'_\kappa - \vartheta_\kappa| = 0$ и $\vartheta_\kappa = \vartheta'_\kappa$ представляетъ амплитуду особой точки строки (1).

Итакъ, если ϑ'_κ есть амплитуда особой точки ряда (1), то $\overline{m}_{\vartheta'_\kappa} = 0$. Напротивъ, если ϑ''_κ не представляетъ амплитуды особой точки строки (1), то $\overline{m}_{\vartheta''_\kappa} \neq 0$.

Съ помощью этихъ дополнительныхъ вычисленій (очевидно, что достаточно вычислить $\overline{m}_{\vartheta'_\kappa}$ или $\overline{m}_{\vartheta''_\kappa}$) и рѣшается вопросъ, какое изъ двухъ чиселъ (136) служитъ амплитудой искомой особой точки ряда (1).

Такимъ образомъ мы видимъ, что при вычисленіи съ помощью формулъ (135) особыхъ точекъ строки (1) приходится дѣлать всякій разъ вышеуказанныя дополнительныя вычисленія, которыя оказываются ненужными при пользованіи формулами (127). Но формулы (135) имѣютъ свое существенное преимущество: какъ мы видѣли, число q, отъ знанія котораго зависитъ знаніе $\overline{m}_\varphi$, представляетъ число перемѣнъ знака цѣлой функціи:

$$\gamma'_n = \sum_0^\infty \frac{\rho_s\, n^s\, cos\,(\varphi_s + s\varphi - \beta_p)}{s\,!} \qquad (139)$$

при $n = p - \nu,\ p - \nu + 1,\ \ldots,\ p + \nu$, которая имѣетъ болѣе простое выраженіе, чѣмъ функція β'_n (80):

$$\beta'_n = \sum_{0}^{\infty} \frac{\rho_s n^s \cos(n\vartheta + \varphi_s + s\varphi - \beta_p).}{s!} \tag{140}$$

Такимъ образомъ задачу объ опредѣленіи особыхъ точекъ строки (1), расположенныхъ на границѣ полигона K, мы свели къ рѣшенію слѣдующихъ трехъ задачъ:

1) *Нахожденіе для даннаго значенія φ, содержащагося въ границахъ $o < \varphi < 2\pi$, соотвѣтствующаго значенія функціи l_φ:*

$$l_\varphi = \lim_{p=\infty} \frac{1}{p} \lg |\gamma_p| = \lim_{n=\infty} \frac{1}{p_n} \lg |\gamma_{p_n}|;$$

2) *Нахожденіе числа q перемѣнъ знака цѣлой функціи γ_s* (139) *при $s = p - \nu, p - \nu + 1, \ldots, p + \nu$ и $p = p_n$;*

3) *Наконецъ, вычисленіе нижняго предѣла при $n = \infty$ отношенія $\frac{q}{2\nu}$.*

Первая и третья задачи не могутъ быть сведены къ болѣе простымъ, — искомыя въ нихъ числа должны быть непосредственно вычислены точно или приближенно.

Что же касается до второй задачи, то, какъ увидимъ впослѣдствіи, рѣшеніе ея можетъ быть значительно упрощено.

Изысканіе q, числа перемѣнъ знака въ рядѣ (132), можетъ быть иногда облегчено, если извѣстно, сколько положительныхъ нулей функціи γ_n (139) содержится въ границахъ:

$$p - \nu < n < p + \nu. \tag{142}$$

Въ самомъ дѣлѣ, если это число нулей τ, то

$$q < \tau. \tag{143}$$

Для поясненія предыдущаго приведемъ одинъ примѣръ.

Примѣръ. Обозначимъ черезъ $\psi(n)$ какую-либо вещественную функцію n, которая обладаетъ слѣдующимъ свойствомъ: разность $\psi(s) - \psi(\sigma)$, гдѣ s и σ какія-либо различныя цѣлыя положительныя или отрицательныя числа (между ними одно можетъ быть нулемъ), не равна нулю или $2k\pi$, гдѣ k цѣлое число.

Пусть будетъ:

$$a_n = \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_s \, e^{i\psi(s)\, n}; \tag{144}$$

при чемъ предполагается, что рядъ

$$A = \sum_{-\infty}^{\infty} |\lambda_s| \tag{145}$$

сходится.

Обозначимъ черезъ K_n выраженіе:

$$K_n = \sum_{0}^{\infty} \frac{a_s \, n^s \, e^{(s\varphi - \beta_p)\, i}}{s!}$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{n^s \, e^{(s\varphi - \beta_p)\, i}}{s!} \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_\tau \, e^{is\psi(\tau)}. \tag{146}$$

Назовемъ L_N выраженіе:

$$L_N = \sum_{N+1}^{\infty} \frac{n^s \, e^{(s\varphi - \beta_p)\, i}}{s!} \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_\tau \, e^{is\psi(\tau)}. \tag{147}$$

Будемъ имѣть:

$$K_n = \sum_{0}^{N} \frac{n^s \, e^{(s\varphi - \beta_p)\, i}}{s!} \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_\tau \, e^{is\psi(\tau)} + L_N =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_\tau \sum_{0}^{N} \frac{n^s \, e^{[\, s(\varphi + \psi(\tau)) - \beta_p \,]\, i}}{s!} + L_N. \tag{148}$$

Далѣе, имѣемъ:

$$|L_N| < \sum_{N+1}^{\infty} \frac{n^s}{s!} \sum_{-\infty}^{\infty} |\lambda_\tau| = A \sum_{N+1}^{\infty} \frac{n^s}{s!} =$$

$$= A \left[e^n - \sum_{0}^{N} \frac{n^s}{s!} \right]. \tag{149}$$

Отсюда ясно, что

$$\lim_{N=\infty} |\, L_N \,| = 0$$

и, слѣдовательно,

$$\lim_{N=\infty} L_N = 0. \tag{151}$$

Заставимъ теперь въ выраженіи (148) число N расти до безконечности. Въ предѣлѣ тогда получимъ:

$$K_n = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_\tau \sum_{0}^{\infty} \frac{n^s\, e^{[s\varphi + s\psi(\tau) - \beta_p]\, i}}{s!} =$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_\tau\, e^{n\, e^{[\varphi + \psi(\tau)]\, i} - \beta_p\, i}. \tag{151}$$

Пусть будетъ

$$\lambda_\tau = \rho_\tau\, e^{\sigma_\tau i}, \tag{152}$$

гдѣ ρ_τ и σ_τ модуль и амплитуда числа λ_τ.

Будемъ имѣть:

$$M_n = \sum_{-\infty}^{+\infty} \rho_\tau\, e^{n \cos [\varphi + \psi(\tau)]} \cos [n \sin (\varphi + \psi(\tau)) + \sigma_\tau - \beta_p]. \tag{153}$$

Обозначимъ черезъ s какое-либо цѣлое положительное или отрицательное число (оно можетъ быть и нулемъ).

Полагаемъ въ выраженіи (153):

$$\varphi = -\psi(s). \tag{154}$$

Тогда M_n изобразится такъ:

$$M_n = \rho_s\, e^n \cos [\sigma_s - \beta_p] + \Sigma_n, \tag{155}$$

гдѣ Σ_n означаетъ сумму (153) при $\varphi = -\psi(s)$ безъ $\rho_s\, e^n \cos [\sigma_s - \beta_p]$, а β_p подбирается такъ, что $\cos [\sigma_s - \beta_p] \neq 0$.

Въ виду условія, которое наложено на функцію $\psi(n)$, каждый изъ множителей $e^{n \cos [\varphi + \psi(\tau)]}$ слагаемыхъ суммы Σ_n вида $e^{n\delta}$, гдѣ $\delta < 1$. А если такъ, то M_n можно представить слѣдующимъ образомъ:

$$\bar{M}_n = \rho_s\, e^n \cos\left[\sigma_s - \beta_p\right](1+\delta_n), \tag{156}$$

гдѣ

$$\lim_{n=\infty} \delta_n = 0. \tag{156'}$$

Отсюда находимъ:

$$l_{-\psi(s)} = \lim_{p=\infty} \frac{1}{p}\, lg\, |\bar{M}_p| = 1. \tag{157}$$

Далѣе, число перемѣнъ знака въ рядѣ:

$$\bar{M}_{p-\nu},\ \bar{M}_{p-\nu+1},\ \ldots,\ \bar{M}_{p+\nu} \tag{158}$$

$q = 0$. А потому

$$\bar{m}_{-\psi(s)} = 0. \tag{159}$$

Въ силу результатовъ (157) и (159), формулы (134) обращаются въ слѣдующія:

$$\begin{gathered} |\alpha_\kappa| = 1; \\ \cos(\vartheta_\kappa + \psi(s)) = 1; \\ \sin(\vartheta_\kappa + \psi(s)) = 0. \end{gathered} \tag{160}$$

На основаніи двухъ послѣднихъ уравненій утверждаемъ, что $\vartheta_\kappa = -\psi(s)$, и

$$z = e^{-\psi(s)i} \tag{161}$$

представляетъ особую точку строки (1) при любомъ цѣломъ положительномъ или отрицательномъ s или же нулѣ.

При $\psi(s) = s$ мы имѣемъ примѣръ, который впервые трактовался Le Roy („Sur les séries divergentes etc.“, p. 320).

ГЛАВА IV.

Упрощеніе задачи изысканія числа перемѣнъ знака въ рядѣ (132) главы 3.

§ 1. Выводъ двухъ подготовительныхъ формулъ.

Въ послѣднемъ параграфѣ главы 3 мы видѣли, что знаніе числа q перемѣнъ знака въ рядѣ (132) той же главы является рѣшающимъ въ вопросѣ объ изысканіи особыхъ точекъ строки (1), лежащихъ на границѣ полигона K. Непосредственное опредѣленіе q для всякой функціи состава (139) главы 3 дѣло немыслимое. Приходится поэтому вычислять значеніе q при каждомъ разсматриваемомъ значеніи p. Въ виду этого всякія упрощенія при нахожденіи q заслуживаютъ особаго вниманія.

Въ настоящей главѣ мы остановимся на одномъ такомъ существенномъ упрощеніи.

Предварительно займемся выводомъ нѣкоторыхъ подготовительныхъ формулъ и положеній.

Обозначимъ, ради краткости, черезъ δ_φ выраженіе:

$$\delta_\varphi = \frac{\cos(\varphi - \vartheta_\kappa)}{|\alpha_\kappa|}, \tag{1}$$

гдѣ $\varphi - \vartheta_\kappa$ удовлетворяетъ условію (75) главы 3.

Тогда выраженіе (74) для величины радіуса круга сходимости строки (3) главы 3 представится такъ:

$$r_\varphi = e^{-\delta_\varphi}. \tag{2}$$

Разсмотримъ послѣ этого слѣдующую строку:

$$\sum_{0}^{\infty} A_n z^n, \tag{3}$$

гдѣ

$$A_n = r_\varphi^n \, \vartheta(n e^{\varphi i}). \tag{4}$$

Такъ какъ

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|\vartheta(n e^{\varphi i})|} = \frac{1}{\kappa_\varphi}, \tag{5}$$

то

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|A_n|} = 1, \tag{6}$$

и, слѣдовательно, $|z| = 1$ служитъ окружностью круга сходимости ряда (3).

Пусть будетъ:

$$K_p = \sum_{o}^{\Delta_p-1} \frac{a_\tau e^{\tau\varphi i}}{\tau!} \sum_{p-\nu}^{p+\nu} \frac{e^{-s\delta_\varphi + s\psi_p i} p^s s^\tau}{s!}. \tag{7}$$

Здѣсь ψ_p какая-либо вещественная функція p, Δ_p имѣетъ составъ (82) главы 1, а ν состава (75) главы 2, т. е.,

$$\nu = \lambda p; \tag{8}$$

при чемъ на λ налагается еще новое ограниченіе:

$$\lambda < \frac{3-e}{e} - \varepsilon', \tag{9}$$

гдѣ ε' положительное число, которое можетъ быть какъ-угодно малымъ. (*)

(*) Легко видѣть, что условіе (9) при достаточно большихъ значеніяхъ p будетъ удовлетворено, если положить:

(α) $$\lambda = \frac{E(\sigma p)}{p},$$

гдѣ

(β) $$0 < \sigma \leq \frac{1}{10}.$$

Чтобы убѣдиться въ этомъ, представимъ λ такъ:

(γ) $$\lambda = \frac{\sigma p - \delta_p}{p} = \sigma - \frac{\delta_p}{p},$$

гдѣ $0 < \delta_p < 1$. Внесемъ это выраженіе для λ въ лѣвую часть неравенства (9). Будемъ имѣть:

(δ) $$\sigma - \frac{\delta_p}{p} < \frac{3-e}{e} - \varepsilon'.$$

На основаніи соотношенія (7) можемъ написать:

$$
\begin{aligned}
|K_p| &< \sum_{o}^{\Delta_p-1} \frac{|a_\tau|}{\tau!} \sum_{p-\nu}^{p+\nu} \frac{e^{-s\delta_\varphi} p^s s^\tau}{s!} \\
&< \sum_{o}^{\Delta_p-1} \frac{|a_\tau| p^\tau (1+\lambda)^\tau}{\tau!} \sum_{o}^{\infty} \frac{e^{-s\delta_\varphi} p^s}{s!}.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Принимая во вниманіе неравенство (10) главы 3, находимъ:

$$
|K_p| < M e^p e^{-\delta_\varphi} \sum_{o}^{\Delta_p-1} \frac{(1+\varepsilon_1)^\tau p^\tau}{\tau!}, \tag{11}
$$

гдѣ

$$
\varepsilon_1 = \varepsilon + \lambda + \varepsilon\lambda. \tag{11'}
$$

Имѣя въ виду результатъ (97) главы 1, на основаніи неравенства (11) находимъ:

$$
\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|K_p|} \leqslant e^{e^{-\delta_\varphi}}. \tag{12}
$$

Обозначимъ далѣе черезъ $\overline{K_p}$ слѣдующее выраженіе:

$$
\overline{K_p} = \sum_{3p+1}^{\infty} \frac{a_\tau e^{\tau\varphi i}}{\tau!} \sum_{p-\nu}^{p+\nu} \frac{e^{-s\delta_\varphi + s\psi_p i} p^s s^\tau}{s!}. \tag{13}
$$

Наибольшее значеніе σ есть $\frac{1}{10}$. Условіе (δ) будетъ осуществлено для прочихъ значеній σ, подчиненныхъ ограниченію (β), если сохраняетъ силу неравенство:

$$
(\lambda) \qquad \frac{1}{10} - \frac{\delta_p}{p} < \frac{3-e}{e} - \varepsilon'.
$$

Но

$$
\frac{3-e}{e} > \frac{3-2{,}72}{2{,}72} > 0{,}1002.
$$

Очевидно, что при достаточно большихъ значеніяхъ p и достаточно маломъ ε' неравенство

$$
\frac{1}{10} - \frac{\delta_p}{p} < 0{,}1002 - \varepsilon'
$$

выполняется. Но тогда справедливы соотношенія (λ) и (δ) и, слѣдовательно, неравенство (9).

Отсюда получаемъ:

$$|K_p| < \sum_{3p+1}^{\infty} \frac{|a_\tau|}{\tau!} \sum_{p-\nu}^{p+\nu} \frac{e^{-s\delta_\varphi} p^s s^\tau}{s!}$$

$$< M \sum_{3p+1}^{\infty} \frac{p^\tau (1+\varepsilon_1)^\tau}{\tau!} \sum_{p-\nu}^{p+\nu} \frac{e^{-s\delta_\varphi} p^s}{s!} \qquad (14)$$

$$< M e^{p e^{-\delta_\varphi}} \sum_{3p+1}^{\infty} \frac{(1+\varepsilon_1)^\tau p^\tau}{\tau!},$$

гдѣ ε_1 имѣетъ составъ (11′).

Пусть будетъ:

$$L_p = \sum_{3p+1}^{\infty} \frac{(1+\varepsilon_1)^\tau p^\tau}{\tau!}. \qquad (15)$$

Принимая во вниманіе формулу Стирлинга для большихъ τ:

$$\tau! > \sqrt{2\pi\tau}\ \tau^\tau e^{-\tau} (1-\delta), \qquad (16)$$

гдѣ $0 < \delta < 1$, имѣемъ:

$$L_p < \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(1-\delta)} \sum_{3p+1}^{\infty} \frac{[e(1+\varepsilon_1)p]^\tau}{\tau^\tau}$$

$$< \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(1-\delta)} \left[\frac{e(1+\varepsilon_1)p}{3p+1}\right]^{3p+1} \left[1 + \frac{e(1+\varepsilon_1)p}{3p+1} + \left(\frac{e(1+\varepsilon_1)p}{3p+1}\right)^2 + \ldots\right] \qquad (17)$$

Положительное число ε, входящее въ составъ $\varepsilon_1 = \varepsilon + \lambda + \varepsilon\lambda$, можно считать какъ-угодно малымъ. А потому

$$\varepsilon_1 = \lambda + \zeta, \qquad (18)$$

гдѣ ζ положительная функція p, значенія которой могутъ быть сколь-угодно малыми. Мы предполагаемъ, что $\varepsilon' - \zeta > 0$.

Исключивъ изъ неравенства (9) число λ при помощи соотношенія (18), получимъ:

$$\varepsilon_1 < \frac{3-e}{e} - \varepsilon_2, \qquad (19)$$

гдѣ

$$\varepsilon_2 = \varepsilon' - \zeta > 0; \qquad (19')$$

при чемъ значенія ε_2, функціи p, могутъ быть сколь-угодно малыми.

Въ виду неравенства (19), находимъ:

$$e\,(1+\varepsilon_1) < 3 - e\,\varepsilon_2 \tag{20}$$

и, слѣдовательно,

$$(1 + \lim_{p=\infty} \varepsilon_1)\, e \leqslant 3 - e \lim_{p=\infty} \varepsilon_2 < 3, \tag{21}$$

такъ какъ $\lim\limits_{p=\infty} \varepsilon_2 \neq 0$.

Имѣя въ виду результаты (20) и (21), находимъ:

$$\frac{e\,(1+\varepsilon_1)\,p}{3\,p+1} < 1 \tag{22}$$

и

$$\frac{e\,(1+\bar{\varepsilon})}{3} < 1, \tag{23}$$

гдѣ

$$\bar{\varepsilon} = \lim_{p=\infty} \varepsilon_1. \tag{23'}$$

Въ силу неравенства (22), можемъ написать:

$$L_p < \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(1-\delta)} \left[\frac{e\,(1+\varepsilon_1)}{3+\frac{1}{p}}\right]^{3p+1} \frac{1}{1-\dfrac{e\,(1+\varepsilon_1)}{3+\frac{1}{p}}} \tag{24}$$

и, значитъ, имѣемъ:

$$|\,K_p\,| < \frac{M\,e^{p\,e^{-\delta_\varphi}}}{\sqrt{2\pi}(1-\delta)} \left[\frac{e\,(1+\varepsilon_1)}{3+\frac{1}{p}}\right]^{3p+1} \frac{1}{1-\dfrac{e\,(1+\varepsilon_1)}{3+\frac{1}{p}}}. \tag{25}$$

Отсюда, въ виду результата (23), заключаемъ:

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{|\,K_p\,|} \leqslant e^{e^{-\delta_\varphi}} \left[\frac{e\,(1+\bar{\varepsilon})}{3}\right]^3 < e^{e^{-\delta_\varphi}}. \tag{26}$$

Формулы (12) и (26) будутъ очень полезны для насъ впослѣдствіи.

§ 2. Выводъ двухъ вспомогательныхъ теоремъ.

Введемъ въ разсмотрѣніе слѣдующіе символы:

$$\sigma(p\, e^{\psi_p i}) = \sum_{p-\nu}^{p+\nu} \frac{A_s\, p^s\, e^{s\psi_p i}}{s!}, \tag{27}$$

гдѣ A_s имѣетъ составъ (4) при $n = s$,

$$\sigma_1(p\, e^{\psi_p i}) = \sum_{p-\nu}^{p+\nu} \frac{p^s\, e^{-s\delta_\varphi + s\psi_p i}}{s!} \sum_{0}^{3p} \frac{a_\tau\, s^\tau\, e^{\tau\varphi i}}{\tau!} \tag{28}$$

и

$$\sigma_2(p\, e^{\psi_p i}) = \sum_{p-\nu}^{p+\nu} \frac{p^s\, e^{-s\delta_\varphi + s\psi_p i}}{s!} \sum_{\Delta_p}^{3p} \frac{a_\tau\, s^\tau\, e^{\tau\varphi i}}{\tau!}. \tag{29}$$

Лемма 1. Пусть будетъ:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|\sigma(p_n\, e^{\psi p_n i})|} = e. \tag{30}$$

Тогда и

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{|\sigma_1(p_n\, e^{\psi p_n i})|} = e. \tag{31}$$

Обратно: равенство (31) *влечетъ за собою соотношеніе* (30).

Доказательство.

Пусть выполняется условіе (30). Принимая во вниманіе выраженіе (13), можемъ написать:

$$\sigma(p_n\, e^{\psi p_n i}) = \sigma_1(p_n\, e^{\psi p_n i}) + K_{p_n}. \tag{32}$$

На основаніи равенства (32) находимъ:

$$|\sigma(p_n\, e^{\psi p_n i})| - |K_{p_n}| < |\sigma_1(p_n\, e^{\psi p_n i})| < |\sigma(p_n\, e^{\psi p_n i})| + |K_{p_n}|. \tag{33}$$

Нѣсколько опытовъ съ ванадіевою сталью.

Опыты были произведены на Ижорскомъ заводѣ. Матеріяломъ для плавокъ служили мягкое мартэновское желѣзо и феррованадій слѣдующаго состава:

	C	Mn.	P	S	V
мартэновское желѣзо	0,08	0,30	0,02	0,01	
феррованадій	0,07	0,25	0,02		24,85°/₀

Въ виду имѣлись опыты, исключительно, съ мягкой сталью т. е. содержащей углерода 0,30—0,40¹/₀.

Въ графитовыхъ тигляхъ Моргана, даже при указанной мягкой шихтѣ невозможно было получить сталь мягче 0,60°/₀ углерода. Но уже при этихъ опытахъ выяснилось, что ванадій имѣетъ большую способность присоединять углеродъ. Такъ, одна и та же шихта безъ ферраванадія и съ прибавкой его давала во второмъ случаѣ сталь съ содержаніемъ углерода выше на 0,15—0,20°/₀.

Послѣ многихъ попытокъ съ различными массами для футеровки графитовыхъ тиглей, чтобы предохранить сталь отъ науглероживанія, таковая была найдена въ видѣ смѣси обожженаго магнезитоваго порошка, употребляемаго для футеровки мартэновскихъ печей, съ 27°/₀ боровичской глины. Футеровка этой массой производится такъ: въ тигель вставляется деревянный стержень по формѣ тигля но меньшихъ размѣровъ, такъ чтобы образовался зазоръ въ ³/₄″; зазоръ этотъ плотно затрамбовывается указанной смѣсью, и тигель ставится въ плавильный горнъ и прокаливается до тѣхъ поръ пока дерево не выгоритъ совсѣмъ. Полученная такимъ способомъ футеровка выдерживаетъ по двѣ плавки даже марганцовой стали.

Феррованадій, во избѣжаніе угара, прибавлялся уже къ расплавленному металлу минутъ за 12—15 до отливки. При этомъ оказалось, что ванадій растворяется очень легко, и угаръ его не превосходитъ 5%. Пробныя болванки отливались квадратнаго сѣченія 3″ × ″ 3 по $1^1/_2$ пуда вѣсомъ, прокатывались въ прутья 1″ діаметромъ, послѣ чего верхняя треть прутка отбрасывалась изъ за усадочной раковины,

Изъ прутковъ вытачивались круглые образчики для испытанія на разрывъ длиной между кернами 2″ и діаметромъ $^1/_2$″. Разрывающее усиліе и предѣлъ упругости въ kg. на квадратн. m/m.

Было сдѣлано 5 опытовъ для сравненія ванадіевой стали съ обыкновенной, никелевой и хромовой. Результаты испытаній и анализъ приведены въ слѣдующихъ таблицахъ:

Составъ опытныхъ сталей:

	C	*Mn*	*P*	*Cr*	*Ni*	*V*
1.	0,28	0,51	0,04			
2.	0,28	0,50	0,03		2,56	
3.	0,29	0,42	0,02			0,27
4.	0,28	0,42	0,02	1,02		
5.	0,27	0,43	0,03	1,01		0,29.

Послѣ отжига при 800° механическія качества получились слѣдующія:

	1	2	3	4	5	5 закален. въ маслѣ при 800°
предѣлъ упругости	29,0	43,5	50,8	30,5	53,0	77,0
разрыв. усиліе	48,0	62,2	62,0	51,0	64,0	89,0
удлиненіе %	30,0	32,0	22,0	24,0	33,0	20,0
сжатіе площ. сѣченія %	52,0	56,0	51,5	48,0	60,0	44,0

Видно, что небольшое количество вонадія 0,2—0,3% сильно повышаетъ предѣлъ упругости, сопротивленіе разрыву не понижая замѣтно удлиненія и вязкости. Присутствіе 1% хрома еще усиливаетъ вліяніе ванадія. Надо думать, что примѣненіе ванадія для артиллерійскихъ орудій и снарядовъ было бы весьма полезно, въ смыслѣ облегченія ихъ вѣса за счетъ большаго предѣла упругости.

Испытанія надрѣзанныхъ брусковъ отъ этихъ же самыхъ образцовъ на копрѣ Фремона еще яснѣе подчеркиваетъ выгоду примѣненія ванадія. Цифры полученныя на копрѣ Фремона слѣдующія въ kgmtr.: (*)

№№ образцовъ	1	2	3	4	5
kgmtr.	26,0	26,0	25,0	18,0	24,0.

т. е. по вязкости ванадіевая сталь почти не уступаетъ никелевой стали.

(*) Для испытанія на копрѣ Фремона берутся бруски съ сѣченіемъ 10×8 m/m. и на нихъ дѣлается вырѣзъ равный 1 квадр. m/m.

Наибольшій интересъ представляетъ опытъ примѣненія ванадія къ броневой стали. Для сего было сдѣлано двѣ плавки, одна обычнаго состава для брони, другая же съ добавкой ванадія. Составъ этихъ сталей былъ такой:

	C	*Mn*	*P*	*Si*	*Cr*	*Ni*	*V*
6.	0,40	0,36	0,03	0,04	2,05	4,0	0,28
7.	0,43	0,36	0,04	0,05	2,07	3,98	—

Образецъ № 7 былъ закаленъ въ водѣ при 600° № же 6 при 625°. Результаты механическихъ испытаній показываютъ громадную разницу:

	пред. упруг.	разрывн. усиліе	удлиненіе	сжатіе
6.	107	113	14,9%	31,0
7.	72	98	13,0	32,0.

Испытаніе надрѣзанныхъ образцовъ дало для № 6—13 kgmtr. а для № 7 только 7 kgmtr.

Изъ этихъ же плавокъ были прокатаны листы толщиной 2,5 — 2,75 m/m., закалены также какъ и бруски и испытаны стрѣльбой изъ 3-хъ линейной винтовки на разстояніи 100 саженъ. Отъ листа № 6 нуля отскочила, № же 7 былъ пробитъ.

Наконецъ изъ плавки № 8 съ содержаніемъ *C* — 0,70% и *V* — 0,28% были изготовлены мѣтчики для нарѣзки дыръ. Мѣтчики эти оказались, чрезвычайно стойкими по сравненію съ мѣтчиками изъ Белеровской стали такого же состава но безъ ванадія, именно, они выдержали работу вдвое больше Белеровскихъ.

При изслѣдованіи подъ микроскопомъ шлифы ванадівой стали показываютъ замѣчательную однородность и тонкость структуры. Прилагаемые снимки съ пробъ №№ 6 и 8 ясно это доказываютъ. Относительно образца № 8 надо замѣтить, что стали съ такимъ содержаніемъ углерода, но безъ ванадія, чрезвычайно рѣдко имѣютъ такую мелкую мартэнситовую структуру.

(См. снимки на слѣд. стр.).

Относительно обработки ванадіевой стали можно сказать, что она не требуетъ никакихъ особенныхъ предосторожностей, очень хорошо прокатывается и куется; но послѣ этихъ операцій ее необходимо отжигать, такъ какъ она становится очень жесткой и не поддается рѣзкѣ. Перегрѣтая ванадіевая сталь легко исправляется быстрымъ нагрѣвомъ до 900° и затѣмъ медленнымъ остываніемъ до 500°.

А. Нагоровъ.

пл. № 6 увел. 450 — закал. при 625°.

пл. № 8. увел. 450° — отъ мѣтчика, закал. около 700°.

11. БЮЛЛЕТЕНЬ НОЯБРЬ 1905.—АВГУСТЪ 1909.
БИБЛІОТЕКИ ВАРШ. ПОЛИТЕХНИЧЕСКАГО ИНСТИТУТА ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II.

А. 173 624.04 + 624.08

DIRCKSEN, F.

Hilfswerte für das Entwerfen und die Berechnung von Brücken mit eisernem Ueberbau. Von F. Dircksen. 2. erweiterte Auflage. Berlin, Ernst u. Sohn, 1905, fol. 42. Taf. 1.

А. 174 677.0

ІОКСИМОВИЧЪ, ЧЕДОМІРЪ.

Теорія ручного и механическаго ткачества. Первые выпуски. Составилъ по разнымъ источникамъ Чедоміръ Іоксимовичъ. Спб., 1900, фол.

А. 175 691.7

ШАРОВСКІЙ, К.

Таблицы разсчетовъ желѣзныхъ частей зданій. Переводъ съ 3-го изд. Спб., 1904, фол. 161.

А. 176 693.13

РУБАНЪ, И. О.

Строительное искуство. Вып. I. Земляныя работы. Составилъ И. О. Рубанъ. Спб., Ник. Инж. Ак., 1873, фол. 37, лис. XIV.

А. 177 627.21 + 627.926

САХАНСКІЙ, Н. А.

Желѣзные плавучіе порты. Н. А. Саханскаго. Спб., 1882, фол. 16.

А. 178 691.7

SCHAROWSKY, C.

Musterbuch für Eisen-Constructionen. Von C. Scharowsky. Teil I. Leipzig u. Berlin, Spamer, 1888, fol. 163.

А. 179 622.233 + 621.95 + 621.284

RIEDLER, A.

Brandt's hydraulische Gesteins-Bohrmaschine. Von A. Riedler. Mit 7 Tafeln und 7 Textfigur. Wien, Lehmann u. Wentzel, 1877, fol. 38. Taf 7,

А. 180 656.222.4

ВАСЮТЫНСКІЙ, А.

Пропускная способность Варшавско-Калишской ж. дороги. А. Васютынскій. г. Варшава, 1903, fol. 34.

А. 181 625.143 + 625.144 + 625.151

ВАСЮТЫНСКІЙ А.

Верхнее строеніе пути и обыкновенный переводъ съ рельсами вѣсомъ 32 kg./m. (23,8 ф./ф). Варшавско-Калишской ж. д. г. Варшава, fol. 40.

А. 182—186 625.1

СБОРНИКЪ

пояснительныхъ записокъ, расчетовъ, техническихъ условій, договоровъ и инструкцій по постройкѣ ж.-дорожной линіи. Полоцкъ-Сѣдлецъ и вѣтви Гродна-Мосты. 1902—1906. Томъ I—II. in fol 204. (къ Альбомамъ отъ G. 540—544).

ПРИМѢЧАНІЕ I. Буквы и число, стоящія налѣво составляютъ сигнатуру (шифръ) книги и обозначаютъ мѣсто, занимаемое ею въ шкафахъ библіотеки. Число стоящее направо означаетъ отдѣлъ систематическаго каталога по десятичной системѣ классификаціи книгъ принятой Интернаціональнымъ Институтомъ библіографіи въ Брюсселѣ.

ПРИМѢЧАНІЕ II. Знакъ * обозначаетъ, что соотвѣтствующаго отдѣла нѣтъ въ печатной схемѣ классификаціи Интерн. Института библіографіи и номеръ составленъ въ библіотекѣ Варшавскаго Политехническаго Института.

ПРИМѢЧАНІЕ III. Названія книгъ напечатаны на одной сторонѣ съ тѣмъ, чтобы ихъ можно было вырѣзать и наклеить на карточки, которыя можно располагать въ алфавитномъ порядкѣ авторовъ для составленія алфавитнаго каталога или въ порядкѣ номеровъ десятичной классификаціи для составленія систематическаго каталога.

А. 187 625.1

СООРУЖЕНІЕ II-ой ЕКАТЕРИНИНСКОЙ ЖЕЛѢЗНОЙ ДОРОГИ.

Главы I, II и IV. Трасса дороги. Отчужденіе. Земляное полотно. 1901, fol. 109.

А. 188 625.1

СООРУЖЕНІЕ II-ой ЕКАТЕРИНИНСКОЙ ЖЕЛѢЗНОЙ ДОРОГИ.

Главы V ст. 1, 2 и 3; Гл. VII ст. 4 и 5. Административное дѣленіе линіи, переѣзды, путепроводы, пѣшеходный мостикъ и путевыя принадлежности. fol. 53.

А. 189 625.1

СООРУЖЕНІЕ II-ой ЕКАТЕРИНИНСКОЙ ЖЕЛѢЗНОЙ ДОРОГИ.

Главы II ст. 3. Глав. X ст. 1. Расположеніе путей и зданій на станціяхъ. fol. 74.

А. 190 625.1

СООРУЖЕНІЕ II-ой ЕКАТЕРИНИНСКОЙ ЖЕЛѢЗНОЙ ДОРОГИ.

Главы IV и X ст. 1. Верхнее строеніе пути. Принадлежности станціи. Временное движеніе. fol. 110.

А. 191 625.1

СООРУЖЕНІЕ II-ой ЕКАТЕРИНИНСКОЙ ЖЕЛѢЗНОЙ ДОРОГИ.

Гл. X ст. 4. Гл. VIII и VI. Общія распоряженія по постройкѣ граждан. сооруженій оборудовани. станц. зданій. Водопроводы. Телеграфы. fol. 85.

А. 192 625.1

СООРУЖЕНІЕ II-ой ЕКАТЕРИНИНСКОЙ ЖЕЛѢЗНОЙ ДОРОГИ.

Гл. VII ст. I, 2, 3. Путевыя зданія и колодцы. fol. 50.

А. 193 625.1 + 621.138.5

СООРУЖЕНІЕ II-ой ЕКАТЕРИННИСКОЙ ЖЕЛѢЗНОЙ ДОРОГИ.

Глава VIII ст. 5 а. Проектъ большихъ паровозныхъ мастерскихъ на ст. Александровскъ. Томъ II. Стропила.

А. 194 625.1 + 621.138.5

СООРУЖЕНІЕ II-ой ЕКАТЕРИНИНСКОЙ ЖЕЛѢЗНОЙ ДОРОГИ.

Зданія б. паровозныхъ мастерскихъ на ст. Александровскъ. Пояснит. записка къ проекту большихъ паровозныхъ мастер. на ст. Александровскъ.

А. 195 625.1 + 621.138.1

СООРУЖЕНІЕ II-ой ЕКАТЕРИНИНСКОЙ ЖЕЛѢЗНОЙ ДОРОГИ.

Паровозные сараи. Малыя мастерскія. Дополненіе къ сборнику малыхъ мастерскихъ и паровозныхъ сараевъ.

А. 196 625.1 + 621.138

СООРУЖЕНІЕ II-ой ЕКАТЕРИНИНСКОЙ ЖЕЛѢЗНОЙ ДОРОГИ.

Силовое, механическое и электрическое оборудованіе большихъ и малыхъ мастерскихъ.

А. 197 625.1 + 628.1

СООРУЖЕНІЕ II-ой ЕКАТЕРИНИНСКОЙ ЖЕЛѢЗНОЙ ДОРОГИ.

Расчетъ устройства водоснабженій. Водопроводныя зданія.

А. 198 625.111

СООРУЖЕНІЕ II-ой ЕКАТЕРИНИНСКОЙ ЖЕЛѢЗНОЙ ДОРОГИ.

Сборникъ матеріаловъ по вопросу объ опредѣленіи отверстій искусственныхъ сооруженій.

А. 199 625.111 + 625.13

СООРУЖЕНІЕ II-ой ЕКАТЕРИНИНСКОЙ ЖЕЛѢЗНОЙ ДОРОГИ.

Дополненіе къ сборникамъ проектовъ каменныхъ трубъ, опоръ и верхняго строенія мостовъ. Техническія условія, инструкціи и распоряженія, испытаніе растворовъ и камней, временные мосты.

А. 200 621.95 + 621.93 + 621.98

БРАУНЪ. ЕВГЕНІЙ.

Дыропробивочные пресса, ножницы и вальцовочные станки. С.-Петербургъ. 1908. 31. табл. 38.

A. 201 621.1 + 621.3 + 621.4

FRENCH, JAMES.

Modern power generators, steam electric and internal-combustion. Volume 1—2. London, 1908, Vol. I. xiv, 8⁰. 201. Vol. II. xiv, 8⁰. 203.

A. 202 575 + 576 + 577

GUENTHER, KONRAD.

Vom Urtier zum Menschen. Ein Bilderatlas zur Abstammung's—und Entwicklung's Geschichte des Menschen. In II Banden mit 92 Tafeln. Stuttgart, 1909.
Band I. fol. 202. Taf. 48.
Band II. fol. 216. Taf. 42.

B. 600 625.15 + 625.18 + 656.25

GUILLEMANT, P.

Le materiel de la voie à l'exposition universelle de 1900. Par P. Guillemant. Paris, Bernard, 1903, 4⁰.—263. Atlas G 506.

B. 601 621.43

RIEDLER, A.

Gross-Gasmaschinen. Von A. Riedler. Mit 130 Abbildungen im Text. München, Oldenbourg, 1905, fol. 193.

B. 602 55

MOESCH, CASIMIR.

Geologische Beschreibung des Aargauer-Jura und der nördlichen Gebiete des Kantons Zürich. Von Casimir Moesch. Bern, Dalp, 1867, 4⁰.—xv, 319, Tab. vii.

B. 603 517.6

RICE, HERBERT.

The theory and practice of Interpelation. By Herbert Rice. Lynn, 1899, 4⁰.—ix, 234.

B. 604 725

BAUMEISTER, R.

Architektonische Formenlehre für Ingenieure. Von R. Baumeišter. Stuttgart, Hoffmann, 1886, 4⁰.—426. Taf. v.

B. 605 531 + 621

VIRY, CH.

Cours de mécanique pure et appliquée professé par Ch. Viry. Tome 1—4. Paris, Masson, 1870, 4⁰.—370, 157, 219, 326.

B. 606 35.5

PRINZIPIEN

der Kriegskunst. Vollständiges Handbuch der Kriegführung der Gegenwart in ihrem ganzen Umfange. Band I, III. Taktik. Leipzig, Schäfer. 1871, 8⁰.—528, 978.

B. 607 621.5 + 621.422

RIEDLER, A.

Neue Erfahrungen über die Kraftversorgung von Paris durch Druckluft. (System Popp). Von A. Riedler. Berlin, Gaertner, 1891, 4⁰.—112.

B. 608 624 + 626 + 627

CROIZETTE DESNOYERS, M. PH.

Notice sur les travaux publics en Hollande. Par Croizette Desnoyers. Paris, Dunod, 1874, 8⁰.—207 pl. xxviii.

B. 609 694.1

BREYMANN, G. A.

Allgemeine Bau-Costructions-Lehre mit besonderer Beziehung auf das Hochbauwesen. Von G. A. Breymann, neu bearbeitet von H. Lang. II Teil. Constructionen in Holz, 4 gänzlich umgearbeitete Aufl. Stuttgart, Weise, 1870, 4⁰.—254, Taf. 106.

B. 610 625.13

RŽIHA, FRANZ.

Lehrbuch der gesammten Tunnelbaukunst. Von Franz Ržiha. Band 1 — 2. Berlin, Ernst, 1864. 4⁰.—723, 422.

B. 611 386.3

LAGRENE, H. de

Cours de navigation intérieure. Fleuves et rivières. Par H. de Lagrene. Tome 1—2. Paris, Dunod, 1869—1871, 4⁰.—viii, 163, pl 9; xi, 217, pl. 12.

B. 612 62

ВИДЫ

работъ конторы инженера А. В. Бари съ 1880 по 1886 г. Москва, б. г. 4⁰.—24.

B. 613 624.0 + 624.04

HEINZERLING, FRIEDRICH.

Grundzüge der constructiven Anordnung und statischen Berechnung der Brücken und Hochbau-Constructionen. Von Friedrich Heinzerling. Leipzig, Felix, 1870, 4⁰.—v, 132, Taf. viii; 178, Taf. 9.

B. 614 621.64/5

BAUM.

Die neueste Entwicklung der Wasserhaltung. Von Professor Baum. Versuche mit verschiedenen Pumpensystemen. Erstattet von Baum. Berlin, Springer, 1905, 4⁰.—IV, 116. Taf. 9.

B. 615 621.81

БЕРЛОВЪ М. Н.

Детали машинъ. Вып. 7-ой. Цапфы, оси, валы и муфты. Рига, 1905, 4⁰—293—428.

B. 616 621.81

БЕРЛОВЪ М. Н.

Детали машинъ. Вып. 8-ой. Подшипники. Рига, 1905, 4⁰.—429—496.

B. 617 56

REED, COWPER F. R.

The lower palaeozoic trilobitas of the girvan district, ayrshire. Palaeontographical Society.

B. 618 56

FOORD, ARTUR H.

Monograph of the carboniferous cephalopoda of Ireland. Palaeontographical Society

B. 619 541.1

LANDOLT-BÖRNSTEIN.

Physikalisch-Chemische Tabellen. Berlin, 1905, 4⁰.—VII, XVI, 861.

B. 620, 621 625.1 + 62 .2 + 621.13

ВАСЮТЫНСКІЙ А.

Желѣзныя дороги, лекціи, читанныя въ Варшавскомъ Политехническомъ Институтѣ Императора Николая II-го. Книга I-я и II-я. А. Васютынскій. Варшава, 1905/6 8⁰. fol. 299.

B. 622 621.9

CHURCHILL CHARLES & C-o.

American Tools. 1901, 4⁰.—368.

B. 623 9

ENTWICKLUNG.

Die Entwicklung Münchens unter dem Einflusse der Naturwissenschaften während der letzten Dezenien. Festschrift. Gewidmet von der Stadt München. mit 2 pl. München. 4⁰.—203.

B. 624 58.5

МЕДВѢДЕВЪ, Я.

Деревья и кустарники Кавказа. Изд. второе, вып. I-й, съ 21 таблицей. Тифлисъ, 1905, 4⁰.—50.

B. 625 56

BLAKE, J. F.

A monograph of the Fauna of the Cornbrash. By J. F. Blake. Palaeontographical Society. London, 1905 — 1907, 4⁰.—106, pl. IX.

B. 626, 627 621.81

БЕРЛОВЪ, М.

Детали машинъ. Выпускъ 9-й. Детали подъемныхъ машинъ съ 23 табл. Изданіе Риккера. С.-Петербургъ, 1909, 4⁰.—708, табл. 23.

B. 628 56

SLATER, IDA. L.

A monograph of Britisch conulariae. By Ida. L. Slater, B. A. London, Palaeontographical Society. 1907, 40, 4⁰.—plat. V.

B. 629 56

WHIDBORNE, G. F.

A mongraph of the South of England; by G. F. Whidborne. Vol. I—II. The fauna of the Limestones. Vol. III. The fauna of the Marwood and Pilton Beds. London. V. I. —1889—1892, 4⁰.—344. Bi G. F. Whidborne. plat, XXXI; II. 1892—1907, 4⁰.—222, plat. XXIV; III. 1896—1907, 4⁰.—236, plat. XXXVIII.

B. 630 624

Сооруженіе С.-Петербургъ-Вологодской ж. дороги. Производство работъ, надвижка и испытаніе моста черезъ р. Волховъ. Текстъ и рис. С.-Петербургъ, 4⁰.—41, лист. черт. 24.

B. 631 669.17

HAHN, H.

Eisenhüttenkunde. Eisen-Metall-Giesserei, Schmieden, Walzen. Bearb. von H. Hahn. mit 3 Tafeln. Berlin, sine anno, VIII, 4⁰. 144, III.

B. 632 621.9

SCHLESINGER, G.

Die Werkzeugmaschinen auf der Weltausstellung in Lüttich 1905, v. G. Schlesinger. Berlin, 1906, 4⁰.—68.

B. 633 656 + 621.86 + 664.744.2

MICHENFELDER, C.

Neuere Transport— und Hebevorrichtungen mit Atlas 200 Abbild. Leipzig, 1906, VI, 4⁰.—59. Atl. 87.

B. 634 621.24

HONOLD, R. und K. ALBRECHT.

Francis-Turbinen. Ein Lehrbuch für Schule und Praxis. Heft I. Theorie der Wasserturbinen. Mittweida. Verlag. v. R. Schulze.

B. 635 58.11

URSPRUNG, A.

Die physikalischen Eigenschaften der Laubblätter. Biblioteka botanica, (Original-Abhandlungen aus dem Gesamtgebiete der Botanik, Heft 60-te). Verlag v. Erwin Nägele. Mit 9 tafeln. Stuttgart, 1903, 4⁰.—120, IX.

B. 636 621.9

RICHARD, M. G.

La Mécanique a l'Exposition de 1900. 10-te Livraison. Les machines outils. Par. M. G. Richard. Editeur V-re Ch. Dunod. Paris, 1902, 4⁰.—283.

B. 637 59.19

CHUN, C.

Bibliotheca zoologica. Heft 19. Atlantis. Biologische Studien über pelagische Organismen v. Carl. Chun. Stuttgart, Verlag v. Erwin Nägele 1896, V, fol. 260, XX.

B. 638 621.81

GROVE, O. v.

Konstruktionslehre der einfachen Maschinenteile von O. v. Grove. Text u. Atlas mit 28 Tafeln. Leipzig, 1906, X, 4⁰.—557. Tafeln 28.

C. 3280 624

LANDSBERG, TH.

Der Brückenbau. II. Teil des Handbuchs der Ingenieurwissenschaften. Band I. Die Brücken im allgemeinen. Steinerne Brücken. Band II. Hölzerne Brücken. Wasserleitungs— und Kanalbrücken. Die Kunstformen des Brückenbaues. 4. vermehrte Auflage. Leipzig, Engelmann, 1904, 8⁰.—XII, 415, Taf. XXIII.

C. 3281 621.43 + 665.7 + 665.8

MATHOT, R. E.

Gas—engines and producer—gas plants. By R. E. Mathot. New York, 1905, 8⁰.—XIV, 314.

C. 3282 621.187+621.179

MEYER HENRY, C.

Steam pawer plants their design and construction. By Henry C. Mayer. Second edition, corrected. New York, 1905, 8⁰.—159.

C. 3283 656 + 351.852.14

КАТАЛОГЪ.

Иллюстрированный каталогъ музея вѣдомства путей сообщенія имени Императора Николая I. Спб., 1902, 8⁰.—111.

C. 3284 526.9

ЛЮБИМОВЪ, Л. Н.

Низшая геодезія. 2-ое исправленное и значительно дополненное изданіе. Съ 9-ю цинкограф. и атласомъ чертежей. Томскъ, Макушинъ, 1903, 8⁰.—VII, 220, чертеж. 234.

C. 3285, 3286, 3287 677

ФЕДОРОВЪ, С. А.

Общая технологія волокнистыхъ веществъ по Е. Поуег'у съ нѣкоторыми дополненіями и измѣненіями. Изданіе подъ общею редакц. С. А. Федорова. Москва, Борисенко, 1900, 8⁰.—131, таб. 10.

C. 3288 662.92 + 664.655.1

FLEISCHER, FR.

Das Backofenbauwesen im Ursprung und in der Zukunft. Von Fr. Fleischer. Band I — 2 mit Atlas. Halle a. S. Rode 1899, 8°.—VIII, 150, 52. Atlas G. 510.

C. 3289 699.2

WHITE, W. H.

Handbuch für Schiffbau. Von W. H. White. Leipzig, Felix, 1879, 8°.—XX, 684.

C. 3290 531 : 69

KOPKA, C.

Die Bau-Mechanik. Von C. Kopka. Leipzig, Scholtze, 1873, 8°.—VIII, 343.

C. 3291 624

SCHEFFLER, HERMANN.

Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken. Von Hermann Scheffler. Braunschweig, 1857, 8°.—XVIII, 454.

C. 3292 338

INDUSTRIE

Die grosze Industrie der Vereinigten Staaten. Mit zahlreichen Illustrationen. Hartfort, I. Burr und Hyde, 1872, 8°.—XVI, 1292.

C. 3293 347.763.4

BESCHORNER, JULIUS HERMANN.

Das deutsche Eisenbahnrecht mit besonderer Berücksichtigung des Actien und Expropriationsrechtes. Von Julius Hermann Beschorner. Erlangen, Enke, 1858, 8°.—VIII, 319.

C. 3294 621.81

REULEAUX, F.

Der Constructeur. Ein Handbuch zum Gebrauch beim Maschinen - Entwerfen. Von F. Reuleaux. 3. Aufl. Braunschweig, Vieweg, 1872, 8°.—XX, 674.

C. 3295 385(023)

TESCH JOHANNES u. CASPAR COMES.

Katechismus für die Prüfungen zum Bahnmeister der Staats-Eisenbahnen. Bearbeitet von Johannes Tesch u. Caspar Comes. Berlin, Siemenroth, 1886, 8°.—VIII, 386. Taf. XIV.

C. 3296 526.95

STAMPFER, S.

Theoretische und praktische Anleitung zum Nivelliren. Von S. Stampfer. 6 vermehrte Auflage bearbeitet von Jos. Ph. Herr. Wien, Gerold, 1869, 8°.—XIV, 234.

C. 3297 385

SCHWABE, H.

Ueber das englische Eisenbahnwesen. Reisestudien von H. Schwabe. Berlin, Ernst, 1871, 8°.—133.

C. 3298 621.1

BÖTTCHER, C. TH.

Bernoullli's Dampfmaschinenlehre. 5. Aufl. gänzlichu mgearbeitet von C. Th. Böttcher. Stuttgart, 1865, 8°.—VI, 487.

C. 3299 526..99 : 625

WERNER, C.

Die Tacheometrie und deren Anwendung bei Tracestudien. Von C. Werner. Wien, Lehmann, 1873, 8°.—VI, 95.

C. 3300 621.18

REICHE, H. v.

Anlage und Betrieb der Dampfkessel. Von H. v. Reiche. Leipzig, Felix, 1872, 8°.—X, 202.

C. 3301 691.15

HEINZERLING, CH.

Die Conservirung des Holzes. Herausgegeben von Ch. Heinzerling. Halle, Knapp, 1884, 8°.—VI, 248.

C. 3302 385.113

BARYCHAR VON MARIENHORT, C. R.

Berechnung der Kosten für den Personen, — Gepäck, — Eilgut—und Frachten—Transport auf den Eisenbahnen. Von C. R. Barychar von Marienhort. Wien, 1877, 8°.—VI, 201

C. 3303 666.8

HEUSINGER VON WALDEGG, EDMUND.

Der Gypsbrenner, Gypsgiesser und Gypsbaumeister sovie Tünch und Stuckarbeiter. Bearbeitet von Edmund Heusinger von Waldegg. Leipzig, Thomas, 1867, 8°.—XVI, 354.

C. 3304 31

COMMISSION

permanente du congrès international de statistique. Mémoires. St.-Petersbourg, Trenke & Fusnot, 1876, 8°.—918.

C. 3305 623.91

PERFORATION

des cuirasses en fer par les projectiles massifs ou creux en acier ou en fonte dure. Paris, Bertrand, s. a. 8°.—162, pl. III.

C. 3306 83(09)

WEBER, GEORG.

Die Geschichte der deutschen Literatur. Von Georg Weber. 9. Aufl. Leipzig, Engelmann, 1867, 8°.—VIII, 143.

C. 3307 517.36

DURÈGE, H.

Theorie der elliptischen Functionen. Von H. Durège. Leipzig, Teubner, 1861, 8°.—XIV, 375.

C. 3308 625.143

WEBER, M. M. FREIH von

Die Stabilität des Gefüges der Eisenbahn-Gleise. Von M. M. Freih. von Weber. Weimar, Voigt, 1869, 8°.—XXII, 257.

C. 3309 621.182.2

BÈDE, M. E.

De l'économie du combustible ou exposé des principaux moyens usités ou proposés pour produire et employer économiquement la vapeur servant de force motrice. Par M. E. Bède. Paris et Liège, Noblet, 1859, 8°.— 200, pl. XIV.

C. 3310 656.28

BISSON, G.

Accidents de chemins de fer. Par G. Bisson. Publiés et annotés par De Janzé. Paris, Henry, 1865, 8°.—162.

C. 3311 386.1

MOLINOS, L.

La navigation intérieure de la France, son état actuel, son avenir. Par L. Molinos. Paris, Baudry, 1875, 8°.—VI, 257.

C. 3312 656.23

HOFMANN, MAX.

Le trafic des chemins de fer. Par Max Hofmann. Paris, Guillaumin, s. a. 8°.—126.

C. 3313 385

COLLIGNON, ÉDOUARD.

Les chemins de fer russes de 1857 à 1862. Etudes sur la Russie. Par Édouard Collignon. Paris, Dunod, 1864, 8°.—254.

C. 3314 17 : 33

BAUDRILLART, M. H.

Des rapports de la morale et de l'économie politique, Par M. H. Baudrillart. Paris, Guillaumin, 1860, 8°.—XI, 579.

C. 3315 516

SALMON, G.

Traité de géométrie analytique. Par G. Salmon. Ouvrage traduit de l'anglais par H. Resal et V. Vaucheret. Paris, Gauthier, 1870, 8°.—XXV, 564.

C. 3316 625.22

MINIMAL-DURCHFAHRTS

Die Minimal-Durchfahrts u. Maximal-Lade-Profile. 2 neu bearbeitete Ausgabe. Berlin, Kreidel, 1874, 8°.—97.

C. 3317 531 : 69

WENCK, JULIUS.

Die Baumechanik. Von Julius Wenck. Leipzig, Baumgärtner, 1870, 8°.—425.

C. 3318 57(03)

СЛОВАРЬ.

Краткій систематическій словарь біологическихъ наукъ. Подъ редакціей В. Битнера. Часть 1 — 3. Спб., Битнеръ, 1904, 8°.—120, 102, 119.

C. 3319 517.1

GOURSAT, ÉDOUARD.

Cours d'analyse mathématique par Édouard Goursat. Tome I—II. Paris, Gauthier Villars, 1902—1905, 8°.—620; VI, 640.

C. 3320 52.3

ФЛАММАРІОНЪ, КАМИЛЛЬ.

Популярныя лекціи по астрономіи. Переводъ съ французскаго Спб., Битнеръ, 1905. 8⁰.—136.

C. 3321 624.02

РЫШКОВЪ, П. Н.

Краткій курсъ мостовъ, читанный П. Н. Рышковымъ студентамъ III курса. 1900—1901 ак. годъ. 2-ое полугодіе. Варшава, б. г. 8⁰.—224, 55.

C. 3322 627.2

HAGEN, G.

Seeufer— und Hafen-Bau. Von G. Hagen. Band 1—4. Berlin, Ernst. 1863, 8⁰.—XVIII, 364, 407, 428; IV, 398. (Атласа не хватаетъ).

C. 3323 620.123.13

CLEBSCH, A.

Theorie der Elasticität fester Körper. Von A. Clebsch. Leipzig, Teubner, 1862, 8⁰. —XI, 424.

C. 3324 621.134.2

ZEUNER, GUSTAV.

Die Schiebersteuerungen. Von Gustav Zeuner. 2 verbesserte u. vermehrte Aufl. Freiberg, 1862, 8⁰.—XII, 188. Taf. V.

C. 3325 533.331

RÜHLMANN, RICHARD.

Die barometrischen Höhenmessungen. Von Richard Rühlmann. Leipzig, Barth, 1870, XIV, 133.

C. 3326 332

SCHWEBEMEYER, CARL.

Das Actien-Gesellschafts — Bank — und Versicherungs—Wesen in England. Dargestellt von Carl Schwebemeyer. Berlin, Springer, 1857, 8⁰.—IV, 207.

C. 3327 621.13

WELKNER, G.

Die Locomotive. Von G. Welkner. Göttingen, 1859, 8⁰.—VI, 152.

C. 3328 656.234

SCHEFFLER, HERMANN.

Die Transportkosten und Tarife der Eisenbahnen. Von Hermann Scheffler Wiesbaden, Kreidel, 1860, 8⁰.—116.

C. 3329 385.1

WAGNER, ADOLPH.

Das Eisenbahnwesen. Von Adolph Wagner. Leipzig, Winter, 1877, 8⁰.—147.

C. 3330 669.1 + 622.341

KERL, BRUNO.

Grundriss der Eisenhüttenkunde. Von Bruno Kerl. Leipzig, Felix, 1875, 8⁰.—XVIII, 468.

C. 3331 691.1 : 539.4 + 620.1

CHEVANDIER, E. u. G. WERTHEIM.

Die mechanischen Eigenschaften des Holzes. Von E. Chevandier u. G. Wertheim. I. Hälfte. Wien, Braumüller, 1871, 8⁰.—VI, 123, 123.

C. 3332 624.22 + 624.3

LAISSLE, FR. U. AD. SCHÜBLER.

Der Bau der Brückenträger mit besonderer Rücksicht auf Eisen-Constructionen. Von Fr. Laissle u. Ad. Schübler. Stuttgart, Neff, 1871, 8⁰.—X, 206, 189.

C. 3333 531.2 : 69

MÜLLER-BRESLAU, HEINRICH F. B.

Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen. Von Heinrich F. B. Müller-Breslau. Leipzig, Baumgärtner, 1886, 8⁰.—IV, 191.

C. 3334 656.2

SCHIMA, FRANZ.

Studien und Erfahrungen im Eisenbahnwesen. Von Franz Schima. Prag, Dominicus, 1881, 8⁰.—288.

C. 3335 621 : 625.1/2

KOCH, RICHARD.

Das Eisenbahn-Maschinenwesen. Bearbeitet von Richard Koch. Wiesbaden, Bergmann, 1879, 8⁰.—192, VIII, 678.

C. 3336 656.25

WEBER, M. M. VON.

Das Telegraphen—und Signalwesen der Eisenbahnen. Von M. M. Freih von Weber. Weimar, Voigt, 1867, 8°.—xx, 319.

C. 3337 691.1

PRINTZ, EDUARD.

Die Bau und Nutzhölzer oder das Holz als Rohmaterial für technische und gewerbliche Zwecke. Herausgegeben von Eduard Printz. Weimar, Voigt, 1884, 8°.—vi, 227.

C. 3338 625.7 + 625.8

AHLBURG.

Der Strassenbau mit Einschluss der Construction der Strassenbrücken. Von Ahlburg. Braunschweig, Bruhn, 1870, 8°.—xvi, 372.

C. 3339 66(022)

WAGNER, JOHANNES RUDOLF.

Die chemische Technologie als Leitfaden bei Vorlesungen. Von Johannes Rudolf Wagner. 7. Aufl. Leipzig, Wigand, 1868, 8°.—xvi, 824.

C. 3340 31 : 385

SCHÜLLER, SIEGMUND.

Versuch einer vergleichenden grafischen Statistik der oesterr. und ungar. Eisenbahnen während der Jahre 1866—69. Von Siegmund Schüller. Wien, Lehmann, 1871, 8°—46. Taf. xxxv.

C. 3341 628.1

BÜRKLI, A.

Anlage und Organisation städtischer Wasserversorgungen. Von A. Bürkli. Zürich, 1867, 8°.—288.

C. 3342 91

KELLER, FR. EDUARD.

Der Preuszische Staat. Ein Handbuch der Vaterlandskunde. Von Fr. Eduard Keller. 2. Aufl. Berlin, Guttentag, 1873, 8°.—843.

C. 3343 53(022)

HOH, THEODOR.

Compendium der Physik. Von Theodor Hoh. Erlangen, Enke 1866, 8°.—279.

C. 3344 620.121 + 669.113.5 + 669.91

STYFFE, KNUT.

Die Festigkeits-Eigenschaften von Eisen und Stahl. Von Knut Styffe. Deutsch von C. Weber. Nebst Atlas. Weimar, Voigt, 1870, 8°.—xviii, 176. Taf. 9.

C. 3345 666.94

MICHAELIS, W.

Die hydraulischen Mörtel insbesondere der Portland-Cement. Von W. Michaelis. Leipzig, Quandt, 1869, 8°.—xii, 315.

C. 3346 385(47)

JASTRZEMBSKI, S.

Das russische Eisenbahnnetz und die wichtigsten Betriebs-Resultate des russischen Eisenbahnen. Von S. Jastrzembski. Spt., Rötger, 1878, 8°.—137.

C. 3347 551.23 + 551.491

LERSCH B. M.

Hydro-Physik oder Lehre vom physikalischen Verhalten der natürlichen Wässer. Von B. M. Lersch. Berlin, Hirschwald, 1865, 8°.—iv, 283. Taf. iv.

C. 3348 693.13 + 625.751 + 625.122

SCHMITT, EDUARD.

Der Erdkunstbau auf Strassen und Eisenbahnen. Von Eduard Schmitt. Th. I—II. Leipzig, Felix, 1871, 8°.—iv, 79. Taf. xv. 98, Taf. xvi.

C. 3349 665.5

PERUTZ, H.

Die Industrie der Mineralöle, des Petroleums, Paraffins und der Harze. Von H. Perutz. Wien, Gerold, 1868, 8°.—xii, 348.

C. 3350 696(023)

GRAPOW, H.

Anleitung zur Aufsicht bei Bauten. Herausgegeben von H. Grapow. Berlin, Ernst, 1872, 8°.—328.

C. 3351 539.3 + 620.123.13

WEYRAUCH, JACOB J.

Theorie elastischer Körper. Von Jacob J. Weyrauch. Leipzig, Teubner, 1884, 8°.—viii, 279.

C. 3352 656.2(032)

KAFKA, EDUARD.

Eisenbahn-Angelegenheiten und Personalien in lexikalischer Form. Von Eduard Kafka. Leipzig, Felix, 1885, 8⁰.—VIII, 318.

C. 3353 656.4

WEBER, M. M. VON.

Die Praxis des Baues und Betriebes der Secundärbahnen mit normaler und schmaler Spur. von M. M. von Weber. Weimar, Voigt, 1873, 8⁰.—XVIII, 124.

C. 3354 63.13 + 63.14

JANOTA-BZOWSKI, HENRYK.

Melioracye wodne w gospodarstwie wiejskiem, z 75-ma rysunkami. Warszawa, 1906, 8⁰.—VIII, 158.

C. 3355 378

СПОМЕНИЦА

о отвараньу Универзитета. Веоградъ, 1906, 8⁰.—16, 162.

C. 3356 53(015)

LANG, VIKTOR VON

Einleitung in die theoretische Physik. Von Viktor von Lang. Braunschweig, Vieweg, 1873, 8⁰.—VIII, 566.

C. 3357 621.8

REICHE, H. v.

Die Maschinenfabrikation. Von H. v. Reiche. Band 1—2. Leipzig, Felix, 1869, 8⁰.—XII, 193. 225, Taf. 52.

C. 3358 623.15

ZWEYER, CARL.

Die Feldbefestigungskunst. Von Carl Zweyer. Wien, Braumüller, 1862, 8⁰.—VIII, 351.

C. 3359 576.84

ZOPF, W.

Die Spaltpilze. Nach dem neuesten Standpunkte bearbeitet von W. Zopf. 3 sehr vermehrte Aufl. Breslau, Trewendt, 1885, 8⁰.—VI, 127.

C. 3360 63(062) + 338 : 63

ТРУДЫ

2-го съѣзда дѣятелей по сельскохозяйственному опытному дѣлу въ С.-Петербургѣ, съ 14 по 20 декабря 1902 г. Спб., Киршбаумъ, 1905, 8⁰.—XXVIII, 330.

C. 3361 553(022)

BURAT, AMÉDÉE.

Traité du gisement et de la recherche des minéraux utiles. Par Amédée Burat. 5-e edit. Partie I. Géologie pratique. Partie II. Gites métallifères. Paris, Garnier, 1870, 8⁰.—538, 505.

C. 3362 621

HATON de la GOUPILLIÈRE.

Cours de machines. Par Haton de la Goupillière. Tome 1—2. Paris, Dunod, 1889, 8⁰.—VII, 893; XII, 909.

C. 3363 532 + 627(022)

ROFFIAEN, E.

Traité descriptif et raisonné des constructions. Hydrauliques à la mer et dans les eaux courantes. Par E. Roffiaen. Partie I. Hydraulique. Part. II. Constructions maritimes. Part. III. Constructions en eaux courantes. Bruxelles, Christophe, 1861 — 1863, 8⁰.—308, 262, pl. V; 288, pl. III.

C. 3364 338.9

COURCELLE-SENEUIL, I. G.

Traité théorique et pratique des entreprises industrielles, commerciales et agricoles ou manuel des affaires. Par I. G. Courcelle-Seneuil. 2-e edit. Paris, Guillaumin, 1857, 8⁰.—VIII, 544.

C. 3365 625.111 + 625.72 + 626.12

TOURETTE, SIMÉON.

Tracé des chemins de fer, routes et canaux. Par Siméon Tourette. Paris, Lacroix, 1858, 8⁰.—223, tab. 31.

C. 3366 624.04

БѢЛЕЛЮБСКІЙ, В. Н. и Н. К. ГАРФЪ.

Краткое руководство для разсчета мостовъ простыхъ системъ. Составили В. Н. Бѣлелюбскій и Н. К. Гарфъ. Кіевъ, Шевченко, 1904, 8⁰.—164, таб. XXVIII.

C. 3367 622(022)

ПАУТОВЪ, ПЕТРЪ.

Горное искусство. Курсъ горно-техническихъ училищъ. Петра Паутова. Съ 620 рис. въ текстѣ. Спб., Риккеръ, 1904, 8°.—xii, 479.

C. 3368 531 : 62

CHURCH, IRVING P.

Mechanics of engineering. By Irving P. Church. New York, Wiley, 1904, 8°.—xv, 834.

C. 3369 625.17

СОКОЛОВСКІЙ, Э.

Ремонтъ пути на желѣзныхъ дорогахъ. Переводъ съ нѣмец.: „Die Bahnerhaltung" Морица Полицера, дополненное и примѣненное для употребленія на русскихъ дорогахъ. Э. Соколовскимъ. Спб., Сущинскій, 1875, 8°.—iii, 174, лис. 6.

C. 3370 625.1

PAULUS, RUDOLF.

Der Eisenbahn-Oberbau in seiner Durchführung auf den Linien der K. K. priv. Südbahn-Gesellschaft. Von Rudolf Paulus. Wien, Lehmann, 1872, 8°.—vi, 152. Taf. xiv.

C. 3371 625.13

КЕРБЕДЗЬ, М. С.

Постройка двухъ тоннелей на Новороссійской вѣтви Владикавказской желѣзной дороги. Спб, Эрлихъ, 1890, 8°.—79. Атласъ G. 515.

C. 3372 338(57.1) + 9(57.1)

ДУНИНЪ-ГОРКАВИЧЪ, А. А.

Тобольскійсѣверъ. Составилъ А. А. Дунинъ-Горкавичъ. Съ картой и 43 рисунками въ текстѣ. Спб., Киршбаумъ, 1904, 8°.—x, 281, 78, карт. 1.

C. 3373 347.246

СБОРНИКЪ

обязательныхъ постановленій и мѣстныхъ правилъ по рыбопромышленности. Спб., Киршбаумъ, 1903, 8°.—x, 219.

C. 3374 59.7(584)

БЕРГЪ, Л.

Рыбы Туркестана. Спб., Гольдбергъ, 1905, 8°.—xvi, 261, таб. 5.

C. 3375 63.922

ГЕЙНЕМАНЪ, Б. А.

Рыболовство на Балтійскомъ морѣ у русскихъ береговъ. Б. А. Гейнемана. Спб., Фролова, 1904, 8°.—120.

C. 3376 628.8 + 662.91

СВІЯЗЕВЪ.

Теоретическія основанія печного искусства въ примѣненіи къ устройству разныхъ нагрѣвателей, къ отопленію и вентиляціи зданій. Свіязева. Спб., 1867, 8°.—vii, 235, лис. iv.

C. 3377 351 : 69

ШРАМЧЕНКО, М.

Уставъ строительный, измѣненный и дополненный узаконеніями, обнародованными по 1 февраля 1891 февраля 1891 г. Спб., Мартыновъ, 1891, 8°.—xviii, 114.

C. 3378 624.221.04

РИТТЕРЪ, АВГУСТЪ.

Элементарная теорія и расчетъ желѣзныхъ стропильныхъ и мостовыхъ фермъ. Сочиненіе Августа Риттера. Спб., Майковъ, 1875, 8°.—xii, 408.

C. 3379 625.172 + 654.2(022)

GOSCHLER, CH.

Traité pratique de l'entretien et de l'exploitation des chemins de fer. Par Ch. Goschler. Tome 1 — 2. Service de la voie. Paris, Baudry, 1870—1872, 8°.—xxvii, 704, pl. xxxv; xvi, 746.

C. 3380 526.95

STAMPFER, S.

Theoretische und praktische Anleitung zum Nivelliren. Von S. Stampfer. 5 vermehrte Aufl. Wien, Gerold, 1864, 8°.—xii, 164. Taf. 3.

C. 3381 625.212

ВЕЙСБЛАТЪ, АДОЛЬФЪ.

Подвижной составъ желѣзныхъ дорогъ. Колесныя шины. Составилъ Адольфъ Вейсблатъ. Спб., Демаковъ, 1879, 8°.—92, таб. viii.

C. 3382 625.11 + 625.12

ВИНКЛЕРЪ, Э.

Нижнее строеніе по лекціямъ Э. Винклера. Переводъ съ третьяго изд. Л. Вурцеля. Спб., Безобразовъ, 1879, 8⁰.—269, таб. III.

C. 3383 531.69

ГОЛОВИНЪ, Х. С.

Курсъ строительной механики. Лекціи, читанныя въ С.-Петербургскомъ практич. технологич. Институтѣ въ 1885/6 г. Спб. б. г. 8⁰.—270 (литограф.).

C. 3384 624(022)

BECKER, MAX.

Der Brückenbau in seinem ganzen Umfange. Von Max Becker. 3. verbesserte u. vermehrte Aufl. Stuttgart, Mäeken, 1869, 8⁰.—XVI, 464, Atlas G. 516.

C. 3385 621..132.8

SIMON, HEINRICH.

Das Fairlie'sche Patent-System und sein Einfluss auf den billigeren Betrieb von Eisenbahnen insonderheit Vicinalbahnen. Von Heinrich Simon. Manchester, 62, 8⁰.—

C. 3386 624.2.04

WEYRAUCH, JAKOB I.

Allgemeine Theorie und Berechnnng der continuirlichen und einfachen Träger. Von Jakob I. Weyrauch. Leipzig, Teubner, 1873, 8⁰.—VII, 133. Bl. XI, 175. Taf. IV.

C. 3387 625,151

PINZGER, L.

Die geomotrische Construction von Weichen-Anlagen für Eisenbahn-Gleise. Von L. Pinzger. Aachen, Mayer, 1873, 8⁰.—VII, 133. Bl. XII.

C. 3388 347.763.4(42)

SIMON, HENRY ANDREWS.

Die Haftpflicht der Eisenbahnen oder das Recht in Bezug auf Unfälle und Unregelmässigkeiten beim Eisenbahnbetriebe in England. Von Henry Andrews Simon. Weimar, Voigt, 1868, 8⁰.—XIV, 120.

C. 3389 531(022)

RITTER, A.

Lehrbuch der analytischen Mechanik. Von A. Ritter. Hannover, Rümpler, 1873, 8⁰.—XI, 271.

C. 3390 513.5(021)

REYE, THEODOR.

Die Geometrie der Lage. Vorträge von Theodor Reye. 1—2 Abtheil. Hannover, Rümpler, 1866, 8⁰.—XII, 146. Taf. V. 268.

C. 3391 625.143

STANĚ, ALOIS.

Theorie und Praxis des Eisenbahngleises. Von Alois Staně. Wien, Pollak, 1892, 8⁰.—VI, 168. Taf. XVI.

C. 3392 624.08+620.12

SCHEFFLER, HERMANN.

Ueber Gitter—und Bogenträger und über die Festigkeit der Gefässwände. 2 Monographien zur Erweiterung der Biegungs und Festigkeitstheorie. Von Hermann Scheffler. Braunschweig, Vieweg, 1862, 8⁰.—VIII, 257.

C. 3393 691

CHATEAU, THÉODORE.

Technologie du batiment ou étude complète des matériaux de toute espèce. Par Théodore Chateau. Tome 1—2. Paris, Bance, 1863—1866, 8⁰.—XXIV, 517: XXVIII, 851.

C. 3394 62(083)

CLAUDEL, J.

Formules, tables et renseignements usuels. Par J. Claudel. 7-e edit. Paris, Dunod, 1867, 8⁰.—XXXII, 1340 pl. III.

C. 3395 656.221+621.131.1

VUILLEMIN, L., A. GUEBHARD et C. DIEUDONNÉ.

De la résistence des trains et de la puissance des machines. Par L. Vuillemin, A. Guebhard et C. Dieudonné. Paris, Lacroix, 1868, 8⁰.—XII, 100 pl. VIII.

C. 3396 656.62+626.7

CHANOINE ET DE LAGRENÉ.

Mémoire sur la traction des bateaux. Par Chanoine et de Lagrené. Paris, Dunod, 1864, 8⁰.—100 pl. 2.

C. 3397 624.22

COLLIGNON, ÉD.

Théorie élémentaire des poutres droites. Ponts métalliques. Par Éd. Collignon. Paris, Dunod, 1865, 8°.—VIII, 138.

C. 3398 511(022)

SERRET, J. A.

Éléments d'aritmétique. Par J. A. Serret. 3-e édit. Paris, Mallet-Bachelier, 1861, 8°.—220.

C. 3399 531 : 69

КАРЛОВИЧЪ, В. М.

Строительная механика. В. М. Карловичъ. Очеркъ I. Спб., Тихановъ, 1891, 8°.—275. Атласъ G 517.

C. 3400 626(071.1)

ГЛУШИНСКІЙ.

Водяныя сообщенія. Спб., б. г. 8°.—467 Литограф.

C. 3401 628.1(071.1)

КОТЛЯРЕВСКІЙ.

Лекціи водопроводовъ, читанныя въ Институтѣ Инжен. Пут. Сообщ. проподавателемъ Котляревскимъ. 1875/76 г. Спб., б. г. 8°.—152, табл. 24. Литограф.

C. 3402 725(071.1)

СОКОЛОВЪ, Д. Д.

Лекціи гражданской архитектуры, читанныя въ Институтѣ Инжен. Пут. Сообщ. Д. Д. Соколовымъ. 1873—74 г. Спб., 1874, 8°.— 492. Литограф.

C. 3403 69(071.1)

КОКОВЦЕВЪ, К.

Курсъ строительнаго искусства. Общія начала. 1871—72 г. Спб., 1872, 8°.—248, 198. лис. 69. Литограф.

C. 3404 63.13+63.14+63.196.15(071.1)

НЮБЕРГЪ, А. Г.

Лекціи объ осушеніи и орошеніи мѣстности, читанныя въ Инст. Инж. Пут. Сообщ. въ 1874—75 ак. г. репетиторомъ А. Г. Нюбергомъ. Спб. 1875, 8°.—240.

C. 3405 693.14+721.1

КОКОВЦЕВЪ, К.

Основанія. Спб., б. г. 134, таб. XXIV. Литограф.

C. 3406 53 : 69

БѢЛЕЛЮБСКІЙ.

Лекціи строительной механики, читанныя въ Инст. Инж. Пут. Сообщ. 1873/74 г. Спб., 1874, 8°.—422, 132. Литограф.

C. 3407 625.1(071.1)

ГЛУШИНСКІЙ, І. П.

Желѣзныя дороги. Лекціи I. II. Глушинскаго. Спб., 1876, 8°.—117, табл. 27.

C. 3408 519

HAGEN, G.

Grundzüge der Wahrscheinlichkeits-Rechnung. Von G. Hagen. 2. umgearb. Ausgabe. Berlin, Ernst, 1867, 8°.—187.

C. 3409 662.61+662.91+697

FERRINI, RINALDO.

Technologie der Wärme, Feuerungsanlagen, Kamine, Oefen, Heizung und Ventilation der Gebäude. Von Rinaldo Ferrini. Iena, Costenoble, 1878, 8°.—XVIII, 514.

C. 3410 656.235

ВИТТЕ, СЕРГѢЙ.

Принципы желѣзнодорожныхъ тарифовъ по перевозкѣ грузовъ. Сергѣя Витте. 2-ое изд. Кіевъ, Кульженко, 1885, 8°.—V, 329.

C. 3411 625.111

TIEFENBACHER, LUDWIG E.

Die Ermittelung der Durchfluss-Profile. mit besonderer Berücksichtigung der Gebirks und Wildbäche. Von Ludwig Tiefenbacher. Wien, Lehmann, 1879, 8°.—VIII, 146.

C. 3412 539.4

KICK, FRIEDRICH.

Das Gesetz der Proportionalen Widerstände und seine Anwendungen. Von Friedrich Kick. Leipzig, Felix, 1885, 8°.—X, 118. Taf. III.

C. 3413 38 + 656

WELTVERKEHR

Der Weltverkehr und seine Mittel. Rundschau über Schiffahrt und Welthandel. Leipzig, Spamer, 1868, 8°.—778.

C. 3414 662.8

HABETS, A.

De l' agglomération des combustibles par A. Habets. Paris, Borrani, 1871. 8°.—141, pl. XVI.

C. 3415 531.9

RETTICH, HUGO EDLEN v.

Die luft als Ausgleichmittel der Seilgewichte bei Fördermaschinen. Von Hugo Edlen v. Rettich. Wien, Hölder, 1885, 8°.—124.

C. 3416 677.07

HERZFELD, J.

Die technische Prüfung der Garne und Gewebe. Von J. Herzfeld. Mit 69 Abbildungen. Wien, Hartleben, 1896, 8°.—VII, 160.

C. 3417 77.3 + 77.7

EDER, JOSEF MARIA.

Das Pigmentverfahren und die Heliogravure. Von Josef Maria Eder. Mit 31 Holzschnitten. Halle a S, Knapp, 1896, XV, 307—538.

C. 3418 621(071.1)

BRESSE.

Cours de mécanique appliquée, professé à l' école impériale des ponts et chaussées. Par Bresse. 2-e edit. Partie 1—3. Paris, Gauthier—Villars, 1865—1868, 8°.—XXVII, 536; XXI, 568; XXVI, 360.

C. 3419 621.126

PARIS, E.

Traité de l'hélice propulsive. Par E. Paris. Paris, Bertrand, 1855, 8°.—IV, 564, pl. XIV.

C. 3420 59

ВАРАВВА, М.

Руководство естественной исторіи для городскихъ училищъ съ вопросами и задачами. Составилъ М. Варавва. Зоологія. Годъ первый. Изд. 2-ое. Москва, Салаевъ, 1879, 8°.—187. Годъ второй и третій 1879, 8°—283.

C. 3421 017.3

CATALOGUE

des livres de fonds et d'assortiment de Gauthier—Villars. Paris, Gauthier Villar, 1904, 8°.—232.

C. 3422 576.838.2 + 612.015.1 + 58.11.99

БУТКЕВИЧЪ, В. С.

Энзимы и ихъ распространеніе въ растительномъ царствѣ. Москва, Кушнеревъ, 1898, 8°.—131.

C. 3423 58.11.014+58.11.015

КРАШЕНИННИКОВЪ, Ѳ.

Накопленіе солнечной энергіи въ растеніи. Я. Крашенинникова. Москва, Левенсонъ, 1901, 8°.—89.

C. 3424; C. 3425 546 + 547

КОЧКИНЪ, Н.

Курсъ общей химіи. (Химія неорганическая и органическая). Составилъ Н. Кочкинъ. Спб., Демаковъ, 1904, 8°.—XV. 671.

C. 3426 58.19

ВАРМИНГЪ, Е.

Распредѣленіе растеній въ зависимости отъ внѣшнихъ условій (экологическая географія растеній). Переводъ со 2-го нѣм. изд. А. Г. Генкеля. Спб., Брокгаузъ—Ефронъ, 1902, 8°.—474.

C. 3427 63.922 (Сахалинъ)

ШМИДТЪ, П. Ю.

Морскіе промыслы острова Сахалина. Съ 31 таблиц. рис. и чертеж.. 45 рис. въ текстѣ и картон. Спб., Пожаровъ, 1905, 8°.—X, 458.

C. 3428 625.1

GOSCHLER, CH.

Traité pratique de l'établissement, de l' entretien et de l' exploitation des chemins de fer. Par Ch. Goschler. 3-e edit. revue, corrigée et augmentée. Par P. Guillemant. Partie I. Service de la voie. Tome I. Fasc. 1 — 3. Paris, Bernard, 1894—1900, 8°.—1094, pl. XXVIII.

C. 3429 621.31 (Нюренбергъ)

UPPENBORN, F.

Elektrische Centralstationen der Elektrizitäts-Aktiengesellschaft vormals Schuckert et Co. in Nürnberg. Von F. Uppenbern. Berlin, Springer, s. a. 8⁰.—102.

C. 3430 622.25

RIEMER, J.

Das Schachtabteufen in schwierigen Fällen. Von J. Riemer. Mit 18 Abbildungen im Text und 19 Tafeln. Freiberg, Graz u. Gerlach, 1905, 8⁰.—vi, 135, Taf. xix.

C. 3431 333.38 + 333.5

КОФОДЪ, А. А.

Крестьянскіе хутора на надѣльной землѣ. Томъ 1—2. Составилъ А. Кофодъ. Спб., Вайсбергъ, 1905, 8⁰.—283, 695.

C. 3432 519

ЕРМАКОВЪ, В. П.

Теорія вѣроятностей. Лекціи читанныя В. П. Ермаковымъ. Кіевъ, Завадзкій, 1879, 8⁰.—ш, 140.

C. 3433 52.637+551.5

ФУСЪ, В.

Результаты сибирской нивеллировки, произведенной въ 1875—1876 г. отъ станицы Звѣриноголовской до озера Байкала. Спб., 1885, 8⁰.—44, кар. 3.

C. 3434 622.6 + 622.7 + 669.0

LINKENBACH, C.

Die Aufbereitung der Erze. Von C. Linkenbach. Mit 24 litographirt. Taf. Berlin, Springer, 1887, 8⁰.—152, xxiv.

C. 3435 666.3

KERL, BRUNO.

Handbuch der gesammten Thonwaarenindustrie. Von Bruno Kerl. 2 Aufl. Braunschweig, Schwetschke, 1879, 8⁰—xxiii, 744.

C. 3436 58.11.2+58.11.344

ПРЯНИШНИКОВЪ, Д. Н.

Бѣлковыя вещества и ихъ превращенія въ растеніи въ связи съ дыханіемъ и ассимиляціей. Москва, Кушнеревъ, 1899, 8⁰.—110.

C. 3437 546.21 + 546.26

SCHMIDT, JULIUS.

Ueber die basischen Eigenschaften des Sauerstoffs und Kohlenstoffs. Von Julius Schmidt. Berlin, Borntraeger, 1904, 8⁰.—110.

C. 3438 665.2 + 665.3

BENEDIKT, RUDOLPH u. FERDINAND ULZER.

Analyse der Fette und Wachsarten. Von Rudolph Benedikt. 4. erweit. Aufl. von Ferdinand Ulzer. Berlin, Springer, 1903, 8⁰.—xii, 941.

C. 3439 622

SERLO, ALBERT.

Leitfaden zur Bergbaukunde. Von Albert Serlo. Band 1—2. Berlin, Springer, 1888, 8⁰.—viii, 668, xix, 841.

C. 3440 622

TREPTOW, E. F. WÜST, W. BORCHERS.

Bergbau und Hüttenwesen. Von E. Treptow, F. Wüst u. W. Borchers. Leipzig, Spamer, 1900, 8⁰.—viii, 605.

C. 3441, C 3442 7(09)

РОЗЕНБЕРГЪ, Р.

Исторія искусства съ древнихъ временъ до нашихъ дней. Р. Розенберга. Ч. I. Спб., Изд. жур. „Міръ Бож." 1905, 8⁰.—

C. 3443 59.15

БРЭМЪ.

Жизнь животныхъ. Томъ 1—3. Спб., 1902, 8⁰.—xxi, 853, xxi, 880; xxviii, 1066.

C. 3444 56(42)

SOWERBY, JAMES.

The mineral conchology of Great Britain. or coloured figures and descriptions of those remains of testaceous animals or Schells. By James Sowerby. Vol. I—XIV. London, 1812, 8⁰.—

С. 3445 531.81 : 658.6

КАЦЪ, И. С.

Торговые вѣсы. Ихъ конструкція, теорія и вывѣрка. Руководство и справочная книга при выборѣ, вывѣркѣ и уходѣ за вѣсами, а также при ихъ конструированіи. Составилъ И. С. Кацъ. Съ 256 объяснительными фигурами и приложеніемъ главнѣйшихъ законоположеній о мѣрахъ и вѣсахъ, а также сравнительныхъ таблицъ мѣръ и вѣса разныхъ странъ. Одесса, 1905, 8⁰.—96, ш.

С. 3446 59(074.6)

ЗЛОТНИЦКІЙ, Н. Ѳ.

Акваріумъ Любителя. Подробное описаніе водяныхъ животныхъ и растеній для акваріума, устройства акваріума, ухода за нимъ и проч. Н. Ѳ. Злотницкаго. Съ 263 политипажами и 2 таблицами. Изданіе 3-е, передѣланное. 8⁰.—688.

С. 3447 531.81 : 658.6

BRAUER, E.

Die Konstruktion der Wage nach wissenschaftlichen Grundsätzen und nach Massgabe ihres Spezialzweckes. Zum Gebrauch für Wagenfabrikanten so wie für technische Lehranstalten. Dritte vollständig neubearbeitete Auflage von Sz. Lawaczek. Mit 246 Textabbildungen und Tafeln. Leipzig, 1906, 8⁰.—vш, 285.

С. 3448 31:63(47)

ФОРТУНАТОВЪ, А.

Сельскохозяйственная статистика европейской Россіи. Составилъ А. Фортунатовъ. Москва, 1893 г. 8⁰.—vп. 246.

С. 3449 340.67

BAUMERT, GEORG, M. DENNSTEDT u. F. VOIGTLÄNDER.

Lehrbuch der gerichtlichen Chemie. In zwei Bänden. Zweite gänzlich umgearbeitete Auflage. Bearbeitet von Georg Baumert, M. Dennstedt und F. Voigtländer.

Zweiter Band. Der Nachweis von Schriftfälschungen, Blut, Sperm usw. unter besonderer Berücksichtigung der Photographie. Mit 97 Abbildungen Einschl. einer farbiger Spektraltafel. Braunschweig. Druck und Verlag von Friedrich Vieweg u. S. 1906, 8⁰—x, 248.

С. 3450 63.93.027(47)

ГРИММЪ, Е.

Рыбы прѣсныхъ водъ европейской Россіи. Ихъ признаки, размноженіе, распространеніе и экономическое значеніе. Е. Гриммъ. Спб., 1906, 8⁰.—65.

С. 3451 58.52

ТЮБЕФЪ, К. фонъ—

Хвойныя древесныя породы съ болѣе подробнымъ обзоромъ видовъ, зимующихъ въ грунту въ Средней Европѣ. Сочиненіе К фонъ-Тюбефъ. Спб., 1902, 8⁰.—vш, 203.

С. 3452 63.51 + 63.41(47)

ШРЕДЕРЪ Р. И.

Русскій огородъ, питомникъ и плодовый садъ. Р. И. Шредера. 8-е изданіе. Спб., 1907, 8⁰.—vш, 832.

С. 3453 63.173.4 + 63.51 + 63.191.193

КАМЕНОГРАДСКІЙ, П. И.

Парники и ранняя выгонка овощей, разсады и земляники. П. И. Каменоградскій. Спб., 1906, 8⁰.—xi. 256.

С. 3454 58.33.78

КИЧУНОВЪ, Н. И.

Альбомъ розъ. Описаніе 300 лучшихъ сортовъ розъ. Н. И. Кичуновъ. 20 хромолит. таблицъ. Спб., 1905, 8⁰.—53, 20.

С. 3455 612.015

ABDERHALDEN, EMIL.

Lehrbuch der physiologischen Chemie in dreiszig Vorlesungen. Von Emil Abderhalden. Mit 3 Figuren. Urban u. Schwarzenberg Berlin. Wien, 1906, 8⁰.—vп, 787.

С. 3456 547

HOLLEMAN, A. F.

Lehrbuch der organischen Chemie für Studierende an Universitäten und technischen Hochschulen von A. F. Holleman. Fünfte verbesserte Auflage. Mit zahlreischen Abbildungen. Leipzig, Verlag von Veit u. C-o, 1907, 8⁰.—x, 494.