ИЗВѢСТІЯ

ВАРШАВСКАГО

ПОЛИТЕХНИЧЕСКАГО ИНСТИТУТА

ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II.

ВЫПУСКЪ I. — 1903 г.

ВАРШАВА.

ВЪ ТИПОГРАФІИ ВАРШАВСКАГО УЧЕБНАГО ОКРУГА.
Краковское-Предмѣстье № 3.

1903.

Печатано по опредѣленію Совѣта Варшавскаго Политехническаго Института Императора Николая II.

Директоръ *А. Лагоріо.*

СОДЕРЖАНІЕ.

Редакторъ *В. Э. Эренфейхтъ.*

ОФФИЦІАЛЬНЫЙ ОТДѢЛЪ.

ИЗВЛЕЧЕНІЯ
ИЗЪ ПРОТОКОЛОВЪ ЗАСѢДАНІЙ СОВѢТА
ВАРШАВСКАГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКАГО ИНСТИТУТА
ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II
за 1898—1899 учебный годъ.

Въ началѣ существованія Института Совѣтъ его состоялъ изъ предсѣдателя - Директора А. Е. Лагоріо и членовъ — ординарныхъ профессоровъ: П. О. Сомова, Е. Е. Вагнера, В. А. Анисимова и Г. Ѳ. Вороного; Правленіе Института состояло изъ предсѣдателя-Директора А. Е. Лагоріо, декановъ—П. О. Сомова и Е. Е. Вагнера и Инспектора Студентовъ К. Н. Капустина.

Засѣданіе 11 сентября 1898 года.

Присутствовали подъ предсѣдательствомъ Директора всѣ 4 члена Совѣта.

Слушали:

1. Сообщеніе г. Директора, что на его представленіе отъ 10 августа 1898-го года, согласно пункту *б* статьи IV Высочайше утвержденнаго 8 іюня 1898 года мнѣнія государственнаго Совѣта объ учрежденіи Варшавскаго Политехническаго Института ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II по вопросу объ установленіи временнаго состава Правленія, а также временнаго порядка веденія дѣлъ, подлежащихъ рѣшенію въ собраніяхъ Отдѣленій и Совѣта, послѣдовало въ предложеніи г. Временно Управляющаго Министерствомъ Финансовъ отъ 21 августа 1898 года за № 22394 согласіе на приведеніе представленій г. Директора (см. приложеніе I).

2. Предложеніе г. Директора выбрать секретаря Совѣта. По баллотировкѣ оказался единогласно выбраннымъ профессоръ В. А. Анисимовъ.

3. Докладъ Правленія о результатахъ конкурсныхъ испытаній. Принято въ текущемъ учебномъ году кромѣ нормы въ 250 человѣкъ, съ разрѣшенія г. Управляющаго Министерствомъ Финансовъ, еще 20 человѣкъ.

4. Представленное г.г. Деканами распредѣленіе лекцій.

5. Предложеніе г. Директора о предполагаемомъ распредѣленіи кредита въ 2750 руб. на учебно-вспомогательныя учрежденія въ I-мъ полугодіи 1898/9 уч. года, а именно, на химич. лабор. 600 руб., механ. каб. 150 руб., музей строительнаго искусства 150 руб., физическій кабинетъ 500 руб., минералогическій кабинетъ 250 руб., геодезическій кабинетъ 150 руб., ботаническій кабинетъ 150 руб., для черченія 500 руб., для рисованія 300 руб.

6. Представленіе г.г. преподавателей С. А. Окольскаго, Э. В. Невядомскаго и В. А. Бернацкаго о порядкѣ веденія преподаванія черченія и рисованія и практическихъ занятій по физикѣ.

7. Представленіе профессора Вагнера объ опредѣленіи магистра фармаціи К. Славинскаго па должность старшаго лаборанта по каѳедрѣ химіи. По баллотировкѣ г. К. Славинскій оказался избраннымъ единогласно.

8. Предложеніе преподавателя И. И. Бевада о приглашеніи лаборанта Университета А. Семенова къ временному исполненію обязанностей лаборанта по каѳедрѣ химіи.

9. Прошеніе г. Доктора медицины И. Мрочковскаго о предоставленіи ему должности лаборанта.

10. Докладную записку г. М. Рейснера о преподаваніи законовѣдѣнія въ Институтѣ.

11. Докладную записку г. доктора медицины I. Поляка объ учрежденіи каѳедры гигіены въ Институтѣ.

12. Правила для студентовъ Института, утвержденныя г. Министромъ Финансовъ (см. прилож. 2).

13. Привѣтственныя телеграммы, полученныя по поводу открытія Варшавскаго Политехническаго Института отъ г.г. Министра Финансовъ С. Ю. Витте, Временно Управляющаго Министерствомъ Финансовъ П. М. Романова, Вице Директоровъ Департамента Торговли и Мануфактуръ Н. П. Лангового и В. И. Михневича, Начальника Учебнаго Отдѣленія того-же Департамента А. Н. Михайлова, Совѣта Кіевскаго Политехническаго Института, Совѣта Лѣсного Института, Совѣта Холмско-Маріинскаго Женскаго Училища, отъ Графа Тарновскаго изъ Конска и М. Познанскаго изъ Лодзи.

Положили: по ст. 1 принять къ свѣдѣнію и руководству; по ст. 2 представить на утвержденіе г. Министру Финансовъ, по ст. 3 принять къ свѣдѣнію, по ст. 4, 5 и 6 утвердить, по ст. 7 и 8 представить г. Директору на утвержденіе, по ст. 9, 10 и 11 предложенія отклонить, по ст. 12 и 13 принять къ свѣдѣнію.

Засѣданіе 14 октября 1898 года.

Присутствовали подъ предсѣдательствомъ Директора всѣ 4 члена Совѣта.

Слушали:

1. Примѣрныя программы профессоровъ и преподавателей Института.

2. Соображенія профессоровъ и преподавателей о веденіи практическихъ упражненій со студентами.

3. Предложеніе профессора Вагнера о назначеніи подъ его руководствомъ вечернихъ собесѣдованій по химіи для студентовъ I курса механическаго и инженерно-строительнаго Отдѣленій и о приглашеніи для веденія собесѣдованій лаборанта В. Лаврова.

4. Представленіе преподавателя Палладина о назначеніи на должность младшаго лаборанта при ботаническомъ кабинетѣ Александра Флерова, окончившаго курсъ въ Московскомъ Университетѣ съ дипломомъ I степени. По баллотировкѣ г. Флеровъ избранъ единогласно.

5. Представленіе библіотекаря Добржинскаго о порядкѣ выписки книгъ черезъ Совѣтъ (см. приложеніе 5).

6. Отношеніе Правленія о выраженіи благодарности Совѣту Института Путей Сообщенія, профессору Вагнеру, профессору Сомову, г.г. Фолькерскому, Гречанинову, Кондратовичу и Костенецкому за пожертвованныя книги.

Положили: по ст. 1 одобрить и представить въ Министерство, по ст. 2 одобрить и степень участія студентовъ въ практическихъ упражненіяхъ принимать во вниманіе при переходныхъ испытаніяхъ, по ст. 3 назначить для собесѣдованій по 3 часа въ недѣлю и пригласить лаборанта Университета В. Лаврова, по ст. 4 представить г. Директору на утвержденіе, по ст. 5 одобрить и принять къ руководству, по ст. 6 благодарить дарителей.

Засѣданіе 11 ноября 1898 года.

Присутствовали подъ предсѣдательствомъ Директора всѣ 4 члена Совѣта.

Слушали:

1. Отношеніе Департамента Торговли и Мануфактуръ объ утвержденіи г. Министромъ профессора Анисимова въ должности Секретаря Совѣта.

Опредѣлили: принять къ свѣдѣнію.

2. По предложенію г. Директора обсуждали и составляли списокъ среднихъ учебныхъ заведеній, воспитанники коихъ могутъ быть допускаемы къ конкурснымъ испытаніямъ для поступленія въ студенты Института.

Положили: принимая во вниманіе степень общаго развитія учениковъ и руководствуясь ст. 25 пн. *б* Положенія объ Институтѣ, считать возможнымъ допущеніе къ конкурсу воспитанниковъ, окончившихъ курсъ одного изъ слѣдующихъ среднихъ учебныхъ заведеній:

1. Правительственныя гимназіи и реальныя училища съ дополнительнымъ классомъ.

Примѣчаніе. Согласно ст. 25 п. *б* Положенія допускаются къ конкурсу и лица, имѣющія свидѣтельства о выдержаніи ими экзамена изъ полнаго курса гимназій (съ древними языками) и реальныхъ училищъ (съ дополнительнымъ классомъ). Въ дополненіе къ сказанному Совѣтъ полагаетъ, что не слѣдуетъ допускать къ конкурсу, лицъ со свидѣтельствами о выдержаніи ими экзамена изъ курса гимназій безъ древнихъ языковъ.

2. Нижегородскій Институтъ Императора Александра II.

3. Гимназическіе классы Лицея Цесаревича Николая.

4. Гимназическіе классы Лазаревскаго Института восточныхъ языковъ.

5. Коллегія Павла Галагана въ Кіевѣ.

6. Гатчинскій сиротскій Институтъ Императора Николая I.

7. Пріютъ (училище) Принца П. Г. Ольденбургскаго (по реальному отдѣленію).

8. Училища при церквяхъ иностранныхъ исповѣданій въ С.-Петербургѣ и Москвѣ для окончившихъ курсъ отдѣленій гимназическаго и реальнаго съ дополнительнымъ классомъ.

9. Частныя гимназіи и реальныя училища съ дополнительнымъ классомъ, пользующіяся правами правительственныхъ гимназій и реальныхъ училищъ, а равно тѣ, гдѣ испытанія зрѣлости про-

изводятся на основанiи примѣч. I къ § 45 Правилъ объ испытанiяхъ.

10. Коммерческiя училища Министерства Финансовъ и вѣдомства учрежденiй Императрицы Марiи.

11. Московская практическая Академiя коммерческихъ наукъ.

12. Петровское училище С.-Петербургскаго купеческаго Общества.

13. Морской и Кадетскiе корпуса.

14. Николаевское Инженерное училище.

15. Павловское и Александровское военныя училища.

16. Михайловское и Константиновское артиллерiйскiя училища.

17. Николаевское кавалерiйское училище.

18. Пажскiй Его Императорскаго Величества Корпусъ.

19. Духовныя семинарiи православнаго исповѣданiя.

Примѣчанiе. Воспитанниковъ, окончившихъ курсъ духовныхъ семинарiй православнаго исповѣданiя, допускать къ конкурсу только по выдержанiи ими предварительнаго экзамена по математикѣ и физикѣ въ объемѣ гимназическаго курса. Приведенный списокъ среднихъ учебныхъ заведенiй представить на благоусмотрѣнiе г. Министра Финансовъ.

Засѣданiе 8 декабря 1898 года.

Присутствовали подъ предсѣдательствомъ Директора всѣ 4 члена Совѣта. Къ этому засѣданiю согласно ст. 48 Положенiя объ Институтѣ были приглашены всѣ преподаватели Института.

Слушали:

1. Отношенiе Департамента Торговли и Мануфактуръ съ извѣщенiемъ о томъ, что г. Министръ утвердилъ временно на текущiй учебный годъ представленныя Совѣтомъ программы теоретическихъ и практическихъ занятiй, а также росписанiе этихъ занятiй.

2. Распредѣленiе лекцiй и практическихъ занятiй на 2-е полугодiе. При этомъ профессоръ Вагнеръ въ виду большаго числа праздниковъ, выпавшихъ на субботы въ I-мъ полугодiи, просилъ разрѣшить ему въ видѣ исключенiя прибавить во 2-мъ полугодiи по 1 еженедѣльному часу лекцiй по химiи для студентовъ механическаго и инженерно-строительнаго Отдѣленiй совмѣстно.

3. Докладъ г. Директора о состоянiи суммъ, ассигнованныхъ на библiотеку и профессорскую читальню, равнымъ образомъ его

предложеніе раздѣлить въ текущемъ учебномъ году суммы, ассигнованныя на библіотеку, на 9 частей, сообразно съ числомъ каѳедръ и предметовъ, преподаваемыхъ въ Институтѣ.

4. Предложеніе г. Директора просить различныя ученыя и учебныя Общества и Управленія о высылкѣ ихъ изданій въ библіотеку Института.

5. Отношеніе Военно-Медицинской Академіи съ приглашеніемъ Института принять участіе въ праздновании ею 100 лѣтняго юбилея.

6. Рапортъ библіотекаря Добржинскаго со спискомъ редакцій газетъ и журналовъ, доставляющихъ свои изданія въ студенческую читальню безплатно.

7. Отношеніе Отдѣла сельской экономіи и сельско-хозяйственной статистики Министерства Земледѣлія съ приложеніемъ книгъ въ даръ библіотекѣ Института.

8. Отношеніе управленія копей князя Гогенлоэ съ препровожденіемъ дупликата накладной на 6 ящиковъ съ образцами каменнаго угля, высланными въ даръ Институту.

9. О порядкѣ контроля надъ числомъ пропущенныхъ лекцій и практическихъ занятій.

10. Благодарственную телеграмму Петербургскаго Технологическаго Института.

11. Привѣтственныя телеграммы собранія инженеръ-технологовъ въ Петербургѣ и члена-кореспондента Общества технологовъ Стржемескаго.

12. Представленія профессоровъ, преподавателей и библіотекаря о выпискѣ книгъ и журналовъ.

Положили: по ст. 1 принять къ свѣдѣнію; по ст. 2 одобрить и просьбѣ удовлетворить; по ст. 3 и 4 одобрить; по ст. 5 просить г.г. Директора и Секретаря Совѣта составить адресъ; по ст. 6, 7, 8 благодарить дарителей, по ст. 9 просить Декановъ доставлять г. Директору ежемѣсячныя вѣдомости о числѣ пропущенныхъ лекцій и занятій; по ст. 10 и 11 принять къ свѣдѣнію; по ст. 12 представленные списки книгъ и журналовъ одобрить.

Засѣданіе 27 января 1899 года.

Присутствовали подъ предсѣдательствомъ Директора А. Е. Лагоріо 5 членовъ Совѣта: П. О. Сомовъ, Е. Е. Вагнеръ, В. А. Анисимовъ, Г. О. Вороной и В. І. Дейчъ и 8 преподавателей.

Слушали:

1. Отношеніе Департамента Торговли и Мануфактуръ о не-

реводѣ адъюнктъ-профессора Института сельскаго хозяйства и лѣсоводства въ Новой-Александріи гражданскаго инженера В. І. Дейчъ на службу по вѣдомству Министерства Финансовъ ординарнымъ профессоромъ Варшавскаго Политехническаго Института Императора Николая II по каѳедрѣ строительнаго искусства по отдѣлу гидротехническихъ сооруженій съ 1 января 1899 года.

2. Проектъ правилъ о льготахъ при пріемѣ въ студенты Варшавскаго Политехническаго Института лицъ изъ другихъ высшихъ учебныхъ заведеній Имперіи (см. прилож. 3).

3. Проектъ правилъ о пріемѣ вольнослушателей и экстерновъ на старшіе курсы Института (см. прилож. 4).

4. Нижеслѣдующій проектъ правилъ о переходѣ студентовъ II курса съ одного отдѣленія на другое:

Студенты, выдержавшіе испытаніе на II курсъ, могутъ переходить съ механическаго Отдѣленія на инженерно-строительное и обратно не иначе, какъ сдавъ передъ началомъ учебнаго года дополнительные экзамены по тѣмъ предметамъ, по которымъ они не экзаменовались, и выполнивъ недостающія обязательныя работы и практическія упражненія.

Переходъ же студентовъ, выдержавшихъ испытаніе на II курсъ, съ Отдѣленій механическаго и инженерно-строительнаго на химическое и обратно не допускается.

5. Представленіе библіотекаря Добржинскаго съ проектомъ правилъ для библіотеки и профессорской читальни.

6. Письмо на имя Директора Института отъ Директора Департамента Торговли и Мануфактуръ съ извѣщеніемъ о его распоряженіи выслать въ библіотеку Института всѣ изданія, находящіяся въ распоряженіи Департамента.

7. Отношеніе Отдѣла сельской экономіи и сельско-хозяйственной статистики Министерства Земледѣлія и Государственныхъ Имуществъ съ приложеніями 1 книги въ даръ для библіотеки Института.

8. Отношеніе Южно-Русскаго Днѣпровскаго Металлургическаго Общества съ извѣщеніемъ о высылкѣ въ даръ Институту образцовъ марганцовой руды и коллекціи профилей разнаго желѣза и стали.

9. Отношеніе Управленія каменноугольной копи Антонъ съ препровожденіемъ въ даръ Институту пробъ каменнаго угля и камня.

10. Отношеніе Людвига Копа съ присоединеніемъ списка книгъ, завѣщанныхъ въ библіотеку его покойнымъ сыномъ Маврикіемъ Кономъ.

Положили: по ст. 1 и 6 принять къ свѣдѣнію; по ст. 2, 3 и 4 одобрить и представить на утвержденіе г. Министра; по ст. 5 разослать циркулярно г.г. профессорамъ и преподавателямъ для ознакомленія; по ст. 7, 8 и 9 благодарить дарителей; по ст. 10 благодарить г. Людвига Кона.

Засѣданіе 24 февраля 1899 года.

Присутствовали подъ предсѣдательствомъ Директора 4 члена Совѣта, не присутствовалъ 1 членъ. Кромѣ того присутствовали 9 преподавателей.

Слушали:

1. Представленіе преп. Палладина о командировкѣ заграницу въ Цюрихъ младшаго лаборанта при ботаническомъ кабинетѣ Флерова съ 1 мая по 1 сентября 1899 года.

2. Предложеніе Директора о предоставленіи ему права благодарить отъ имени Совѣта за пожертвованія въ пользу Института съ тѣмъ, чтобы Директоръ сообщалъ Совѣту о таковыхъ благодарностяхъ.

3. Два отношенія Директора Императорскаго Московскаго Техническаго Училища о высылкѣ Институту чертежей по техническому и архитектурному черченію и Извѣстій Училища за 1898 г.

Положили: по ст. 1 и 2 одобрить; по ст. 3 благодарить Директора Училища.

Засѣданіе 10 марта 1899 года.

Присутствовали подъ предсѣдательствомъ Директора всѣ 5 членовъ Совѣта, 10 преподавателей и библіотекарь.

Слушали:

Предложеніе Директора и Декана механическаго Отдѣленія о необходимыхъ сокращеніяхъ въ программахъ занятій по рисованію и черченію для 2-го полугодія текущаго учебнаго года въ виду исключительныхъ условій.

Постановили: возможнымъ безъ ущерба для дѣла установить нижеслѣдующія требованія по сказаннымъ предметамъ для 2-го полугодія текущаго года: а) по рисованію—для студентовъ I-го курса механическаго отдѣленія 4 контура и 1 рисунокъ съ тушевкой; для студентовъ I-го курса инженерно-строительнаго отдѣленія 3 контура и 1 рисунокъ съ тушевкою; б) по техническому черченію—для студентовъ I-го курса механическаго отдѣленія 4 листа съ сокращеніемъ послѣдняго (арматура пароваго котла) на половину и 1 калька, и для студентовъ І-го к. инженерно-строительнаго и химическаго отдѣленій 3 листа съ сокращеніемъ послѣдняго (арматура пароваго котла) на половину и 1 калька; в) по архитектурному черченію—для студентовъ І-го курса механическаго и химическаго отдѣленій сократить содержаніе послѣдняго 5 листа и для студентовъ І-го курса инженерно-строительнаго отдѣленія послѣдній 6-й листъ (съ тонами) перенести на ІІ-ой курсъ. г) По топографическому черченію для студентовъ І-го курса механическаго и инженерно-строительнаго отдѣленій 2 работы, причемъ для студентовъ инженерно-строительнаго отдѣленія еще 1 третью работу (вычерчиваніе по моделямъ) желательно перенести на ІІ-ой курсъ.

О сказанныхъ постановленіяхъ Совѣта извѣстить подлежащихъ преподавателей.

2. Вопросъ о составѣ экзаменовъ для студентовъ І-го курса и объ оцѣнкѣ студенческихъ отвѣтовъ, а также чертежей и рисунковъ.

Положили: А) производить для студентовъ І-го курса при переходѣ на ІІ-ой курсъ:

а) окончательные экзамены—на механическомъ и инженерно-строительномъ отдѣленіяхъ: по алгебраическому анализу, аналитической геометріи, начертательной геометріи и геодезіи; на химическомъ отдѣленіи: по математикѣ, начертательной геометріи и химіи.

б) переводные экзамены, съ постановкой окончательной отмѣтки послѣ окончанія курса и экзамена по соотвѣтствующему предмету—на механическомъ и инженерно-строительномъ отдѣленіяхъ: по дифференціальному и интегральному исчисленіямъ (за исключеніемъ приложеній), по теоретической механикѣ (статика и основныя положенія кинематики), по физикѣ (всѣ прочтенные отдѣлы за исключеніемъ акустики) и кромѣ того для студентовъ инженерно-строительнаго отдѣленія по строительному искусству, на химическомъ отдѣленіи по физикѣ (прочтенные отдѣлы за исключеніемъ акустики).

в) не пріурочивать къ опредѣленному сроку экзамена по химіи для студентовъ І-го курса механическаго и инженерно-строительнаго отдѣленій и экзаменовъ по ботаникѣ и кристаллографіи для студентовъ І-го курса химическаго отдѣленія: по химіи и ботаникѣ студенты могутъ экзаменоваться или при переходѣ съ І-го на ІІ-ой курсъ, или въ теченіе всего ІІ-го курса въ имѣющіе быть указанными сроки, а по кристаллографіи—или при переходѣ съ І-го на ІІ-ой курсъ, или же въ 1-омъ полугодіи ІІ-го курса также въ имѣющіе быть опредѣленными сроки.

Б) По черченію и рисованію экзамены не производятся и переводъ студентовъ съ I-го на II-ой курсъ обусловливается ихъ годичными успѣхами.

Примѣчаніе 1. Достоинство студенческихъ отвѣтовъ на экзаменахъ, а равнымъ образомъ ихъ обязательныхъ чертежей и рисунковъ оцѣнивается баллами (отмѣтками): — 5 (отлично), 4 (хорошо), 3 (удовлетворительно), 2 (неудовлетворительно).

Примѣчаніе 2. Степень участія студентовъ въ практическихъ упражненіяхъ по теоретическимъ курсамъ принимается во вниманіе при экзаменѣ (ст. 2 засѣд. 14 окт. 1898 года), а по начертательной геометріи выполненные студентами эпюры, причемъ на основаніи послѣднихъ преподавателю начертательной геометріи предоставляется право освобождать студентовъ отъ экзамена по этому предмету.

Сказанное представить на благоусмотрѣніе и утвержденіе Г. Министра.

3. Вопросъ объ организаціи экзаменовъ, ихъ вліяніи на переходъ на II-ой к. и объ оставленіи студентовъ на I-омъ курсѣ.

Положили: представить на утвержденіе г. Министра нижеслѣдующія выработанныя Совѣтомъ правила:

а) Экзаменъ производится коммиссіею, состоящею подъ предсѣдательствомъ Декана соотвѣтствующаго отдѣленія изъ экзаменатора-преподавателя предмета и ассистента.

б) Студенты для экзаменовъ дѣлятся на группы не болѣе какъ въ 50 человѣкъ, причемъ переходъ студентовъ изъ одной группы въ другую допускается по уважительной причинѣ, съ разрѣшенія Декана подлежащаго отдѣленія, не иначе какъ подъ условіемъ замѣны кѣмъ либо изъ студентовъ другой группы того же отдѣленія.

в) Отмѣтка 2 (неудовлетворительно) на одномъ изъ экзаменовъ лишаетъ студента права перехода съ I-го курса на II-ой курсъ.

г) Въ виду конкурса при пріемѣ на I-ый курсъ, оставаться на I-омъ курсѣ на 2-ой годъ вообще не дозволяется.

Примѣчаніе. Только въ особо уважительныхъ случаяхъ, по заключенію подлежащаго отдѣленія и съ одобренія Совѣта разрѣшается 2-лѣтнее пребываніе студента на I-омъ курсѣ.

4. Вопросъ о лѣтнихъ практическихъ занятіяхъ по геодезіи при переходѣ студентовъ съ I-го на II-ой курсъ.

Положили: переводить студентовъ I-го курса механическаго и инженерно-строительнаго отдѣленій на II-ой курсъ по доставленіи ими надлежащихъ удостовѣреній, что они принимали участіе въ лѣтней, организованной Институтомъ, геодезической практикѣ. Выработку подробностей объ организаціи этой практики поручить профессору Дейчъ и преподавателю Добровольскому.

5. Слушали: вопросъ объ измѣненіи въ порядкѣ преподаванія графической статики и строительной механики на инженерно-строительномъ Отдѣленіи.

Положили: одобрить и представить на утвержденіе г. Министра переносъ преподаванія строительной механики съ III-го на II-ой курсъ, а графической статики со II-го на III-ій курсъ.

6. Слушали: соображенія профессора Дейчъ о составленіи каталоговъ и правилъ пользованія ими для библіотеки Института.

Положили: соображенія одобрить, принять къ руководству и благодарить проф. Дейчъ.

7. Слушали: представленіе профессора Вагнера о командированіи за границу старшаго лаборанта Славинскаго для ознакомленія съ постановкой практическихъ занятій по органической химіи съ 15 мая по 15 августа с. г.

Положили: одобрить и ходатайствовать передъ г. Министромъ о заграничной командировкѣ Славинскаго.

8. Слушали: вѣдомость о числѣ пропущенныхъ лекцій и практическихъ занятій за январь и февраль 1899 года.

Положили: принять къ свѣдѣнію.

Засѣданіе 7 апрѣля 1899 года.

Присутствовали подъ предсѣдательствомъ Директора всѣ 5 членовъ Совѣта, 11 преподавателей и библіотекарь.

Слушали:

1. Проектъ правилъ для библіотеки, профессорской и студенческой читальни (см. прилож. 5).

2. Свѣдѣнія профессоровъ и преподавателей о ходѣ практическихъ работъ и упражненій со студентами Института.

3. Предложеніе преподавателей Заборовскаго, Окольскаго и Невядомскаго о сокращеніи, въ виду исключительныхъ условій текущаго учебнаго года, работъ по архитектурному и техническому черченію и рисованію.

4. Соображенія проф. Дейча и преп. Добровольскаго объ организаціи лѣтней геодезической практики.

5. Программу преп. Окольскаго по техническому черченію для студентовъ I-го к. инженерно-строительнаго отдѣленія.

6. Представленіе проф. Дейчъ объ увеличеніи числа лекцій

по геодезіи на 2 часа и объ уменьшеніи лекцій по строительному искусству на 2 часа въ недѣлю въ текущемъ учебномъ году.

7. Представленіе проф. Вагнера о командированіи его на пасхальное вакаціонное время с. г. въ Берлинъ для ознакомленія съ вновь строющеюся тамъ химическою лабораторіею.

8. Представленіе преп Окольскаго о командированіи его на лѣтнее вакаціонное время сего года за границу для ознакомленія съ постановкою преподаванія черченія и машиностроенія и осмотра механическихъ и машиностроительныхъ заводовъ.

9. Отношеніе Совѣта С.-Петербургскаго Лѣснаго Института съ препровожденіемъ 6 книгъ изданій названнаго Института.

Положили: по ст. 1 представить выработанный проектъ на утвержденіе г. Министра, по ст. 2 принять къ свѣдѣнію, по ст. 3 и 6 разрѣшить, по ст. 4 и 5 одобрить, по ст. 7 и 8 одобрить и ходатайствовать о разрѣшеніи командировокъ передъ г. Министромъ, по ст. 9 благодарить Совѣтъ Лѣснаго Института.

Засѣданіе 5 мая 1899 года.

Присутствовали подъ предсѣдательствомъ Директора 5 членовъ Совѣта и 11 преподавателей.

Слушали:

1. Вопросъ о допущеніи студентовъ и вольнослушателей къ экзаменамъ на основаніи окончательной оцѣнки достоинства ихъ графическихъ работъ.

2. Предложеніе Директора о предоставленіи студентамъ возможности откладывать по уважительнымъ причинамъ экзаменъ въ теченіе экзаменаціоннаго періода.

3. Вопросъ о веденіи экзаменовъ.

4. Представленіе проф. Дейчъ объ устройствѣ при Институтѣ музея по строительному искусству.

5. Представленіе проф. Дейчъ о командированіи его въ Воронежскую губернію съ 20 іюля по 20 августа сего года.

6. Рапортъ библіотекаря Добржинскаго о полученіи библіотекой въ даръ книгъ и брошюръ отъ разныхъ лицъ и учрежденій.

7. Отношеніе Общества металлическихъ заводовъ Гантке о высылкѣ въ даръ Институту образцовъ издѣлій заводовъ.

8. Отношеніе Франко-Русскаго Горнаго Общества о высылкѣ ящика съ образцами цинковаго производства.

9. Отношенія Императорскаго Русскаго Техническаго Обще-

ства и Императорскаго Института Экспериментальной Медицины о согласіи на обмѣнъ изданіями.

10. Вѣдомость о числѣ пропущенныхъ лекцій и практическихъ занятій.

Положили: по ст. 1 допустить 247 студентовъ и 7 вольнослушателей, не допустить къ экзамену 16 студентовъ и 2 вольнослушателей, по ст. 2 и 4 одобрить, по ст. 3 экзаменъ производить согласно экзаменаціоннымъ программамъ, одобреннымъ Совѣтомъ, по ст. 5 одобрить и ходатайствовать предъ г. Министромъ о командировкѣ, по ст. 6, 7 и 8 благодарить дарителей, по ст. 9 и 10 принять къ свѣдѣнію.

Засѣданіе 1 іюня 1899 года.

Присутствовали подъ предсѣдательствомъ Директора всѣ 5 членовъ Совѣта и 7 преподавателей.

Слушали:

1. Отношеніе Департамента Торговли и Мануфактуръ о разрѣшеніи произвести экзамены по росписанію, предложенному Совѣтомъ.

2. Отношеніе Департамента Торговли и Мануфактуръ о перенесеніи лекцій по графической статикѣ на инженерно-строительномъ Отдѣленіи съ II-го на III-й к., а по строительной механикѣ съ III-го на II-ой курсъ.

3. О предполагаемой постановкѣ графическихъ занятій для будущаго учебнаго года, а именно о назначеніи въ будущемъ учебномъ году на I-омъ к. $14\frac{1}{2}$ часовъ техническаго черченія, 15 часовъ архитектурнаго и 16 или 18 часовъ рисованія, а на II-омъ к. 16 часовъ техническаго черченія, 10 часовъ архитектурнаго и 13 ч. рисованія, кромѣ того предполагается имѣть на I-мъ курсѣ и на II-мъ к. 15 часовъ конструктивнаго черченія, 6 часовъ топографическаго и 9 часовъ проекціоннаго. Всего предполагается въ будущемъ учебномъ году имѣть $114^1/_2$ или $116^1/_2$ часовъ еженедѣльно графическихъ занятій на I-омъ к. и на II-омъ к. Института.

4. Представленіе профессоровъ Анисимова и Вороного о добавленіи одного еженедѣльнаго часа лекцій по математикѣ на II-омъ к. механическаго и инженерно-строительнаго Отдѣленій.

5. Представленіе проф. Вагнера объ увеличеніи числа еженедѣльныхъ лекцій по органической химіи на II-омъ к. химическаго Отдѣленія до 4 часовъ.

6. Предложеніе проф. Вагнера о нижеслѣдующемъ распредѣ-

леніи лекцій по химіи на I-мъ курсѣ механическаго и инженерно-строительнаго Отдѣленій: предполагается читать въ 1-мъ полугодіи 3 часа неорганической химіи и во 2-мъ полугодіи 1 часъ неорганической химіи и 2 часа органической химіи.

7. Представленіе проф. Вагнера о разрѣшеніи ему временно читать въ 1-мъ полугодіи будущаго учебнаго года дополнительно по химіи 1 часъ на II-омъ к. механическаго и инженерно-строительнаго отдѣленій для окончанія курса, читаннаго въ истекающемъ учебномъ году.

8. Росписаніе лекцій на 1-е полугодіе будущаго учебнаго года.

9. Прошенія 2-хъ вольнослушателей о принятии ихъ въ число студентовъ II-го курса.

10. Прошеніе студента Веселовскаго о разрѣшеніи ему отбыть лѣтнюю геодезическую практику при переходѣ со II-го на III-й к.

11. Отчетъ стипендіатовъ Исаева и Чорбы съ отзывами профессоровъ Вагнера и Сомова.

12. Предложеніе проф. Вагнера о томъ, чтобы всѣ стипендіаты Института представляли Совѣту на предварительное одобреніе свои предположенія о будущихъ занятіяхъ.

13. Отношеніе Правленія Института о его постановленіи выдавать стипендіатамъ полугодичныя командировочныя пособія по одобреніи ихъ отчетовъ Совѣтомъ, а также о томъ, чтобы командированныя изъ состава Институтскаго персонала лица представляли Совѣту на одобреніе отчеты о своихъ командировкахъ, кои отчеты подлежатъ печатанію только по просьбѣ авторовъ.

14. Два отношенія Правленія съ 2 проектами распредѣленія спеціальныхъ средствъ на 1899 годъ въ размѣрѣ 6646 р. 43 к. и на 1900 годъ въ размѣрѣ 14030 руб. (см. прилож. 6).

15. Прошеніе военнаго инженера Короткевичъ-Ночевного о предоставленіи ему мѣста преподавателя конструктивнаго черченія въ Институтѣ. По баллотировкѣ г. Короткевичъ-Ночевной оказался избраннымъ единогласно.

16. Прошеніе лаборанта Московскаго Техническаго Училища Нагорнаго о назначеніи его старшимъ лаборантомъ при каѳедрѣ химіи. По баллотировкѣ г. Нагорновъ оказался избраннымъ единогласно.

17. Прошеніе кандидата естественныхъ наукъ Чепинскаго о назначеніи его на должность младшаго лаборанта при каѳедрѣ физики. По баллотировкѣ г. Чепинскій оказался избраннымъ единогласно.

18. Отношеніе инженера путей сообщенія Савельева о высылкѣ имъ Институту экземпляра лекцій по геодезіи.

19. Отношеніе библіотекаря Варшавскаго Университета о согласіи Совѣта того же Университета на высылку Институту печатныхъ трудовъ Университета.

20. Предложеніе проф. Дейчъ о томъ, чтобы всѣ курсы и пособія, издаваемые профессорами и преподавателями Института, были доставляемы Институту въ 2-хъ экземплярахъ.

21. Предложеніе профессоровъ Лагоріо и Вагнера о назначеніи сроковъ для экзаменовъ, не пріуроченныхъ къ I му курсу.

Положили: по ст. 1, 2, 6 и 8 принять къ свѣдѣнію, по ст. 3 и 7 одобрить, по ст. 4 и 5 одобрить и ходатайствовать предъ г. Министромъ, по ст. 9 и 10 прошеніямъ удовлетворить, по ст. 11, 13 и 14 одобрить, по ст. 12 одобрить и принять къ руководству, по ст. 15 представить г. Директору на утвержденіе временнымъ преподавателемъ, по ст. 16 и 17 представить г. Директору на утвержденіе въ соотвѣтственныхъ должностяхъ, по ст. 18 и 19 благодарить дарителей, по ст. 20 одобрить, по ст. 21 назначить для экзаменовъ слѣдующіе сроки: по химіи на механическомъ Отдѣленіи 1—10 декабря 1899 года, а на инженерно строительномъ Отдѣленіи 15—20 января 1900 года, по кристаллографіи 1—5 декабря 1899 г., по ботаникѣ 7—12 января 1900 г.

Засѣданіе 2 іюня 1899 года.

Присутствовали подъ предсѣдательствомъ Директора 4 члена, отсутствовалъ профессоръ Дейчъ.

Слушали:

1. Вопросъ о конкурсныхъ испытаніяхъ въ 1899 году.

2. Внесенный г. Директоромъ вопросъ о полученіи званія адъюнкта Института.

3. Предложеніе профессора Вагнера объ организаціи практическихъ занятій по химіи.

Положили: по ст. 1 начало конкурса назначить на 16 августа, производить конкурсные экзамены письменно по русскому языку и математикѣ и устно по физикѣ, по ст. 2 ходатайствовать предъ г. Министромъ о выясненіи возбужденнаго вопроса, по ст. 3 признать необходимымъ приглашеніе 2-хъ преподавателей съ вознагражденіемъ по 1200 руб.

ПРИЛОЖЕНІЯ

къ протоколамъ засѣданій Совѣта

за 1898/9 уч. годъ.

Приложеніе I. Упомянутыя въ ст. 1 (засѣд. 11 сентября) представленія Директора состояли въ слѣдующемъ:

„1. Обсужденіе и рѣшеніе дѣлъ, подлежащихъ компетенціи собраній отдѣленій, равно какъ и избраніе преподавателей, лаборантовъ и стипендіатовъ (Полож. объ Институтѣ ст. 15, 24 и 49), впредь до того времени, пока наличный составъ указанныхъ собраній не достигнетъ числа не менѣе пяти членовъ, передать въ непосредственное вѣдѣніе Совѣта Института, состоящаго изъ наличныхъ штатныхъ профессоровъ".

„2. До назначенія декановъ всѣхъ отдѣленій считать законнымъ составомъ Правленія наличность четырехъ членовъ, въ томъ числѣ и предсѣдателя".

„3. Въ настоящее же время въ виду настоятельной необходимости впредь до образованія временнаго состава Правленія и Совѣта уполномочить Директора Института представлять профессоровъ и стипендіатовъ назначать и допускать къ чтенію лекцій преподавателей. Кромѣ того разрѣшить Директору разсматривать и рѣшать неотложныя дѣла, подлежащія по Высочайше утвержденному Положенію компетенціи Правленія съ тѣмъ, чтобы о таковыхъ впослѣдствіи было доложено Правленію на утвержденіе".

Прилож. 2 (къ ст. 12 засѣд. 11 сент.).

ПРАВИЛА ДЛЯ СТУДЕНТОВЪ
ВАРШАВСКАГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКАГО ИНСТИТУТА
ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II.

1. Студенты обязаны соблюдать въ зданіяхъ и учрежденіяхъ Института порядокъ, устанавливаемый Директоромъ Института, деканами отдѣленій и профессорами, завѣдывающими отдѣльными лабораторіями и другими учебновспомогательными учрежденіями заведенія.

2. Внѣ Института студенты подлежатъ общимъ полицейскимъ и судебнымъ установленіямъ, что однако не освобождаетъ ихъ и тамъ отъ подчиненія Институтскому начальству.

3. Каждый принимаемый въ Институтъ обязанъ внести плату за обученіе и, до начала лекцій, явиться къ Инспектору, предъявить квитанцію во взносѣ денегъ и сообщить свой адресъ, послѣ чего явившійся зачисляется въ студенты и получаетъ входной билетъ, дающій ему право посѣщать Институтъ, и свидѣтельство на жительство.

4. Студентъ Института вноситъ плату за обученіе по полугодно (по 50 руб. въ полугодіе) впередъ, не позже 1 Октября и 1 Февраля. Не внесшіе платы къ этому сроку увольняются изъ Института и не допускаются къ слушанію лекцій и къ участію въ практическихъ занятіяхъ. Но эти уволенные могутъ быть приняты вновь въ Институтъ по взносѣ ими денегъ за все полугодіе.

5. Внесенная плата ни въ какомъ случаѣ не возвращается, хотя бы студентъ выбылъ изъ Института ранѣе окончанія полугодія, за которое причитается плата.

6. О каждой перемѣнѣ квартиры студентъ обязанъ немедленно сообщать Инспектору и вписать въ имѣющуюся у него книгу новый адресъ.

7. Каждый студентъ какъ въ Институтѣ, такъ и внѣ онаго обязанъ имѣть при себѣ свой билетъ. По требованію Институтскаго начальства, а внѣ Института и чиновъ мѣстной полиціи, студентъ обязанъ предъявлять этотъ билетъ.

8. Установленная форменная одежда обязательна для студентовъ какъ въ Институтѣ, такъ и внѣ онаго.

9. Курить въ зданіяхъ Института разрѣшается только въ назначенныхъ для того мѣстахъ.

10. Студенты обязаны отдавать честь прикладывая руку къ козырьку фуражки, становясь во фронтъ: Ихъ Императорскимъ Величествамъ Государю Императору и Государынѣ Императрицѣ и всѣмъ особамъ Августѣйшаго дома; не становясь во фронтъ: Министру финансовъ, Варшавскому Генералъ-Губернатору и его помощникамъ, мѣстному архіепископу и Губернатору, Начальству Института и профессорамъ.

11. Студенты обязаны исправно посѣщать обязательныя лекціи и участвовать въ установленныхъ практическихъ занятіяхъ и упражненіяхъ.

12. Студенты обязаны исполнять въ назначенные сроки всѣ обязательные чертежи, рисунки, проекты, задачи и держать переводныя испытанія, согласно росписаніямъ, объявляемымъ Директоромъ и Деканами Института.

13. Студенты, неаккуратно посѣщавшіе лекціи и практическія занятія, а также не исполнившіе въ назначенные сроки значительной части обязательныхъ чертежей, рисунковъ, проектовъ, упражненій и практическихъ работъ, вовсе не допускаются къ переводнымъ испытаніямъ на слѣдующіе курсы.

14. Обязательные чертежи, рисунки, проекты и другія работы должны исполняться студентами въ назначенныхъ для того помѣщеніяхъ Института, подъ руководствомъ и наблюденіемъ профессоровъ, преподавателей и лаборантовъ. При несоблюденіи этихъ условій, чертежи, проекты, работы и т. д. считаются какъ бы неисполненными и не принимаются, а студенту назначаются другія задачи и проекты.

15. Воспрещается выраженіе одобренія или неодобренія профессоровъ и преподавателей на лекціяхъ, практическихъ занятіяхъ и при испытаніяхъ.

16. Студентамъ воспрещается литографированіе лекцій профессоровъ и конспектовъ ихъ курсовъ.

Примѣчаніе. Литографированіе лекцій и конспектовъ дозволяется только самимъ профессорамъ.

17. Безъ разрѣшенія Инспектора студенты не могутъ вывѣшивать какихъ бы то ни было объявленій.

18. Студенты не должны принадлежать къ противозаконнымъ обществамъ, а также имъ запрещается входить въ составъ всякихъ тайныхъ и не разрѣшенныхъ правительствомъ обществъ, хотя бы цѣли этихъ обществъ не заключали въ себѣ ничего предосудительнаго.

Примѣчаніе. Въ дозволенныя закономъ общества студенты могутъ вступить не иначе, какъ съ разрѣшенія Начальства Института.

19. Студенты не должны имѣть у себя предметовъ противоправительственнаго характера, какъ то: запрещенныхъ книгъ, брошюръ, прокламацій и т. п.

20. Такъ называемыя сходки, произнесеніе въ Институтѣ публичныхъ рѣчей, подача адресовъ, коллективныхъ прошеній или заявленій, присылка отъ имени студентовъ депутатовъ, учрежденіе какихъ бы то ни было обществъ, собраній, а также денежныхъ сборовъ воспрещается.

21. Воспрещается студентамъ принимать на себя роли распорядителей въ публичныхъ процессіяхъ и образовывать цѣпи вокругъ погребальныхъ кортежей.

22. Благотворительные вечера, концерты и спектакли въ пользу недостаточныхъ студентовъ могутъ быть устраиваемы не иначе, какъ съ разрѣшенія Начальства Института, и подъ условіемъ точнаго соблюденія всѣхъ установленныхъ по этому предмету узаконеній и распоряженій.

23. Студенты могутъ пользоваться отпусками въ каникулярное время и въ праздничные дни, съ разрѣшенія Инспектора. Въ учебное время отпуски могутъ быть выдаваемы только въ особыхъ, заслуживающихъ уваженія, исключительныхъ случаяхъ и не иначе, какъ съ разрѣшенія Директора Института. Увольняемый въ отпускъ студентъ долженъ возвратить свой входной билетъ и видъ на жительство, въ замѣнъ которыхъ получаетъ отпускной билетъ. По возвращеніи изъ отпуска студентъ долженъ немедленно явиться къ Инспектору и представить отпускной билетъ для замѣны его входнымъ.

24. За различнаго рода проступки студентовъ налагаются слѣдующія наказанія:

а) замѣчаніе.

б) выговоръ съ предупрежденіемъ объ увольненіи изъ Института.

в) увольненіе изъ Института по приказанію Начальства Института, съ предоставленіемъ увольняемому права подать прошеніе объ увольненіи.

г) увольненіе изъ Института на опредѣленный срокъ безъ лишенія права немедленнаго поступленія въ другія высшія учебныя заведенія.

д) исключеніе изъ Института навсегда, съ лишеніемъ права поступленія въ другія высшія учебныя заведенія.

Примѣчаніе. Замѣчанія дѣлаютъ студентамъ Директоръ, Деканы и Инспекторъ, взысканія по п. п. *б* и *в* могутъ быть налагаемы какъ Директоромъ, такъ и Правленіемъ Института, а по п. *г* Правленіемъ. Взысканія по п. *д* представляются на утвержденіе Министра Финансовъ.

25. Если студентъ подвергнется какому либо взысканію по приговору суда, то Директоръ Института вноситъ на обсужденіе Правленія вопросъ о томъ, не долженъ ли быть этотъ студентъ уволенъ изъ Института.

26. Въ случаѣ полученія свѣдѣній о предосудительныхъ поступкахъ студента, хотя бы они не были предметомъ судебнаго преслѣдованія, Директоръ также вноситъ на обсужденіе Правленія вопросъ, не подлежитъ ли этотъ студентъ исключенію изъ Института.

27. Студенты со всякаго рода ходатайствами по своимъ студенческимъ дѣламъ обязаны обращаться къ своему непосредственному начальству, а безъ его вѣдома и разрѣшенія не имѣютъ права обращаться съ такого рода прошеніями къ Г. Министру, подъ опасеніемъ подвергнуться дисциплинарнымъ взысканіямъ.

Приложеніе 3 (къ ст. 2 засѣд. 27 янв. 1899 г.).

Условія пріема въ число студентовъ

ВАРШАВСКАГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКАГО ИНСТИТУТА

ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II

воспитанниковъ другихъ высшихъ учебныхъ заведеній Имперіи.

I. О пріемѣ на механическое и инженерно-строительное отдѣленія.

А. Окончившіе математическое отдѣленіе физико-математическаго факультета и имѣющіе по предметамъ, преподаваемымъ въ Институтѣ, *не сплошныя три*, принимаются на II курсъ безъ экзамена съ обязательствомъ исполнить практическія занятія I и II курсовъ и сдать экзамены при переходѣ со II на III курсъ изъ всѣхъ предметовъ институтскаго курса, по которымъ въ Университетѣ получили отмѣтки *три*, а равно и по предметамъ I курса, по которымъ въ Университетѣ не держали экзамена.

Примѣчаніе 1. Освобождаются, съ зачетомъ отмѣтокъ, при переходѣ съ II на III курсъ, отъ упражненій и экзаменовъ по тѣмъ изъ преподаваемыхъ въ Институтѣ предметовъ, по которымъ въ Университетѣ получили отмѣтки *не ниже четырехъ*.

Примѣчаніе 2. Практическія работы по химіи, физикѣ и другимъ предметамъ, по которымъ должны будутъ сдавать экзамены, обязательны въ полномъ объемѣ; по черченію, рисованію и начертательной геометріи число обязательныхъ задачъ, чертежей и рисунковъ можетъ быть уменьшено по усмотрѣнію лицъ, руководящихъ этими упражненіями.

Б. Лица, окончившія математическое отдѣленіе физико-математическаго факультета, имѣющія по всѣмъ предметамъ, въ Институтѣ преподаваемымъ, отмѣтки три, принимаются только на 1 курсъ и никакими льготами, представленными лицамъ первой категоріи, не пользуются.

В. Сдавшіе полное полукурсовое испытаніе на математическомъ отдѣленіи физико-математическаго факультета, а также перешедшіе на III курсъ математическаго отдѣленія Императорскаго Варшавскаго Университета принимаются безъ экзамена на II курсъ, если имѣютъ отмѣтки *выше трехъ,* хотя бы по одному изъ предметовъ, преподаваемыхъ въ Институтѣ, съ обязательствомъ сдать экзамены и исполнить упражненія, при переходѣ со II на III курсъ, по всѣмъ предметамъ, по которымъ не будутъ освобождены отъ экзаменовъ, съ зачетомъ полученныхъ отмѣтокъ, или по которымъ въ Университетѣ не экзаменовались.

Примѣчаніе 1. Сверхъ перечисленныхъ во 2 примѣчаніи къ пункту А практическихъ упражненій, лица разсматриваемой категоріи должны еще участвовать въ практическихъ упражненіяхъ по математикѣ и аналитической механикѣ, обязательныхъ для студентовъ II курса.

Г. Окончившіе курсъ на естественномъ отдѣленіи физико-математическаго факультета принимаются на I курсъ и при переходѣ на II курсъ освобождаются, съ зачетомъ отмѣтокъ, только отъ экзаменовъ по химіи и физикѣ, если получили по этимъ предметамъ отмѣтки *не менѣе четырехъ.*

Д. Сдавшіе полное полукурсовое испытаніе на естественномъ отдѣленіи физико-математическаго факультета и перешедшіе на III курсъ того-же отдѣленія Императорскаго Варшавскаго Университета, принимаются безъ экзамена на I курсъ и освобождаются, съ зачетомъ полученной въ Университетѣ отмѣтки отъ экзамена и практическихъ работъ по химіи, если имѣютъ отмѣтку по химіи *не ниже четырехъ.*

Е. Окончившіе курсъ въ Институтахъ: Горномъ, Гражданскихъ Инженеровъ и Путей Сообщенія и въ Академіяхъ: Инженерной и Артиллерійской принимаются безъ экзамена на III курсъ и освобождаются отъ экзаменовъ и практическихъ занятій по тѣмъ предметамъ, программы которыхъ признаны будутъ Собраніемъ Отдѣленій соотвѣтствующими программамъ Политехническаго Института и по которымъ они получили отмѣтки *четыре* или *пять* (хорошо или отлично); по тѣмъ же предметамъ, по которымъ имѣютъ отмѣтки *три*, должны выполнить практическія упражненія и вновь сдать экзамены.

Ж. Окончившіе инженерное отдѣленіе Московскаго Сельско-Хозяйственнаго Института и полный курсъ Ново-Александрійскаго Института Сельскаго Хозяйства и Лѣсоводства принимаются на 1-й курсъ безъ экзамена, но не освобождаются ни отъ какихъ экзаменовъ и практическихъ упражненій.

З. Студенты, съ успѣхомъ прошедшіе нѣсколько курсовъ въ поименованныхъ въ пунктѣ Е высшихъ техническихъ учебныхъ заведеніяхъ, а равно въ Технологическихъ Институтахъ, Императорскомъ Московскомъ Техническомъ Училищѣ, Рижскомъ и Кіевскомъ Политехническихъ Институтахъ и желающіе перейти въ Варшавскій Политехническій Институтъ, по усмотрѣнію Собранія отдѣленій, могутъ быть принимаемы на старшіе курсы безъ экзаменовъ и освобождаемы, съ зачетомъ полученныхъ отмѣтокъ, отъ экзаменовъ и упражненій по нѣкоторымъ предметамъ, если программы послѣднихъ будутъ признаны соотвѣтствующими Институтскимъ, а полученныя отмѣтки *не ниже четырехъ*.

> *Общее примѣчаніе.* Пріемъ на старшіе курсы и освобожденіе отъ экзаменовъ и практическихъ упражненій во всѣхъ случаяхъ, не упоминаемыхъ въ настоящихъ правилахъ, зависитъ отъ усмотрѣнія Собранія подлежащаго отдѣленія. Послѣднее, при рѣшеніи вопроса въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, руководствуется принципами, выработанными Совѣтомъ и положенными въ основаніе настоящихъ правилъ.

II. О пріемѣ на химическое отдѣленіе.

А. Окончившіе курсъ на естественномъ отдѣленіи физико-математическаго факультета и имѣющіе по предметамъ, преподаваемымъ въ Институтѣ, *не сплошные три*, принимаются на II курсъ, съ предварительнымъ экзаменомъ по химіи по программѣ I курса Института и безъ экзамена по другимъ предметамъ, съ обязательствомъ исполнить тѣ практическія работы I и II курсовъ, отъ которыхъ не будутъ освобождены, и сдать экзамены, при переходѣ со II на III курсъ, изъ всѣхъ предметовъ Институтскаго I курса, по которымъ въ Университетѣ получили отмѣтку *три* или по которымъ въ Университетѣ не экзаменовались (начертательной геометріи, высшей математикѣ, а равно и по другимъ предметамъ, если преподаваніе ихъ будетъ введено).

Примѣчаніе 1. Практическія занятія по физикѣ, высшей математикѣ и механикѣ обязательны въ полномъ объемѣ. По начертательной геометріи и черченію число обязательныхъ задачъ и чертежей можетъ быть уменьшено по усмотрѣнію завѣдующихъ этими упражненіями.

Примѣчаніе 2. Тѣ изъ окончившихъ естественное отдѣленіе физико-математическаго факультета, которые въ бытность въ Университетѣ спеціально занимались химіей, освобождаются какъ отъ практическихъ занятій по химическому анализу, такъ и отъ экзамена по химіи, но должны выполнить спеціальныя работы по химіи, обязательныя для студентовъ.

Б. Окончившіе курсъ на естественномъ отдѣленіи физико-математическаго факультета, имѣющіе по всѣмъ предметамъ, преподаваемымъ на первыхъ двухъ курсахъ химическаго отдѣленія отмѣтки *три*, принимаются только на I курсъ и никакими льготами, предоставленными лицамъ первой категоріи, не пользуются.

В. Сдавшіе полное полукурсовое испытаніе на естественномъ отдѣленіи физико-математическаго факультета, а также перешедшіе на III курсъ того же отдѣленія Императорскаго Варшавскаго Университета, принимаются на II курсъ, съ предварительнымъ экзаменомъ по химіи по программѣ I курса Института, если по предметамъ, преподаваемымъ въ Институтѣ, не имѣютъ сплошныхъ *троекъ* съ тѣмъ, чтобы исполнили въ назначенный Собраніемъ Отдѣленія срокъ обязательныя для нихъ практическія упражненія и сдали, при переходѣ со II на III курсъ, экзамены по предметамъ, проходимымъ на I и II курсахъ, по которымъ имъ не будутъ зачтены полученныя въ Университетѣ отмѣтки, или которыхъ они не изучили въ Университетѣ.

Г. Студенты, съ успѣхомъ прошедшіе нѣсколько курсовъ на химическихъ отдѣленіяхъ Технологическихъ и Политехническихъ Кіевскаго и Рижскаго Институтовъ и Императорскаго Московскаго Техническаго Училища и желающіе перейти въ Варшавскій Политехническій Институтъ, могутъ быть принимаемы, по усмотрѣнію Собранія Отдѣленія, на старшіе курсы Института безъ экзамена и освобождаемы, съ зачетомъ полученныхъ отмѣтокъ, отъ экзаменовъ и упражненій по нѣкоторымъ предметамъ, если программы послѣднихъ будутъ признаны соотвѣтствующими Институтскимъ, а полученныя отмѣтки *не ниже четырехъ*.

Общее примѣчаніе. Пріемъ на старшіе курсы и освобожденіе отъ экзаменовъ и практическихъ упражненій во всѣхъ случаяхъ, не упоминаемыхъ въ настоящихъ правилахъ, зависитъ отъ усмотрѣнія Собранія Отдѣленія. Послѣднее, при рѣшеніи вопроса въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, руководствуется принципами, выработанными Совѣтомъ и положенными въ основаніе настоящихъ правилъ.

Приложеніе 4 (къ ст. 3 засѣд. 27 янв. 1899 г.).

Условія пріема въ Варшавскій Политехническій Институтъ
ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II

ПОСТОРОННИХЪ СЛУШАТЕЛЕЙ И ЭКСТЕРНОВЪ НА СТАРШІЕ КУРСЫ Института.

I. Въ число постороннихъ слушателей Института принимаются лишь лица, получившія образованіе, дающее право на поступленіе въ число студентовъ Института, и состоящія на государственной службѣ, если при этомъ въ Институтѣ окажется достаточно мѣста для слушанія лекцій и практическихъ занятій.

II. Посторонніе слушатели I-го курса Института, прослушавшіе всѣ предметы отдѣленія, представившіе всѣ обязательныя работы и участвовавшіе во всѣхъ практическихъ упражненіяхъ, допускаются, наравнѣ со студентами I-го курса Института, къ экзаменамъ и, по выдержаніи таковыхъ, могутъ быть зачислены въ студенты II-го курса соотвѣтствующаго отдѣленія.

III. Посторонніе слушатели Института, прослушавшіе въ теченіе 2 лѣтъ всѣ предметы I-го и II-го курса на отдѣленіи, выполнившіе всѣ обязательныя работы, участвовавшіе во всѣхъ практическихъ упражненіяхъ тѣхъ же курсовъ и выдержавшіе экзамены съ I-го на II-ой и съ II-го на III-ій курсъ, могутъ быть зачислены въ студенты III-го курса.

IV. Подобными же требованіями, съ прибавленіемъ III-го курса, обусловливается пріемъ постороннихъ слушателей и на IV-ый курсъ.

V. Постороннія лица (экстерны), не бывшія посторонними слушателями Института и непребывавшія въ какомъ нибудь высшемъ учебномъ заведеніи Имперіи, къ экзаменамъ и пріему на старшіе курсы Института не допускаются.

Прилож. 5 (къ ст. I засѣд. 7 апрѣля 1899 г.).

Правила для Библіотеки

ВАРШАВСКАГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКАГО ИНСТИТУТА

ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II.

I. Общія правила.

1. Помѣщеніе библіотеки составляютъ: книгохранилище, въ которомъ помѣщены книги, комната для дѣлопроизводства, читальни: профессорская и студенческая и помѣщенія для занятій студентовъ и профессоровъ.

2. Въ составъ библіотеки входятъ: рукописи, литографированныя изданія, печатныя книги, періодическія изданія, атласы, карты и проч.

3. Въ библіотекѣ же хранятся и всѣ печатные труды Института въ особыхъ шкафахъ.

4. Въ библіотекѣ ведутся:

а) инвентарныя описи, въ которыя немедленно по поступленіи записываются всѣ книги, періодическія изданія и проч., кромѣ справочныхъ изданій. Означенныя описи раздѣляются на 9 частей, обозначенныхъ буквами: A, B, C, D, E, F, G, H, I.

Части A, B, C и D предназначены для внесенія въ нихъ отдѣльныхъ книгъ и рукописей по форматамъ, E и F для брошюръ, G атласовъ, картъ, рисунковъ, чертежей и проч., H для сочиненій, получающихся въ библіотекѣ выпусками или отдѣльными томами (см. примѣчаніе 1) и для періодическихъ изданій. Въ каждой изъ этихъ частей книги записываются за текущими номерами и при каждомъ названіи обозначается время его поступленія въ библіотеку, какимъ путемъ оно поступило въ библіотеку и цѣна его. Буква описи и текущій № опредѣляютъ мѣсто помѣщенія книги въ книгохранилищѣ и служатъ сигнатурой ея.

Примѣчаніе 1. Въ описи Н книги записываются временно. По полученіи послѣдняго выпуска или тома, сочиненіе вычеркивается изъ описи Н и вносится въ одну изъ описей отъ А до G, смотря по роду книги, а въ описи Н дѣлается отмѣтка, куда оно окончательно записано.

Примѣчаніе 2. Въ опись I вносятся полные томы журнала. Если журналъ выходитъ выпусками или номерами, то, до окончанія тома, отдѣльные выпуски или номера записываются во временный каталогъ журналовъ. Въ немъ всегда дѣлаются отмѣтки при перенесеніи какого либо тома въ опись I.

Примѣчаніе 3. Ежедневныя газеты общаго содержанія, какъ выписываемыя за деньги, такъ и получаемыя въ даръ, по истеченіи года, могутъ быть, по постановленію Совѣта, и не вносимы въ опись. Газеты не подлежащія внесенію въ опись продаются или обмѣниваются на книги (§ 17).

б) Инвентарная опись справочныхъ изданій.

в) Инвентарная опись дубликатовъ, хранимыхъ отдѣльно.

г) Систематическій карточный каталогъ.

Примѣчаніе. Не рѣже какъ черезъ пять лѣтъ печатаются выпуски систематическаго каталога, въ которые входятъ названія всѣхъ сочиненій, поступившихъ въ соотвѣтственный промежутокъ времени. Къ каждому выпуску прилагается алфавитный указатель.

д) Общій алфавитный карточный каталогъ книгъ, печатанныхъ латинскимъ шрифтомъ.

е) Общій алфавитный карточный катологъ книгъ, печатанныхъ русскимъ шрифтомъ.

Примѣчаніе. Сочиненія, напечатанныя какимъ либо инымъ шрифтомъ, помѣщаются въ русской транскрипціи въ алфавитномъ каталогѣ книгъ, печатанныхъ русскимъ шрифтомъ.

ж) Каталогъ дублетовъ.

з) Хронологическій указатель переплетенныхъ книгъ, съ означеніемъ цѣнъ переплетовъ и названія книгъ.

и) Инвентарная книга движимостей.

і) Матеріальная книга, въ которую вносятся содержанія всѣхъ счетовъ, поступившихъ въ библіотеку.

к) Книга для контроля расходованія суммъ, ассигнованныхъ на библіотеку.

л) Опись изданій Института, въ которой отмѣчается поступленіе ихъ въ библіотеку и расходъ ихъ.

5) Каждая книга и рукопись, за исключеніемъ указанныхъ въ § 4 п. в и д, принятыя библіотекой, должны быть переплетены и имѣть слѣдующіе знаки:

а) На оборотѣ верхней доски переплета билетъ, обозначающій мѣсто, занимаемое изданіемъ въ помѣщеніи библіотеки, т. е. букву описи и текущій № книги.

б) На спинкѣ корешка сокращенное заглавіе книги, буквы в$\frac{п}{н}$и (Варшавскій Политехническій Институтъ Императора Николая II) и текущій № по описи; Кромѣ того на корешкахъ многотомныхъ сочиненій, кромѣ журналовъ, долженъ быть указанъ томъ и число томовъ сочиненія.

Примѣчаніе. Текущій № сочиненій, записанныхъ въ опись Н, на корешкѣ не оттискивается, равно какъ и число томовъ.

в) На первомъ заглавномъ листѣ, на одной изъ среднихъ и на послѣдней страницѣ помѣщается оттискъ печати библіотеки.

II. Библіотечный персоналъ.

6. При библіотекѣ состоятъ: библіотекарь и его помощникъ. Сверхъ того по мѣрѣ надобности и по средствамъ, могутъ быть опредѣляемы служащіе по найму въ качествѣ помощника библіотекаря и писцовъ.

7. Ближайшее завѣдываніе всѣмъ принадлежащимъ библіотекѣ имуществомъ принадлежитъ библіотекарю, который отвѣчаетъ за цѣлость его и за точное веденіе всѣхъ описей, каталоговъ и прочихъ книгъ, поименованныхъ въ § 4 сихъ правилъ. Въ кругъ обязанностей библіотекаря входятъ также надзоръ за правильностью и точностью исполненія заказовъ, выписываемыхъ для библіотеки книгъ и журналовъ (§§ 12, 13, 14 и 17), за пріемомъ и размѣщеніемъ книгъ въ библіотекѣ и за своевременнымъ и правильнымъ удовлетвореніемъ требованій лицъ, имѣющихъ право пользоваться библіотекой (§ 22). На его же обязанности лежитъ исполненіе постановленій Совѣта объ разсылкѣ и обмѣнѣ изданій Института и исполненіе другихъ порученій Совѣта, касающихся библіотечнаго дѣла.

8. Помощникъ библіотекаря и вольнонаемные служащіе исполняютъ всѣ касающіеся библіотеки порученія библіотекаря.

9. Въ случаѣ выхода въ отставку или перемѣны службы, би-

бліотекарь обязанъ сдать всю библіотеку лицу, назначенному на его мѣсто. Сдача должна происходить по тѣмъ самымъ документамъ, по которымъ библіотека была принята, а равно по инвентарямъ всѣхъ пріобрѣтеній библіотеки по день выхода библіотекаря въ отставку или оставленія имъ службы въ библіотекѣ.

III. Порядокъ пріобрѣтенія книгъ и періодическихъ изданій.

10. Для пополненія библіотеки служатъ: а) суммы, ассигнованныя по штату изъ казны и б) единовременныя или ежегодныя отчисленія спеціальныхъ средствъ Института. Суммы эти какъ штатныя, такъ и изъ спеціальныхъ средствъ, находящіяся въ распоряженіи Совѣта Института, распредѣляются имъ между отдѣленіями и каѳедрами, смотря по ихъ нуждамъ. 15% отъ всѣхъ штатныхъ суммъ, ассигнуемыхъ на библіотеку, отчисляются на переплетъ и канцелярскія принадлежности. Если, вслѣдствіе значительнаго поступленія въ библіотеку даровыхъ изданій, отчисленная на переплетъ сумма окажется недостаточной, то она пополняется особымъ ассигнованіемъ изъ спеціальныхъ средствъ Института; въ случаѣ-же невозможности назначенія особаго ассигнованія — увеличеніемъ процента отчисленія въ такомъ размѣрѣ, чтобы всѣ поступившія въ библіотеку книги были переплетены.

11. Библіотекарь ежемѣсячно (кромѣ каникулярнаго времени) представляетъ Правленію свѣдѣнія о состояніи библіотечныхъ суммъ, принимая въ разсчетъ не только дѣйствительно произведенный расходъ, но и размѣръ всѣхъ заказовъ, сдѣланныхъ библіотекой.

Примѣчаніе. Для облегченія представленія въ Правленіе указанныхъ справокъ, бухгалтеръ Института обязанъ сообщать библіотекарю размѣръ уплаты по счетамъ, написаннымъ въ иностранной валютѣ, немедленно по ихъ уплатѣ.

12. Пріобрѣтеніе книгъ и періодическихъ изданій для библіотеки куплею можетъ совершаться только съ одобренія Отдѣленій или Совѣта Института и съ разрѣшенія расхода Правленіемъ.

13. Книги и періодическія изданія пріобрѣтаются на основаніи письменныхъ требованій (списковъ) профессоровъ, преподавателей и завѣдующихъ учебно вспомогательными учрежденіями. Означенные списки пишутся на особенныхъ бланкахъ, имѣющихся въ библіотекѣ и канцеляріи Института.

Лица, выписывающія книги, препровождаютъ свои списки на одобреніе Совѣта или Отдѣленій, смотря по тому, имѣютъ ли выписываемыя книги общій или спеціальный характеръ. Въ Отдѣленіяхъ и въ Совѣтѣ списки заносятся въ особые реестры за текущимъ номеромъ, каковой выставляется на спискѣ. По одобреніи списковъ, на другой день послѣ засѣданія Отдѣленія или Совѣта (если это не будетъ праздникъ) списки передаются дѣлопроизводителю Института, который расписывается въ особой графѣ реестра въ ихъ полученіи. Въ Правленіи ведется также реестръ списковъ, куда они заносятся немедленно по полученіи. Въ ближайшемъ засѣданіи Правленіе Института разсматриваетъ списки и разрѣшаетъ расходъ. По разрѣшеніи расхода списки передаются библіотекарю подъ его расписку въ Правленскомъ реестрѣ. Выписка книгъ производится послѣ провѣрки списковъ съ каталогами библіотеки, во избѣжаніе выписки дублетовъ. Дублетные экземпляры выписываются только въ томъ случаѣ, если это признаетъ нужнымъ Совѣтъ или Отдѣленіе.

Примѣчаніе. Въ спискахъ книгъ, представленныхъ къ выпискѣ, должно быть указано мѣсто и годъ изданія и по возможности издатель. Кромѣ того желательно, чтобы при каждомъ сочиненіи была указана хотя бы приблизительная его цѣна.

Для облегченія наведенія справокъ относительно цѣнъ, въ библіотекѣ должны имѣться лучшія и полныя библіографіи, какъ за прошедшіе, такъ и за текущіе годы. Библіотечный персоналъ долженъ при этомъ оказывать г. г. профессорамъ и преподавателямъ свое содѣйствіе и выдавать по возможности справки о цѣнахъ.

14. Студенты и другія лица, пользующіяся книгами изъ библіотеки Института, могутъ обращаться съ заявленіями относительно выписки книгъ къ библіотекарю, который препровождаетъ ихъ на одобреніе Совѣта или Отдѣленій, смотря по содержанію книгъ, послѣ чего выписка происходитъ по общимъ правиламъ.

15. Къ октябрьскому засѣданію Совѣта библіотекарь представляетъ списокъ общихъ періодическихъ изданій, предполагаемыхъ къ выпискѣ на слѣдующій годъ. Опредѣленіе Совѣта по этому предмету, по утвержденіи расхода Правленіемъ, передается библіотекарю для исполненія.

16. Одобренные Отдѣленіемъ списки спеціальныхъ изданій, предназначенныхъ къ выпискѣ въ слѣдующемъ году, передаются Правленію для утвержденія расхода не позже 15 октября текущаго года, послѣ чего передаются для исполненія библіотекарю.

17. Пріобрѣтеніе книгъ обмѣномъ дублетовъ, дефектовъ или другихъ по чему-либо ненужныхъ для библіотеки Института книгъ

и періодическихъ изданій производится библіотекаремъ съ одобренія Совѣта и разрѣшенія Правленія Института.

18. Исключеніе изъ инвентаря библіотеки книгъ, утерянныхъ или испорченныхъ, производится только съ разрѣшенія Правленія.

19. Выписка книгъ и журналовъ производится посредствомъ представляющихъ достаточныя гарантіи книгопродавцевъ, которые предложатъ Правленію Института болѣе выгодныя условія. Библіотекарь тщательно наблюдаетъ за исполненіемъ книгопродавцами принятыхъ ими въ этомъ отношеніи обязательствъ и докладываетъ о всякихъ нарушеніяхъ условій Правленію Института. Библіотекарю предоставляется право выписывать книги непосредственно изъ заграницы или отъ издателей, минуя коммисіонеровъ, если это окажется почему либо выгоднѣе. Въ послѣднемъ случаѣ, при представленіи счетовъ къ уплатѣ, библіотекарь долженъ сообщить Правленію, почему книги выписаны имъ не черезъ коммисіонеровъ.

IV. Порядокъ пользованія книгами и періодическими изданіями.

20. Въ учебное время библіотека открыта ежедневно отъ 10-ти часовъ утра до 3-хъ часовъ по полудни, кромѣ воскресныхъ и праздничныхъ дней.

21. Во время рождественскихъ и пасхальныхъ вакацій библіотека открывается въ присутственные дни на два часа. Въ каникулярное время библіотека открывается 2 раза въ недѣлю въ опредѣленные дни и часы.

22. Книги на домъ могутъ быть выдаваемы слѣдующимъ лицамъ и учрежденіямъ: а) профессорамъ и всѣмъ преподавателямъ Института, а также всѣмъ другимъ лицамъ, занимающимъ штатныя должности въ Институтѣ, б) студентамъ и стипендіатамъ Института, в) вольнослушателямъ съ разрѣшенія Правленія Института, г) лабораторіямъ и кабинетамъ подъ отвѣтственностью завѣдующихъ. На мѣстѣ и постороннія лица могутъ быть допускаемы къ пользованію книгами съ разрѣшенія каждый разъ начальства.

23. Выдачѣ не подлежатъ: рукописи и др. драгоцѣнныя и рѣдкія изданія, а также всѣ справочныя изданія.

Примѣчаніе. Списокъ справочныхъ изданій составляется библіотекаремъ и утверждается Совѣтомъ Института.

24. Спеціальные журналы на домъ выдаются только профессорамъ, преподавателямъ, въ лабораторіи и вообще лицамъ, служа-

щимъ по учебной части, за исключеніемъ чиновъ Инспекціи; остальныя лица могутъ пользоваться ими только на мѣстѣ.

25. На каждую полученную изъ библіотеки книгу получающій даетъ квитанцію за собственноручною подписью. При возвращеніи книги библіотекарь возвращаетъ квитанцію.

26. По полученіи требованія отъ библіотеки лицо, утратившее какое либо сочиненіе, принадлежащее библіотекѣ, обязано въ двухнедѣльный срокъ заявить объ этомъ библіотекарю, послѣ чего библіотекарь немедленно выписываетъ утерянную книгу. Всѣ расходы по пріобрѣтенію книги взыскиваются съ лица, утратившаго ее. Если книга составляетъ библіографическую рѣдкость и не можетъ быть пріобрѣтена, то библіотекарь заявляетъ объ этомъ Правленію, которое взыскиваетъ съ лица утерявшаго, по своему усмотрѣнію, стоимость книги и переплета или большую сумму.

Если утраченъ номеръ журнала или одинъ томъ многотомнаго сочиненія, которыхъ въ отдѣльности и въ тождественномъ съ утраченнымъ изданіемъ видѣ получить нельзя, то библіотекарь, убѣдившись въ этомъ изъ переписки съ книгопродавцами, выписываетъ годовое изданіе или все сочиненіе за счетъ утратившаго. При этомъ дефектный экземпляръ отдается лицу утратившему.

Примѣчаніе. Неисполненіе требованія библіотеки о возвращеніи книги въ теченіе двухъ недѣль, со дня росписки въ полученіи требованія, считается равносильнымъ заявленію объ утратѣ книги.

27. Книги, значительно попорченныя, не принимаются въ библіотеку и съ ними поступается какъ съ книгами утраченными. Если порча незначительна, то книга отдается переплетчику для исправленія за счетъ испортившаго.

Примѣчаніе. Недостатокъ страницъ и таблицъ, подчеркиваніе строкъ чернилами, разорванные листы въ числѣ болѣе 20, позволяютъ считать книгу значительно испорченною.

28. Взысканія за утрату или порчу книги, невозмѣщенную добровольно, производятся установленнымъ порядкомъ.

Взысканныя за утраченныя изданія деньги вносятся въ Правленіе Института, которое и присоединяетъ ихъ къ суммамъ, предназначеннымъ на выписку книгъ и періодическихъ изданій.

V. Правила выдачи книгъ служащимъ въ Институтѣ.

29. Требованія профессоровъ и преподавателей удовлетворяются во всякое время, когда открыта библіотека.

30. Лицо, служащее при Институтѣ и пользующееся книгами изъ библіотеки, обязано возвратить взятыя имъ изъ библіотеки въ теченіе учебнаго года книги не позже 1-го іюня или времени полученія отпуска на лѣтнее вакаціонное время того-же года, если на взятыя имъ книги не поступало требованія. Въ случаѣ же поступленія требованія, оно обязано возвратить взятыя книги немедленно, если только со времени полученія имъ книгъ истекло не менѣе двухъ мѣсяцевъ.

Примѣчаніе. Къ 15 мая библіотекарь обязанъ разослать всѣмъ профессорамъ, преподавателямъ и др. лицамъ, пользующимся библіотекой, напоминаніе о возвращеніи книгъ къ 1-му іюня. Книги, невозвращенныя къ этому сроку, считаются утраченными, и съ ними поступается согласно § 26 послѣ двухъ предупрежденій.

31. Выдача книгъ на каникулярное время производится съ 15 мая тѣмъ лицамъ, которыя возвратили всѣ взятыя ими въ учебномъ году книги. Библіотекарю строго воспрещается переписка книгъ на новый срокъ безъ предъявленія ихъ въ библіотеку.

32. Въ случаѣ командированія или отпуска профессоровъ, преподавателей и лаборантовъ въ учебное время на срокъ болѣе полугода, всѣ книги должны быть возвращены въ библіотеку.

33. Книги библіотеки, находящіяся въ кабинетахъ, лабораторіяхъ и т. д. должны быть къ 1-го іюня провѣрены библіотекаремъ на мѣстѣ.

34. Профессора и преподаватели могутъ имѣть у себя на дому единовременно до 50 томовъ; лаборанты и друг. служащіе по учебной части до 25 томовъ и, наконецъ служащіе по административной части и чины Инспекціи до 10 томовъ.

Примѣчаніе. Три брошюры считаются за одинъ томъ.

35. Стипендіаты пользуются правами одинаковыми съ лаборантами.

VI. Правила выдачи книгъ студентамъ.

36. Для полученія права брать книги на домъ студентъ въ первый разъ представляетъ библіотекарю свое свидѣтельство на жительство и билетъ на право слушанія лекцій и получаетъ отъ него особый билетъ на право пользованія книгами библіотеки. Въ началѣ каждаго учебнаго года билетъ долженъ быть возобновленъ.

37. При отправленіи студента въ отпускъ или оставленіи Института эти билеты возвращаются библіотекарю.

38. Выдача книгъ на домъ студентамъ производится ежедневно, когда открыта библіотека, въ продолженіи не менѣе двухъ часовъ.

39. Студенты могутъ имѣть на дому для пользованія единовременно не болѣе 6 томовъ. Если на книги не поступаетъ требованій, то они могутъ находиться у студентовъ до конца учебнаго года; если же на нихъ поступаетъ требованіе со стороны профессоровъ или преподавателей, то книги должны быть возвращены немедленно,—другихъ лицъ, если онѣ взяты болѣе двухъ мѣсяцевъ назадъ.

40. Студентамъ, неисполнившимъ въ теченіе 3-хъ дней требованія библіотеки, по заявленію библіотекаря, Правленіе Института можетъ ограничить право пользованія книгами на нѣкоторое время или лишить ихъ совсѣмъ этого права.

41. Отпуски, аттестаты и дипломы выдаются студентамъ не иначе, какъ по представленіи ими удостовѣренія библіотеки, что за ними никакихъ книгъ, принадлежащихъ библіотекѣ, не числится.

42. Къ 1-му іюня всѣ книги, взятыя студентами, должны быть возвращены въ библіотеку.

43. На каникулярное время книги выдаются тѣмъ только студентамъ, которые не уѣзжаютъ въ отпускъ и предъявятъ при этомъ заявленія профессоровъ или преподавателей, что книги имъ нужны для ихъ научныхъ занятій.

44. Вольнослушатели, получившіе право пользоваться книгами изъ библіотеки, въ отношеніи полученія книгъ подчиняются §§ 36—43 сихъ правилъ.

VII. Ревизія библіотеки.

45. Ежегодно въ ноябрѣ Правленіе Института производитъ ревизію библіотеки самолично или поручаетъ особо избранной имъ коммиссіи изъ профессоровъ и преподавателей Института, по одному отъ каждого отдѣленія, по окончаніи которой составляется протоколъ.

46. Ревизіи подлежитъ какъ все имущество библіотеки, такъ и порядокъ веденія всѣхъ дѣлъ ея.

47. Ревизіи библіотеки главнымъ образомъ подлежитъ слѣдующее:

а) Повѣрка имущества по инвентарямъ.

б) Опредѣленіе, на всѣ ли выданныя изъ библіотеки книги имѣются собственноручныя расписки лицъ, взявшихъ ихъ, и замѣняющія книги контрольныя закладки.

в) Повѣрка того, всѣ ли книги, счеты на которыя представлены въ Правленіе для уплаты, записаны въ библіотечныя описи.

Примѣчаніе 1. Для указанной повѣрки служатъ копіи счетовъ, хранящіяся въ канцеляріи Института.

Примѣчаніе 2. Не записанными въ опись могутъ быть только книги, полученныя въ теченіе послѣдней недѣли.

г) Просмотръ списковъ профессоровъ для опредѣленія, своевременно ли произведена по нимъ выписка и доставлены ли книги.

д) Повѣрка того, соблюдаются ли при выдачѣ книгъ §§ 29—44 сихъ правилъ.

е) Повѣрка правильности веденія описей и каталоговъ библіотеки.

48. Кромѣ ежегодной ревизіи, въ случаѣ надобности, по постановленію Правленія ревизія можетъ быть произведена во всякое другое время.

VIII. Правила для профессорской читальни.

49. Право пользованія журналами и газетами, поступающими въ читальню, принадлежитъ только лицамъ, служащимъ въ Институтѣ.

50. Правила пользованія газетами:

а) Газеты немедленно, по полученіи ихъ библіотекаремъ, кладутся на столъ и остаются такъ въ теченіе одного дня, а затѣмъ остаются въ читальнѣ въ продолженіе пяти дней. Брать ихъ на домъ въ это время не дозволяется.

б) По прошествіи этого времени, газеты выдаются желающимъ на домъ, но должны быть возвращены на другой день, если на нихъ поступитъ требованіе.

51. Правила пользованія общими журналами:

а) Общіе журналы какъ и газеты должны лежать на столахъ до полученія слѣдующаго номера, послѣ чего выдаются на домъ лицамъ, желающимъ ихъ получить. Для соблюденія послѣдовательности въ выдачѣ на домъ журналовъ, въ читальнѣ ведется особая тетрадь, въ которую лица, желающія получить журналъ, собственноручно записываются. Журналы выдаются въ порядкѣ записей.

б) Держать у себя на дому общіе журналы дозволяется не болѣе недѣли, послѣ чего они должны быть возвращены. Если въ теченіе недѣли на нихъ не поступило требованій, то журналъ можетъ оставаться вторую недѣлю, потомъ третью и т. д., но во всякомъ случаѣ не больше мѣсяца, послѣ чего долженъ быть возвращенъ въ библіотеку для переплета.

Невозвращеніе журнала въ вышеуказанный срокъ считается равносильнымъ утратѣ его и влечетъ за собою послѣдствія предусмотрѣнныя §§ 26, 27 и 28 правилъ библіотеки.

52. Правила пользованія спеціальными журналами:

а) Спеціальные журналы лежатъ на столахъ читальни: еженедѣльные до полученія слѣдующаго номера, остальные — въ теченіе двухъ недѣль. Въ это время на домъ они не выдаются. По истеченіи указанныхъ сроковъ, спеціальные журналы могутъ быть выдаваемы на домъ.

б) Спеціальные журналы должны быть возвращены по прошествіи одного мѣсяца, если на нихъ поступило требованіе другого лица; если же требованій не поступило, то они могуть оставаться до конца учебнаго года наравнѣ съ книгами § 30, послѣ чего должны быть сданы въ библіотеку для отдачи ихъ въ переплетъ.

53. На всякій номеръ газеты или журнала, взятый на домъ, берущій даетъ квитанцію, написанную на особомъ бланкѣ. Всѣ взятые изъ читальни журналы и газеты возвращаются непосредственно въ библіотеку, при чемъ библіотекарь возвращаетъ квитанцію.

54. Всѣ журналы, кромѣ газетъ, по полученіи слѣдующаго номера, сдаются въ библіотеку, если только никто не заявилъ желанія взять ихъ на домъ.

55. Въ каникулярное время журналы на столы не выкладываются, а помѣщаются въ запертыхъ шкафахъ, ключъ отъ которыхъ имѣется у служителя. Желающіе получить журналы на домъ обращаются къ нему за ключемъ и передаютъ ему квитанцію взамѣнъ взятыхъ номеровъ.

Служитель обязанъ поэтому ежедневно въ опредѣленное время быть въ профессорской читальнѣ.

56. Въ каникулярное время правила о срокахъ возвращенія могутъ не соблюдаться и сроки возвращенія представляются взаимному соглашенію лицъ, пользующихся журналами.

Прилож. 6 (къ ст. 14 засѣд. 1 іюня 1899 г.).

ИЗВЛЕЧЕНІЕ
ИЗЪ ПРОТОКОЛА № 26 ЗАСѢДАНІЯ ПРАВЛЕНІЯ
ВАРШАВСКАГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКАГО ИНСТИТУТА
ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II.

Мая 31 дня 1899 года.

---

1. Слушали: Заявленіе Директора Института, что, согласно п. 5 Высочайше утвержденнаго 8 іюня 1898 года мнѣнія Государственнаго Совѣта, г. Министромъ Финансовъ, какъ это видно изъ отношенія Департамента Торговли и Мануфактуръ, отъ 24 марта с. г. за № 10814, разрѣшено обратить остатокъ отъ преподавательскаго персонала за 1898 г., въ размѣрѣ 6646 руб. 63 коп. на усиленіе средствъ Института въ 1899 году, почему, на основаніи п. в. ст. 54 Положенія объ Институтѣ, означенную сумму слѣдуетъ распредѣлить на надобности, указанныя въ ст. 3 того же Положенія.

Положили: Назначить: 1) На пособіе учащимся и служащимъ въ Институтѣ, а также семействамъ этихъ лицъ 1046 руб. 63 коп.

2) На пополненіе суммъ для содержанія стипендіатовъ —.

3) На издержки по печатанію научныхъ сочиненій, издаваемыхъ отъ имени Института —.

4) На расширеніе и улучшеніе учебно-вспомогательныхъ учрежденій, на сверхштатное вознагражденіе профессоровъ, преподавателей и лаборантовъ за особыя занятія 4500 руб.

5) На командировку профессоровъ и другихъ лицъ по учебной части 600 руб.

6) На добавленіе къ суммамъ, назначеннымъ на содержаніе и ремонтъ институтскихъ зданій —.

7) На издержки при торжественныхъ собраніяхъ и вообще на мелочные расходы по разнымъ предметамъ 500 руб. Итого 6646 руб. 63 коп.

2. Слушали: Заявленіе Директора Института, что въ 1898 году поступило 14030 руб. платы за слушаніе лекцій студентами и вольными слушателями. Означенная сумма внесена въ Варшавское Губернское Казначейство, о чемъ сообщено Департаменту Торговли и Мануфактуръ 24 сентября и 20 ноября 1898 года за №№ 1708 и 2295. Сумма эта, согласно ст. 3 Положенія объ Институтѣ, должна быть внесена въ подлежащія подраздѣленія смѣты расходовъ Министерства Финансовъ, на усиленіе средствъ Института въ 1900 году, почему въ настоящее время, согласно п. в. ст. 54 Положенія объ Институтѣ должна быть составлена роспись этой суммы на надобности, указанныя въ ст. 3 того же Положенія.

Положили: Назначить: 1) На пособія учащимся и служащимъ въ Институтѣ, а также семействамъ этихъ лицъ 2330 руб.

2) На пополненіе суммъ для содержанія стипендіатовъ —.

3) На издержки по напечатанію научныхъ сочиненій, издаваемыхъ отъ имени Института 600 руб.

4) На расширеніе и улучшеніе учебно-вспомогательныхъ учрежденій, на сверхштатное вознагражденіе профессоровъ, преподавателей и лаборантовъ за особыя занятія 9500 руб.

5) На командировки профессоровъ и другихъ лицъ по учебной части 600 руб.

6) На добавленіе къ суммамъ, назначеннымъ на содержаніе и ремонтъ Институтскихъ зданій —.

7) На издержки при торжественныхъ собраніяхъ и вообще на мелочные расходы по разнымъ предметамъ 1000 руб. Итого 14030 р.

Обѣ эти росписи, согласно п. в. ст. 51 Положенія объ Институтѣ, представить въ Совѣтъ Института на утвержденіе.

ИЗВЛЕЧЕНІЯ
ИЗЪ ПРОТОКОЛОВЪ ЗАСѢДАНІЙ СОВѢТА
ВАРШАВСКАГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКАГО ИНСТИТУТА
ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II
за 1899—1900 уч. годы.

Засѣданіе 31 августа 1899 года.

Присутствовали подъ предсѣдательствомъ Директора А. Е. Лагоріо профессоры: П. О. Сомовъ, В. А. Анисимовъ, Г. Ѳ. Вороной, В. І. Дейчъ, Н. Б. Делоне и В. А. Солонина, отсутствовалъ по болѣзни проф. Е. Е. Вагнеръ, кромѣ того присутствовали 10 преподавателей.

Слушали:

1. Сообщеніе Директора о томъ, что Г. Министръ на его представленіе, отъ 5 іюня 1899 г. о состояніи Института изволилъ написать: „сердечно благодарю Директора Института, декановъ и всѣхъ профессоровъ и преподавателей. Истинно радуюсь достигнутыми ими благими результатами".

2. Отношеніе Департамента Торговли и Мануфактуръ о назначеніи доктора политической экономіи статскаго совѣтника И. И. Иванюкова преподавателемъ Института съ 1 іюля 1899 г.

3. Отношеніе Департамента Торговли и Мануфактуръ о переводѣ профессора Ново-Александрійскаго Института доктора механики, статскаго совѣтника Н. Б. Делоне ординарнымъ профессоромъ Института по каѳедрѣ прикладной механики съ 1 іюля 1899 г.

4. Отношеніе Департамента Торговли и Мануфактуръ о назначеніи магистра химіи, надворнаго совѣтника В. А. Солонины экстраординарнымъ профессоромъ Института по каѳедрѣ химіи съ 1 іюля 1899 года.

5. Отношеніе Департамента Торговли и Мануфактуръ о на-

значеніи гражданскаго инженера Васильева штатнымъ преподавателемъ черченія въ Институтѣ съ 20 августа 1899 года.

6. Отношеніе Департамента Торговли и Мануфактуръ о переводѣ сверхштатнаго учителя Варшавской 2-ой мужской гимназіи кандидата физико-математическихъ наукъ Д. А. Гонтарева штатнымъ преподавателемъ математики въ Институтѣ съ 20 августа 1899 года.

7. Заявленіе Директора о назначеніи Нагорнова старшимъ лаборантомъ при каѳедрѣ химіи съ 1 іюля 1899 г. и о назначеніи Чепинскаго и. д. младшаго лаборанта при каѳедрѣ физики съ 1 августа 1899 года.

8. Отношеніе Департамента Торговли и Мануфактуръ объ увеличеніи числа лекцій по математикѣ на II к. механическаго и инженерно-строительнаго отдѣленій съ 3-хъ до 4 часовъ.

9. Предложеніе проф. Сомова о раздѣленіи преподаванія практической механики на II к. механическаго и инженерно-строительнаго отдѣленій.

10. Вопросъ о преподаваніи сопротивленія матеріаловъ на II курсѣ механическаго и инженерно-строительнаго отдѣленій.

11. О назначеніи практическихъ занятій по геодезіи во 2 полугодіи текущаго учебнаго года на I к. механическаго и инженерно-строительнаго отдѣленій.

12. Распредѣленіе лекцій и практическихъ занятій въ 1-мъ полугодіи текущаго года.

13. Сообщеніе Директора о пріемѣ Правленіемъ на I курсъ по конкурсу и безъ конкурса 225 человѣкъ.

14. Сообщеніе Директора о томъ, что Правленіе постановило ходатайствовать о пріемѣ сверхъ комплекта 20 человѣкъ на I к. инженерно-строительнаго и химическаго отдѣленій.

15. Отношеніе Департамента Торговли и Мануфактуръ съ препровожденіемъ списка среднихъ учебныхъ заведеній, курсъ коихъ признается достаточнымъ для допущенія къ конкурснымъ испытаніямъ въ Институты Министерства Финансовъ.

16. Отношеніе Департамента Торговли и Мануфактуръ о томъ, что г. Министръ разрѣшилъ обратить въ спеціальныя средства Института остатокъ въ 6646 руб. 63 к. отъ содержанія преподавательскаго персонала.

17. Прошеніе окончившаго курсъ физико-математическихъ наукъ Поспѣлова съ отзывомъ проф. Берпацкаго о предоставленіи ему должности лаборанта при каѳедрѣ физики. При баллотировкѣ г. Поспѣловъ былъ избранъ единогласно.

18. Прошеніе лаборанта Варшавскаго Университета Милобендз-

скаго съ отзывомъ проф. Вагнера о назначеніи его преподавателемъ по аналитической химіи. При баллотировкѣ Милобендзскій избранъ единогласно на должность старшаго лаборанта при каѳедрѣ химіи.

19. Предложеніе Директора избрать Секретаря Совѣта въ виду того, что 11-го сентября истекаетъ срокъ, на который былъ избранъ проф. Анисимовъ. По избраніи проф. Анисимова за отказомъ его при вторичной баллотировкѣ былъ избранъ проф. Дейчъ.

20. Планъ занятій на зимній семестръ стипендіата Исаева и отчетъ стипендіата Ерчиковскаго о занятіяхъ въ первой половинѣ 1899 года.

21. Отчетъ и планъ будущихъ занятій стипендіата Задарновскаго.

22. Отчетъ и планъ будущихъ занятій стипендіата Касьмина.

23. Отчетъ и планъ будущихъ занятій стипендіата Лисянскаго.

24. Рапортъ преп. Палладина о назначеніи ему пособія въ 300 руб. на напечатаніе курса ботаники для студентовъ Института.

Положили: по ст. 1—8, 13, 15 и 16 принять къ свѣдѣнію; по ст. 9 одобрить и принять къ руководству; по ст. 10 поручить временно чтеніе лекцій по сопротивленію матеріаловъ на обоихъ отдѣленіяхъ совмѣстно преп. Заборовскому; по ст. 11, 12 и 14 одобрить; по ст. 17 и 18 представить г. Директору; по ст. 19 представить г. Министру на утвержденіе проф. Дейчъ въ должности Секретаря Совѣта; по ст. 20 препроводить на заключеніе проф. Вагнеру; по ст. 21 и 24 одобрить; по ст. 22 препроводить на заключеніе проф. Делоне; по ст. 23 препроводить на заключеніе г. Директору.

Засѣданіе 15 сентября 1899 года.

Присутствовали подъ предсѣдательствомъ Директора 7 членовъ Совѣта и 12 преподавателей.

Слушали:

1. Сообщеніе г. Директора о томъ, что отдѣленіе химіи физико-химическаго общества единогласно присудило большую премію имени Бутлерова проф. Е. Е. Вагнеру.

Положили: принять къ свѣдѣнію и занести въ формулярный списокъ.

2. Докладъ гг. Декановъ о результатахъ осеннихъ испытаній.

Положили: перевести на II-й курсъ 16 студентовъ.

3. Предложеніе г. Директора обсудить вопросъ о практическихъ занятіяхъ по теоретическимъ предметамъ.

Положили: 1) Участіе въ занятіяхъ по теоретическимъ предметамъ обязательно для всѣхъ студентовъ.

2) Неучастіе въ занятіяхъ можетъ служить причиною недопущенія къ экзаменамъ.

3) Гг. преподаватели, ведущіе занятія по теоретическимъ предметамъ составляютъ къ концу каждаго полугодія вѣдомости, въ которыхъ обозначаютъ балломъ степень участія и успѣшность студентовъ въ занятіяхъ.

4) Къ послѣднему, передъ экзаменами, засѣданію Совѣта, гг. Деканы представляютъ на основаніи оцѣнки гг. преподавателей вѣдомости, съ оцѣнкою занятій студентовъ по теоретическимъ предметамъ.

5) Просить гг. Декановъ принять всѣ мѣры къ успѣшнымъ занятіямъ студентовъ.

Означенныя мѣры относятся до: *математики*, *теоретической механики*, *физики*, *кристаллографіи* и *минералогіи*, *начертательной геометріи* и *химіи* на механическомъ и инженерно-строительномъ отдѣленіяхъ.

Въ частности, относительно преподаванія *химіи* на механическомъ и инженерно-строительномъ отдѣленіяхъ, Совѣтъ постановилъ: установить предварительныя испытанія по химіи въ промежутокъ времени отъ 1 марта до 10 сентября, по выдержаніи котораго, студенты II-го курса допускаются къ практическимъ занятіямъ на общихъ основаніяхъ (п. п. 1 и 2).

Окончательное испытаніе производится на II-мъ курсѣ до 10-го декабря.

4. Рапортъ г. предсѣдателя чертежной комиссіи проф. Дейчъ объ организаціи практическихъ занятій по графическимъ искусствамъ.

Положили: одобрить съ небольшими измѣненіями (см. приложеніе 1).

5. Сообщеніе г. Директора о представленныхъ программахъ профессоровъ и преподавателей.

Положили: принять къ свѣдѣнію.

6. Заявленіе проф. Дейчъ, что въ представленной программѣ по начертательной геометріи не помѣщены такіе важные отдѣлы, какъ перспектива и изометрическая проекція.

Положили: Имѣть въ виду установить курсы перспективы и изометрической проекціи для инженерно-строительнаго отдѣленія.

7. Предложеніе г. Директора о выборѣ представителя при библіотекѣ отъ Совѣта.

Положили: Просить проф. Делоне принять на себя въ качествѣ представителя отъ Совѣта предварительное разсмотрѣніе заявленій о выпискѣ книгъ, наблюденіе о правильномъ расходованіи кредитовъ по отдѣльнымъ каѳедрамъ и проч.

8. Предложеніе г. Директора выразить благодарность отъ Совѣта исполнявшему до 11 сентября с. г. должность Секретаря Совѣта проф. Анисимову.

Положили: благодарить проф. Анисимова.

9. Предложеніе г. Директора объ изданіи при Институтѣ литографированныхъ лекцій.

Положили: одобрить и просить Правленіе объ изысканіи средствъ.

10. Отношеніе Департамента Торговли и Мануфактуръ о разрѣшеніи добавить 1 еженедѣльный часъ лекцій по органической химіи на II-мъ курсѣ Химическаго Отдѣленія.

Положили: принять къ свѣдѣнію.

11. Отчеты проф. Делоне и преп. Окольскаго о заграничныхъ командировкахъ.

Положили: одобрить.

12. Рапортъ препод. Палладина о выдачѣ ему цензурнаго разрѣшенія на изданіе курса ботаники.

Положили: изданіе одобрить, а рапортъ препроводить г. Директору для выдачи цензурнаго разрѣшенія.

13. Ходатайство г. Библіотекаря Института о сокращеніи числа часовъ, въ которые открыта студенческая читальня.

Положили: открывать читальню съ 10—3 час. и вечеромъ съ 6 до 8 час.

Засѣданіе 11 октября 1899 года.

Присутствовали подъ предсѣдательствомъ Директора 7 членовъ.

Слушали:

1. Сообщеніе Директора о назначеніи по найму кандидата математическихъ наукъ В. Э. Эренфейхта преподавателемъ геодезіи и руководителемъ практическихъ занятій по математикѣ, окончившаго курсъ естественныхъ наукъ В. Стржембоша руководителемъ практическихъ занятій по химіи и инженеръ-механика В. К. Рофе преподавателемъ техническаго черченія.

2. Заявленіе проф. Делоне съ просьбою выяснить порядокъ расходованія штатныхъ библіотечныхъ суммъ на журналы и отдѣльныя сочиненія по каѳедрамъ.

3. Рапортъ Библіотекаря о томъ, что въ библіотеку пожертвованы Оглобинымъ 5 экз. колористическаго сборника.

4. Предложеніе Директора о пріобрѣтеніи на особыя средства книгъ для студенческой читальни.

5. Отзывъ проф. Вагнера о планѣ занятій стипендіата Исаева, объ отчетѣ стипендіата Хардина и объ отчетѣ и планѣ занятій стипендіата Ерчиковскаго.

6. Прошеніе кандидата естественныхъ наукъ Д. Соболева съ отзывомъ г. Директора о предоставленіи ему должности лаборанта при минералогическомъ кабинетѣ. По баллотировкѣ г. Соболевъ оказался выбраннымъ единогласно.

Положили: по ст. 1 принять къ свѣдѣнію; по ст. 2-ой выдѣливъ сумму, необходимую на выписку журналовъ, остатокъ штатной суммы распредѣлить по каѳедрамъ; по ст. 3 благодарить жертвователей; по ст. 4 одобрить и просить Правленіе объ изысканіи средствъ въ размѣрѣ до 500 руб. ожегодно; по ст. 5 одобрить; по ст. 6 представить г. Директору на утвержденіе.

Засѣданіе 15 ноября 1899 года.

Присутствовали подъ предсѣдательствомъ Директора 7 членовъ Совѣта и преподаватели.

Слушали:

1. Сообщеніе г. Директора о томъ, что г. Товарищъ Министра въ письмѣ къ Свѣтлѣйшему Князю Имеретинскому извѣщаетъ его о слѣдующемъ:

На всеподданнѣйшемъ докладѣ г. Министра Финансовъ, въ коемъ онъ представилъ на Высочайшее благовоззрѣніе просьбу князя Имеретинскаго повергнуть къ стопамъ Его Императорскаго Величества выраженіе чувствъ вѣрноподданнической благодарности присутствующихъ при закладкѣ и освященіи зданій Варшавскаго Политехническаго Института Императора Николая II, Государь Императоръ въ 8-й день сентября с. г. собственноручно начертать соизволилъ „прочелъ съ удовольствіемъ".

Положили: о таковыхъ всемилостивѣйшихъ словахъ Его Императорскаго Величества занести въ протоколъ засѣданія Совѣта.

2. Сообщеніе г. Директора о томъ, что Комитетъ Перваго Всероссійскаго Электротехническаго Съѣзда въ Петербургѣ обратился къ Институту съ предложеніемъ принять участіе въ трудахъ Съѣзда.

3. Отчетъ проф. Дейчъ и преп. Добровольскаго о лѣтней геодезической практикѣ.

4. Сообщеніе г. Директора о выработанныхъ имъ правилахъ объ изданіи Извѣстій Варшавскаго Политехническаго Института Императора Николая II. (См. прилож. 2).

5. Отношеніе Правленія съ проектомъ правилъ для практикантовъ аналитической лабораторіи.

6. Отзывъ профессоровъ Сомова и Делоне объ отчетѣ стипендіата Чорбы и проф. Вагнера объ отчетѣ стипендіата Исаева.

7. Отзывъ преп. Палладина объ отчетѣ о заграничной командировкѣ лаборанта Флерова.

8. Отношеніе Управленія Ивангородо - Домбровской ж. д. съ группой чертежей въ даръ Институту.

9. Рапортъ проф. Солонина объ исходатайствованіи ему заграничной командировки съ пособіемъ на предстоящіе зимніе каникулы и 8 дней съ научной цѣлью.

10. Заявленіе преп. Бернацкаго о его желаніи принять личное участіе въ трудахъ Съѣзда Электротехниковъ.

11. Рапортъ лаборанта Чепинскаго объ исходатайствованіи ему заграничной командировки съ пособіемъ на будущее полугодіе на 6 мѣсяцевъ съ 1 января 1900 г.

12. Предложеніе г. Директора выбрать Редактора Извѣстій Института.

13. Заявленіе г. Директора о томъ, что гг. преподаватели графическихъ искусствъ производятъ оцѣнку чертежей въ комиссіяхъ въ часы, назначенные на непосредственное руководство занятіями студентовъ, вслѣдствіе чего не всѣ студенты успѣваютъ получать надлежащія указанія.

14. Заявленіе профессоровъ Вагнера и Солонина о томъ, что при настоящихъ размѣрахъ временной лабораторіи и при вѣроятномъ опозданіи оборудованія новой осенью 1900 г. веденіе занятій въ полномъ объемѣ для всѣхъ отдѣленій Института является невозможнымъ.

Положили: по ст. 2 просить желающихъ принять участіе въ дѣлахъ Съѣзда заявить объ этомъ; по ст. 3 и 5 одобрить; по ст. 4 проектъ одобрить и представить на утвержденіе г. Министру; по ст. 6 и 7 отчеты одобрить; по ст. 8 благодарить; по ст. 9—11 ходатайствовать передъ г. Министромъ о командированіи съ пособіемъ проф. Солонины, преп. Бернацкаго и лаборанта Чепинскаго; по ст. 12 на основаніи баллотировки единогласно просить проф. Иванюкова принять на себя трудъ редактированія Извѣстій; по ст. 13 просить гг. декановъ назначать оцѣночныя комиссіи въ часы, свободные отъ занятій для членовъ комиссіи; по ст. 14 допустить къ занятіямъ съ будущаго полугодія студентовъ I к. хим. отдѣленія и предоставить заниматься въ лабораторіи только желающимъ студентамъ II к. механ. и инж.-стр. отдѣленій, не дѣлая этихъ занятій обязательными.

Засѣданіе 9 декабря 1899 года.

Присутствовали подъ предсѣдательствомъ Директора 7 членовъ Совѣта и 13 преподавателей.

Слушали:

1. Отчеты и заявленія профессоровъ и преподавателей о ходѣ практическихъ занятій въ теченіе 1 полугодія 1899—1900 уч. года.

2. Росписаніе лекцій на будущее полугодіе и заявленія гг. профессоровъ и преподавателей о тѣхъ измѣненіяхъ, которыя необходимо въ нихъ сдѣлать, а именно: заявленіе проф. Сомова о необходимости прибавить 1 часъ лекцій по механикѣ на II к. механич. и инж. строит. отд., заявленіе преп. Бернацкаго о желательности читать физику на I к. совмѣстно для всѣхъ отдѣленій и заявленіе преп. Эренфейхта о необходимости прибавить 2 часа лекцій по низшей геодезіи студентамъ II к. инж.-стр. отдѣленія совмѣстно съ I к. и включить въ росписаніе 2 часа практическихъ занятій по геодезіи для I к. инженерно строительнаго отдѣленія.

3. Предложеніе Директора ввести преподаваніе низжей геодезіи на Химическомъ Отдѣленіи.

4. Заявленіе Директора о необходимости обсудить вопросъ о предстоящей лѣтней практикѣ студентовъ на фабрикахъ, заводахъ и строительныхъ работахъ.

5. Отзывъ проф. Делоне объ отчетахъ стипендіатовъ Института Заборовскаго, Задарновскаго и Касьмина.

6. Заявленіе Директора о томъ, что 19 ноября былъ разосланъ циркуляръ съ рапортомъ лаб. Поспѣлова съ просьбой о командированіи его на Съѣздъ Электротехниковъ въ Петербургъ, на что послѣдовало согласіе всѣхъ членовъ Совѣта.

7. Ходатайство преп. Палладина о назначеніи младшаго лаборанта Флерова старшимъ лаборантомъ. По баллотировкѣ ходатайство это оказалось единогласно одобрено.

8. Отношеніе геодезическаго отдѣленія военно-топографическаго отдѣла Главнаго Штаба съ препровожденіемъ въ библіотеку Института 25 томовъ записокъ отдѣла.

9. Сообщеніе Департамента Торговли и Мануфактуръ объ утвержденіи г. Министромъ временнаго преподавателя Э. В. Гляссе штатнымъ преподавателемъ Института съ 19 августа 1899 г.

10. Заявленіе Директора о томъ, что г. Министръ назначилъ временно исправляющими обязанности Декановъ въ нынѣшнемъ учебномъ году: механ. Отд. проф. Анисимова и инж.-стр. Отд. проф. Дейчъ. Вмѣстѣ съ этимъ г. Директоръ предложилъ избрать Секретаря Совѣта, такъ какъ исполнявшій до сихъ поръ обязанности Секретаря проф. Дейчъ не можетъ совмѣщать обѣихъ должностей. Послѣ баллотировки оказался избраннымъ проф. Вороной, но за его отказомъ послѣ вторичной баллотировки оказался избраннымъ проф. Солонина.

Положили: по ст. 1 одобрить; по ст. 2 утвердить росписаніе съ предлагаемыми измѣненіями; по ст. 3 отложить обсужденіе вопроса; по ст. 4 обратиться съ просьбою о содѣйствіи этимъ занятіямъ на фабрики, заводы, въ Управленія ж. д., а также къ лицамъ и учрежденіямъ, вѣдающимъ различными строительными работами; правила для лѣтней практики выработать въ 1 половинѣ будущаго полугодія; по ст. 5 отчеты одобрить; по ст. 6 командировать г. Поспѣлова съ пособіемъ; по ст. 7 представить г. Директору на утвержденіе; по ст. 8 благодарить; по ст. 9 принять къ свѣдѣнію; по ст. 10 представить г. Министру на утвержденіе проф. Солонины въ должности Секретаря Совѣта.

Засѣданіе 30 января 1900 года.

Присутствовали подъ предсѣдательствомъ Директора 6 членовъ Совѣта и 12 преподавателей. Отсутствовалъ членъ Совѣта Е. Е. Вагнеръ по болѣзни.

Слушали:

1. Выработанный г. Директоромъ по порученію Министерства проектъ организаціи въ Институтѣ четвертаго Отдѣленія горнаго.

2. Отношеніе Департамента Торговли и Мануфактуръ объ утвержденіи г. Министромъ проф. Солонины въ должности Секретаря Совѣта на 1 годъ съ 9 декабря 1899 г.

3. Отношеніе Департамента Торговли и Мануфактуръ о разрѣшеніи г. Министромъ командировокъ преп. Бернацкому и лаб. Поспѣлову и Чепинскому.

4. Отношеніе Департамента Торговли и Мануфактуръ объ утвержденіи г. Министромъ классного художника 3 степени г. Маньковскаго штатнымъ преподавателемъ рисованія съ 1 января 1900 г.

5. Отношеніе Департамента Торговли и Мануфактуръ объ утвержденіи г. Министромъ правилъ объ изданіи Извѣстій Института (см. засѣд. 15 ноября 1899 г. ст. 4).

6. Отношеніе Департамента Торговли и Мануфактуръ объ

утвержденіи г. Министромъ правилъ для библіотеки Института (см. засѣд. 7 апрѣля 1899 г. ст. 1).

7. Отношеніе Департамента Торговли и Мануфактуръ о предоставленіи г. Министромъ проф. Сомову званія заслуженнаго профессора Варшавскаго Политехническаго Института и оставленіи заслуженнаго профессора Сомова въ занимаемой имъ должности на 5 лѣтъ съ 10 октября 1899 г.

8. Отношеніе канцеляріи Министерства Путей Сообщенія о томъ, что съ 1900 г. въ библіотеку Института будетъ высылаться „Вѣстникъ Минист. Путей Сообщенія" въ обмѣнъ на печатные труды Института.

9. Отношеніе Директора Технологическаго Института Императора Николая I съ препровожденіемъ 20 экз. XII тома „Извѣстій Технологическаго Института".

10. Рапортъ проф. Солонины о добавленіи ему въ этомъ полугодіи 2 лекцій въ недѣлю по неорганической химіи: одну для студ. I к. хим. Отд. и одну для студ. I к. мех. и инжен.-строит. Отдѣленій.

11. Проектъ г. представителя отъ Совѣта при библіотекѣ проф. Делоне распредѣленія библіотечныхъ суммъ.

12. Заявленіе декановъ механ. Отд. проф. Анисимова и инж.-стр. Отд. проф. Дейчъ о предоставленіи студентамъ, успѣшно занимавшимся на практическихъ занятіяхъ по теоретическимъ предметамъ, права подвергнуться испытаніямъ по этимъ предметамъ раньше экзаменаціоннаго періода, именно въ первые дни послѣ праздниковъ Пасхи.

13. Отношеніе Директора о назначеніи старшимъ лаборантомъ младшаго лаборанта при ботаническомъ кабинетѣ Института Флерова.

14. Рапортъ преп. Палладина о напечатаніи въ Извѣстіяхъ Института изслѣдованія г. Флерова „Вліяніе питанія на дыханіе грибовъ".

15. Рапортъ преп. Палладина о командированіи съ пособіемъ лаб. Флерова съ 15 апрѣля по 15 августа за границу для работъ по технической бактеріологіи.

16. Заключеніе проф. Вагнера по отчету стипендіата Ерчиковскаго за 2 полугодіе 1899 г.

17. Предложеніе Директора выбрать комиссію для составленія правилъ по лѣтней строительной практикѣ для студ. 2 курса.

Положили: по ст. 1—7 принять къ свѣдѣнію; по ст. 8 и 9 благодарить; по ст. 10 разрѣшить; по ст. 11 сумму въ 1850 р. въ этомъ полугодіи распредѣлить по предметамъ слѣдующимъ образомъ: математика 240 р., физика 120 р. органическая химія 120 р., неорганическая химія 120 р., механика теоретическая 120 р., прикладная 120 р., строительная 120 р., строительное искусство 120 р.; архитектура 120 р., минералогія 120 р., ботаника 120 р., геодезія 120 р., политическая экономія 120 р., черченіе 120 р., рисованіе 50 р.; по ст. 12: а) экзамены будутъ происходить въ этомъ учебномъ году съ 10 по 31 мая, б) съ цѣлью лучшаго усвоенія предметовъ и для провѣрки результатовъ практическихъ занятій для студентовъ, успѣшно занимавшихся по соотвѣтственнымъ теоретическимъ предметамъ, допускаются повѣрочныя испытанія съ 12 по 18 апрѣля включительно. Эти повѣрочныя испытанія допускаются по слѣдующимъ предметамъ: для студ. I к механ. и инж.-строит. Отд. математикѣ, механикѣ, для студ. I к. химич. Отд. аналитической геометріи, дифференцированіи и интегрированіи, для студ. II к. механ. и инжен.-строит. Отд. дифф. и инт. исчисленію, для студентовъ II к. химич. Отд. теоретической механикѣ. Списки студентовъ, могущихъ быть допущенными къ этимъ испытаніямъ, предварительно одобряются Совѣтомъ; по ст. 13 принять къ свѣдѣнію; по ст. 14 одобрить къ напечатанію; по ст. 15 на основаніи закрытой баллотировки единогласно ходатайствовать передъ г. Министромъ о разрѣшеніи командировки; по ст. 16 отчетъ одобрить; по ст. 17 избрать въ комиссію проф. Дейчъ и преп. Окольскаго и Короткевича-Ночевнаго.

Засѣданіе 28 февраля 1900 года.

Присутствовали подъ предсѣдательствомъ Директора 7 членовъ Совѣта и 14 преподавателей.

Слушали:

1. Отношеніе Департамента Торговли и Мануфактуръ объ оставленіи г. Министромъ проф. Вагнера, выслужившаго 25 лѣтъ по учебной службѣ, еще на 5 лѣтъ въ должности ординарнаго профессора съ оставленіемъ его временно исполняющимъ обязанности декана химическаго Отдѣленія.

2. Отношеніе Департамента Торговли и Мануфактуръ о командированіи проф. Солонины за границу на зимнее вакаціонное время и 8 дней.

3. Отношеніе канцеляріи Варшавскаго Генералъ Губернатора слѣдующаго содержанія: „г. Министръ Финансовъ увѣдомилъ г. Главнаго Начальника Края, что по всеподданнѣйшему докладу его, Статсъ-Секретаря Витте, Государь Императоръ въ 28 день минувшаго ян

варя Высочайше изволилъ ассигновать на оборудованіе Варшавскаго Политехническаго Института учебновспомогательными учрежденіями 160 тысячъ рублей изъ 12 милліоннаго фонда, назначеннаго на непредусмотрѣнныя смѣтами экстренныя надобности".

4. Увѣдомленіе г. Директора о допущеніи стипендіата А. Я. Касьмина временно къ чтенію лекцій по деталямъ машинъ студентамъ 2 курса механ. Отдѣленія, а также предложеніе Директора о добавленіи одного часа въ недѣлю по практическимъ занятіямъ по тому же предмету.

5. Предложеніе г. Директора о необходимости выработки правилъ для лѣтней геодезической практики.

6. Сообщеніе г. Директора о томъ, что Правленіе Института въ засѣданіи своемъ 26 февраля с. г.
въ 1-хъ составило проектъ распредѣленія суммъ, назначенныхъ на усиленіе средствъ Института, а именно: А. по смѣтѣ 1900 г. на означенную надобность отпущено 9500 р.; сумму эту предположено распредѣлить слѣдующимъ образомъ:

1) Проф. Солонинѣ за завѣдываніе химической лабораторіей . . . . 1000 р.

2) Проф. Делоне за завѣдываніе механическимъ кабинетомъ . . . . 500 „

3) Ему же за дополнительный 8-й часъ занятій . . . 200 „

4) Препод. Иванюкову . . . . 900 „

5) Ему же за исполненіе обязанностей редактора „Извѣстій Института" . . . . 300 „

6) Профессору, который будетъ завѣдывать электротехническимъ кабинетомъ . . . . 500 „

7) На конкурсныя испытанія . . . . 600 „

8) На содержаніе чертежныхъ . . . . 1915 „

9) На пріобрѣтеніе досокъ для чертежныхъ . . . . 500 „

10) На расходы по конструктивному черченію . . . 242 „

11) На содержаніе рисовальной . . . . 400 „

12) На ботаническій кабинетъ . . . . 500 „

13) На минералогическій кабинетъ . . . . 500 „

14) На вознагражденіе студ. Соколовскому за занятія въ физическомъ кабинетѣ . . . . 300 „

15) На уплату части счета Петерса и Роста въ 3449 мар. 50 пф. . . . . 1143 „

Всего . . . 9500 р.

Б. Съ согласія г. Министра Финансовъ, изложеннаго въ сообщеніи Департамента Торговли и Мануфактуръ отъ 15 января с. г. за № 1246, согласно V пункту Высочайше утвержденнаго мнѣнія

Государственнаго Совѣта, отъ 8 іюня 1898 г., разрѣшено обратить остатокъ отъ преподавательскаго персонала за 1899 г., понынѣ еще не ассигнованный, въ размѣрѣ 10526 р. 90 к. на усиленіе средствъ Института. Сумму эту предположено распредѣлить слѣдующимъ образомъ.

1) На пособія учащимся . . . . 2700 р.

2) На пособія служащимъ въ Институтѣ и ихъ семействамъ . . . . 300 „

3) На командировки профессоровъ и другихъ служащихъ по учебной части . . . . 500 „

4) На издержки при торжественныхъ собраніяхъ и вообще мелочные расходы по разнымъ предметамъ 1026 „ 90 к.

Всего . . . 4526 р. 90 к.

остальные 6000 р. оставлены нераспредѣленными впредь до выясненія вопроса о дѣйствительныхъ потребностяхъ Института во второмъ полугодіи, когда прибываетъ нѣсколько новыхъ учебно-вспомогательныхъ учрежденій. Къ этому гг. профессора Вагнеръ и Дейчъ заявили, что въ началѣ будущаго полугодія у перваго изъ нихъ предстоитъ единовременный расходъ по лабораторія органической химіи въ 1500 р. и у втораго по чертежнымъ въ 1000 р.; поэтому они просили въ началѣ будущаго полугодія выдѣлить для указанныхъ учрежденій означенныя суммы изъ остатка въ 6000 р. на упомянутые расходы. Правленіе Института, признавая указанные гг. профессорами Вагнеромъ и Дейчъ предстоящіе расходы подлежащими удовлетворенію, постановило имѣть въ виду при распредѣленіи остальныхъ 6000 р.

во 2-хъ распредѣлило между учебно-вспомогательными учрежденіями кредитъ въ суммѣ 26500 р., ассигнованный по штатнымъ суммамъ на 1900 годъ слѣдующимъ образомъ:

1)	Кабинету теоретической механики	800 р.
2)	„ практической „	1600 „
3)	Лабораторіи органической химіи	2250 „
4)	Лабораторіи неорганической химіи	2250 „
5)	Физическому кабинету	4500 „
6)	Геодезическому кабинету	500 „
7)	Музею строительнаго искусства	1000 „
8)	Минералогическому кабинету	1500 „
9)	Ботаническому кабинету	500 „
10)	Электротехнической лабораторіи	1750 „
11)	Физико-химической лабораторіи	1125 „
12)	Лабораторіи химической технологіи	1125 „
	Всего . . .	18900 р.

Остальные же 7600 р. предназначены на расходы по преподаванію 1) сопротивленія матеріаловъ, 2) отопленія и вентиляціи, 3) гидравлики, 4) подъемныхъ машинъ, 5) механической технологіи, 6) рабочихъ механизмовъ (обраб. метал. и дерева), 7) технологіи строительныхъ матеріаловъ, причемъ на преподаваніе сопротивленія матеріаловъ постановлено выдѣлить теперь же 100 руб.

7. Ходатайство гг. Декановъ химич. и механич. Отдѣленій объ освобожденіи студентовъ 1-го курса этихъ Отдѣленій отъ представленія послѣдней работы по архитектурному черченію.

8. Докладъ проф. Дейчъ о примѣненіи метрической системы мѣръ въ преподаваніи черченія и вообще практическихъ предметовъ.

9. Докладъ проф. Дейчъ съ проектомъ временныхъ правилъ, выработанныхъ имъ совмѣстно съ преп. Короткевичъ-Ночевнымъ и Окольскимъ для лѣтней строительной практики со студентами II го курса мех. и инж.-строит. Отдѣленій.

10. Рапортъ проф. Солонины о разрѣшеніи ему заграничной командировки съ научною цѣлью на лѣтнее вакаціонное время, такъ какъ разрѣшенной заграничной командировкой на зимнее вакаціонное время онъ не могъ воспользоваться.

11. Рапортъ преподавателя Заборовскаго о командированіи его въ Берлинъ для слушанія лекцій лѣтняго семестра въ Шарлотенбургскомъ Политехникумѣ.

Положили: по ст. 1—3 принять къ свѣдѣнію; по ст. 4 добавить 1 часъ; по ст. 5 поручить преп. Эренфейхту представить проектъ организаціи лѣтней геодезической практики и смѣту расходовъ; по ст. 6 утвердить; по ст. 7 освободить; по ст. 8 одобрить; по ст. 9 одобрить правила, помѣщенныя въ прилож. 3; по ст. 10 и 11 ходатайствовать передъ г. Министромъ о командировкахъ.

Засѣданіе 24 марта 1900 г.

Присутствовали подъ предсѣдательствомъ г. Директора 7 членовъ Совѣта и 14 преподавателей.

Слушали:

1. Отношеніе Департамента Торговли и Мануфактуръ о согласіи г. Министра на командированіе лаб. Флерова съ 15 апрѣля по 15 августа за границу съ пособіемъ въ 300 руб.

2. Увѣдомленіе г. Директора о согласіи г. Министра на командированіе проф. Солонины за границу на лѣтнее вакаціонное время съ пособіемъ въ 200 руб.

3. Заявленіе г. Директора о назначеніи врем. преподавателя Эренфейхта штатнымъ преподавателемъ.

4. Предложеніе г. Директора объ одобреніи къ напечатанію въ Извѣстіяхъ Института статьи стипендіата Хардина: „О реакціяхъ образованія сафраниновъ".

5. Представленіе проф. Дейчъ о слѣдующемъ измѣненіи программы по рисованію на инжеп.-строит. Отдѣленіи: 1) ввести на III и IV курсахъ рисованіе какъ необязательный предметъ и 2) сохранивъ число часовъ по рисованію на I и II курсахъ, облегчить существующую программу.

6. Предложеніе проф. Анисимова обсудить вопросъ о вліяніи неудовлетворительныхъ балловъ при переводѣ съ I к. на II курсъ.

7. Прошеніе лаб. Милобендзскаго объ исходатайствованіи ему заграничной командировки съ научною цѣлью съ 1-го мая по 20 августа с. г.

8. Отчеты преп. Бернацкаго и лаб. Поспѣлова о ихъ командировкахъ на 1-й Всероссійскій Съѣздъ электротехниковъ.

9. Вопросъ о постановкѣ графическихъ занятій въ Институтѣ

Положили: по ст. 1—3 принять къ свѣдѣнію; по ст. 4 одобрить къ напечатанію; по ст. 5 одобрить; по ст. 6 передать вопросъ на обсужденіе комиссіи, состоящей изъ гг. Декановъ и проф. Сомова; по ст. 7 ходатайствовать передъ г. Министромъ о командировкѣ; по ст. 8 одобрить; по ст. 9 вести въ будущемъ учебномъ году графическія занятія по нижеслѣдующему плану:

А. Механическое Отдѣленіе.

I КУРСЪ.

а) Техническое черченіе.

1. Условное обозначеніе.
2. Калька.
3. Измѣреніе масштаба.
4. Модель простая.
5. Модель болѣе сложная.
6. Модель сложная.

Примѣчаніе. Изъ этихъ работъ четыре въ 1-мъ полугодіи и двѣ во 2-мъ.

б) Архитектурное черченіе.

1. Обломы и массы.
2. Деталь окна и двери.

3. Фасадъ, разрѣзы и планъ зданія съ деталями.

Примѣчаніе. Изъ этихъ работъ двѣ въ 1-мъ полугодіи и одна во 2-мъ.

в) Топографическое черченіе.

1. Вычерчиваніе рельефа по горизонталямъ.

Примѣчаніе. Эта работа выполняется во второмъ полугодіи.

г) Во время лѣтней практики по геодезіи студенты I к. обязательно представляютъ по группамъ обработанный планъ снятаго ими участка.

д) По рисованію студенты работаютъ въ урочное время.

II КУРСЪ.

Студенты выполняютъ графическія работы по прежней программѣ съ прибавленіемъ послѣдней работы I-го курса.

Примѣчаніе. По техническому черченію студенты исполняютъ семь работъ, изъ которыхъ четыре подаются въ 1-мъ полугодіи и три во 2-мъ.

Б. Химическое Отдѣленіе

Планъ графическихъ работъ для студентовъ химическаго Отдѣленія остается прежній, за исключеніемъ архитектурнаго черченія, по которому студенты 1-го курса подаютъ лишь три чертежа.

В. Инженерно-строительное Отдѣленіе.

Планъ графическихъ работъ для студентовъ Инженерно-строительнаго Отдѣленія остается прежній.

Засѣданіе 24 апрѣля 1900 года.

Присутствовали подъ предсѣдательствомъ Директора 6 членовъ, отсутствовалъ проф. Сомовъ.

Слушали:

1. Рапортъ проф. Анисимова о необходимости раздѣлить студентовъ I к. химическаго Отд. на 2 группы для практическихъ занятій по математикѣ.

2. Отчетъ стипендіата Ломоносова о его занятіяхъ съ ноября 1899 г. по апрѣль 1900 г.

3. Отчетъ стипендіата Лисянскаго о его занятіяхъ съ октября 1899 г. по апрѣль 1900 г. съ планомъ занятій на будущее время.

4. Планъ будущихъ занятій стипендіата Ерчиковскаго съ заключеніемъ проф. Вагнера.

5. Рапортъ преп. Эренфейхта съ проектомъ организаціи лѣтней геодезической практики.

Положили: по ст. 1 одобрить и передать въ Правленіе; по ст. 2 препроводить на заключеніе проф. Делоне; по ст. 3 планъ одобрить, отчетъ препроводить на заключеніе проф. Делоне; по ст. 4 и 5 одобрить.

Засѣданіе 3 мая 1900 года.

Присутствовали подъ предсѣдательствомъ г. Директора 7 членовъ Совѣта и 12 преподавателей.

Слушали:

1. Предложеніе Директора обязать всѣхъ господъ, ведущихъ практическія занятія, представить отчетъ о ходѣ этихъ занятій, а гг. преподавателей графическихъ работъ—годовыя отмѣтки въ 2-хъ экземплярахъ.

2. Сообщеніе Директора, что предложеніе проф. Анисимова о раздѣленіи студентовъ I к. химическаго Отд. на 2 группы для практическихъ занятій по математикѣ, на что потребуется расходъ въ размѣрѣ 400 руб. въ годъ, со стороны Правленія препятствій не встрѣчаетъ.

3. Заключенія комиссіи, состоящей подъ предсѣдательствомъ проф. Вагнера изъ профессоровъ Сомова, Анисимова и Дейчъ, по вопросу о вліяніи неудовлетворительныхъ отмѣтокъ на переводъ студентовъ съ I к. на II курсъ.

4. Заключеніе проф. Дейчъ объ отчетѣ стипендіата Заборовскаго о его дѣятельности съ 1 октября 1899 г. по 1 апрѣля 1900 г.

5. Заключеніе проф. Делоне объ отчетахъ стипендіатовъ Ломоносова и Лисянскаго по 1 апрѣля 1900 г.

6. Заключеніе профессоровъ Сомова и Делоне объ отчетѣ стипендіата Чорбы по 1 апрѣля 1900 г.

7. Отчетъ стипендіата Исаева по 1 мая 1900 г. съ заключеніемъ проф. Вагнера.

8. Вопросъ о допущеніи студентовъ къ экзаменамъ на основаніи результатовъ практическихъ занятій и графическихъ работъ.

9. Прошенія вольнослушателей о допущеніи ихъ къ экзаменамъ со студентами.

Положили: по ст. 1 одобрить; по ст. 2 дѣлить студентовъ I к. Химическаго Отдѣл. на 2 группы для практическихъ занятій по математикѣ; по ст. 3: студенты I к., показавшіе на испытаніяхъ по одному изъ предметовъ недостаточное знаніе и получившіе неудовлетворительную отмѣтку (2), могутъ быть переведены на II курсъ постановленіемъ Совѣта, но только по особому въ каждомъ случаѣ мотивированному представленію Отдѣленія; неудовлетворительная отмѣтка должна быть обязательно исправлена вторичнымъ испытаніемъ въ 1 полугодіи будущаго уч. года (на II курсѣ); по ст. 4—7 отчеты одобрить; по ст. 8 допустить къ экзамену 174 студ. механ. Отд., 145 студентовъ Инженерно-стр. Отд. и 93 студ. химическаго Отдѣленія; по ст. 9 допустить къ экзамену съ правомъ зачисленія въ студенты 14 человѣкъ, безъ этого права 10 человѣкъ.

Засѣданіе 24 мая 1900 года.

Присутствовали подъ предсѣдательствомъ Директора 7 членовъ Совѣта и 3 преподавателя.

Слушали:

1. Отношеніе Департамента Торговли и Мануфактуръ объ ассигнованіи г. Министромъ 1700 руб. на расходы по посѣщенію всемірной выставки въ Парижѣ лицами, командированными за границу для подготовленія къ профессорской дѣятельности.

2. Нижеслѣдующій проектъ росписи суммы въ 30240 руб. на усиленіе средствъ Института въ 1901 г.: 1) на пособіе учащимся и служащимъ въ Институтѣ, а также семействамъ этихъ лицъ 6000 руб., 2) на пополненіе суммъ для содержанія стипендіатовъ 2000 руб., 3) на издержки по напечатанію научныхъ сочиненій, издаваемыхъ отъ имени Института—1000 руб., 4) на расширеніе и улучшеніе учебно-вспомогательныхъ учрежденій, на сверхштатное вознагражденіе профессоровъ, преподавателей и лаборантовъ за особыя занятія 17000 руб., 5) на командировки лицъ учебнаго персонала 2000 руб., 6) на издержки при торжественныхъ собраніяхъ и вообще на мелкіе расходы 2240 руб.

3. Докладъ г. Директора объ увольненіи изъ Института Правленіемъ 13 студентовъ за невзносъ платы.

4. Рапортъ проф. Сомова о переносѣ для студентовъ механ. и инженерно-строит. Отдѣленій одной недѣльной лекціи по теоретической механикѣ съ I к. на II курсъ.

5. Рапортъ преп. Глясса о прибавленіи на I-мъ курсѣ механ. и инжен.-строительн. Отдѣленія 1 недѣльной лекціи по начертательной геометріи.

6. Рапортъ преп. Эренфейхта о перенесеніи преподаванія геодезіи на I к. механическаго Отдѣленія съ 2-го семестра на 1-ый.

7. Рапорты проф. Делоне, преп. Бернацкаго и преп. Окольскаго о командированіи ихъ съ пособіемъ въ Парижъ на выставку и лаб. Соболева о командированіи его съ пособіемъ въ Кѣлецкую и Радомскую губ. съ научною цѣлью.

8. Вопросъ объ обязательности предметовъ, не пріуроченныхъ къ опредѣленнымъ курсамъ.

9. Рапортъ стипендіата Задарновскаго о перенесеніи части курса технологіи волокнистыхъ веществъ съ IV к. на второе полугодіе III курса.

Положили: по ст. 1 и 3 принять къ свѣдѣнію; по ст. 2 утвердить; по ст. 4 одобрить и представить на утвержденіе г. Министру; по ст. 5 одобрить и препроводить въ Правленіе; по ст. 6 разрѣшить; по ст. 7 на основаніи закрытой баллотировки единогласно ходатайствовать передъ г. Министромъ о командировкахъ; по ст. 8 на механическомъ Отдѣленіи читать необязательно: теорію упругости, проективную геометрію и теорію вѣроятностей, и обязательно: фабричную гигіену и политическую экономію со статистикой; на инженерно-строительномъ Отдѣленіи читать необязательно: теорію упругости, проективную геометрію и теорію вѣроятностей, и обязательно: политическую экономію, гигіену, бухгалтерію и строительное законодательство; по ст. 9 одобрить чтеніе 4 недѣльныхъ часовъ во 2-мъ полугодіи на III к. и 4 недѣльныхъ часовъ въ первомъ полугодіи на IV к.

Засѣданіе 31 мая 1900 года.

Присутствовали подъ предсѣдательствомъ Директора 7 членовъ Совѣта и 12 преподавателей.

Слушали:

1. Обсужденіе вопроса о конкурсныхъ испытаніяхъ въ 1900 г.

2. Вопросъ о преподаваніи перспективы.

3. Представленіе декана химическаго Отдѣленія проф. Вагнера слѣдующаго содержанія:

„Практика показываетъ, что число лицъ, желающихъ поступить на другія два отдѣленія Института, по отношенію къ установленнымъ комплектамъ, значительно больше, чѣмъ стремящихся посвятить себя изученію химической технологіи.

Благодаря этому обстоятельству и существующимъ условіямъ пріемнаго конкурса на химическое отдѣленіе попадаетъ ежегодно значительное число лицъ, не чувствующихъ влеченія къ химіи и идущихъ на это отдѣленіе съ исключительною цѣлью выждать благопріятнаго случая, который открылъ бы передъ ними двери одного изъ двухъ другихъ отдѣленій, на которыя не могли поступить благодаря слабымъ конкурснымъ отмѣткамъ. Съ другой стороны взамѣнъ выбывающихъ на другія отдѣленія, съ нихъ переходятъ на химическое лица, руководствуясь не возникшимъ интересомъ къ химіи, а соображеніями совершенно инаго рода. Подъ гнётомъ перспективы вторичнаго конкурса они прежде всего заботятся объ обезпеченіи себѣ возможно большихъ шансовъ для перевода на II-й курсъ и поступаютъ на химическое отдѣленіе, такъ какъ достиженіе ихъ сокровенной цѣли представляется имъ на немъ болѣе обезпеченнымъ въ виду того, что химикамъ совсѣмъ не преподается на 1-мъ курсѣ механика, а математика проходится ими въ значительно меньшемъ объемѣ. Наконецъ, въ частности съ инженерно-строительнаго отдѣленія переходятъ на химическое еще потому, что не обладая достаточно искусными руками, оказываются не въ состояніи выполнить требуемыя тамъ болѣе сложныя графическія работы. Такимъ образомъ на химическое отдѣленіе попадаютъ студенты, не обладающіе искусными руками, а извѣстно, что таковыя для химика совершенно необходимы.

Не подлежитъ сомнѣнію, что всѣ такія лица являются для химическаго отдѣленія не только лишнимъ, но и вреднымъ балластомъ, ибо благодаря имъ отказываютъ въ пріемѣ молодымъ людямъ, стремящимся къ химическому знанію, но имѣвшимъ несчастье получить нѣсколько худшія конкурсныя отмѣтки. Для устраненія столь ненормальныхъ явленій имѣю честь предложить ходатайствовать объ обособленіи пріема лицъ на химическое отдѣленіе отъ пріема на другія. На это отдѣленіе должны впредь приниматься только лица, заявившія до конкурса о своемъ желаніи поступить на него. Въ случаѣ если число желающихъ не превысить числа, опредѣленнаго комплектомъ, принимать безъ конкурса, въ противномъ случаѣ допускать къ конкурсу только записавшихся на химическое отдѣленіе. Вмѣстѣ съ тѣмъ слѣдуетъ химиковъ лишить права перехода на другія отдѣленія".

Совѣтъ высказался въ пользу отдѣльныхъ конкурсныхъ экзаменовъ по отдѣленіямъ безъ права каждому поступающему въ студенты держать одновременно испытанія по различнымъ отдѣленіямъ.

За желательность конкурсовъ по Отдѣленіямъ высказались всѣ члены Совѣта единогласно; при чемъ три члена высказались противъ ограниченія поступающимъ въ студенты права держать конкурсные экзамены одновременно по различнымъ отдѣленіямъ.

4. Заключеніе проф. Делоне объ отчетѣ стипендіата Задарновскаго.

5. Вѣдомость о числѣ пропущенныхъ лекцій и практическихъ занятій за 2-е полугодіе 1899/900 уч. года профессорами и преподавателями.

6. Вопросъ о переводѣ студентовъ на высшіе курсы.

Положили: по ст. 1 конкурсные экзамены произвести между 20 и 25 августа письменно по русскому языку, алгебрѣ и геометріи и устно по физикѣ; пригласить въ качествѣ экзаменаторовъ преподавателей Института Эренфейхта, Глясса, Гонтарева и Бернацкаго, лаб. Поспѣлова, преподавателя 4-й мужской гимназіи Бадовскаго и кромѣ того еще одного преподавателя по математикѣ и преподавателя гимназіи по русскому языку по усмотрѣнію г. Директора; по ст. 2 присоединить преподаваніе перспективы къ преподаванію графическихъ искусствъ и поручить одному изъ руководителей черченіемъ или проектами прочесть краткій курсъ перспективы; по ст. 3 по собраніи надлежащихъ справокъ ходатайствовать передъ г. Министромъ о назначеніи отдѣльныхъ конкурсныхъ экзаменовъ по отдѣленіямъ съ правомъ каждому поступающему въ студенты держать экзаменъ только по одному отдѣленію; по ст. 4 отчетъ одобрить; по ст. 5 принять къ свѣдѣнію; по ст. 6 составлены списки а) студентовъ I к. химич. Отд., переведенныхъ на II к., б) студентовъ II к. химич. Отдѣленія, допущенныхъ осенью къ переводнымъ экзаменамъ на III к. по сопротивленію матеріаловъ, в) студентовъ I к. механич. и инжен.-строит. Отдѣленій, которые будутъ переведены на II курсъ только послѣ удовлетворительнаго выполненія лѣтней геодезической практики и г) студентовъ II к. механич. и инжен.-строит. Отдѣленій, которые будутъ переведены на III курсъ только послѣ представленія удовлетворительнаго отчета по строительной практикѣ и выдержанія экзаменовъ для механическаго Отдѣленія по сопротивленію матеріаловъ и деталямъ машинъ, а для инженерно-строительнаго Отдѣленія по сопротивленію матеріаловъ и строительной механикѣ.

Примѣчаніе 1. Студенты I к. всѣхъ трехъ отдѣленій, получившіе одну неудовлетворительную отмѣтку (2) по одному изъ теоретическихъ предметовъ и переведенные на II курсъ, обязаны выдержать экзамены по этому предмету въ имѣющій быть назначеннымъ Совѣтомъ срокъ въ теченіи 1-го полугодія 1900/01 акад. года; не выдержавшіе экзамены по означеннымъ предметамъ не допускаются къ переводнымъ испытаніямъ на III курсъ.

Примѣчаніе 2. Экзамены по сопротивленію матеріаловъ будутъ производиться на механическомъ Отдѣленіи 18 и 19 сентября, на химическомъ отдѣленіи 16 сентября и на инженерно-строительномъ 15 сентября. Экзамены по строительной механикѣ на инженерно-строительномъ отдѣленіи 20 сентября. Экзаменъ по деталямъ машинъ послѣ окончанія чтенія курса.

Прилож. I (къ ст. 4 засѣд. 15 сент. 1899 г.).

Совѣтъ въ засѣданіи своемъ 15 сентября 1899 года установилъ слѣдующій порядокъ въ веденіи практическихъ занятій по графическимъ искусствамъ:

1. Для каждой отдѣльной работы по графическимъ искусствамъ устанавливаются точные сроки, впредь на каждое полугодіе.

2. Тема работы выдается гг. преподавателями въ слѣдующіе часы занятій послѣ подачи предыдущей работы; выдача темы раньше этого срока предоставляется на усмотрѣніе преподавателя и отнюдь для него не обязательна.

3. Студентъ, окончившій работу раньше срока, можетъ, по желанію, сдать ее г. преподавателю; въ этомъ случаѣ на работѣ отмѣчается день сдачи, а сдающій росписывается въ книгѣ поступленія работъ.

4. Въ назначенный по особому росписанію день и часъ студенты сдаютъ свои работы, хотя бы и въ неоконченномъ видѣ г. преподавателю, который и предъявляетъ ихъ въ оцѣночную коммисію.

5. Оцѣночная коммисія состоитъ изъ преподавателя, ведущаго занятія и, по крайней мѣрѣ, двухъ преподавателей рисованія и черченія, подъ предсѣдательствомъ г. Декана отдѣленія. Коммисія собирается въ означенное по росписанію время для пріемки и оцѣнки работъ. Каждая работа отмѣчается штемпелемъ съ числомъ дня собранія коммисіи и словами: „принять въ коммисію"; оцѣнка работъ балломъ заносится въ списокъ, подписываемый предсѣдателемъ и членами коммисіи. Списки хранятся у г. предсѣдателя.

Примѣчаніе 1. Противъ фамиліи студента, работа котораго не была представлена коммисіею, дѣлается отмѣтка: „не было представлено".

Примѣчаніе 2. Въ случаѣ отсутствія предсѣдателя, его мѣсто занимаетъ преподаватель, ведущій занятія.

6. Студенты, не представившіе къ сроку работу, считаются не исполнившими ее. Коммисія не входитъ въ разсмотрѣніе причинъ, помѣшавшихъ студенту представить работу во время и можетъ принять и оцѣнить работу лишь по предложенію Совѣта.

7. Всѣ графическія работы студентовъ, представляемыя послѣ сроковъ, принимаются въ вечерніе часы занятій въ чертежныхъ, на общемъ основаніи, т. е. заносятся въ книгу поступленія, въ которой сдающій расписывается и отмѣчаетъ день сдачи. Принятіе же этихъ работъ въ коммисію для оцѣнки, зависитъ отъ усмотрѣнія Совѣта.

8. Сроки подачъ работъ устанавливаются на общемъ собраніи всѣхъ преподавателей, впредь на каждое полугодіе. Въ случаѣ необходимости, сроки подачъ могутъ быть измѣнены Совѣтомъ, по представленію причинъ измѣненій гг. преподавателями.

9. Работы, исполненныя безъ вѣдома и указаній преподавателей, не принимаются коммисіею. Въ случаѣ надобности, студенту, представившему подобную работу, назначается оцѣночною коммисіею повѣрочное испытаніе, состоящее въ исполненіи студентомъ всей работы или части ея подъ наблюденіемъ преподавателя.

10. Для студентовъ I курса инженерно-строительнаго отдѣленія устанавливается полугодовыя или годовыя испытанія по архитектурному черченію, состоящія въ вычерчиваніи отъ руки и на память одного изъ архитектурныхъ ордеровъ или части его.

11. Для вольнослушателей сроки подачъ необязательны.

Прилож. 2 (къ ст. 4 засѣд. 15 ноября 1899 г.).

ПРАВИЛА
ОБЪ ИЗДАНІИ ИЗВѢСТІЙ
ВАРШАВСКАГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКАГО ИНСТИТУТА
ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II.

---

1. Извѣстія Варшавскаго Политехническаго Института Императора Николая II выходятъ по мѣрѣ накопленія матеріала, но не рѣже 2-хъ разъ въ годъ.

2. Извѣстія Института состоятъ изъ 2-хъ отдѣловъ:

А. Оффиціальнаго, въ которомъ печатаются: 1) сокращенные протоколы засѣданій Совѣта, 2) извлеченія изъ отчетовъ о состояніи и дѣятельности Института и 3) учебные планы и программы преподаванія.

Б. Научнаго и учебнаго, въ которомъ печатаются: 1) научныя статьи профессоровъ, преподавателей и другихъ лицъ, участвующихъ въ учебномъ дѣлѣ Института, 2) сочиненія студентовъ, признанныя достойными напечатанія, 3) отзывы, диссертаціи и медальныя сочиненія, 4) отчеты профессоровъ, преподавателей и другихъ лицъ учебнаго персонала, а также стипендіатовъ о командировкахъ и порученіяхъ, 5) какъ приложенія могутъ печататься учебники, диссертаціи и объемистыя научныя сочиненія.

Примѣчаніе. Все печатаемое въ Извѣстіяхъ должно быть одобрено Совѣтомъ.

3. Авторамъ работъ, напечатанныхъ въ отдѣлѣ Б, выдается по 50 оттисковъ.

4. Фотографіи, рисунки и политипажи къ сочиненіямъ, печатаемымъ въ Извѣстіяхъ, изготовляются съ возможнымъ соблюденіемъ экономіи. Возможно точное исчисленіе расхода на эти статьи сообщается предварительно при представленіи сочиненія Отдѣленію и Совѣту.

Примѣчаніе. Общій годовой расходъ на фотографіи, рисунки и политипажи изъ средствъ Извѣстій не долженъ превышать 500 рублей. Поэтому весь излишекъ расходовъ на изготовленіе болѣе роскошныхъ фотографій, рисунковъ и политипажей относится или на счетъ авторовъ, или же, если Отдѣленіе признаетъ необходимымъ, на средства Отдѣленія.

5. Количество печатаемыхъ экземпляровъ Извѣстій опредѣляется ежегодно Совѣтомъ.

6. Лица, принадлежащія къ служебному персоналу Института, получаютъ по одному экземпляру Извѣстій безплатно.

7. Веденіе дѣлъ по изданію Извѣстій поручается редактору, избираемому Совѣтомъ изъ преподавательскаго состава.

8. Редакторъ получаетъ за свой трудъ вознагражденіе изъ спеціальныхъ средствъ Института, размѣръ котораго опредѣляется Совѣтомъ и Правленіемъ.

Прилож. 3 (къ ст. 9 засѣд. 28 февраля 1900 г.).

Временныя правила для студентовъ

ВАРШАВСКАГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКАГО ИНСТИТУТА

ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II

по строительной практикѣ лѣтомъ 1900 года.

---

1. Для студентовъ инженерно-строительнаго и механическаго отдѣленій, переходящихъ со II на III курсъ, назначается въ теченіи іюня и іюля мѣсяцевъ обязательная строительная практика.

2. Студенты, невыполнившіе строительной практики или непредставившіе удовлетворительнаго отчета по ней, не переводятся на III курсъ.

3. Цѣль строительной практики заключается въ ознакомленіи на мѣстѣ работъ съ практическими пріемами строительнаго искусства.

4. Степень участія въ такихъ работахъ каждаго практиканта заключается во первыхъ въ наблюденіи за послѣдовательнымъ процессомъ возведенія сооруженія во всѣхъ его деталяхъ, а во вторыхъ въ непосредственномъ участіи въ тѣхъ элементахъ работы, гдѣ требуется приложеніе теоретическихъ познаній: въ разбивкѣ въ натурѣ сооруженія и его отдѣльныхъ частей, въ повѣркѣ правильности работы, въ заготовленіи рабочихъ чертежей и шаблоновъ, въ разработкѣ деталей, въ веденіи технической отчетности и т. п.

5. Въ удостовѣреніе участія въ строительной практикѣ, практиканты представляютъ въ Институтъ (лично или по почтѣ), не позже 10 августа, отчетъ о практическихъ занятіяхъ и удостовѣреніе отъ оффиціальнаго лица, завѣдующаго постройкою, въ томъ, что практикантъ находился на работахъ и принималъ въ нихъ участіе въ теченіе положеннаго времени.

6. Отчетъ долженъ представлять собою изложеніе тѣхъ прак-

тическихъ свѣдѣній, которыя получилъ практикантъ на работахъ. Отчетъ состоитъ: 1) изъ описанія работъ, 2) изъ чертежей, эскизовъ и рисунковъ, поясняющихъ текстъ. Описаніе касается, прежде всего, общаго назначенія сооруженія, соотношенія его частей, общаго хода работъ и проч., а затѣмъ и мелкихъ деталей работы, особенно тѣхъ, которыя выходятъ за предѣлы обычныхъ пріемовъ построенія.

7. Чертежи, эскизы и рисунки должны быть сняты самостоятельно съ натуры и представлять оригинальную компановку; исключеніе могутъ составлять копіи на калькѣ общихъ (проектныхъ) чертежей, которые должны быть приложены къ первой части отчета (назначеніе сооруженія, соотношеніе его частей и проч.).

8. Въ видахъ единообразія представляемыхъ отчетовъ, практикантамъ предлагается руководствоваться слѣдующими указаніями относительно внѣшней его формы: 1) Детальные чертежи или эскизы должны имѣть форматъ въ $^1/_4$ листа ватманской бумаги и могутъ быть выполнены въ карандашѣ на клѣтчатой бумагѣ того же размѣра; масштабъ для чертежей или эскизовъ предпочтительно метрическій; число листовъ детальныхъ чертежей не меньше четырехъ. 2) Форма текста отчета—обыкновенная писчая бумага, сшитая въ тетрадь въ размѣрѣ цѣлаго листа.

НАУЧНЫЙ И УЧЕБНЫЙ ОТДѢЛЫ.

О приведенiи Абелевыхъ интеграловъ къ ультраэллиптическимъ интеграламъ перваго класса.

Дмитрія Мордухай-Болтовского.

§ 1. Одной изъ наиболѣе интересныхъ задачъ теоріи Абелевыхъ интеграловъ является задача о приведеніи этихъ интеграловъ къ нисшимъ трансцендентнымъ. Но изслѣдованія въ этомъ направленіи настолько же трудны, насколько интересны. Даже вопросъ о приведеніи Абелевыхъ интеграловъ къ логариѳмамъ или вопросъ о такъ называемомъ интегрированіи въ конечномъ видѣ далеко не исчерпанъ. Прекрасныя изслѣдованія Льювиля, Абеля, Чебышева, Золотарева и другихъ, преимущественно русскихъ, математиковъ относятся къ Абелевымъ интеграламъ типа $\int F_n(\sqrt[n]{R(x)}, x)\,dx$, гдѣ F раціональная функція $\sqrt[n]{R(x)}$ и x, а R цѣлый полиномъ. Изслѣдованіе же общаго типа Абелевыхъ интеграловъ представляетъ такія неимовѣрныя трудности, что въ этомъ направленіи сдѣланы наукой только первые шаги. Не будучи пока въ силахъ справиться со всѣми трудностями этихъ вопросовъ, математики, такъ сказать, перешагнули черезъ нихъ, занявшись изслѣдованіями еще болѣе общаго характера о приведеніи Абелевыхъ интеграловъ къ эллиптическимъ и даже, общѣе, Абелевыхъ интеграловъ одного порядка къ Абелевымъ интеграламъ другого, нисшаго порядка. Имѣющіяся въ этой области изслѣдованія носятъ довольно отрывочный характеръ и относятся почти исключительно къ приведенію Абелевыхъ интеграловъ 1-го рода къ эллиптическимъ интеграламъ. Въ этомъ направленіи работали Абель, Пикаръ, Гурса, Кенигсбергеръ, Ковалевская и другіе[1]). Впрочемъ Кенигсбергеръ пошелъ дальше. Въ статьѣ: „Ueber die Reduction Abelscher Integrale auf niedere Integralformen specielle auf elliptische Integrale“[2]), онъ находитъ наиболѣе общую форму выраженія Абелеваго интеграла черезъ другіе Абелевы интегралы, логариѳмы и алгебраическія функціи и такимъ образомъ обобщаетъ результаты, полученные Льювилемъ и Абелемъ.

А именно формула Кенигсбергера слѣдующая:

$$\begin{aligned}\int F(x,y)\,dx = A_1 \sum_{i=1}^{i=p_1} \int \Phi_1\left(\xi_1^{(i)}\eta_1^{(i)}\right) d\xi_1^{(i)} + \\ + A_2 \sum_{i=1}^{i=p_2} \int \Phi_2\left(\xi_1^{(i)}\eta_1^{(i)}\right) d\xi_1^{(i)} + \cdots\cdots \\ \cdots\cdots + A_\mu \sum_{i=1}^{i=p\mu} \int \Phi_\mu\left(\xi_\mu^{(i)}\eta_\mu^{(i)}\right) d\xi_\mu^{(i)} + \\ + B_1 lg V_1 + B_2 lg V_2 + \cdots B_\nu lg V_\nu + U,\end{aligned} \tag{1}$$

гдѣ Абелевы интегралы

$$I = \int F(x,y)\,dx$$

---

[1]) *Abel* Précis d'une théorie des fonctions elliptiques стр. 549, Oeuvres т. I.

Picard Sur la reduction du nombre de periodes... Bulletin de la Société mathématique t. XI p. 25.

Koenigsberger. Ueber die Reduction hyperélliptischer Integrale. auf elliptische. B. 85. 1878 годъ стр. 273.

Poincaré Sur la reduction des intégrales abéliennes. Bulletin de la Société mathématique t. XII p. 174.

Kowalevska. Ueber die Reduction einer bestimmten klasse abelscher integrale 3-te ranges auf elliptische integrale. Acta Mat. B. IV p. 394.

Goursat Sur la reduction des intégrales hyperelliptiques Bulletin t. XIII p. 147.

[2]) Journal de Crelle B. 89 1880 г. стр. 89.

$$I_1 = \int \Phi_1(\xi_1, \eta_1)\, d\xi_1$$

$$I_2 = \int \Phi_2(\xi_2, \eta_2)\, d\xi_2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$I\mu = \int \Phi\mu(\xi_\mu, \eta_\mu)\, d\xi_\mu$$

порядковъ $p_1 \cdot p_2 \cdots p_\mu$ относятся къ кривымъ

$$\begin{gathered} f(x, y) = 0 \\ \varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0 \\ \varphi_2(\xi_2, \eta_2) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_\mu(\xi_\mu, \eta_\mu) = 0 \end{gathered}$$

$A_1 A_2 \cdots A_\mu$, $B_1, B_2 \cdots B_\nu$ постоянныя.
$U, V_1 V_2 \cdots V_\nu$ раціональныя функціи x, y

$$\begin{gathered} \xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \cdots \xi_1^{(p_1)} \\ \xi_2^{(1)}, \xi_2^{(2)} \cdots \xi_2^{(p_2)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \xi_\mu^{(1)}, \xi_\mu^{(2)} \cdots \xi_\mu^{(p\mu)} \end{gathered}$$

алгебраическія функціи отъ x, опредѣляемыя уравненіями

$$\begin{gathered} \xi_1^{p_1} + \varphi_{11}(x,y)\xi_1^{p_1-1} + \varphi_{12}(x,y)\,\xi_1^{p_1-2} + \cdots \varphi_{1 p_1}(x,y) = 0 \\ \xi_2^{p_2} + \varphi_{21}(x,y)\,\xi_2^{p_2-1} + \varphi_{22}(x,y)\,\xi_2^{p_2-2} + \cdots \varphi_{2 p_2}(x,y) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \xi_\mu^{p\mu} + \varphi_{\mu 1}(x,y)\,\xi_\mu^{p\mu-1} + \varphi_{\mu 2}(x,y)\,\xi_\mu^{p\mu-2} + \cdots \varphi_{\mu, p\mu}(x,y) = 0 \end{gathered} \tag{2}$$

въ которыхъ коэффиціенты:

$$\varphi_{11}(x,y), \varphi_{12}(x,y) \cdots \varphi_{\mu, p\mu}(x,y)$$

раціональныя функціи x, y.

Кромѣ того

$$\begin{gathered} \eta_1^{(i)} = \psi_1(\xi_1^{(i)}, x, y) \\ \eta_2^{(i)} = \psi_2(\xi_2^{(i)}, x, y) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \eta_\mu^{(i)} = \psi_\mu(\xi_\mu^{(i)}, x, y) \end{gathered} \tag{3}$$

гдѣ ψ_j означаетъ раціональную функцію отъ $\xi_j^{(i)}, x, y$.

Кенигсбергеръ доказываетъ въ той же статьѣ слѣдующую замѣчательную теорему.

Въ случаѣ приведенія интеграла I къ интеграламъ $I_1, I_2 \cdots I_\mu$, логариѳмамъ и алгебраическимъ функціямъ, должны имѣть мѣсто условія:

$$\sum_{i=1}^{i=pj} \int \omega_{j1}(\xi_j^{(i)}, \eta_j^{(i)})\, d\xi_j^{(i)} = \int \Omega_{j1}(x,y)\, dx$$

$$\sum_{i=1}^{i=pj} \int \omega_{j2}(\xi_j^{(i)}, \eta_j^{(i)})\, d\xi_j^{(i)} = \int \Omega_{j2}(x,y)\, dx$$

(4) $$\begin{array}{c} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

$$\sum_{i=1}^{i=pj} \int \omega_{jpj}(\xi_j^{(i)}, \eta_j^{(i)})\, d\xi_j^{(i)} = \int \Omega_{jpj}(x,y)\, dx,$$

гдѣ

$$\int \omega_{j2}(\xi_j, \eta_j)\, d\xi_j, \int \omega_{j2}(\xi_j, \eta_j)\, d\xi_j \cdots \int \omega_{j\overline{p}j}(\xi_j, p_j)\, d\xi_j$$

$$\varphi_j(\xi_j, \eta_j) = 0,$$

а

$$\int \Omega_{j1}(x,y)dx, \int \Omega_{j2}(x,y)\, dx \cdots \int \Omega_{jpj}(x,y)\, dx$$

тѣже интегралы 1-го рода, по относящимся къ кривой

$$f(x, y) = 0$$

На основаніи этой теоремы Кенигсбергера мы можемъ получить нѣкоторыя необходимыя (но не достаточныя) условія приведены (1), замѣнивъ рѣшеніе общаго вопроса частнымъ, а, именно, вопросомъ о приведеніи Абелевыхъ интеграловъ 1-го рода къ Абелевымъ интеграламъ 1-го же рода.

На основаніи той же теоремы Кенигсбергера задача о выраженіи Абелева интеграла 1-го рода черезъ нѣсколько эллиптическихъ интеграловъ сводится къ задачѣ о выраженіи одного Абелева интеграла черезъ одинъ эллиптическій интегралъ т. е. къ отысканію такой раціональной функціи $\xi = \varphi(x, y)$ отъ x и y которая бы удовлетворяла условію.

$$\int F(x,y)\,dx = A\int\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} \tag{5}$$

Такимъ же образомъ задача о выраженіи Абелева интеграла 1-го рода черезъ ультраэллиптическія интегралы 1 класса т. е. зависящія отъ корня квадратнаго изъ полинома шестой степени, сводится къ отысканію такихъ функцій ξ, η отъ x, y, которыя, опредѣляясь уравненіемъ

$$\xi^2+\varphi(x,y)\,\xi+\psi(x,y)=0, \tag{6}$$

вмѣстѣ съ тѣмъ удовлетворяли условіямъ

$$\begin{aligned}\int F_1(x,y)\,dx &= \int\frac{\alpha\xi+\beta}{\sqrt{\xi(1-\xi)(1-\varkappa^2\xi)(1-\lambda^2\xi)(1-\mu^2\xi)}}\,d\xi+\\ &+\int\frac{\alpha\eta+\beta}{\sqrt{\eta(1-\eta)(1-\varkappa^2\eta)(1-\lambda^2\eta)(1-\mu^2\eta)}}\,d\eta\\ \int F_2(x,y)\,dx &= \int\frac{\gamma\xi+\delta}{\sqrt{\eta(1-\xi)(1-\varkappa^2\xi)(1-\lambda^2\xi)(1-\mu^2\xi)}}\,d\xi+\\ &+\int\frac{\gamma\eta+\delta}{\sqrt{\eta(1-\eta)(1-\varkappa^2\eta)(1-\lambda^2\eta)(1-\mu^2\eta)}}\,d\eta.\end{aligned} \tag{7}$$

Далекія отъ мысли дать полное рѣшеніе этого вопроса, мы въ настоящей статьѣ, желаемъ только указать нѣкоторыя свойства интеграловъ, для которыхъ возможно подобное приведеніе и указать на нѣкоторую связь, которая существуетъ между изслѣдуемой задачей и задачей о комплексномъ умноженіи ультраэллиптическихъ интеграловъ 1-го класса подобно тому, какъ это сдѣлалъ для эллиптическихъ функцій Кенигсбергеръ въ своей статьѣ: „Ueber eine Beziehung der complexen Multiplication der elliptischen Integrale zur Reduction gewisser Klassen Abelscher Integrale auf elliptische“ [1]) и въ другой нами упомянутой уже статьѣ Абелевыми интегралами типа

$$\int F(x,\sqrt[n]{R})\,dx,$$

гдѣ $\sqrt[n]{R(x)}=\sqrt[n]{(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\cdots(x-a_\rho)^{m_\rho}}$

гдѣ η и $m_1, m_2\cdots m_\rho$ не имѣютъ общаго дѣлителя.

[1]) Journal de Crelle 1879 г. 86-ой томъ стр. 317.

Интегралъ перваго рода въ этомъ случаѣ можетъ быть представленъ въ формѣ.

$$\int \psi_1(x)\sqrt[n]{R(x)}dx + \int \psi_2(x)(\sqrt[n]{R(x)})^2 dx + \cdots \int \psi_{n-1}(x)(\sqrt[n]{R(x)})^{n-1}dx$$

гдѣ $\psi_1(x), \psi_2(x) \cdots\cdots \psi_{n-1}(x)$ раціональныя функціи отъ x.

Такъ что уравненія (7) въ этомъ случаѣ принимаютъ видъ:

$$\int \varphi_1(x)\sqrt[n]{R(x)}dx + \int \varphi_2(x)(\sqrt[n]{R(x)})^2 dx + \cdots\cdots \int \varphi_{n-1}(x)(\sqrt[n]{R(x)})^{n-1}dx =$$
$$= \int \frac{\alpha\xi+\beta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}d\xi + \int \frac{\alpha\eta+\beta}{\sqrt{\Theta(\eta)}}d\eta.$$

(8)

$$\int \psi_1(x)\sqrt[n]{R(x)}dx + \int \psi_2(x)(\sqrt[n]{R(x)})^2 dx + \cdots\cdots \int \psi_{n-1}(x)(\sqrt[n]{R(x)})^{n-1}dx =$$
$$= \int \frac{\gamma\xi+\delta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}d\xi + \int \frac{\gamma\eta+\delta}{\sqrt{\Theta(\eta)}}d\eta$$

гдѣ

(9)
$$\Theta(\xi) = \xi(1-\xi)(1-\varkappa^2\xi)(1-\lambda^2\xi)(1-\mu^2\xi)$$
$$\Theta(\eta) = \eta(1-\eta)(1-\varkappa^2\eta)(1-\lambda^2\eta)(1-\mu^2\eta).$$

Въ частномъ же случаѣ

(10)
$$\int \varphi_r(x)(\sqrt[n]{R(x)})^r dx = \int \frac{\alpha\xi+\beta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}d\xi + \int \frac{\alpha\eta+\beta}{\sqrt{\Theta(\eta)}}d\eta$$
$$\int \psi_s(x)(\sqrt[n]{R(x)})^s dx = \int \frac{\gamma\xi+\delta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}d\xi + \int \frac{\gamma\eta+\delta}{\sqrt{\Theta(\eta)}}d\eta.$$

§ 2. Въ этомъ случаѣ, какъ мы ниже увидимъ для n существуютъ ограниченія, n можетъ равняться только слѣдующимъ числамъ:

2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12.

Вмѣстѣ съ тѣмъ мы покажемъ связь, которая существуетъ между вопросомъ объ опредѣленіи значеній показателя n приведеніи (10) и комплекснымъ умноженіемъ ультраэллиптическихъ интеграловъ 1-го класса. Вообразимъ, что перемѣнное x, выйдя изъ какой либо точки, обходитъ точку a_1 — k разъ, a_2 — k_2 разъ $\cdots a_\rho$ — k_ρ разъ и затѣмъ возвращается въ ту же точку. Черезъ это $\sqrt[n]{R(x)}$ пріобрѣтаетъ множитель

$$\gamma = e^{\frac{2\pi i}{n}(k_1 m_1 + k_2 m_2 + \dots k\rho\, m\rho)},$$

который, вслѣдствіе сдѣланнаго предположенія относительно чиселъ k_1, $m_2 \cdots m_\rho$, а именно, что они не общихъ дѣлителей съ n, при надлежащихъ значеніяхъ $k_1, k_2 \cdots k_\rho$ можетъ равняться

$$\gamma = e^{\frac{2\pi i}{n}} \tag{11}$$

первообразному корню уравненія

$$y^n = 1 \tag{12}$$

Тогда лѣвыя части уравненія (10) пріобрѣтутъ множители

$$\begin{aligned} \alpha_r &= e^{\frac{2\pi r i}{n}} = \gamma^r \\ \beta_s &= e^{\frac{2\pi s i}{n}} = \gamma^s \end{aligned} \tag{13}$$

равныя тоже корнямъ двучленнаго уравненія (12).

При этомъ въ первыхъ частяхъ уравненій (10) алгебраическія функціи ξ и η перейдутъ въ другія алгебраическія функціи ξ' и η', опредѣляемыя уравненіемъ

$$\xi'^2 + \varphi(x, \gamma \sqrt[n]{R(x)})\xi^2 + \psi(x, \gamma \sqrt[n]{R(x)}) = 0, \tag{14}$$

если ξ опредѣлялось уравненіемъ

$$\xi^2 + \varphi(x, \sqrt{R(x)})\,\xi + \psi\,(x, \sqrt{R(x)}) = 0, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \alpha_r \int \varphi_r(x) \left(\sqrt[n]{R(x)}\right)^r dx &= \int \frac{\alpha\xi' + \beta}{\sqrt{\Theta(\xi')}}\, d\xi' + \int \frac{\alpha\eta' + \beta}{\sqrt{\Theta(\eta')}} d\eta' \\ \beta_s \int \psi_s(x) \left(\sqrt[n]{R(x)}\right)^s dx &= \int \frac{\gamma\xi' + \beta}{\sqrt{\Theta(\xi')}}\, d\xi' + \int \frac{\gamma\eta' + \delta}{\sqrt{\Theta(\eta')}} d\eta' \end{aligned} \tag{16}$$

Сравнивая уравненія (10) и (16) получаемъ

$$\begin{aligned} \int \frac{\alpha\xi' + \beta}{\sqrt{\Theta(\xi')}} d\xi' + \int \frac{\alpha\eta' + \beta}{\sqrt{\Theta(\eta')}} d\eta' &= \alpha_r \left(\int \frac{\alpha\xi + \beta}{\sqrt{\Theta(\xi)}} d\xi + \int \frac{\alpha\eta + \beta}{\sqrt{\Theta(\eta)}} d\eta \right) \\ \int \frac{\gamma\xi' + \delta}{\sqrt{\Theta(\xi')}} d\xi' + \int \frac{\gamma\eta' + \delta}{\sqrt{\Theta(\eta')}} d\eta' &= \alpha_s \left(\int \frac{\gamma\xi + \delta}{\sqrt{\Theta(\xi)}} d\xi + \int \frac{\gamma\eta + \beta}{\sqrt{\Theta(\eta)}} d\eta \right) \end{aligned} \tag{17}$$

отсюда слѣдуетъ, что α_r и α_s суть такія числа, при которыхъ возможно комплексное умноженіе ультраэллиптическихъ интеграловъ 1-го класса.

Уравненія (17) напишемъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$(18)\quad \begin{aligned} &\int_{\xi'_0}^{\xi'}\frac{\alpha\xi'+\beta}{\sqrt{\Theta(\xi')}}d\xi'+\int_{\eta'_0}^{\eta'}\frac{\gamma\eta'+\beta}{\sqrt{\Theta(\eta')}}d\eta'=\alpha_r\left(\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{\alpha\xi+\beta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}d\xi+\int_{\eta_0}^{\eta}\frac{\alpha\eta+\beta}{\sqrt{\Theta(\eta)}}d\eta\right)=u \\ &\int_{\xi'_0}^{\xi'}\frac{\gamma\xi'+\delta}{\sqrt{\Theta(\xi')}}d\xi'+\int_{\eta'_0}^{\eta'}\frac{\gamma\eta'+\delta}{\sqrt{\Theta(\eta')}}d\eta'=\alpha_s\left(\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{\gamma\xi+\delta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}d\xi+\int_{\eta_0}^{\eta}\frac{\gamma\eta+\delta}{\sqrt{\Theta(\eta)}}d\eta\right)=v, \end{aligned}$$

откуда

$$(19)\quad \begin{aligned} \xi\eta&=\lambda(u,v) \\ \xi+\eta&=\mu(u,v) \end{aligned}$$

$$(20)\quad \begin{aligned} \xi'\eta'&=\lambda'(u,v) \\ \xi'\eta'&=\mu'(u,v) \end{aligned}$$

будутъ опредѣляться какъ Абелевы функціи съ системами періодовъ

$$\begin{matrix} \omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3 \\ v_0, v_1, v_2, v_3 \end{matrix}$$

для $\lambda\ (u,v)$, $\mu\ (u,v)$ и

$$\begin{matrix} \Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \\ V_0, V_1, V_2, V_3 \end{matrix}$$

для $\lambda'\ (u,v)$, $\mu'\ (u,v)$ причемъ

$$(21)\quad \begin{matrix} \Omega_0=\alpha_r\,\omega_0,\ \Omega_1=\alpha_r\,\omega_1\ \ \Omega_2=\alpha_r\,\omega_2\ \ \Omega_3=\alpha_r\,\omega_3 \\ V_0=\alpha_s\,v_0,\ V_1=\alpha_s\,v_1,\ V_2=\alpha_s\,v_2,\ V_3=\alpha_s\,v_3 \end{matrix}$$

Положимъ, что между Абелевыми функціями (19) и (20) или, что тоже между (ξ,η) и (ξ',η') существуетъ алгебраическая зависимость

$$\begin{aligned} &\Phi(\lambda(u,v),\mu(u,v),\lambda'(u,v),\mu'(u,v))=0 \\ &\Psi(\lambda(u,v),\mu(u,v),\lambda'(u,v),\mu'(u,v))=0, \end{aligned}$$

тогда одной системѣ значеній $\lambda'(u,v)\ \mu'(u,v)$ должно соотвѣтствовать конечное число значеній $\lambda(v,u)$, $\mu(u,v)$. Прибавляемъ къ аргументамъ u, v кратныя періодовъ

$$Mo\,\Omega o,\ Mo\,Vo,$$

тогда черезъ это значенія $\lambda'(u,v)=\lambda'(u+M_0v_0,\ v+M_0v_0)$ и $\mu'(u,v)=$ $=\mu'(u+M_0u_0,\ v+M_0v_0)$ не измѣняется, функціи же $\lambda(u,v)$ и $\mu(u,v)$ примутъ значенія

$$\lambda(u+M_0U_0,\ v+M_0V_0)$$
$$\mu(u+M_0U_0,\ v+M_0V_0).$$

Очевидно придавая M_0 различныя значенія получимъ для нѣкоторой пары значеній M_0 : $M_0=M_0'$ и $M_0=M_0''$.

$$\lambda(u+M_0'U_0,\ v+M_0'V_0)=\lambda(u+M_0''U_0,\ v+M_0''V_0)$$
$$\mu(u+M_0'U_0,\ v+M_0'V_0)=\mu(u+M_0''U_0,\ v+M_0''V_0),$$

ибо въ противномъ случаѣ получили безконечное число значеній $\lambda(u,v)$, $\mu(u,v)$ для одной пары значеній $\lambda'(u,v)$ и $\mu'(u,v)$. Слѣдовательно

$$(M_0''-M_0')U_0=a_0u_0+a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3$$
$$(M_0''-M_0')V_0=a_0v_0+a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3,$$

гдѣ a_0, a_1, a_2, a_3 цѣлыя числа.

Замѣняя $(U_0,\ V_0)$ черезъ $(U_1,\ V_1)$, $(U_2,\ V_2)$ и $(U_3,\ V_3)$, получаемъ три другія пары подобныхъ соотношеній, принимая же во вниманіе соотношенія (21), приводимъ ихъ къ виду

$$\begin{aligned}\alpha_r m_0\omega_0 &= a_0\omega_0+a_1\omega_1+a_2\omega_2+a_3\omega_3\\ \alpha_r m_1\omega_1 &= b_0\omega_0+b_1\omega_1+b_2\omega_2+b_3\omega_3\\ \alpha_r m_2\omega_2 &= c_0\omega_0+c_1\omega_1+c_2\omega_2+c_3\omega_3\\ \alpha_r m_3\omega_3 &= \partial_0\omega_0+\partial_1\omega_1+\partial_2\omega_2+\partial_3\omega_3\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\alpha_s m_0v_0 &= a_0v_0+a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3\\ \alpha_s m_1v_1 &= b_0v_0+b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3\\ \alpha_s m_2v_2 &= c_0v_0+c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3\\ \alpha_s m_3v_3 &= \partial_0v_0+\partial_1v_1+\partial_2v_2+\partial_3v_3\ ,\end{aligned} \tag{23}$$

въ которыхъ

$$\begin{gathered}m_0,\ m_1,\ m_2,\ m_3\\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3\\ b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3\\ c_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3\\ \partial_0,\ \partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3\end{gathered}$$

суть цѣлыя числа.

Замѣтимъ, что, пользуясь соотношеніемъ между періодами двухъ интеграловъ

$$\Omega_0 V_3 - \Omega_3 V_0 + \Omega_1 V_2 - \Omega_2 V_1 = 0\,,$$

можно вывести нѣкоторыя необходимыя соотношенія [1]) между коэффиціентами a, b, c, ∂:

$$(24)\qquad \begin{aligned} a_0 d_1 - d_0 a_1 + b_0 c_1 - c_0 b_1 &= 0 \\ a_0 d_2 - d_0 a_2 + b_0 c_2 - c_0 b_2 &= 0 \\ a_0 d_3 - d_0 a_3 + b_0 c_3 - c_0 b_3 &= a_1 d_2 - d_1 a_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 \\ a_1 d_3 - d_1 a_3 + b_1 c_3 - c_1 b_3 &= 0 \\ a_2 d_3 - d_2 a_3 + b_2 c_3 - c_2 b_3 &= 0 \end{aligned}$$

Исключая изъ уравненій (22) и (23):

$$\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$$
$$v_0,\ v_1,\ v_2,\ v_3,$$

получаемъ, что α_r и α_s должны удовлетворять одному уравненію съ раціональными коэффиціентами:

$$\begin{vmatrix} a_0 - m_0 y & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 - m_1 y & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 - m_2 y & c_3 \\ \partial_0 & \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 - m_3 y \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(25)\qquad l_0 y^4 + l_1 y^3 + l_2 y^2 + l_3 y + l_4 = 0,$$

гдѣ l_0, l_1, l_2, l_3, l_4 цѣлыя числа.

Но эти же числа α_r, α_s вмѣстѣ съ тѣмъ удовлетворяютъ двучленному уравненію:

$$(12)\qquad y^n = 1.$$

Болѣе того, каждый изъ нихъ, какъ мы сейчасъ покажемъ, может предполагать первообразнымъ корнемъ этого уравненія. Это будетъ доказано, если докажемъ, что каждая изъ паръ:

$$(r, n)$$
$$(s, n)$$

---

[1]) *Hermite*. Sur la théorie de la transformations des fonctions abeliennes. Comptes rendus за 1885 г. Tome 10 p. 249.

есть пара взаимнопростыхъ чиселъ. Замѣтимъ прежде всего, что мы можемъ считать (r, s, n) взаимнопростыми, ибо въ противномъ случаѣ, т. е. когда

$$\begin{aligned} \nu &= dr_1 \\ s &= ds_1 \\ n &= dn_1 \\ d &> 1 \end{aligned}$$

систему уравненій (10) можно замѣнить болѣе простой, ей равносильной

$$\int \varphi_r(x) \left(\sqrt[n_1]{R(x)}\right)^{r_1} dx = \int \frac{\alpha\xi+\beta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}\, d\xi + \int \frac{\alpha\eta+\beta}{\sqrt{\Theta(\eta)}}\, d\eta$$

$$\int \psi_s(x) \left(\sqrt[n_1]{R(x)}\right)^{s_1} dx = \int \frac{\gamma\xi+\delta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}\, d\xi + \int \frac{\gamma\eta+\delta}{\sqrt{\Theta(\eta)}}\, d\eta$$

Но при этомъ предположеніи, каждая изъ упомянутыхъ паръ есть взаимно простая пара. Въ самомъ дѣлѣ получимъ:

$$\begin{aligned} n &= d'n' \\ \nu &= d'r' \\ d' &= D(n, r) > 1 \\ n &= d''n'' \\ s &= d''s'' \\ d'' &= D(n, s) > 1 \end{aligned} \tag{26}$$

Первое изъ уравненій (10) будетъ

$$\int \varphi_r(x) \left(\sqrt[n']{R(x)}\right)^{r'} dx = \int \frac{\alpha\xi+\beta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}\, d\xi + \int \frac{\alpha\eta+\beta}{\sqrt{\Theta(\eta)}}\, d\eta \tag{27}$$

Примѣняя упомянутую въ § 1 теорему Кенигсбергера къ $\int F(x, \sqrt[n']{R(x)})dx$, должны имѣть совмѣстно съ равенствомъ (27) еще слѣдующее

$$\int \left[\chi_1(x) \sqrt[n']{R(x)} + \chi_2(x) \left(\sqrt[n']{R(x)}\right)^2 + \cdots \chi n-1(x) \left(\sqrt[n']{R(x)}\right)^{n'-1} \right] dx =$$

$$= \int \frac{\gamma\xi+\delta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}\, d\xi + \int \frac{\gamma\eta+\delta}{\sqrt{\Theta(\eta)}}\, d\eta\,, \tag{28}$$

гдѣ въ новой части стоитъ интегралъ перваго рода, въ которомъ $\chi_1(x)$, $\chi_2(x) \cdots\cdots \chi_{n-1}(x)$ раціональныя функціи отъ x. Сравнивая это уравненіе (28) со вторымъ системы (12) или съ ему равносильнымъ, на основаніи соотношеній (26):

$$(29)\qquad \int \psi_s(x)\left(\sqrt[n'']{R(x)}\right)^{s''} dx = \int \frac{\gamma\xi+\delta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}\, d\xi + \int \frac{\gamma\eta+\delta}{\sqrt{(\Theta\eta)}}\, d\eta$$

получаемъ тождественно

$$\psi_s(x)\left(\sqrt[n'']{R(x)}\right)^{s''} = \chi_1(x)\sqrt[n']{R(x)} + \chi_2(x)\left(\sqrt[n']{R(x)}\right)^2 + \cdots \chi_{n-1}\left(\sqrt[n']{R(x)}\right)^{n}$$

или, полагая

$$\sqrt[n'n'']{R(x)} = p$$

$$(30)\qquad \chi_1(x)p^{n''} + \chi_2(x)p^{2n''} + \cdots \chi_{n-1}(x)p^{(n'-1)n''} - \psi_s(x)p^{s''n'} = 0\,.$$

Если $s''n'$ не равно ни одному изъ чиселъ въ ряду: $n'', 2n'' \cdots (n'-1)n''$, то это тождество предполагаетъ:

$$\begin{aligned} \chi_1(x) &= 0 \\ \chi_2(x) &= 0 \\ . \quad . \quad &. \quad . \quad . \\ \chi_{n-1}(x) &= 0 \\ \psi_s(x) &= 0 \end{aligned}$$

Въ этомъ случаѣ уравненія (10) принимаютъ видъ:

$$(31)\qquad \begin{aligned} \int \varphi_r(x)\left(\sqrt[n']{R(x)}\right)^{r'} dx &= \int \frac{\alpha\xi+\beta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}\, d\xi + \int \frac{\alpha\eta+\beta}{\sqrt{\Theta(\eta)}}\, d\eta \\ 0 &= \int \frac{\gamma\xi+\delta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}\, d\xi + \int \frac{\gamma\eta+\delta}{\sqrt{\Theta(\eta)}}\, d\eta \end{aligned}$$

при которомъ пару (s'', n'') можемъ замѣнить парой (s', n'), гдѣ s' произвольное цѣлое положительное число, а пара (n', r') пара взаимно простыхъ чиселъ.

Если же числа $s''n'$ равно kn'' т. е. $s''n'$ дѣлится на n'', то такъ какъ s'' число взаимнопростое съ n'', то n' дѣлится на n'', такъ что

$$n' = qn''\,.$$

Откуда

$$\frac{n}{d'} = g\,\frac{n}{d''}$$
$$d'' = gd'$$

На основаніи этого уравненія (26) даютъ

$$n = d'n'$$
$$r = d'r'$$
$$n = d'gn''$$
$$s = d'gs''$$

Если, теперь, d' отлично отъ единицы, то числа (n, r, s) имѣютъ общій наибольшій дѣлитель, что противно условію. Такимъ образомъ

$$d' = 1$$

и пара (n, r) есть пара двухъ взаимнопростыхъ чиселъ. Такимъ же образомъ убѣдимся, что

$$d'' = 1$$

т. е. что пара (n, s) тоже пара двухъ взаимнопростыхъ чиселъ.

Какъ извѣстно первообразныя корни двучленнаго уравненія (12), опредѣляются неприводимымъ[1]) уравненіемъ

$$y^{\mu} + \lambda_1 y^{\mu-1} + \lambda_2 y^{\mu-2} + \cdots \lambda_{\mu-1} y + \lambda_{\mu} = 0 \qquad (32)$$

съ цѣлыми коэффиціентами, причемъ степень его

$$\mu = \varphi(n), \qquad (33)$$

гдѣ $\varphi(n)$ число чиселъ, меньшихъ n и взаимнопростыхъ съ n.

Такимъ образомъ уравненія (25) и (32), изъ которыхъ послѣднее неприводимо, имѣютъ общій корень (въ настоящемъ случаѣ ихъ даже два α_r и α_s). Но тогда, какъ извѣстно степень уравненія (32) меньше степени уравненія (25) : $\mu \leqq 4$ и

$$(l_0 y^4 + l_1 y^3 + l_2 y^2 + l_3 y + l_4) = (y^{\mu} + \lambda_1 y^{\mu-1} + \cdots \lambda_{\mu})\,(y^{\nu} + k_1 y^{\nu-1} + \cdots k_{\nu}),$$

гдѣ $l_0, k_1 \cdots k_1$ цѣлыя числа.

---

[1]) *Weber*. Lehrbuch der Algebra B. I стр. 596.

Такимъ образомъ приведеніе (10) является возможнымъ только при значеніяхъ n, удовлетворяющихъ условію

$$\varphi(n) \leqq 4$$

или

(34) $$(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1})(p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2-1})\cdots(p_m^{\alpha_m} - p_m^{\alpha_m-1}) \leqq 4$$

Изъ этого условія вытекаетъ, что

$$1 \leqq p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1} \leqq 4$$

или

(35) $$1 \leqq p_1^{\alpha_1-1}(p_1 - 1) \leqq 4$$

что можетъ быть лишь при условіяхъ

(36) $$1 \leqq p_1 - 1 \leqq 4$$

(37) $$1 \leqq p_1^{\alpha_1-1} \leqq 4.$$

Неравенство (36) даетъ для p_1 только три слѣдующія значенія:

$$p_1' = 2, \; p_1'' = 3, \; p_1''' = 5.$$

Неравенство (37) даетъ для каждаго изъ этихъ значеній p_1, соотвѣтствующія значенія α_1:

Для $p'_1 = 2$: $\alpha'_{11} = 1$, $\alpha'_{12} = 2$, $\alpha'_{13} = 3$.

При этихъ значеніяхъ α, неравенство (35) тоже удовлетворено.

Для $p''_1 = 3$, неравенство (37) даетъ для α_1 значенія:

$$\alpha''_{11} = 1, \; \alpha''_{12} = e,$$

но второе значеніе не удовлетворяетъ (35) и должно быть отброшено.

Для $p'''_1 = 5$, получаемъ только одно значеніе для α_1, согласное съ неравенствами (37) и (35).

$$\alpha'''_{11} = 1$$

Въ этомъ случаѣ, когда

(38) $$n = p_1^{\alpha_1}$$

неравенство (34) обращается въ (35) и мы, слѣдовательно, получаемъ для этого случая только слѣдующія значенія n:

$$n = 2,\; 2^2,\; 2^3,\; 3,\; 5 \;\text{ т. е. }\; 2,\; 4,\; 8,\; 3,\; 5.$$

Если

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}, \tag{39}$$

то каждое изъ чиселъ p_1, p_2 удовлетворяетъ неравенству (35), такъ что значенія для (p_1, α_1) и (p_2, α_2) должно искать только среди найденныхъ нами выше системъ, причемъ должны принять только тѣ, для которыхъ

$$(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1})(p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2 - 1}) \leqq 4.$$

Таковы будутъ только слѣдующія системы:

$$\begin{aligned} &p_1 = 2,\ \alpha_1 = 1,\ p_2 = 3,\ \alpha_2 = 1 - n = 6 \\ &p_1 = 2,\ \alpha_1 = 1,\ p_2 = 5,\ \alpha_2 = 1 - n = 10 \\ &p_1 = 2,\ \alpha_1 = 1,\ p_2 = 3,\ \alpha_2 = 1 - n = 12 \end{aligned} \tag{40}$$

Остаются еще только числа типа

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3},$$

но легко видѣть, что среди выше найденныхъ системъ (p, α), удовлетворяющихъ условій (35), нѣтъ такихъ, которыя бы удовлетворяли условію (34) при $m=3$ т. е. условію

$$(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1})(p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2 - 1})(p_3^{\alpha_3} - p_3^{\alpha_3 - 1}) \leqq 4.$$

Такимъ образомъ этотъ случай не даетъ рѣшеній.

§ 3. Одновременное приведеніе двухъ интеграловъ типа

$$\int \varphi(x) \left(\sqrt[n]{R(x)}\right)^r dx,$$

гдѣ $\varphi(x)$ раціональная функція къ ультраэллиптическимъ интеграламъ перваго класса есть частный случай приведенія (10) для $\xi = \eta$, когда уравненіе (10) обращается въ слѣдующія

$$\begin{aligned} &\int \varphi_r(x) \left(\sqrt[n]{R(x)}\right)^r dx = 2 \int \frac{\alpha\xi + \beta}{\sqrt{\Theta(\xi)}} d\xi \\ &\int \psi_s(x) \left(\sqrt[n]{R(x)}\right)^s dx = 2 \int \frac{\gamma\xi + \delta}{\sqrt{\Theta(\xi)}} d\xi . \end{aligned} \tag{41}$$

Очевидно при этомъ ни $\varphi_r(x)$ ни $\psi_s(x)$ тождественно не равны нулю, ибо въ противномъ случаѣ приведеніе это теряло бы смыслъ.

Положимъ

$$\xi = \frac{ay+b}{cy+d}, \tag{42}$$

тогда

$$\frac{\alpha\xi+\beta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}\,d\xi = (ad-bc)\,\frac{(a\alpha+c\beta)y+(b\alpha+d\beta)}{\sqrt{Q(y)}}\,dy$$

$$\frac{\gamma\xi+\delta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}\,d\xi = (ad-bc)\,\frac{(a\gamma+c\delta)y+(b\gamma+d\delta)}{\sqrt{Q(y)}}\,dy$$

гдѣ

$$Q(y) = A_0(y-a_1)(y-a_2)(y-a_3)(y-a_4)(y-a_5)(y-a_6) \tag{43}$$

или

$$Q(y) = A_0(y-a_1)(y-a_2)(y-a_3)(y-a_4)(y-a_5) \tag{44}$$

Полагаемъ

$$\begin{aligned} a\alpha+c\beta &= 0 \\ b\gamma+d\delta &= 0. \end{aligned} \tag{45}$$

Если мы подберемъ a, c, b, d удовлетворяющія этимъ условіямъ (45), то при помощи подстановки (42) приведемъ уравненія (41) къ виду:

$$\int \varphi_r(x)\left(\sqrt[n]{R(x)}\right)^r dx = A\int\frac{dy}{\sqrt{Q(y)}}$$

$$\int \psi_s(x)\left(\sqrt[n]{R(x)}\right)^s dx = B\int\frac{y\,dy}{\sqrt{Q(y)}}$$

или къ виду

$$\begin{aligned} \int \varphi_r(x)\left(\sqrt[n]{R(x)}\right)^r dx &= \int\frac{dy}{\sqrt{Q(y)}} \\ \int \psi_s(x)\left(\sqrt[n]{R(x)}\right)^s dx &= \int\frac{y\,dy}{\sqrt{Q(y)}} \end{aligned} \tag{46}$$

или

$$\begin{aligned} \varphi_r(x)\left(\sqrt[n]{R(x)}\right)^r dx &= \frac{dy}{\sqrt{Q(y)}} \\ \psi_s(x)\left(\sqrt[n]{R(x)}\right)^s dx &= \frac{y\,dy}{\sqrt{Q(y)}} \end{aligned} \tag{47}$$

откуда, дѣля второе равенство почленно на первое, выводимъ

$$y=\frac{\psi_s(x)}{\varphi_r(x)}R^{\frac{s-r}{n}}=\Phi(x)R^{\frac{s-r}{n}}, \tag{48}$$

гдѣ $\Phi(x)$ раціональная функція отъ x.

Отсюда получаемъ

$$dy=\left[\left(\frac{\psi'_s(x)\varphi_r(x)-\psi'_s(x)\varphi'_r(x)}{\varphi_r^2(x)}\right)R^{\frac{s-r}{n}}+\frac{\psi_s(x)}{\varphi_r(x)}R^{\frac{s-r}{n}-1}R'\right]dx=$$

$$=\left(\frac{\Phi'(x)R(x)+\Phi(x)R'(x)}{R(x)}\right)R^{\frac{s-r}{n}}dx=L(x)R^{\frac{s-r}{n}}dx, \tag{49}$$

гдѣ $L(x)$ раціональная функція отъ x.

Подставляя же этотъ результатъ въ первое уравненіе системы (47), получаемъ

$$\sqrt{Q(x)}=\frac{dy}{\varphi_r(x)\left(\sqrt[n]{R(x)}\right)^r}=\frac{L(x)}{\varphi_r(x)}R^{\frac{s-2r}{n}}dx=\Psi(x)R^{\frac{s-2r}{n}}dx, \tag{50}$$

гдѣ $L(x)$ раціональная функція отъ x.

Изъ полученныхъ такимъ образомъ уравненій:

$$y=\Phi(x)R^{\frac{s-r}{n}} \tag{48}$$

$$\sqrt{Q(x)}=\Psi(x)R^{\frac{s-2r}{n}} \tag{50}$$

слѣдуетъ, что, по замѣнѣ $\sqrt[n]{R(x)}$ на $\gamma\sqrt[n]{R(x)}$, гдѣ γ первообразный корень двучленнаго уравненія

$$\gamma^n=1, \tag{12}$$

одновременно переходятъ

$$y \text{ въ } \gamma^{s-r} y$$

$$\sqrt{Q(y)} \text{ въ } \gamma^{s-2r} \sqrt{Q(y)}$$

$$Q(y) \text{ въ } \gamma^{2s-4r} Q(y).$$

Такимъ образомъ

(51) $$Q(\omega y) = \gamma^{2s-4r} Q(y),$$

гдѣ

$$\omega = \gamma^{s-r}.$$

Сравнивая въ тождествѣ (51) коэффиціенты въ обѣихъ частяхъ при y^6, если $Q(y)$ 6-ой степени, получаемъ

$$\gamma^{2(r-2s)} = 1,$$

откуда

$$2(r-2s) = nk$$

или

(52) $$2r \equiv 4s \,(mod n)$$

Если $Q(y)$ полиномъ пятой степени (что будетъ если одинъ изъ корней $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ равенъ ∞), то сравнивая коэффиціенты при y^5 въ обѣихъ частяхъ тождества (51) получаемъ

$$\gamma^{r-3s} = 1,$$

откуда

(53) $$r \equiv 3s \,(mod n).$$

Равенство (51) въ первомъ случаѣ можетъ быть представлено въ видѣ:

(54) $$Q(\omega y) = \omega^6 Q(y),$$

во второмъ случаѣ въ видѣ:

$$Q(\omega y) = \omega^5 Q(y). \tag{55}$$

Когда

$$\underline{n = 2},$$

то для (r, s) имѣетъ одну пару значеній $(1,1)$, которая удовлетворяетъ, какъ условію (52), такъ и условію (53). Въ этомъ случаѣ

$$\omega = \gamma^{s-r} = 1$$

Условія (54) и (55) обращаются въ тождество

$$Q(y) = Q(y),$$

не дающее никакихъ указаній относительно $Q(y)$.

Въ случаѣ $\underline{n = 3}$ условіе (52) обращается въ слѣдующее

$$r \equiv 2s \,(mod\, 3). \tag{56}$$

Среди паръ $(1,1)$ $(1,2)$ $(2,1)$ $(2,2)$ только двѣ $(1,2)$ $(2,1)$ удовлетворяютъ условію. При этихъ значеніяхъ (r, s) ω имѣетъ значенія, равныя

$$\omega' = \gamma$$
$$\omega'' = \gamma^{-1}$$

первообразнымъ корнямъ уравненія

$$\omega^3 = 1.$$

Въ случаѣ полинома 6-ой степени, имѣемъ

$$Q(\omega y) = Q(y). \tag{57}$$

Если

$$Q(y) = A_0 y^6 + A_1 y^5 + A_2 y^4 + A_3 y^3 + A_2 y^2 + A_1 y + A_0,$$

то $$Q(\alpha y) = A_0 y^6 + \alpha^5 A_1 y^5 + \alpha^4 A_2 y^4 + \alpha^3 A_3 y^3 + \alpha^2 A_2 y^2 + \alpha A_1 y + A_0 \tag{58}$$

$$Q(\alpha^2 y) = A_0 y^6 + \alpha^{10} A_1 y^5 + \alpha^8 A_2 y^4 + \alpha^6 A_3 y^3 + \alpha^4 A_2 y^2 + \alpha^2 A_1 y + A_0.$$

Такъ какъ на основаніи (57)

$$Q(y) = {}^1/_3\,[Q(y)+Q(\omega y)+Q(\omega^2 y)],$$

то, подставляя сюда значенія $Q(y)$, $Q(\omega y)$, $Q(\omega^2 y)$ изъ системы (58), получимъ

$$(59)\qquad Q(y) = A_0 y^6 + A_3 y^3 + A_0 = A_0(y^3-\omega_0{}^3)\,(y^3-\omega^3{}_1)$$

Полиномъ $Q(y)$ нельзя предполагать 5-ой степени, ибо условіе (53) предполагала бы дѣлимость r на $n=3$ и числа (n, r) не были бы взаимнопростыя числа.

Такимъ образомъ, если для $n=3$ приведеніе (41) или, что тоже, (46) возможно, то оно возможно въ слѣдующей болѣе спеціальной формѣ:

$$(60)\qquad \begin{aligned} \int \varphi_r(x)\left(\sqrt[3]{R(x)}\right)^r dx &= \int \frac{dy}{\sqrt{A(y^3-\omega^3{}_0)(y^3-\omega^3{}_1)}} \\ \int \psi_s(x)\left(\sqrt[3]{R(x)}\right)^s dx &= \int \frac{y\,dy}{\sqrt{A(y^3-\omega^3{}_0)(y^3-\omega^3{}_1)}}, \end{aligned}$$

гдѣ $r=1$, $s=2$ или, обратно, $r=2$, $s=1$.

При

$$\underline{n=4}$$

$Q(y)$ слѣдуетъ предполагать только 5-ой степени, ибо условіе (52) въ этомъ случаѣ даетъ

$$r = 2s\,(mod\,2),$$

откуда слѣдуетъ, что r дѣлится на 2 и числа (r, n) не взаимнопростыя числа.

Изъ 4 паръ (1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3) удовлетворяютъ условію (53) только двѣ (1, 3) и (3, 1).

Значенія ω, соотвѣтствующія имъ:

$$\omega' = \gamma^2$$
$$\omega'' = \gamma^{-2}$$

не первообразные корни уравненія

$$\omega^4 = 1,$$

но первообразные корни уравненія

$$\omega^2 = 1,$$

такъ что

$$\omega' = -1, \quad \omega'' = -1.$$

Тогда условіе (55) обращается въ слѣдующее

$$Q(-y) = -Q(y).$$

откуда

$$Q(y) = A_0 y^5 + A_1 y^3 + A_2 y = A_0 y(A_0 y^4 + A_1 y^2 + A_2)$$

или

$$Q(y) = A_0 y(y^2 - \omega^2_0)(y^2 - \omega^2_1) \qquad (61)$$

Такимъ образомъ для $n=4$, получаютъ слѣдующую форму для преобразованія (46):

$$\int \varphi_r(x) \left(\sqrt[4]{R(x)}\right)^r dx = \int \frac{dy}{\sqrt{A_0 y(y^2-\omega_0^2)(y^2-\omega_1^2)}}$$
$$\int \psi_s(x) \left(\sqrt[4]{R(x)}\right)^s dx = \int \frac{y\,dy}{\sqrt{A_0 y(y^2-\omega_0^2)(y^2-\omega_1^2)}}. \qquad (62)$$

гдѣ $r=1$, $s=3$ или, обратно $r=3$, $s=1$.

При

$$\underline{n=5}$$

изъ паръ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4.1), (4,2), (4,3), (4,4) условію (52), въ настоящемъ случаѣ обращающемуся въ слѣдующее условіе

$$r \equiv 2s \,(mod\, 5),$$

удовлетворяютъ только пары:

$$(1,3),\ (2,1)\ \text{и}\ (3,4),$$

для которыхъ ω принимаетъ значенія:

$$\omega' = \gamma^{-2}$$

$$\omega'' = \gamma^{-1}$$

$$\omega''' = \gamma\ ,$$

равныя первообразнымъ корнямъ уравненія

$$\omega^5 = 1.$$

Соотношенія (54) даютъ въ этомъ случаѣ

$$Q(\omega y) = \omega\, Q(y)$$

или

$$(\omega y^4)\, Q(\omega y) = y^4\, Q(y);$$

откуда

$$S(y) = y^4\, Q(y) = Ay^{10} - By^5$$
$$Q(y) = (Ay^5 - B)$$

Положивъ

$$z = \frac{\sqrt[s]{A}}{\sqrt[s]{B}}\, y$$

приводимъ уравненія (46) къ виду

$$\int \varphi_r(x) \left(\sqrt[5]{R(x)}\right)^r dx = C \int \frac{dz}{\sqrt{z(z^5-1)}}$$

(63)

$$\int \psi_s(x) \left(\sqrt[5]{R(x)}\right)^s dx = D \int \frac{z\,dz}{\sqrt{z(z^5-1)}},$$

гдѣ для r, s возможны только три пары значеній: $(r=1,\ s=3)$, $(r=2,\ s=1)$ и $(r=3,\ s=4)$.

Для случая же полинома 5-ой степени условію (53) въ настоящемъ случаѣ условію:

$$r \equiv 3s \,(mod\, 5)$$

удовлетворяютъ только 3 пары:

(1,2), (3,1), (4,3) для которыхъ значенія ω будутъ

$$\omega' = \gamma$$

$$\omega'' = \gamma^{-2}$$

$$\omega''' = \gamma^{-1}$$

первообразныя корни уравненія

$$\omega^5 = 1.$$

Условіе (55):

$$Q(\omega y) = \omega^5 Q(y)$$

или

$$Q(\omega y) = Q(y)$$

даетъ

$$Q(y) = Ay^5 - B.$$

Полагая

$$z = \frac{\sqrt[5]{Ay}}{\sqrt[5]{B}},$$

получимъ приведенія (46) въ слѣдующей формѣ:

$$\left.\begin{aligned} \int \varphi_r(x) \left(\sqrt[5]{R(x)}\right)^r dx &= C \int \frac{dz}{\sqrt{z^5 - 1}} \\ \int \psi_r(x) \left(\sqrt[5]{R(x)}\right)^s dx &= D \int \frac{z dz}{\sqrt{z^5 - 1}}, \end{aligned}\right\} \quad (64)$$

гдѣ для r, s имѣемъ пары значеній:

$$(r = 1,\ s = 2),\ (r = 3,\ s = 1),\ (r = 4,\ s = 3).$$

Но, очевидно, каждое приведеніе (63) влечетъ за собой приведеніе типа (64), ибо отъ интеграловъ $\int\frac{dz}{\sqrt{z(z^5-1)}}$ и $\int\frac{zdz}{\sqrt{z(z^5-1)}}$ можно перейти къ интеграламъ $\int\frac{dv}{\sqrt{v^5-1}}$ и $\int\frac{vdv}{\sqrt{v^5-1}}$ простой подстановкой $z=\frac{1}{v}$.

Такимъ образомъ, если приведеніе (46) возможно для $n=5$, то оно возможно въ одной изъ формъ (67).

При

$$\underline{n=6}$$

сравненіе (52) замѣняется слѣдующимъ

$$r\equiv 2s \pmod 3),$$

которому изъ паръ (1,1), (1,5), (5,1), (5,5) удовлетворяютъ только двѣ (1,5) и (5,1), при которыхъ ω получаетъ два слѣдующихъ значенія:

$$\omega'=\gamma^1$$
$$\omega''=\gamma^{-4},$$

равныя первообразнымъ корнямъ уравненія

$$\omega^3=1.$$

Такъ что по (54)

$$Q(\omega y)=Q(y),$$

откуда

$$Q(y)=Ay^6+By^3+C=A(y^3-\omega^3{}_0)(y^3-\omega^3{}_1)$$

Полиномъ $Q(y)$ нельзя предполагать 5-ой степени, ибо это предполагало бы общій дѣлитель равный 3 для r и $n=6$.

Такимъ образомъ приведенія (46) представляются для $n=6$ въ формѣ:

$$\int \varphi_r(x)\left(\sqrt[6]{R(x)}\right)^r dx = \int \frac{dy}{\sqrt{A(y^3-\omega_0^3)(y^3-\omega_1^3)}}$$

(65)

$$\int \psi_s(x)\left(\sqrt[6]{R(x)}\right)^s dx = \int \frac{ydy}{\sqrt{A(y^3-\omega_0^3)(y^3-\omega_1^3)}},$$

гдѣ r, s могутъ имѣть только слѣдующія значенія $(r=1,\ s=5)$ или $(r=5,\ s=1)$.

При

$$\underline{n=8}$$

условіе (52) не можетъ быть удовлетворено никакими парами значеній r, s, ибо сравненіе

$$r \equiv 2s \ (mod\ 4)$$

предполагало бы дѣлимость r на 2, множитель $n=8$. Слѣдовательно $Q(y)$ не можетъ быть 6-ой степени. Условіе же (53) или, при $n=8$:

$$r \equiv 3s \ (mod\ 8),$$

удовлетворяется изъ числа паръ:

(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (3,7), (5,1), (5,3), (5,5), (5,7), (7,1), (7,3), (7,5), (7,7)

только 4-мя слѣдующими:

(1,3), (3,1), (5,7), (7,5),

при которыхъ ω имѣетъ слѣдующія значенія

$$\omega' = \gamma^2 \quad \omega'' = \gamma^{-2} \quad \omega''' = \gamma^2 \quad \omega^{(IV)} = \gamma^{-2},$$

первообразныя корни уравненія

$$\omega^4 = 1.$$

Тогда

$$Q(\omega y) = \omega\, Q(y),$$

откуда, какъ и въ случаѣ $n=5$, получаемъ слѣдующія двѣ формы приведенія (46):

(66)
$$\int \varphi_r(x)\left(\sqrt[8]{R(x)}\right)^r dx = C\int \frac{dz}{\sqrt{z(z^4-1)}}$$
$$\int \psi_s(x)\left(\sqrt[8]{R(x)}\right)^s dx = D\int \frac{zdz}{\sqrt{z(z^4-1)}},$$

гдѣ r, s могутъ имѣть только слѣдующія значеній: $(r=1,\ s=3)$, $(r=3,\ s=1)$, $(r=5,\ s=7)$, $(r=7,\ s=5)$.

При

$$\underline{n=10}$$

условію (52), въ настоящемъ случаѣ:

$$r \equiv 2s \pmod 5,$$

изъ паръ:

(1,1), (1,3), (1,7), (1,9), (3,1), (3,3), (3,7), (3,9), (7,1), (7,3), (7,5), (7,7), (7,9), (9,1), (9,3), (9,7), (9,9)

удовлетворяютъ только: (7, 1), (3, 9), (1, 3), (9, 7), при которыхъ ω имѣетъ слѣдующія значенія:

$$\omega' = \gamma^{2} \qquad \omega''' = \gamma^{-6}$$
$$\omega'' = \gamma^{6} \qquad \omega^{(IV)} = \gamma^{-2},$$

равныя первообразнымъ корнямъ уравненія

$$\omega^5 = 1,$$

откуда выводимъ на основаніи (54), что

$$Q(\omega y) = \omega\, Q(y)$$
$$Q(y) = y(Ay^5 - B),$$

и получаемъ приведенія (46) въ формѣ:

$$\int \varphi_r(x)\left(\sqrt[10]{R(x)}\right)^r dx = C\int\frac{dz}{\sqrt{z(z^5-1)}}$$
$$\int \psi_s(x)\left(\sqrt[10]{R(x)}\right)^s dx = D\int\frac{zdz}{\sqrt{z(z^5-1)}}, \tag{67}$$

гдѣ (r, s) имѣютъ только слѣдующія значенія:

$$(r=1,\ s=2),\ (r=3,\ s=9),\ (r=7,\ s=1)\ \text{и}\ (r=9,\ s=7).$$

Условію же (53), въ настоящемъ случаѣ:

$$r \equiv 3s\,(mod\,10),$$

удовлетворяютъ только системы:

$$(r=3,\ s=1),\ (r=9,\ s=3),\ (r=1,\ s=7)\ \text{и}\ (r=7,\ s=9)$$

и легко получить приведенія (46) въ формѣ:

$$\int \varphi_r(x)\left(\sqrt[10]{R(x)}\right)^r dx = C\int\frac{dz}{\sqrt{z^5-1}}$$
$$\int \psi_s(x)\left(\sqrt[10]{R(x)}\right)^s dx = D\int\frac{zdz}{\sqrt{z^5-1}}, \tag{68}$$

гдѣ r, s могутъ имѣть только вышеупомянутыя значенія. Какъ и въ случаѣ $n=5$, каждое приведеніе типа (67) влечетъ приведеніе типа (68) и обратно, такъ что, если приведеніе (46) возможно, то оно должно быть возможно въ формѣ (68).

Наконецъ
при

$$\underline{n=12}$$

условію (52), въ настоящемъ случаѣ:

$$r \equiv \pm 2s \,(mod\, 6),$$

не удовлетворяетъ ни одна пара (r, s), такъ какъ это предполагало бы дѣлимость r на 2, множитель $n = 12$. Такимъ же образомъ условіе

$$r \equiv 3s \,(mod\, 12),$$

не выполнимо, такъ какъ это предполагало бы общій дѣлитель n и r, равный 3.

Такимъ образомъ приведеніе (46) для $n = 12$ невозможно.

§ 4. Остановимся еще нѣсколько подробнѣе на случаѣ, когда $n = 2$. Въ этомъ случаѣ мы получаемъ одновременное приведеніе двухъ ультраэллиптическихъ интеграловъ къ двумъ ультраэллиптическимъ интеграламъ перваго класса въ формѣ:

$$(69)\qquad \begin{aligned} \int \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} &= \int \frac{dy}{\sqrt{Q(y)}} \\ \int \frac{\psi(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} &= \int \frac{y\,dy}{\sqrt{Q(y)}}, \end{aligned}$$

гдѣ уже $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ функціи цѣлыя степени не выше $\overline{p-2}$ ой, если $R(x)$ полиномъ 2-рой или $2\overline{p-1}$-ой степени. Такъ что

$$(70)\qquad \begin{aligned} R(x) &= A_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_{2p}) = \\ &= A_0 x^{2p} + \cdots A_{2p-1}x + A_{2p}, \end{aligned}$$

или

$$(71)\qquad \begin{aligned} R(x) &= A_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{2p-1}) = \\ &= A_0 x^{2p-1} + \cdots A_{2d-2}x + A_{2p-1} \end{aligned}$$

$$\varphi(x) = \varphi_0 x^{p-2} + \varphi_1 x^{p-3} + \cdots \varphi_{p-3}x + \varphi_{p-2}$$

$$\psi(x) = \psi_0 x^{p-2} + \psi_1 x^{p-3} + \cdots \psi_{p-3}x + \psi_{p-2}$$

$$Q(y) = a_0(y-a_1)(y-a_2)(y-a_3)(y-a_4)(y-a_5)(y-a_6)$$

или

$$Q(y) = a_0(y-a_1)(y-a_2)(y-a_3)(y-a_4)(y-a_5).$$

Въ этомъ случаѣ изъ уравненій (48) и (50), получаемъ, такъ какъ $r=s=1$,

$$y = \Phi(x) \tag{72}$$

$$\sqrt{Q(y)} = \frac{\psi(x)}{\sqrt{R(x)}}, \tag{73}$$

гдѣ $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ раціональныя функціи отъ x. Такимъ образомъ приведеніе (69) можетъ совершиться только при помощи раціональной подстановки (72).

Полагая

$$y = \frac{\mu(x)}{\lambda(x)} \tag{74}$$

получаемъ на основаніи уравненія (49)

$$\psi(x) = \frac{\nu(x)}{\lambda^3(x)R(x)}.$$

Тогда уравненіе (73) намъ дастъ

$$\sqrt{Q(y)} = \frac{\nu(x)}{\lambda^3(x)}\sqrt{R(x)}.$$

Подставляя сюда значеніе y (74), имѣемъ для $Q(y)$ полинома 6-ой степени

$$(\mu-a_1\lambda)(\mu-a_2\lambda)(\mu-a_3\lambda)(\mu-a_4\lambda)(\mu-a_5\lambda)(\mu-a_6\lambda) = \nu^2R \tag{75}$$

Это будетъ необходимое условіе приведенія (69).

Если задача ставится объ отысканіи такихъ значеній цѣлыхъ функцій степени $p-2:\varphi(x)$, при которыхъ имѣло бы мѣсто приведеніе (69), то найденное соотношеніе (75) будетъ необходимымъ и достаточнымъ условіемъ существованія рѣшенія. Въ самомъ дѣлѣ, дѣлаемъ въ интегралахъ:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{Q(y)}} \text{ и } \int \frac{ydy}{\sqrt{Q(y)}} \tag{76}$$

подстановку $y = \frac{\mu}{\lambda}$, получаемъ тогда:

$$\int \frac{\mu(\mu'\lambda - \lambda'\mu)dx}{\nu\sqrt{R(x)}} \text{ и } \int \frac{(\mu'\lambda - \mu\lambda')\,dx}{\nu\sqrt{R(x)}},$$

такъ какъ полученные интегралы должны быть перваго рода, то они по сокращеніи приводятся къ виду:

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \text{ и } \int \frac{\psi(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}, \tag{77}$$

гдѣ $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ цѣлыя функціи отъ x.

Мы предполагали $Q(y)$ полиномомъ 6-ой степени, но изслѣдуемую задачу въ случаѣ полинома $Q(y)$ 5-ой степени можно свести на этотъ случай.

Въ самомъ дѣлѣ, подстановкой:

$$y = \frac{az+b}{cz+d}$$

можно свести интегралы (76) къ

$$\int \frac{Az+B}{\sqrt{S(x)}}\, dz,\ \int \frac{Cz+D}{\sqrt{S(z)}}\, dz,$$

гдѣ уже $S(z)$ полиномъ 6-ой степени.

Приведеніе (69) получаемъ тогда въ слѣдующей формѣ

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \int \frac{Az+B}{\sqrt{S(z)}}\, dz$$

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \int \frac{Cz+D}{\sqrt{S(z)}}\, dz,$$

или въ слѣдующей формѣ:

$$\int \frac{\varphi_1(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \int \frac{dz}{\sqrt{S(z)}}$$

$$\int \frac{\psi_1(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \int \frac{zdz}{\sqrt{S(z)}},$$

гдѣ $\varphi(x)$, $\psi(x)$ другія цѣлыя функціи отъ x.

Изслѣдуемая задача о приведеніи (69) равносильна задачѣ о приведеніи ультраэллиптическаго интеграла

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

къ ультраэллиптическому интегралу перваго класса, ибо по упомянутой въ § 1 теоремы Кенигсбергера, если

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{Q(y)}}, \tag{78}$$

или, что тоже,

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \int \frac{\frac{1}{2}\,dy}{\sqrt{Q(y)}} + \int \frac{\frac{1}{2}\,dz}{\sqrt{Q(z)}}$$

причемъ

$$y = z,$$

имѣемъ также, что

$$\int \frac{\frac{1}{2}ydy}{\sqrt{Q(y)}} + \int \frac{\frac{1}{2}zdz}{\sqrt{Q(z)}} = \int F(x, \sqrt{R(x)})\,dx,$$

при тѣхъ же значеніяхъ y и z; $F(x, \sqrt{R(x)})$ раціональная функція отъ x и $\sqrt{R(x)}$, такая, что

$$\int F(x, \sqrt{R(x)})\,dx$$

интегралъ перваго рода. Слѣдовательно этотъ интегралъ равенъ

$$\int \frac{\psi(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

причемъ $\psi(x)$ цѣлая функція $\overline{p}$-2-ой степени и параллельно (78) имѣемъ другое приведеніе

(79) $$\int \frac{\psi(x)\,dx}{\sqrt{(Rx)}} = \int \frac{y\,dy}{\sqrt{Q(y)}}.$$

Слѣдовательно, если $R(x)$ таково, что существуетъ цѣлая функція степени p-2-ой: $\varphi(x)$, при которой имѣетъ мѣсто приведенія (78), то вмѣстѣ съ тѣмъ существуетъ еще другая цѣлая функція $\psi(x)$, при которой имѣетъ еще мѣсто приведеніе (79). Такимъ образомъ условіе (75) будетъ условіемъ необходимымъ и достаточнымъ приведенія (78) или, что тоже, приведенія:

(80) $$\int \frac{\chi(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \int \frac{\alpha+\beta y}{\sqrt{Q(y)}}\,dy,$$

$\chi(x)$ цѣлая функція.

Процессъ нахожденія $\varphi(x)$ или $\chi(x)$ будетъ состоять въ отысканіи λ и μ удовлетворяющихъ условію (75) при различныхъ степеней полинома $\nu(x)$. Первый случай это случай полинома $\nu(x)$ нулевой степени. Тогда по (75) имѣемъ:

(81) $$(\mu-a_1\lambda)(\mu-a_2\lambda)(\mu-a_3\lambda)(\mu-a_4\lambda)(\mu-a_5\lambda)(\mu-a_6\lambda) = R.$$

Замѣтимъ, что можно всегда предполагать, что полиномъ $R(x)$ степени, равной кратному шести. Въ самомъ дѣлѣ, если это не имѣетъ мѣсто, то, полагая

$$x = z^{\omega},$$

гдѣ $\omega = \frac{6}{d}$, d общій наибольшій дѣлитель 6 и показателя степени $R(x)$, мы приведемъ

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

къ

$$\int \frac{f(z)}{\sqrt{T(z)}} dz ,$$

гдѣ $T(z)$ будетъ степени $6q$, $f(z)$ цѣлая функція отъ z. Приведеніе (78) можно тогда замѣнить слѣдующимъ ему равносильнымъ:

$$\int \frac{f(z)d(z)}{\sqrt{T(z)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{Q(y)}} .$$

Обозначая степени λ и μ черезъ l и m, а наибольшее изъ этихъ чиселъ черезъ k, найдемъ это число k. Прежде всего замѣтимъ, что

$$k \geqq q ,$$

ибо, въ противномъ случаѣ, лѣвая часть равенства (81) была бы полиномомъ степени нисшей, чѣмъ правая.

Положимъ теперь, что $k > q$. Если бы въ множителяхъ

$$\left.\begin{matrix} \mu - a_1\lambda \\ \mu - a_2\lambda \\ \mu - a_3\lambda \\ \mu - a_4\lambda \\ \mu - a_5\lambda \\ \mu - a_6\lambda \end{matrix}\right. \tag{82}$$

не сокращались бы коэффиціенты при высшихъ степеняхъ x въ μ и $a_i\lambda$, то лѣвая часть (81) была бы высшей степени, чѣмъ правая.

Поэтому это сокращеніе должно произойти въ одномъ изъ множителей (82).

Если

$$\mu = \mu_k x^k - \mu_{k-1} x^{k-1} + \cdots (-1)^k \mu_0 \tag{83}$$

$$\lambda = \lambda_k x^k - \lambda_{k-1} x^{k-1} + \cdots (-1)^k \lambda_0 , \tag{84}$$

то должны имѣть

$$\mu_k - a_i \lambda_k = 0 , \tag{85}$$

но, очевидно, это можетъ быть только для одного корня a_i, ибо иначе

$$a_i = a_j\ ,$$

чего не можетъ быть при предположеніи, что интегралы (77) перваго рода.

Но при условіи (85), мы имѣли бы на основаніи (81):

$$6k-1 = 6q\ ,$$

а потому соотношеніе (85) не можетъ имѣть мѣсто и $k=q$.

На основаніи разложенія $R(x)$ на множители (70) получаемъ систему уравненій:

$$
(86)\qquad
\begin{aligned}
\mu - a_1\lambda &= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots\cdots(x-\alpha_q)\\
\mu - a_2\lambda &= (x-\alpha_{q+1})(x-\alpha_{q+2})\cdots\cdots(x-\alpha_{2q})\\
\mu - a_3\lambda &= (x-\alpha_{2q+1})(x-\alpha_{2q+2})\cdots\cdots(x-\alpha_{3q})\\
\mu - a_4\lambda &= (x-\alpha_{3q+1})(x-\alpha_{3q+2})\cdots\cdots(x-\alpha_{4q})\\
\mu - a_5\lambda &= (x-\alpha_{4q+1})(x-\alpha_{4q+2})\cdots\cdots(x-\alpha_{5q})\\
\mu - a_6\lambda &= (x-\alpha_{5q+1})(x-\alpha_{5q+2})\cdots\cdots(x-\alpha_{6q})
\end{aligned}
$$

или

$$
(87)\qquad
\begin{aligned}
\mu - a_1\lambda &= x^q - \pi_1^{(1)}x^{q-1} + \pi_2^{(1)}x^{q-2} - \cdots\cdots(-1)^q\pi_q^{(1)}\\
\mu - a_2\lambda &= x^q - \pi_1^{(2)}x^{q-1} + \pi_2^{(2)}x^{q-2} - \cdots\cdots(-1)^q\pi_q^{(2)}\\
\mu - a_3\lambda &= x^q - \pi_1^{(3)}x^{q-1} + \pi_2^{(3)}x^{q-2} - \cdots\cdots(-1)^q\pi_q^{(3)}\\
\mu - a_4\lambda &= x^q - \pi_1^{(4)}x^{q-1} + \pi_2^{(4)}x^{q-2} - \cdots\cdots(-1)^q\pi_q^{(4)}\\
\mu - a_5\lambda &= x^q - \pi_1^{(5)}x^{q-1} + \pi_2^{(5)}x^{q-2} - \cdots\cdots(-1)^q\pi_q^{(5)}\\
\mu - a_6\lambda &= x^q - \pi_1^{(6)}x^{q-1} + \pi_2^{(6)}x^{q-2} - \cdots\cdots(-1)^q\pi_q^{(6)},
\end{aligned}
$$

гдѣ $\pi_1^{(1)}\pi_2^{(1)}\cdots\cdots\pi_q^{(1)}$ основныя симметрическія функціи корней $(\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_q)$, $\pi_1^{(2)}$, $\pi_2^{(2)}\cdots\pi_q^{(2)}$ корней $(\alpha_{q+1}\alpha_{q+2}\cdots\alpha_{2q})\cdots\cdots\pi_1^{(6)}\pi_2^{(6)}\cdots\pi_q^{(6)}$ корней $(\alpha_{5q+1},\ \alpha_{5q+2}\cdots\alpha_{6q})$. Отсюда можно опредѣлить коэффиціенты полиномовъ μ и λ и, кромѣ того, вывести рядъ соотношеній между корнями или, что тоже, коэффиціентами полинома $R(x)$.

Но замѣтимъ, что, если приведеніе (78) возможно при помощи подстановки

$$y = \frac{\mu}{\lambda}\ ,$$

гдѣ μ и λ имѣютъ значенія (83) и (84), то такое же приведеніе интеграла (77) возможно и при помощи болѣе специальной подстановки

$$z = \frac{M}{L}, \tag{88}$$

гдѣ

$$M = x^q - M_1^{(k)} x^{q-1} + M_2^{(k)} x^{q-2} + \cdots\cdots (-1)^q M_q^{(k)} \tag{89}$$

$$L = \qquad L_1^{(k)} x^{q-1} - L_2^{(k)} x^{q-2} + \cdots\cdots (-1)^{q-1} L_q^{(k)}, \tag{90}$$

причемъ

$$L_k^{(k)} = 1, \quad M_k^{(k)} = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если

$$\int \frac{\chi(x)dx}{\sqrt{R(x)}} = \int \frac{\alpha + \beta y}{\sqrt{Q(y)}} dy, \tag{80}$$

то, полагая $z = \frac{ay+b}{cy+d}$, получимъ, очевидно, такое же приведеніе того же ультраэллиптическаго интеграла къ ультраэллиптическому интегралу перваго класса

$$\int \frac{\chi(x)dx}{\sqrt{R(x)}} = \int \frac{A+Bz}{\sqrt{s(z)}} dz.$$

Если, теперь, положить:

$$\begin{aligned} a\lambda_q + b\mu_q &= 1 \\ a\lambda_k + b\mu_k &= 0 \\ c\lambda_q + \partial\mu_q &= 0 \\ c\lambda_k + \partial\mu_k &= 1, \end{aligned} \tag{91}$$

то получимъ z въ формѣ (88). Найти же числа удовлетворяющія системѣ (91) всегда можно, для нѣкотораго значенія k, ибо въ противномъ случаѣ имѣли бы

$$\frac{\lambda_q}{\mu_q} = \frac{\lambda_{q-1}}{\mu_{q-1}} = \cdots = \frac{\lambda_0}{\mu_0} \text{ и } z = \text{const}.$$

Замѣняя въ системѣ (87) λ и μ на L и M получаемъ 6 уравненій типа

$$x^q - M_1^{(k)}x^{q-1} + M_2^{(k)}x^{q-2} - \cdots (-1)_q M_q^{(k)} - a_i\left(L_1^{(k)}x^{q-1} - L_2^{(k)}x^{q-2} + \cdots (-1)^{q-1}L_q^{(k)}\right)$$
$$= (x-\alpha_{(i-1)q+1})(x-\alpha_{(i-1)q+2})\cdots(x-\alpha_{iq}).$$

Откуда, приравнивая коэффиціенты при степеняхъ x, имѣемъ:

$$\begin{aligned}
L_1^{(k)}a_i + M_1^{(k)} &= \pi_1^{(i)}\\
L_2^{(k)}a_i + M_2^{(k)} &= \pi_2^{(i)}\\
\ldots\ldots\ldots&\\
L_{k-1}^{(k)}a_i + M_{k-1}^{(k)} &= \pi_{k-1}^{(i)}\\
a_i \qquad &= \pi_k^{(i)}\\
L_{k+1}^{(k)}a_i + M_{k+1}^{(k)} &= \pi_{k+1}^{(i)}\\
\ldots\ldots\ldots&\\
L_q^{(k)}a_i + M_q^{(k)} &= \pi_q^{(i)},
\end{aligned}$$

исключая же a_i, получаемъ систему уравненій для опредѣленія коэффиціентовъ полиномовъ L и M:

$$(92)\qquad \begin{aligned}
L_1^{(k)}\pi_k^{(i)} + M_1^{(k)} &= \pi_1^{(i)}\\
L_2^{(k)}\pi_k^{(i)} + M_2^{(k)} &= \pi_2^{(i)}\\
\ldots\ldots\ldots&\\
\ldots\ldots\ldots&\\
L_{k-1}^{(k)}\pi_k^{(i)} + M_{k-1}^{(k)} &= \pi_{k-1}^{(i)}\\
L_{k+1}^{(k)}\pi_k^{(i)} + M_{k+1}^{(k)} &= \pi_{k+1}^{(i)}\\
\ldots\ldots\ldots&\\
L_q^{(k)}\pi_k^{(i)} + M_q^{(k)} &= \pi_q^{(i)}.
\end{aligned}$$

А именно изъ двухъ уравненій для $i=1$, $i=2$ получаемъ:

$$(93)\qquad L_e^{(k)} = \frac{\pi_e^{(1)} - \pi_e^{(2)}}{\pi_k^{(1)} - \pi_k^{(2)}}$$

$$(94)\qquad M_e^{(k)} = \frac{\pi_k^{(1)}\pi_e^{(2)} - \pi_k^{(2)}\pi_e^{(1)}}{\pi_k^{(1)} - \pi_k^{(2)}}.$$

Можемъ опредѣлять $L_i^{(k)}$. $M_i^{(k)}$ изъ другихъ паръ уравненій для $i=1$, $i=3$, $i=1$, $i=4$ и т. д. Приравнивая эти значенія, получаемъ условныя уравненія, которымъ должны удовлетворять корни (или, что тоже, коэффиціенты) полинома R. Эти соотношенія проще всего можно найти, исключая изъ системы уравненій:

$$\begin{aligned} L_r^{(k)}\pi_k^{(1)}+M_r^{(k)} &= \pi_r^{(1)} \\ L_r^{(k)}\pi_k^{(2)}+M_r^{(k)} &= \pi_r^{(2)} \\ L_r^{(k)}\pi_k^{(s)}+M_r^{(k)} &= \pi_r^{(s)}, \end{aligned} \tag{95}$$

гдѣ $s=3, 4, 5, 6$, $r=1, 2, 3\cdots\overline{k-1}, \overline{k+1}\cdots q$, коэффиціенты $L_r^{(k)}$ и $M_r^{(k)}$. Тогда получаемъ искомыя соотношенія въ слѣдующей формѣ:

$$\begin{vmatrix} 1 & \pi_k^{(1)} & \pi_r^{(1)} \\ 1 & \pi_k^{(2)} & \pi_r^{(2)} \\ 1 & \pi_k^{(3)} & \pi_r^{(3)} \end{vmatrix} = 0, \tag{96}$$

гдѣ $s=3, 4, 5, 6$, $r=1, 2, 3\cdots\overline{k-1}, \overline{k+1}\cdots q$, такъ что всѣхъ условій будетъ

$$4(q-1).$$

Такимъ образомъ, если при какой либо группировки $6q$ корней на 6 группъ по q въ каждой, имѣютъ мѣсто соотношенія (96), то

$$\int\frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{R(x)}},$$

при нѣкоторой цѣлой функціи $\varphi(x)$, приводится къ ультраэллиптическому интегралу перваго класса. Эти условныя уравненія можемъ привести къ другой формѣ, раціональной относительно коэффиціентовъ полинома $R(x)$. Обозначимъ лѣвую часть уравненія (96) черезъ $\Delta_r^{(s)}(1)$ при одной группировкѣ корней, черезъ $\Delta_r^{(s)}(2)$ при другой и т. д. Очевидно число такихъ группировокъ N равно одной шестой числа сочетаній изъ $6q$ элементовъ по q т. е.

$$N=\frac{1}{6}\,\frac{6q(6q-1)(6q-2)\cdots(5q+1)}{1.2.3.4.5.6} \tag{97}$$

Условіе (96) можно написать въ такомъ видѣ:

$$\Delta_r^{(s)}(1)\Delta_r^{(s)}(2)\cdots\cdots\Delta_r^{(s)}(N) = 0 \tag{98}$$

для $s = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ r = 1,\ 2,\ 3\cdots\overline{k-1},\ \overline{k+1}\cdots q$.

Лѣвая часть уравненія (98) будетъ уже симметрическая функція корней: $\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots\alpha_{6q}$, а потому раціональная функція $D_r^{(s)}(A_1,\ A_2\cdots A_{6q})$ коэффиціентовъ полинома $R(x)$, и мы будемъ имѣть

$$D_r^{(s)}(A_1,\ A_2\cdots A_{6q}) = 0\,. \tag{99}$$

За этимъ случаемъ переходимъ къ случаямъ, высшей степени $\nu(x)$. Если степень $\nu(x)$ есть n, то очевидно, по (75)

$$6q+2n = 6k\,,$$

откуда n должно дѣлиться на 3 т. е. $n = 3r$. Наименьшее значеніе n послѣ нуля будетъ при $r = r_1 = 1$. Условіе (81) въ этомъ случаѣ замѣняется слѣдующимъ

$$(\mu-a_1\lambda)(\mu-a_2\lambda)(\mu-a_3\lambda)(\mu-a_4\lambda)(\mu-a_5\lambda)(\mu-a_6\lambda) =$$
$$= (x-\beta_1)^2(x-\beta_2)^2(x-\beta_3)^2R(x)$$

или, полагая,

$$R_1(x) = (x-\beta_1)^2(x-\beta_2)^2(x-\beta_3)^2R(x) =$$
$$= (x-\beta_1)^2(x-\beta_2)^2(x-\beta_3)^2(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{6q})$$

слѣдующимъ

$$(\mu-a_1\lambda)(\mu-a_2\lambda)(\mu-a_3\lambda)(\mu-a_4\lambda)(\mu-a_5\lambda)(\mu-a_6\lambda) = R_1(x)\,. \tag{100}$$

Отсюда, полагая опять

$$\begin{aligned} \lambda &= L = {}^{q_1} - M_1^{(k)}x^{q_1-1} + \cdots (-1)^{q_1}M_{q_1}^{(k)} \\ \mu &= M = \qquad L_1^{(k)}x^{q_1-1} - \cdots (-1)^{q_1}L_{q_1}^{(k)}, \end{aligned} \tag{101}$$

гдѣ $q_1 = q+1$, опредѣлимъ коэффиціенты L и M и получимъ для нихъ выраженія (93) и (94), но гдѣ уже $\pi_1^{(1)},\ \pi_2^{(1)}\cdots\pi_q^{(6)}$ означаютъ основныя симметрическія функціи не q корней $R(x)$, а q_1 корней $R_1(x)$ т. е. $\beta_1, \beta_1, \beta_2, \beta_2, \beta_3, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2\cdots\alpha_{6q}$; кромѣ того получимъ условныя уравненія между этими корнями, числомъ $4(q_1-1)=4q$, исключая же изъ нихъ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, получимъ $4q-3$ соотношеній между корнями (или, что тоже, между коэффиціентами) полинома $R(x)$. Какъ выше для случая $n=0$, мы можемъ ихъ привести къ виду

$$D'(A_1, A_2 \cdots A_{6q}) = 0, \tag{102}$$

гдѣ D' раціональная функція отъ $A_1 A_2 \cdots A_{6q}$. Полагая $r=2$, $q_2=q+2$, получаемъ, вмѣсто уравненія (100), слѣдующее

$$(\mu-a_1\lambda)(\mu-a_2\lambda)(\mu-a_3\lambda)(\mu-a_4\lambda)(\mu-a_5\lambda)(\mu-a_6\lambda)=R_2(x), \tag{103}$$

гдѣ

$$R_2(x)=(x-\beta_1)^2(x-\beta_2)^2(x-\beta_3)^2(x-\beta_4)^2(x-\beta_5)^2(x-\beta_6)^2R(x). \tag{104}$$

Находимъ такимъ же образомъ

$$\lambda = L \text{ и } \mu = M\,,$$

гдѣ L, M вида (101) и еще $4(q_2-1)=4q+4$ уравненій между β и α, исключая же $\beta_1\beta_2\cdots\beta_6$ получаемъ $4q-2$ соотношеній между корнями (или коэффиціентами) $R(x)$

$$D''(A_1 A_2 \cdots A_{6q}) = 0 \tag{105}$$

D'' опять раціональная функція $A_1 A_2 \cdots A_{6q}$. Продолжая такимъ образомъ далѣе, получимъ для нѣкотораго значенія r,

$$4q+4(r-1)$$

условій

$$D(A_1 A_2 \cdots A_{6q}) = 0\,. \tag{106}$$

Такимъ образомъ съ возрастаніемъ степени подстановки

$$y=\frac{M}{L}\,,$$

число условій для приведенія ультраэллиптическаго интеграла къ ультраэллиптическому интегралу 1 класса все возрастаетъ. Въ этомъ состоитъ существенное отличіе изслѣдуемаго приведенія отъ приведенія ультраэллиптическаго интеграла къ эллиптическому, при которомъ число условій не зависитъ отъ степени подстановки, отчего при этомъ послѣднемъ приведеніи получается безконечный процессъ, между тѣмъ какъ при изслѣдуемомъ приведеніи процессъ конеченъ и продолжается лишь до тѣхъ поръ пока число условій (106) меньше числа коэффиціентовъ $(A_1, A_2 \cdots A_{6q})$ т. е. пока

$$r < \frac{3q+2}{2}.$$

Это можетъ быть доказано еще слѣдующими соображеніями:

Въ самомъ дѣлѣ для того, чтобы интегралъ

$$\int \frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{R(x)}} = \int \frac{(M'L-L'M)Mdx}{\sqrt{R(x)}}$$

былъ интеграломъ перваго рода, какъ это нами предполагается, необходимо, чтобы степень полинома въ числителѣ подъинтегральной функціи:

$$(M'L-L'M)M$$

равная по (89) и (90) $2q_1-2+q_1-1=3q_1-3=3q+3r-3$ была меньше $\frac{6q}{2}-1=3q-1$, откуда получаемъ

$$r < \frac{3q+2}{2},$$

такъ что степень подстановки не должна превосходить нѣкотораго числа, а потому и число пробъ въ изслѣдуемомъ процессѣ должно быть конечно.

Вмѣсто того, чтобы приводить интегралъ

$$\int \frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$$

въ случаѣ, когда $R(x)$ степени

$$6q-2v=2(3q-v),$$

гдѣ

$$0 \leqq v < 3$$

къ

$$\int \frac{\omega(z)dz}{\sqrt{S(z)}},$$

гдѣ уже $S(z)$ степени $6q$, какъ мы указали выше, проще поступать слѣдующимъ образомъ. Условіе (75) даетъ въ настоящемъ случаѣ

$$6k = 6q - 2v + 2n\ ,$$

если n степень полинома $\nu(x)$.

Наименьшее значеніе $n = v$. Уравненіе (75) представляетъ въ слѣдующемъ видѣ

$$(\mu - a_1\lambda)(\mu - a_2\lambda)(\mu - a_3\lambda)\,\mu - a_4\lambda)(\mu - a_5\lambda)(\mu - a_6\lambda) = R_1(x) \qquad (107)$$

полагая

$$R_1(x) = (x-\gamma_1)^2(x-\gamma_2)^2 \cdots (x-\gamma_v)^2 R(x) \qquad (108)$$

$$v(x) = (x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\cdots(x-\gamma_v)\,. \qquad (109)$$

Тогда въ правой части уравненія (107) будетъ полиномъ степени $6q$. Поступая также какъ въ случаѣ уравненія (81), выводимъ $4(q-1)$ соотношеній, между $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{6q}$, $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\cdots\gamma_v$. Откуда исключая $\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_v$ приводимъ ихъ $4(q-1)-v$ соотношеніямъ между корнями (или, что тоже, коэффиціентами полинома $R(x)$).

Для того, чтобы найти условія приведенія при высшихъ степеняхъ $\nu(x)$ или, что тоже, $\lambda(x)$ и $\mu(x)$, слѣдуетъ, какъ и въ случаѣ полинома $R(x)$ $6q$ ой степени, замѣнять послѣдовательно, въ уравненіи (107) $R_1(x)$ на

$$R_2(x) = (x-\beta_1)^2(x-\beta_2)^2(x-\beta_3)^2 R_1(x)$$
$$R_3(x) = (x-\beta_1)^2 \cdots\cdots (x-\beta_6)^2 R_2(x)$$

и такъ далѣе.

Положимъ $R(x)$ 10-ой степени, а $R_1(x)$ 12-ой степени, такъ что $q=2$, $v=1$. Возвращаясь опять къ первому случаю, мы можемъ сказать, что условія (107) и (108) будутъ соблюдены, если, вопервыхъ, полиномъ $R_1(x)$ есть такой полиномъ 10-ой степени, при которомъ для нѣкоторой цѣлой функціи $\varphi(x)$ имѣетъ мѣсто приведеніе

$$\int \frac{\varphi(x)}{\sqrt{R_1(x)}}\,dx = \int \frac{dy}{\sqrt{Q(y)}}\,, \qquad (110)$$

во вторыхъ, этотъ полиномъ имѣетъ одинъ кратный корень γ. Замѣтимъ, что полиномы

$$\lambda = L \text{ и } \mu = M$$

мы можемъ предполагать взаимнопростыми между собой, ибо въ противномъ случаѣ, произведя сокращеніе, получили бы

$$y = \frac{x^t - Wl_1x^{t-1} + Wl_2x^{t-2} + \cdots\cdots (-1)^t Wl_t}{l_1x^{t-1} - l_2x^{t-2} + \cdots\cdots (-1)^{t-1} l_t}$$

и дробь эту подстановкой

$$z = ay + b$$

свели бы къ дроби

$$z = \frac{x^t - M_1^{(k)}x^{t-1} + \cdots (-1)^t M_t^{(k)}}{L_1^{(k)}x^{t-1} + \cdots (-1)^{t-1} L_t^{(k)}}$$

въ которой

$$L_k^{(k)} = 1\,,\ M_k^{(k)} = 0,$$

а приведеніе (110) къ подобному же приведенію.

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{R_1(x)}} = \int \frac{dz}{\sqrt{S(z)}}$$

При такомъ предположеніи относительно μ и λ, полиномы $\mu - a_1\lambda$, $\mu - a_2\lambda \cdots\cdots \mu - a_6\lambda$ не могутъ имѣть общихъ дѣлителей и мы должны имѣть

(111) $$\mu - a_i\lambda = (x-\gamma)^2 f(x)$$

гдѣ $f(x)$ цѣлая функція.

Очевидно тотъ же множитель $x - \gamma$ дѣлитъ на цѣло полиномъ

$$F(x) = \mu\lambda' - \lambda'\mu = (\mu - a_i\lambda)\,\lambda' - (\mu' - a_i\lambda')\lambda,$$

который при

$$\lambda = L,\ \mu = M \text{ и } q = 2$$

равенъ

$$x^2 - 2\,L_2^{(1)}\,x - M_2^{(1)}\,,$$

такъ что γ есть одинъ изъ двухъ корней уравненія

(112) $$x^2 - 2\,L_2^{(1)}\,x - M_2^{(1)} = 0.$$

Обозначая другой корень через δ, получаемъ интегралъ ультра эллиптическій 3-го класса

$$\int \frac{(x-\delta)(Ax^2+Bx+AM-BL)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \tag{113}$$

приводящійся къ ультраэллиптическому интегралу 1-го класса при помощи подстановки

$$y = \frac{x^2+M_2^{(1)}}{x-L_2^{(1)}} \tag{114}$$

въ томъ случаѣ, когда между парами корней существуютъ инволюціонныя соотношенія:

$$\begin{aligned} L_2^{(1)}(\alpha_1+\alpha_2)+M_2^{(1)} &= \alpha_1\alpha_2 \\ L_2^{(1)}(\alpha_3+\alpha_4)+M_2^{(1)} &= \alpha_3\alpha_4 \\ L_2^{(1)}(\alpha_5+\alpha_6)+M_2^{(1)} &= \alpha_5\alpha_6 \\ L_2^{(1)}(\alpha_7+\alpha_8)+M_2^{(1)} &= \alpha_7\alpha_8 \\ L_2^{(1)}(\alpha_9+\alpha_{10})+M_2^{(1)} &= \alpha_9\alpha_{10} \end{aligned} \tag{115}$$

Подстановку (114) можно замѣнить еще слѣдующей. Положимъ

$$z = \frac{y+2L_2^{(1)}}{y-2L_2^{(1)}} = \frac{x^2-2L_2^{(1)}x+M_2^{(1)}-2L_2^{(1)2}}{x^2-2L_2^{(1)}x+M_2^{(1)}+2L_2^{(1)2}}, \tag{116}$$

мы будемъ имѣть такое же, какъ и (110) приведеніе къ ультраэллиптическому интегралу 1-го класса.

Опредѣлимъ корни уравненія (112), соотвѣтствующія двойнымъ точкамъ инволюціи

$$\begin{aligned} L_2^{(1)}(x_1+x_2)+M_2^{(1)} &= x_1x_2 \\ \gamma &= L_2^{(1)}-\sqrt{L_2^{(1)2}+M_2^{(1)}} \\ \delta &= L_2^{(1)}+\sqrt{L_2^{(1)2}+M_2^{(1)}} \end{aligned} \tag{117}$$

тогда по (116)

$$z = \left(\frac{x-\delta}{x-\gamma}\right)^2 \tag{118}$$

Этотъ результатъ есть естественное обобщеніе теоремы Гурса[1]), относящейся къ приведенію ультраэллиптическихъ интеграловъ къ эллиптическимъ.

Возьмемъ теперь частный случай, когда

$$L_2^{(1)} = 0,$$

тогда по (115):

(119) $$\alpha_1\alpha_2 = \alpha_3\alpha_4 = \alpha_5\alpha_6 = \alpha_7\alpha_8 = \alpha_9\alpha_{10}$$

и вмѣстѣ съ тѣмъ

(120) $$y = x - \sqrt{\alpha_1\alpha_2}$$

или

(121) $$y = x + \sqrt{\alpha_1\alpha_2}.$$

При этомъ частномъ предположеніи, получаемъ интегралы типа

(122) $$\int \frac{(Ax^2+Bx+A\alpha_1\alpha_2)(x-\sqrt{\alpha_1\alpha_2})}{\sqrt{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_{10})}}\,dx$$

приводящіяся къ ультраэллиптическимъ интеграламъ перваго класса, которыя можно еще представлять въ слѣдующемъ видѣ

(123) $$\int \frac{(Ax^2+Bx+AC)(x-\sqrt{C})}{\sqrt{(x^2+a_1x+C)(x^2+a_2x+C)(x^2+a_3x+C)(x^2+a_4x+C)(x^2+a_5x+C)}}\,dx$$

Приведеніе для этого интеграла совершается при помощи подстановки

(124) $$y = \left(\frac{x-\sqrt{C}}{x+\sqrt{C}}\right)^2$$

или

(125) $$y = \frac{x^2+C}{x},$$

---

[1]) *M. E. Goursat.* Sur la réduction des integrales hyperelliptiques. Bulletin de la société Mathématique de France. T. XIII. № 1. 1895 годъ стр. 153—162.

причемъ упомянутый интегралъ (122) сводится къ ультраэллиптическому интегралу 1-го класса:

$$\int\frac{Ay+B}{\sqrt{(y+2\sqrt{c})(y+a_1)(y+a_2(y+a_3)(y+a_4)(y+a_5)}}dy \qquad (126)$$

Возьмемъ вмѣсто двойного корня $\gamma=\sqrt{c}$ инволюціи (117) другой корень $\delta=-\sqrt{c}$, тогда получимъ другой ультраэллиптическій интегралъ 3-го класса, сводящійся при помощи тѣхъ же подстановокъ (124) и (125) къ ультраэллиптическому интегралу 1-го класса, а именно

$$\int\frac{(Ax^2+Bx+AC)(x+\sqrt{c})}{\sqrt{(x^2+a_1x+C)(x^2+a_2x+C)(x^2+a_3x+C)(x^2+a_4x+C)(x^2+a_5x+C)}}dx \qquad (127)$$

равный интегралу

$$\int\frac{Ay+B}{\sqrt{(y-2\sqrt{c})(y+a_1(y+a_2)(y+a_3)(y+a_4)(y+a_5)}}dy. \qquad (128)$$

Вычитаемъ изъ интеграла (127) интегралъ (123) и дѣля на $2\sqrt{c}$, получаемъ интегралъ:

$$\int\frac{Ax^2+Bx+AC}{\sqrt{R(x)}}dx, \qquad (129)$$

гдѣ

$$R(x)=(x^2+a_1x+c)(x^2+a_2x+c)(x^2+a_3x+c)(x^2+a_4x+c)(x^2+a_5x+c), \qquad (130)$$

который приводится къ суммѣ двухъ ультраэллиптическихъ интеграловъ 1-го класса:

$$\frac{1}{2\sqrt{c}}\int\frac{Ay+B}{\sqrt{(y+2\sqrt{c})(y+a_1)(y+a_2)(y+a_3)(y+a_4)(y+a_5)}}dy+ \qquad (131)$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{c}}\int\frac{Ay+B}{\sqrt{(y-2\sqrt{c})(y+a_1)(y+a_2)y+a_3)(y+a_4(y+a_5)}}dy$$

при помощи подстановки (125).

Ультраэллиптическому интегралу (129) (130) соотвѣтствуетъ въ приведеніи ультраэллиптическихъ интеграловъ къ эллиптическимъ извѣстный интегралъ указанный еще Якоби[1]) и упоминаемый Кенигсбергеромъ, Гурса, Пикаромъ и т. д., на которомъ въ § 5 мы подробно остановимся.

Въ качествѣ же второго примѣра возьмемъ случай когда $R(x)$ 12-ой степени, а $\nu(x)$ и $\mu(x)$ 3-ей степени. Тогда имѣемъ условіе (100) или слѣдующее:

$$
(132)\quad \begin{aligned}
&(\mu-a_1\lambda)(\mu-a_2\lambda)(\mu-a_3\lambda)(\mu-a_4\lambda)(\mu-a_5\lambda)(\mu-a_6\lambda)=\\
&=(x-\beta_1)^2(x-\beta_2)^2(x-\beta_3)^2(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{12}).
\end{aligned}
$$

Полагая $\mu=M$, $\lambda=L$ извѣстными, мы найдемъ ультраэллиптическій интегралъ 4-го класса т. е. зависящій отъ полинома $R(x)$ степени 12-ой, допускающій приведеніе при помощи подстановки

$$y=\frac{M}{L}$$

къ ультраэллиптическому интегралу 1-го класса.

Величины a_1, a_2, a_3 мы можемъ между прочимъ подобрать такъ, что

$$
(133)\quad \begin{aligned}
\mu-a_1\lambda&=(x-\beta_1)^2(x-\alpha_1)\\
\mu-a_2\lambda&=(x-\beta_2)^2(x-\alpha_2)\\
\mu-a_3\lambda&=(x-\beta_3)^2(x-\alpha_3)\,.
\end{aligned}
$$

Для этого слѣдуетъ только опредѣлить тѣ значенія y, при которыхъ уравненіе

$$(134)\qquad M-yL=0$$

имѣетъ двойной корень. Тотчасъ тогда опредѣлятся неизвѣстныя β_1, β_2, β_3, α_1, α_2, α_3. Если, теперь, давъ a_4, a_5, a_6 произвольныя значенія, примемъ за α_4, α_5, α_6 корни уравненій

---

[1]) Journal de Crelle t. 8.

$$\mu - a_4\lambda = 0$$
$$\mu - a_5\lambda = 0 \qquad (135)$$
$$\mu - a_6\lambda = 0,$$

то всѣми найденными значеніями $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{12}$ условіе (132) будетъ удовлетворено.

Ограничимся случаемъ, когда въ выраженіи

$$L = L_1x^2 - L_2x + L_3$$
$$L_1 = 0 \text{ и } M_1 = 0 .$$

При этомъ условіи получаемъ подстановку:

$$y = \frac{x^3 + ax + b}{x - c} \qquad (136)$$

если ввести болѣе удобныя обозначенія коэффиціентовъ.

Гурса[1]), изслѣдуя приведеніе ультраэллиптическихъ интеграловъ къ эллиптическимъ при помощи подстановки частнаго типа (136), дѣлаетъ слѣдующія замѣчанія. Возьмемъ условіе существованія двукратнаго корня уравненія (134) или, что тоже уравненія (136) или

$$x^3 + ax + b - y(x - c) = 0 , \qquad (137)$$

которое будетъ:

$$\Phi(y) = 4[y - a]^3 - 27(b + cy)^2 = 0 . \qquad (138)$$

Подставляя въ $\Phi(y)$ значеніе y въ x по формулѣ (136) получаемъ

$$\Phi(y) = \frac{F(x)}{(x - c)^3} ,$$

гдѣ $F(x)$ цѣлая функція 9-ой степени относительно x. Двойныя корни уравненія (137) или (136) должны удовлетворять также уравненію

---

[1]) *Goursat*. Sur la réduction des integrales hyperelliptiques. Bulletin de la société mathématique, t. XIII. стр. 155.

$$\text{(139)} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2x^3 - 3cx^2 - (ac+b)}{(x-c)^2} = 0,$$

почему лѣвая часть уравненія

$$F(x) = 0\,,$$

которому тоже, очевидно, должны удовлетворять двойные корни должны на цѣло дѣлиться на полиномъ 3-ей степени въ квадратѣ:

$$[2x^3 - 3cx^2 - (ac+b)]^2\,.$$

И, дѣйствительно, непосредственное дѣленіе даетъ тождество, отмѣченное Гурса:

$$4(y-a)^3 - 27(b+cy)^2 = \frac{[2x^3 - 3cx^2 - (ac+b)]^2 [x^3 + 3cx^2 + 4(ac+b)]}{(x-c)^3}$$

Такъ что

$$4(y-a)^3 - 27(b+cy)^2 = (y-a_1)(y-a_2)(y-a_3) = \frac{(\mu - a_1\lambda)(\mu - a_2\lambda)(\mu - a_3\lambda)}{\mu^3}$$

и

$$(\mu - a_1\lambda)(\mu - a_2\lambda)(\mu - a_3\lambda) = [2x^3 - 3cx^2 - (ac+b)]^2 [x^3 + 3cx^2 + 4(ac+b)]$$

(140)

Теперь составляемъ интегралъ:

$$\text{(141)} \qquad \int \frac{(\mu'\lambda - \lambda\mu')(A\lambda + B\mu)}{\sqrt{(\mu - a_1\lambda)(\mu - a_2\lambda)(\mu - a_3\lambda)(\mu - a_4\lambda)(\mu - a_5\lambda)(\mu - a_6\lambda)}}\, dx$$

при условіяхъ (133) или, въ нашемъ частномъ случаѣ (140) и при произвольныхъ a_4, a_5, a_6, интегралъ ультраэллиптическій 4-го класса, сводящійся при помощи подстановки (136) къ ультраэллиптическому интегралу 1-го класса. Такъ какъ, какъ это легко видѣть изъ (139),

$$\mu'\lambda - \lambda\mu' = 2x^3 - 3cx^2 - (ac+b)\,,$$

то, по сокращеніи, получаемъ интегралъ (141) въ формѣ:

$$\int \frac{A(x^3 + ax + b) + B(x-c)}{\sqrt{[x^3 + 3cx^2 + 4(ac+b)]R'(x)}}\, dx\,,$$

гдѣ

$$R'(x)=[x^3+ax+b-a_4(x-c)][x^3+ax+b-a_5(x-c)][x^3+ax+b-a_6(x-c)]$$

или въ формѣ

$$\int\frac{Cx^3+Dx+E}{\sqrt{(x^3+\alpha x^2+\beta)(x^3+p_1x+q_1)(x^3+p_2x+q_2)(x^3+p_3x+q_3)}}dx \quad (142)$$

гдѣ между α, β, p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3 существуютъ слѣдующія три зависимости

$$\begin{aligned} 4p_1\alpha+12q_1&=3\beta \\ 4p_2\alpha+12q_2&=3\beta \\ 4p_3\alpha+12q_3&=3\beta \end{aligned} \quad (143)$$

Интегралъ (142) представляетъ естественное обобщеніе интеграловъ Эрмита и Гурса, приводящихся къ эллиптическимъ интеграламъ. Въ заключеніе замѣтимъ, что изложенныя разсужденія за небольшими измѣненіями прилагаются и къ приведенію ультраэллиптическихъ интеграловъ къ эллиптическимъ, а равно, и къ приведенію ихъ къ ультраэллиптическимъ интеграламъ высшихъ классовъ и могутъ служить дополненіями къ статьямъ Кенигсбергера[1]) и Гурса[2]).

§ 5. Въ § 3 было доказано, что, если приведеніе (46) Абелевыхъ интеграловъ типа

$$\int\varphi(x)\left(\sqrt[n]{R(x)}\right)^r dx,$$

возможно, то оно возможно въ болѣе спеціальныхъ формахъ, а именно для $n=4$ къ интеграламъ

$$\begin{aligned} &\int\frac{dy}{\sqrt{y(y^2-\omega_0^2)(y^2-\omega_1^2)}} \\ &\int\frac{ydy}{\sqrt{y(y^2-\omega_0^2)(y^2-\omega_1^2)}}, \end{aligned} \quad (144)$$

---

[1]) *Königsberger*. Ueber die Reduction hyperelliptischer Integrale auf elliptische. Journal de Crelle B. 83. 1878 г. Стр. 273.

[2]) *Goursat*. Bulletin de la société mathématique. t. XIII. p. 147.

для $n=8$ къ интеграламъ

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z(z^4-1)}}$$

(145)

$$\int \frac{zdz}{\sqrt{z(z^4-1)}}$$

Мы покажемъ, что каждый изъ этихъ интеграловъ приводится къ суммѣ 2-хъ эллиптическихъ интеграловъ Приводимъ эти интегралы къ формѣ Ришло

(147) $$I_1 = \int \frac{Cdz}{\sqrt{z(1-z)(1-\varkappa^2 z)(1-\lambda^2 z)(1-\mu^2 z)}}$$

(148) $$I_2 = \int \frac{Dzdz}{\sqrt{z(1-z)(1-\varkappa^2 z)(1-\lambda^2 z)(1-\mu^2 z)}}$$

Мы можемъ получить въ интегралъ (144)

$$z = \frac{y}{\omega_0}$$

$$\varkappa^2 = -1 \quad \lambda^2 = -\frac{\omega_0}{\omega_1} = -a^2 \quad \mu^2 = \frac{\omega_0}{\omega_1} = a^2$$

(149) $$C = \frac{1}{\omega_1 \sqrt{\omega_0}} \quad D = \frac{\omega_0}{\omega_1 \sqrt{\omega_0}} \quad \varkappa = i \quad \lambda = ai \quad \mu = a$$

въ интегралахъ же (145):

$$\varkappa^2 = -1 \quad \lambda^2 = i \quad \mu^2 = -i$$

(150) $$\gamma = i \quad \lambda = \sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad \mu = \sqrt{-i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ имѣемъ:

(151) $$\varkappa\lambda = -\mu$$
$$\varkappa^2\lambda^2 = \mu^2,$$

интегралы (144) и (145), слѣдовательно, суть тѣ интегралы, приводящіяся къ эллиптическимъ, которые изслѣдовалъ еще Якоби. Ими мы займемся нѣсколько подробнѣй въ настоящей главѣ.

Каждый изъ интеграловъ (147) и (148) представимъ, какъ сумму нѣкоторыхъ двухъ тоже ультраэллиптическихъ интеграловъ, а именно

$$I_1 = \frac{C}{2}\,(I'+I'') \tag{152}$$

$$I_2 = \frac{D}{2\mu}\,(I'-I''), \tag{153}$$

гдѣ

$$I' = \int \frac{(1+\mu z)dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\varkappa^2 z)(1-\lambda^2 z)(1-\mu^2 z)}} \tag{154}$$

$$I'' = \int \frac{(1-\mu z)dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\varkappa^2 z)(1-\lambda^2 z)(1-\mu^2 z)}}\,. \tag{155}$$

Представляемъ интегралъ I' (154) въ слѣдующемъ видѣ, умножая числитель и знаменатель на $1-\mu z$,

$$I' = \int \frac{(1-\mu z)(1+\mu z)dz}{\sqrt{[1-2\mu z+\mu^2 z^2][1-(\mu^2+1)z+\mu^2 z][1-(\varkappa^2+\lambda^2)z+\mu^2 z^2]}} =$$

$$= \int \frac{\dfrac{1-\mu^2 z^2}{z^2}}{\sqrt{[\mu^2 z+\dfrac{1}{z}-2\mu][\mu^2 z+\dfrac{1}{z}-(\mu^2+1)][\mu^2 z+\dfrac{1}{z}-(x^2+\lambda^2)]}}\,dz\,.$$

Подстановкой

$$\xi = \frac{1+\mu^2 z^2}{2\mu z} \tag{156}$$

интегралъ I' приводится къ интегралу

$$I' = -\frac{1}{\sqrt{2\mu}} \int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-1)(\xi-\alpha)(\xi-\beta)}}, \tag{157}$$

гдѣ

$$\alpha = \frac{\mu^2+1}{2\mu}$$
$$\beta = \frac{\varkappa^2+\lambda^2}{2\mu}\,. \tag{158}$$

Такимъ же точно образомъ интегралъ I'' (155) приводится при помощи той же подстановки (156) къ интегралу

(159)
$$I'' = -\frac{1}{\sqrt{2\mu}} \int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi+1)(\xi-\alpha)(\xi-\beta)}},$$

гдѣ α и β имѣютъ тѣ же значенія (158).

На основаніи равенствъ (152), (153), (157) и (159) имѣемъ:

(160)
$$I_1 = -\frac{C}{2\sqrt{2\mu}}\left[\int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-1)(\xi-\alpha)(\xi-\beta)}} + \int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi+1)(\xi-\alpha)(\xi-\beta)}}\right]$$

(161)
$$I_2 = -\frac{D}{2\mu\sqrt{2\mu}}\left[\int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-1)(\xi-\alpha)(\xi-\beta)}} - \int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi+1)(\xi-\alpha)(\xi-\beta)}}\right].$$

Такимъ образомъ приведеніе (46) для $n=4$ и для $n=8$ равносильно одновременному приведенію двухъ Абелевыхъ интеграловъ къ двумъ эллиптическимъ слѣдующаго типа:

(162)
$$\int \varphi_r(x)\left(\sqrt[n]{R(x)}\right)^r dx = E\left[\int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-1)(\xi-\alpha)(\xi-\beta)}} + \int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi+1)(\xi-\alpha)(\xi-\beta)}}\right]$$
$$\int \psi_s(x)\left(\sqrt[n]{R(x)}\right)^s dx = F\left[\int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-1)(\xi-\alpha)(\xi-\beta)}} - \int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi+1)(\xi-\alpha)(\xi-\beta)}}\right],$$

гдѣ E и F постоянныя.

Это приведеніе еще болѣе специализируется, если принять въ соображеніе значенія $\varkappa$, λ, μ, заданныя формулами (149) и (150).

А, именно, для $n=4$, имѣемъ по (143):

$$\varkappa = i \quad \lambda = ai \quad \mu = a,$$

откуда по (158):

$$\alpha = \frac{a^2+1}{2a}$$
$$\beta = -\frac{a^2+1}{2a} = -\alpha,$$

и приведеніе (162) принимаетъ для $n=4$ слѣдующій видъ:

$$\int \varphi_r(x)(\sqrt[4]{R(x)})^r dx = E\left[\int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-1)(\xi^2-\alpha^2)}} + \int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi+1)(\xi^2-\alpha^2)}}\right]$$

$$\int \psi_s(x)(\sqrt[4]{R(x)})^s dx = F\left[\int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-1)(\xi^2-\alpha^2)}} - \int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi+1)(\xi^2-\alpha^2)}}\right]. \tag{163}$$

Для r, s, на основаніи доказаннаго въ § 3, возможны только двѣ пары значеній (1, 3) и (3, 1).

Для $n=8$ имѣемъ по (150):

$$\varkappa = i \quad \lambda = \sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad \mu = \sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \beta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}.$$

Въ этомъ случаѣ приведеніе (162) принимаетъ видъ:

$$\int \varphi_r(x)(\sqrt[8]{R(x)})^r dx = E\left[\int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-1)(2\xi^2-1)}} + \int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi+1)(2\xi^2-1)}}\right]$$

$$\int \psi_s(x)\sqrt[8]{R(x)})^s dx = F\left[\int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-1)(2\xi^2-1)}} - \int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi+1)(2\xi^2-1)}}\right], \tag{164}$$

гдѣ для r, s по § 3 возможны только слѣдующія четыре пары значеній: (5, 7), (7, 5), (1, 3) и (3, 1).

Въ частномъ же случаѣ, когда

$$R = ax^2+2bx+c,$$

получаемъ, полагая

$$R = \frac{D}{a} z^4, \tag{165}$$

гдѣ

$$D = ac-b^2,$$

слѣдующія приведенія при $r=7$, $s=5$:

$$(166)\quad \begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[8]{(ax^2+2bx+c)^7}} &= \frac{2}{\sqrt[8]{a}\,\sqrt[8]{D^3}} \int \frac{dz}{\sqrt{z(z^4-1)}} \\ \int \frac{dx}{\sqrt[8]{(ax^2+2bx+c)^5}} &= \frac{2}{\sqrt[8]{a^3}\,\sqrt[8]{D}} \int \frac{dz}{\sqrt{z(z^4-1)}}. \end{aligned}$$

Полагая $z = \frac{1}{v}$, получаемъ для другой пары значеній (r, s); $(5, 7)$ слѣдующія приведенія:

$$(167)\quad \begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[8]{(ax^2+2bx+c)^5}} &= \frac{2i}{\sqrt[8]{a^3}\,\sqrt[8]{D}} \int \frac{dv}{\sqrt{v(v^4-1)}}. \\ \int \frac{dx}{\sqrt[8]{(ax^2+2bx+c)^7}} &= \frac{2i}{\sqrt[8]{a}\,\sqrt[8]{D^3}} \int \frac{vdv}{\sqrt{v(v^4-1)}} \end{aligned}$$

Согласно доказанному выше, для тѣхъ же интеграловъ получаемъ еще слѣдующія приведенія къ суммѣ двухъ эллиптическихъ интеграловъ, отмѣченныя Кенигсбергеромъ[1]):

$$(168)\quad \begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[8]{(ax^2+2bx+c)^7}} &= \frac{-1}{\sqrt[8]{-a}\,\sqrt[8]{D^3}} \left[\int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-1)(2\xi^2-1)}} + \int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi+1)(2\xi^2-1)}} \right] \\ \int \frac{dx}{\sqrt[8]{(ax^2+2bx+c)^5}} &= \frac{-1}{\sqrt[8]{-a^3}\,\sqrt[8]{D}} \left[\int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-1)(2\xi^2-1)}} - \int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi+1)(2\xi^2-1)}} \right] \end{aligned}$$

или

$$(169)\quad \begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[8]{(ax^2+2bx+c)^7}} &= \frac{1}{\sqrt[8]{a}\,\sqrt[8]{-D^3}} \left[\int \frac{d\eta}{\sqrt{(\eta-1)(2\eta^2-1)}} - \int \frac{d\eta}{\sqrt{(\eta+1)(2\eta^2-1)}} \right] \\ \int \frac{dx}{\sqrt[8]{(ax^2+2bx+c)^5}} &= \frac{1}{\sqrt[8]{a^3}\,\sqrt[8]{-D}} \left[\int \frac{d\eta}{\sqrt{(\eta-1)(2\eta^2-1)}} + \int \frac{d\eta}{\sqrt{(\eta+1)(2\eta^2-1)}} \right] \end{aligned}$$

---

[1]) *Koenigsberger*. Ueber eine Beziehung и т. д. Journal de Crelle. B. 86. 1879 года. стр. 335-ая.

гдѣ

$$\xi = \frac{\sqrt[4]{-D}}{2\sqrt[4]{a}\,\sqrt[4]{ax^2+2bx+c}} - \frac{\sqrt[4]{a}\,\sqrt[4]{ax^2+2bx+c}}{2\sqrt[4]{-D}} \tag{170}$$

$$\eta = \frac{\sqrt[4]{a}\,\sqrt[4]{ax^2+2bx+c}}{2\sqrt[4]{-D}} - \frac{\sqrt[4]{-D}}{2\sqrt[4]{a}\,\sqrt[4]{ax^2+2bx+c}} \tag{171}$$

§ 6. Ограничиваясь случаемъ, когда

$$R = ax^2+2bx+c,$$

приведемъ примѣръ приведенія (46) для $n=5$.

При помощи подстановки

$$z = \frac{\sqrt[5]{a}\,\sqrt[5]{ax^2+2bx+c}}{\sqrt[5]{D}}$$

или

$$ax^2+2bx+c = \frac{D}{a}\,z^5, \tag{172}$$

откуда

$$x = -\frac{b+\sqrt{D}\,\sqrt{z^5-1}}{a}$$

и

$$dx = \frac{5\sqrt{D}}{2a}\,\frac{z^4dz}{\sqrt{z^5\,1}} \tag{173}$$

получаемъ приведенія:

$$\begin{gathered}\int\frac{dx}{(\sqrt[5]{ax^2+2bx+c})^3} = \frac{5\sqrt{D}}{2a}\int\frac{dz}{\sqrt{z^5-1}} \\ \int\frac{dx}{(\sqrt[5]{ax^2+2bx+c})^4} = \frac{5\sqrt{D}}{2a}\int\frac{zdz}{\sqrt{z^5-1}},\end{gathered} \tag{174}$$

результатъ этотъ вполнѣ согласуется съ доказаннымъ выше въ § 3.

Для $n=10$ при помощи той-же подстановки (172) получаемъ

$$\int\frac{dx}{(\sqrt[10]{ax^2+2bx+c})^9}=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}\,(\sqrt[5]{ax^2+2bx+c})^2}=$$

$$=\frac{5\sqrt{D}}{2a}\int\frac{z^4dz}{\sqrt{\frac{D}{a}}\,z^{\frac{5}{2}}\,\sqrt[5]{\frac{D^2}{a^2}}\,z^2\sqrt{z^5-1}}=\frac{5}{2}\,\frac{a^{9}/_{10}}{aD^{9}/_{10}}\int\frac{dz}{\sqrt{z(z^5-1)}}.$$

Произведя ту же подстановку въ интегралѣ

$$\int\frac{dx}{(\sqrt[10]{ax^2+2bx+c})^7},$$

получаемъ приведеніе этихъ интеграловъ къ двумъ ультраэллиптическимъ интеграламъ перваго класса:

(175)
$$\int\frac{dx}{(\sqrt[10]{ax^2+2bx+c})^9}=\frac{5}{2\sqrt[10]{a}\sqrt[10]{D^9}}\int\frac{dz}{\sqrt{z(z^5-1)}}$$

$$\int\frac{dx}{(\sqrt[10]{ax^2+2bx+c})^7}=\frac{5}{2\sqrt[10]{a^3}\sqrt[10]{D^7}}\int\frac{zdz}{\sqrt{z(z^5-1)}}.$$

Полагая

(176)
$$z=\frac{1}{v}=\frac{\sqrt[5]{D}}{\sqrt[5]{a}\;\sqrt[5]{ax^2+2bx+c}}$$

получаемъ равносильное (175) приведеніе:

(177)
$$\int\frac{dx}{(\sqrt[10]{ax^2+2bx+c})^7}=\frac{5i}{2\sqrt[10]{a^3}\sqrt[10]{D^7}}\int\frac{dv}{\sqrt{v^5-1}}$$

$$\int\frac{dx}{(\sqrt[10]{ax^2+2bx+c})^9}=\frac{5i}{2\sqrt[10]{a}\,\sqrt[10]{D^9}}\int\frac{vdv}{\sqrt{v^5-1}}.$$

Для случая $n = 6$ положимъ:

$$R = (ax^2+2bx+d)^3\,(ax^2+2bx+c)^2.$$

При помощи подстановки

$$z = \frac{\sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{ax^2+2b+c}}{\sqrt[3]{D}} \tag{178}$$

или

$$ax^2+2bx+c = \frac{Dz^3}{a},$$

откуда имѣемъ

$$dx = \frac{3\sqrt{D}}{2a}\,\frac{z^2dz}{\sqrt{z^3-1}},$$

получаемъ приведеніе типа (46) или (65)

$$\int\frac{dx}{\sqrt[6]{(ax^2+2bx+d)^3\,(ax^2+2bx+c)^2}} = \frac{3\sqrt[3]{a}}{2\sqrt{a}\,\sqrt[3]{D}}\int\frac{zdz}{\sqrt{(z^3-1)\left(z^3-\dfrac{a(c-d)}{D}\right)}}$$

(179)

$$\int\frac{dx}{\sqrt[6]{(ax^2+2bx+d)^3\,(ax^2+2bx+c)^4}} = \frac{3\sqrt[3]{a^2}}{2\sqrt{a}\,\sqrt[3]{D}}\int\frac{dz}{\sqrt{(z^3-1)\left(z^3-\dfrac{a(c-d)}{D}\right)}},$$

причемъ

$$\int\frac{dx}{\sqrt[6]{(ax^2+2bx+d)^3(ax^2+2bx+c)^4}} = \int\frac{(ax^2+2bx+d)^2\,(ax^2+2bx+c)dx}{(\sqrt[6]{R})^5}$$

т. е. изслѣдуемаго типа

$$\int\varphi_r(x)\left(\sqrt[6]{R(x)}\right)^r dx\,,$$

гдѣ $\varphi_r(x)$ раціональная функція отъ x.

§ 7. Приведеніе (46), о которомъ мы вели разсужденія въ § 3, § 4, § 5 и § 6 является лишь частнымъ случаемъ болѣе общаго приведенія (10), которое при $n = 2$ сводится къ слѣдующему

$$\int \frac{\psi(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{Q(y)}} + \int \frac{dz}{\sqrt{Q(z)}}\,.$$

(180)

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \int \frac{y\,dy}{\sqrt{Q(y)}} + \int \frac{z\,dz}{\sqrt{Q(z)}}\,,$$

гдѣ

$$R(x) = A(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_{2m})$$

или

$$R(x) = A(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_{2m})$$

$$Q(y) = a_0(y-a_1)(y-a_2)(y-a_3)(y-a_4)(y-a_5)(y-a_6)$$

$$Q(z) = a_0(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)(z-a_5)(z-a_6)$$

или

$$Q(y) = a_0(y-a_1)(y-a_2)(y-a_3)(y-a_4)(y-a_5)\,.$$

$$Q(z) = a_0(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)(z-a_5).$$

На основаніи упомянутой въ § 1 теоремы Кенигсбергера y, z должны быть корнями уравненія:

(181) $$\varphi_0(x)u^2+\varphi_1(x)u+\varphi_2(x) = 0,$$

гдѣ

$$\varphi_0(x) = \psi_0(x)+\chi_0(x)\sqrt{R(x)}$$

(182) $$\varphi_1(x) = \psi_1(x)+\chi_1(x)\sqrt{R(x)}$$

$$\varphi_2(x) = \psi_2(x)+\chi_2(x)\sqrt{R(x)}$$

$\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\chi_0(x)$, $\chi_1(x)$, $\chi_2(x)$ цѣлыя функціи отъ x.

Задача объ отысканіи условныхъ уравненій для коэффиціентовъ полинома $R(x)$, при которыхъ возможно приведеніе (180) и цѣлыхъ функцій $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, представляетъ естественное обобщеніе подобной же задачи, относящейся къ приведенію ультраэллиптическихъ интеграловъ къ эллиптическимъ по формулѣ:

(183) $$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{T(y)}}\,,$$

гдѣ

$$T(y) = a_0(y-a_1)(y-a_2)(y-a_3)(y-a_4)$$

или

$$T(y) = a_0(y-a_1)(y-a_2)(y-a_3)$$

Подстановка, при помощи которой совершается приведеніе (183) должно быть слѣдующаго типа

$$y = \Omega\left(x_1 \sqrt{R(x)}\right)$$

Ω раціональная функція χ и $\sqrt{R(x)}$, иначе говоря: y долженъ быть корнемъ уравненія первой степени

$$\varphi_0(x)u + \varphi_1(x) = 0, \tag{184}$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \psi_0(x) + \chi_0(x)\sqrt{R(x)} \\ \varphi_1(x) &= \psi_1(x) + \chi_1(x)\sqrt{R(x)} \end{aligned}\right\} \tag{185}$$

$\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\chi_0(x)$, $\chi_1(x)$ цѣлыя функціи отъ x, въ которыя входятъ произвольныя параметры. Такимъ образомъ существуетъ безконечное множество подстановокъ, при помощи которыхъ совершается приведеніе (183), если только это приведеніе возможно. Можно доказать[1]), что между ними существуетъ всегда подстановка типа

$$\omega_0(x)u + \omega_1(x) = 0 \tag{186}$$

гдѣ $\omega_0(x)$ и $\omega_1(x)$ цѣлыя функціи отъ χ т. е. можно доказать, что, если ультраэллиптическій интегралъ (1-го рода) приводится къ эллиптическому, то это приведеніе можетъ быть выполнено при помощи раціональной подстановки $y = -\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)}$. Теорема эта легко доказывается при помощи теоремы сложенія эллиптическихъ интеграловъ и дастъ возможность значительно упростить задачу о приведеніи ультраэллиптическихъ интеграловъ къ эллиптическимъ. Аналогичная теоре-

---

[1]) Эта теорема доказывается Кенигсбергеромъ въ упомянутомъ выше мемуарѣ: Ueber die Reduction hyperelliptischen Integrale auf elliptische B. 85 1878 г. ст. 273, но, въ сущности говоря, это доказательство Абеля, которое прилагается имъ къ теоремѣ подобнаго же рода относящейся къ вопросу о выраженіи эллиптическихъ интеграловъ черезъ эллиптическія. *Abel* Oeuvres t. II p. 555.

ма[1]) имѣетъ мѣсто и для приведенія (180), а именно мы докажемъ, что, если это приведеніе возможно, то оно возможно при ξ и η, опредѣляемыхъ уравненіемъ

$$\omega_0(x)u^2+\omega_1(x)u+\omega_2(x)=0, \tag{187}$$

гдѣ $\omega_0(x)$, $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ цѣлыя функціи отъ x.

Замѣняя $\sqrt{R(x)}$ на $-\sqrt{R(x)}$, получаемъ параллельно приведенію (180), слѣдующее ему аналогичное:

$$\begin{aligned} -\int\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} &= \int\frac{dy'}{\sqrt{Q(y')}}+\int\frac{dz'}{\sqrt{Q(z')}} \\ -\int\frac{\psi(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} &= \int\frac{z'dz'}{\sqrt{Q(y')}}+\int\frac{z'dz'}{\sqrt{Q(z')}} \end{aligned} \tag{188}$$

y'. z' опредѣляются уравненіемъ:

$$\varphi_0^{(1)}(x)u^2+\varphi_1^{(1)}(x)u+\varphi_2^{(1)}(x)=0, \tag{189}$$

въ которомъ

$$\begin{aligned} \varphi_0^{(1)}(x) &= \psi_0(x)-\chi_0(x)\sqrt{R(x)} \\ \varphi_1^{(1)}(x) &= \psi_1(x)-\chi_1(x)\sqrt{R(x)} \\ \varphi_2^{(1)}(x) &= \psi_2(x)-\chi_2(x)\sqrt{R(x)} \end{aligned} \tag{190}$$

гдѣ $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\chi_0(x)$, $\chi_1(x)$, $\chi_2(x)$ имѣютъ тѣже значенія, что и въ системѣ (182).

Вычитая изъ (180) почленно (188) получаемъ уравненія

$$\begin{aligned} 2\int\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} &= \int\frac{dy}{\sqrt{Q(y)}}+\int\frac{dz}{\sqrt{Q(z)}}-\int\frac{dy'}{\sqrt{Q(y')}}-\int\frac{dz'}{\sqrt{Q(z')}} \\ 2\int\frac{\psi(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} &= \int\frac{y\,dy}{\sqrt{Q(y)}}+\int\frac{z\,dz}{\sqrt{Q(z)}}-\int\frac{y'dy'}{\sqrt{Q(y')}}-\int\frac{z'dz'}{\sqrt{Q(z')}}. \end{aligned} \tag{191}$$

---

[1]) Эта основная теорема этого параграфа принадлежитъ Кенигсбергеру. Мы помѣщаемъ съ небольшими измѣненіями и подробнѣе развивъ его доказательство, помѣщенное въ „Vorlesungen ueber die Theorie der hyperelliptischen Integrale“ Leipzig 1898 г. стр. 42.

На основаніи теоремы Абеля эту систему можемъ замѣнить слѣдующей

$$\int \frac{\varphi_1(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \int \frac{d\xi}{\sqrt{Q(\xi)}} + \int \frac{d\eta}{\sqrt{Q(\eta)}}$$

$$\int \frac{\psi_1(x)dx}{\sqrt{R(x)}} = \int \frac{\xi d\xi}{\sqrt{Q(\xi)}} + \int \frac{\eta d\eta}{\sqrt{Q(\eta)}} \tag{180'}$$

$$\varphi_1(x) = -2\varphi(x), \quad \psi_1(x) = -2\psi(x),$$

гдѣ ξ, η алгебраическія функціи x.

Если для коэффиціентовъ b_0, a_0, a_1, a_2 двухъ цѣлыхъ функцій

$$\Phi(u) = u^3 + a_2u^2 + a_1u + a_0$$

$$\Psi(u) = b_0 \tag{192}$$

мы подберемъ такія значенія, что точки $(y, \sqrt{Q(y)})$ $(z, \sqrt{Q(z)})$ $(y', -\sqrt{Q(y')})$ $(z', -\sqrt{Q(z')})$ будутъ пересѣченіями кривыхъ:

$$\Phi(u) - \Psi(u)\nu = 0$$

$$\nu^2 = Q(u), \tag{193}$$

такъ что будемъ имѣть систему

$$\begin{aligned} y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 - b_0\sqrt{Q(y)} &= 0 \\ z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 - b_0\sqrt{Q(z)} &= 0 \\ y'^3 + a_2y'^2 + a_1y' + a_0 + b_0\sqrt{Q(y')} &= 0 \\ z'^3 + a_2z'^2 + a_1z' + a_0 + b_0\sqrt{Q(z')} &= 0, \end{aligned} \tag{194}$$

то по теоремѣ Абеля будемъ имѣть

$$\int \frac{dy}{\sqrt{Q(y)}} + \int \frac{dz}{\sqrt{Q(z)}} - \int \frac{dy'}{\sqrt{Q(y')}} - \int \frac{dz'}{\sqrt{Q(z')}} + \int \frac{d\xi}{\sqrt{Q(\xi)}} + \int \frac{d\eta}{\sqrt{Q(\eta)}} = 0$$

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{Q(y)}} + \int \frac{zdz}{\sqrt{Q(z)}} - \int \frac{y'dy'}{\sqrt{Q(y')}} - \int \frac{z'dz'}{\sqrt{Q(z')}} + \int \frac{\xi d\xi}{\sqrt{Q(\xi)}} + \int \frac{\eta d\eta}{\sqrt{Q(\xi)}} = 0$$

а слѣдовательно и систему $(180')$, если $(\xi, \sqrt{Q(\xi)})$ $(\eta, \sqrt{Q(\eta)})$ остальныя двѣ точки пересѣченія кривыхъ (193) или, что тоже, ξ и η рѣшенія уравненія 6-ой степени

$$\Phi^2(u) - \Psi^2(u) Q(u) = 0, \tag{195}$$

$\sqrt{Q(\xi)}$, $\sqrt{Q(\eta)}$ соотвѣтствующія имъ значенія ν изъ перваго уравненія системы (193) то есть

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{Q(\xi)} &= \frac{\Phi(\xi)}{\Psi(\xi)} \\ \sqrt{Q(\eta)} &= \frac{\Phi(\eta)}{\Psi(\eta)} \end{aligned}\right. . \tag{196}$$

Для опредѣленія b_0, a_0, a_1, a_2 изъ системы уравненій (194) поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Складываемъ почленно первыя два уравненія, умноживъ ихъ сперва на 1, 1, затѣмъ на y, z. Такъ какъ на основаніи упомянутой въ § 1 основной теоремы Кенигсбергера:

$$\begin{aligned} \sqrt{Q(y)} &= F_1(x, \sqrt{R(x)}, y) \\ \sqrt{Q(z)} &= F_1(x, \sqrt{R(x)}, z) \\ \sqrt{Q(y')} &= F_1(x, -\sqrt{R(x)}, y') \\ \sqrt{Q(z')} &= F_1(x, -\sqrt{R(x)}, z'), \end{aligned} \tag{197}$$

гдѣ F_1 раціональныя функціи величинъ, заключенныхъ въ скобки, то въ получаемыхъ уравненіяхъ

$$\begin{aligned} \Theta^{(1)}{}_3 + a_2 \Theta^{(1)}{}_2 + a_1 \Theta^{(1)}{}_1 + a_0 \Theta^{(1)}{}_0 - \lambda^{(1)} b_0 &= 0 \\ \Theta^{(2)}{}_3 + a_2 \Theta^{(2)}{}_2 + a_1 \Theta^{(2)}{}_1 + a_0 \Theta^{(2)}{}_0 - \lambda^{(2)} b_0 &= 0 \end{aligned} \tag{198}$$

коэффиціенты при a_2, a_1, a_0, b_0 ... $\Theta^{(1)}{}_3$, $\Theta^{(1)}{}_2$ и т. д. какъ раціональныя симметрическія функціи y и z, опредѣляемыхъ уравненіемъ (181), будутъ раціональными функціями x и $\sqrt{R(x)}$. Такимъ же образомъ получаемъ, произведя тѣже операціи надъ третьимъ и четвертымъ уравненіями системы (194):

$$\Theta_3^{(3)}+a_2\Theta_2^{(3)}+a_1\Theta_1^{(3)}+a_0\Theta_0^{(3)}+\lambda^{(3)}b_0=0$$

$$\Theta_3^{(4)}+a_2\Theta_2^{(4)}+a_1\Theta_1^{(4)}+a_0\Theta_0^{(4)}+\lambda^{(4)}b_0=0, \tag{199}$$

гдѣ $\theta^{(3)}_3$, $\theta^{(3)}_2$ и т. д. суть опять раціональныя функціи x и $\sqrt{R(x)}$. Такъ какъ y', z' получаются изъ y и z замѣной $\sqrt{(Rx)}$ на $-\sqrt{R(x)}$, то, если

$$\Theta^{(1)}_i=\pi^{(1)}_i+\rho^{(1)}_i\sqrt{R(x)} \qquad \lambda^{(1)}=\mu^{(1)}+\nu^{(1)}\sqrt{R(x)}$$

$$\Theta^{(2)}_i=\pi^{(2)}_i+\rho^{(2)}_i\sqrt{R(x)} \qquad \lambda^{(2)}=\mu^{(2)}+\nu^{(2)}\sqrt{R(x)},$$

гдѣ

$\pi^{(1)}_i$, $\rho^{(1)}_i$, $\pi^{(2)}_i$, $\rho^{(2)}_i$, $\mu^{(1)}$, $\nu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$, $\nu^{(2)}$ раціональныя функціи отъ x, то вмѣстѣ съ тѣмъ

$$\Theta^{(3)}_i=\pi^{(1)}_i-\rho^{(1)}_i\sqrt{R(x)} \qquad \lambda^{(3)}=\mu^{(1)}-\nu^{(1)}\sqrt{R(x)}$$

$$\Theta^{(4)}_i=\pi^{(2)}_i-\rho^{(2)}_i\sqrt{R(x)} \qquad \lambda^{(4)}=\mu^{(2)}-\nu^{(2)}\sqrt{R(x)}.$$

Поэтому, складывая, а потомъ вычитая изъ перваго уравненія системы (198) первое системы (199) и тоже производя со вторыми уравненіями этихъ системъ получаемъ:

$$\begin{aligned}
&\pi_3^{(1)}+a_2\pi_2^{(1)}+a_1\pi_1^{(1)}+a_0\pi_0^{(1)}-b_0\nu^{(1)}\sqrt{R(x)}=0\\
&\sigma_3^{(1)}+a_2\sigma^{2(1)}+a_1\sigma_1^{(1)}+a_0\sigma_0^{(1)}+b_0\mu^{(1)}\sqrt{R(x)}=0\\
&\pi_3^{(2)}+a_2\pi_2^{(2)}+a_1\pi_1^{(2)}+a_0\pi_0^{(2)}-b_0\nu^{(2)}\sqrt{R(x)}=0\\
&\sigma_3^{(2)}+a_2\sigma_2^{(2)}+a_1\sigma_1^{(2)}+a_0\sigma_0^{(2)}+b_0\nu^{(2)}\sqrt{R(x)}=0.
\end{aligned} \tag{200}$$

Отсюда получаемъ

$$a_2=\frac{\begin{vmatrix}-\pi_3^{(1)} & \pi_1^{(1)} & \pi_0^{(1)} & -\nu^{(1)}\sqrt{R(x)}\\ -\sigma_3^{(1)} & \sigma_1^{(1)} & \sigma_0^{(1)} & +\mu^{(1)}\sqrt{R(x)}\\ -\pi_3^{(2)} & \pi_1^{(2)} & \pi_0^{(2)} & -\nu^{(2)}\sqrt{R(x)}\\ -\sigma_3^{(2)} & \sigma_1^{(2)} & \pi_0^{(2)} & +\mu^{(2)}\sqrt{R\,x)}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-\pi_2^{(1)} & \pi_1^{(1)} & \pi_0^{(1)} & -\nu^{(1)}\sqrt{R(x)}\\ -\sigma_2^{(1)} & \sigma_1^{(1)} & \sigma_0^{(1)} & +\mu^{(1)}\sqrt{R(x)}\\ -\pi_2^{(2)} & \pi_1^{(2)} & \pi_0^{(2)} & -\nu^{(2)}\sqrt{R(x)}\\ -\sigma_2^{(2)} & \sigma_1^{(2)} & \sigma_0^{(2)} & +\mu^{(2)}\sqrt{R(x)}\end{vmatrix}},$$

а по сокращеніи на $\sqrt{R(x)}$:

(201) $$a_2 = f_2(x)$$

$f_2(x)$ раціональная функція отъ x. Такимъ же образомъ получаемъ

(202) $$a_1 = f_1(x)$$ $$a_0 = f_0(x),$$

гдѣ $f_1(x)$ и $f_0(x)$ тоже раціональныя функціи отъ x. Наконецъ

$$b_0 = \frac{\begin{vmatrix} \pi_2^{(1)} & \pi_1^{(1)} & \pi_0^{(1)} & -\pi_3^{(1)} \\ \sigma_2^{(1)} & \sigma_1^{(1)} & \sigma_0^{(1)} & -\sigma_3^{(1)} \\ \pi_2^{(2)} & \pi_1^{(2)} & \pi_0^{(2)} & -\pi_3^{(2)} \\ \sigma_2^{(2)} & \sigma_1^{(2)} & \sigma_0^{(2)} & -\sigma_3^{(2)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \pi_2^{(1)} & \pi_1^{(1)} & \pi_0^{(1)} & -\nu^{(1)}\sqrt{R(x)} \\ \sigma_2^{(1)} & \sigma_1^{(1)} & \sigma_0^{(1)} & +\mu^{(1)}\sqrt{R(x)} \\ \pi_2^{(2)} & \pi_1^{(2)} & \pi_0^{(2)} & -\nu^{(2)}\sqrt{R(x)} \\ \sigma_2^{(2)} & \sigma_1^{(2)} & \sigma_0^{(2)} & +\mu^{(2)}\sqrt{R(x)} \end{vmatrix}}$$

$$b_0 = \frac{\Phi(x)}{\sqrt{R(x)}},$$

гдѣ $\Phi(x)$ раціональная функція отъ x или

(203) $$b_0 = h(x)\sqrt{R(x)},$$

если $h(x) = \frac{\Phi(x)}{R(x)}$ тоже раціональная функція отъ x.

Подставляя полученныя выраженія (201) (202) и (203) въ уравненія (192) и (193) получаемъ послѣднее въ слѣдующемъ видѣ:

(204) $$u^6 + h_5(x)u^5 + h_4(x)u^4 + h_3(x)u^3 + h_2(x)u^2 + h_1(x)u + h_0(x) = 0$$

$h_5(x)$ и т. д. раціональныя функціи отъ x.

Но съ другой стороны

$$(u-y)(u-z)=u^2+\frac{\varphi_1}{\varphi_0}u+\frac{\varphi_2}{\varphi_1}=H(u,x,\sqrt{R(x)})$$

$$(u-y')(u-z')=u^2+\frac{\varphi_1^{(1)}}{\varphi_0^{(1)}}u+\frac{\varphi_2^{(1)}}{\varphi_1^{(1)}}=H(u,x,\sqrt{R(x)})$$

$$(u-y)(u-z)(u-y')(u-z')=H(u,x,\sqrt{R(x)})\,H(u,x,-\sqrt{R(x)})=K(u,x),$$

гдѣ $K(u, x)$ раціональная функція отъ x, такъ что

$$K(u,x)=u^4+k_3(x)u^3+k_2(x)u^2+k_1(x)u+k_0(x),$$

$k_3(x)$, и т. д. раціональныя функціи отъ x.

Лѣвая часть уравненія (204) разлагается на множители

$$(u-y)(u-z)(u-y')(u-z')(u-\xi)(u-\eta)$$

такъ какъ y, z, y', z', ξ, η корни уравненія (195) или, что тоже, уравненія (204). Поэтому по раздѣленіи лѣвой части послѣдняго уравненія на $K(u, x)$ получимъ уравненіе:

$$u^2+l_1(x)u+l_2(x)=0,$$

въ которомъ $l_1(x)$, $l_2(x)$ раціональныя функціи отъ x и корнями котораго будутъ ξ и η.

Уравненіе это очевидно приводится къ виду (187).

Изъ системы (196) можно вывести тоже весьма важное слѣдствіе. На основаніи уравненій (192), (201), (202) и (203) она даетъ:

$$\begin{aligned}\sqrt{Q(\xi)}&=\sqrt{R(x)}\,M(\xi,x)\\ \sqrt{Q(\eta)}&=\sqrt{R(x)}\,M(\eta,x),\end{aligned}\tag{205'}$$

гдѣ M раціональная функція величинъ въ скобкахъ.

Такимъ образомъ, если приведеніе (180) возможно, то оно возможно при помощи подстановки (187):

$$\omega_0(x)u^2+\omega_1(x)u+\omega_2(x)=0,\tag{187}$$

причемъ корни этого уравненія должны удовлетворять условію:

$$\frac{\sqrt{Q(u)}}{\sqrt{R(u)}} = M(u, x)\ , \tag{205}$$

гдѣ $M(u, x)$ раціональная функція отъ (u, x).

Условіе это не есть только необходимое условіе приведенія (180), оно вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточное условіе его т. е. при выполненіи его, существуютъ такія цѣлыя функціи $\varphi(x)$, $\psi(x)$, при которыхъ имѣетъ мѣсто приведеніе (180).

Для доказательства изъ уравненія (187) опредѣляемъ ξ, η:

$$\tag{206} \begin{aligned} \xi &= \frac{-\omega_1 + \sqrt{\omega_1{}^2 - 4\,\omega_0\omega_2}}{2\omega_0} = A(x) + \sqrt{S(x)} \\ \eta &= \frac{-\omega_1 - \sqrt{\omega_1{}^2 - 4\,\omega_0\omega_2}}{2\omega_0} = A(x) - \sqrt{S(x)} \end{aligned}$$

$A(x)$, $S(x)$ раціональныя функціи отъ x.

Отсюда, дифференцируя, имѣемъ:

$$\tag{207} \begin{aligned} d\xi &= \left[A'(x) + \frac{S'}{2\sqrt{S(x)}}\right] dx = \frac{\alpha(x) + \beta(x)\sqrt{S(x)}}{\sqrt{S(x)}}\, dx \\ d\eta &= \left[A'(x) - \frac{S'}{2\sqrt{S(x)}}\right] dx = \frac{\alpha(x) - \beta(x)\sqrt{S(x)}}{\sqrt{S(x)}}\, dx \end{aligned}$$

$\alpha(x)$, $\beta(x)$ опять раціональныя функціи отъ x.

Изъ уравненія (205′) по (206) имѣемъ, кромѣ того,:

$$\tag{208} \begin{aligned} \sqrt{Q(\xi)} &= [C(x) + D(x)\sqrt{S(x)}]\sqrt{R(x)} \\ \sqrt{Q(\eta)} &= [C(x) - D(x)\sqrt{S(x)}]\sqrt{R(x)}, \end{aligned}$$

$C(x)$, $D(x)$ раціональныя функціи отъ x.

Дѣля уравненія (207) и (208) почленно, получаемъ

$$\tag{209} \begin{aligned} \frac{d\xi}{\sqrt{Q(\xi)}} &= \frac{\alpha(x) + \beta(x)\sqrt{S(x)}}{[C(x) + D(x)\sqrt{S(x)}]\sqrt{S(x)}}\, \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} \\ \frac{d\eta}{\sqrt{Q(\eta)}} &= \frac{\alpha(x) - \beta(x)\sqrt{S(x)}}{[C(x) - D(x)\sqrt{S(x)}]\sqrt{S(x)}}\, \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} \end{aligned}$$

а по сложеніи этихъ послѣднихъ почленно имѣемъ:

$$\int\frac{d\xi}{\sqrt{Q(\xi)}}+\int\frac{d\eta}{\sqrt{Q(\eta)}}=\int\frac{2[\beta(x)C(x)-\alpha(x)D(x)]}{[C^2(x)-D^2(x)S(x)]}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}. \tag{210}$$

Такимъ же точно образомъ, полагая

$$[\alpha(x)+\beta(x)\sqrt{S(x)}]\,[A(x)+\sqrt{S(x)}]=\gamma(x)+\delta(x)\sqrt{S(x)},$$

получимъ, пользуясь уравненіями (209) и (206):

$$\int\frac{\xi d\xi}{\sqrt{Q(\xi)}}+\int\frac{\eta d\eta}{\sqrt{Q(\eta)}}=\int\frac{2[\delta(x)C(x)-\gamma(x)D(x)]}{[C^2(x)-D^2(x)S(x)}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}. \tag{211}$$

Такъ какъ въ лѣвыхъ частяхъ уравненій (210) и (211) стоятъ интегралы перваго рода, конечныя при всѣхъ значенія ξ и η, то въ правыхъ частяхъ должны быть тоже интегралы перваго рода т. е.

$$\frac{2[\beta(x)C(x)-\alpha(x)D(x)]}{[C^2(x)-D^2(x)S(x)]}=\varphi(x)$$
$$\frac{2[\delta(x)C(x)-\gamma(x)D(x)]}{[C^2(x)-D^2(x)S(x)]}=\psi(x),$$

$\varphi(x)$ и $\psi(x)$ цѣлыя функціи отъ x и мы имѣемъ приведеніе типа (180):

$$\begin{aligned}\int\frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{R(x)}}&=\int\frac{d\xi}{\sqrt{Q(\xi)}}+\int\frac{d\eta}{\sqrt{Q(\eta)}}\\ \int\frac{\psi(x)dx}{\sqrt{R(x)}}&=\int\frac{\xi d\xi}{\sqrt{Q(\xi)}}+\int\frac{\eta d\eta}{\sqrt{Q(\eta)}}.\end{aligned} \tag{180'}$$

Вмѣсто изслѣдуемой нами задачи объ одновременномъ приведеніи двухъ ультраэллиптическихъ интеграловъ къ двумъ ультраэллиптическимъ интеграламъ перваго класса по формулѣ (180), можно поставить задачу о приведеніи одного ультраэллиптическаго интеграла къ суммѣ двухъ ультраэллиптическихъ интеграловъ перваго класса по формулѣ:

$$\int\frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{R(x)}}=\int\frac{\alpha y+\beta}{\sqrt{Q(y)}}dy+\int\frac{\alpha z+\beta}{\sqrt{Q(z)}}dz \tag{212}$$

или, что тоже,

$$\int \frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{R(x)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{Q(y)}} + \int \frac{dz}{\sqrt{Q(z)}}, \tag{213}$$

такъ какъ отъ приведенія (212) можно перейти къ приведенію типа (213) при помощи подстановокъ:

$$y = \frac{ay'+b}{cy'+\partial}$$

$$z = \frac{az'+b}{cz'+\partial}.$$

Здѣсь имѣетъ мѣсто замѣчаніе аналогичное, сдѣланному нами при изслѣдованіи приведенія (78) въ § 4. А именно на основаніи теоремы Кенигсбергера § 1 имѣемъ для тѣхъ же значеній y, z, удовлетворяющихъ уравненію (181) еще другое приведеніе:

$$\int \frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{R(x)}} = \int \frac{ydy}{\sqrt{Q(y)}} + \int \frac{zdz}{\sqrt{Q(z)}} \tag{214}$$

и, такимъ образомъ, задача о приведеніи (213) равносильна изслѣдованной задачѣ о приведеніи (180).

§ 8. Такимъ образомъ условныя уравненія между коэффиціентами $R(x)$, при которыхъ возможно приведеніе (180), или, что тоже, приведеніе (213), будутъ вмѣстѣ съ тѣмъ условными уравненіями для совмѣстнаго существованія уравненій (187) и (205):

$$\omega_0(x)u^2 + \omega_1(x)u + \omega_2(x) = 0 \tag{187}$$

$$\frac{\sqrt{Q(u)}}{\sqrt{R(x)}} = M(u, x). \tag{205}$$

Легко видѣть, что полиномъ $Q(u)$ мы можемъ всегда предполагать 6-ой степени. Если бы $Q(u)$ былъ бы 5-ой степени то подстановками:

$$y = \frac{ay'+b}{cy'+\partial}$$

$$z = \frac{az'+b}{cz'+\partial}$$

уравненія (180)

$$\int\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \int\frac{dy}{\sqrt{Q(y)}} + \int\frac{dz}{\sqrt{Q(z)}}$$

$$\int\frac{\psi(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \int\frac{y\,dy}{\sqrt{Q(y)}} + \int\frac{z\,dz}{\sqrt{Q(z)}} \tag{180}$$

мы свели бы къ слѣдующимъ, имъ равносильнымъ:

$$\int\frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{R(x)}} = \int\frac{Ay'+B}{\sqrt{S(y')}}\,dy' + \int\frac{Az'+B}{\sqrt{S(z')}}\,dz'$$

$$\int\frac{\psi(x)dx}{\sqrt{R(x)}} = \int\frac{Cy'+D}{\sqrt{S(y')}}\,dy' + \int\frac{Cz'+D}{\sqrt{S(z')}}\,dz',$$

гдѣ $S(y)$ полиномъ уже 6-ой степени, и наконецъ къ уравненіямъ:

$$\int\frac{\varphi_1(x)dx}{\sqrt{R(x)}} = \int\frac{dy'}{\sqrt{S(y')}} + \int\frac{dz'}{\sqrt{S(z')}}$$

$$\int\frac{\psi_1(x)dx}{\sqrt{R(x)}} = \int\frac{y'dy'}{\sqrt{S(y')}} + \int\frac{z'dz'}{\sqrt{S(z')}}, \tag{215}$$

гдѣ $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ другія цѣлыя функціи отъ x.

Степень $R(x)$ мы можемъ предполагать четной, ибо въ противномъ случаѣ, при помощи подстановки

$$x = \frac{\alpha x'+\beta}{\gamma x'+\delta}$$

задачу о приведеніи (215) замѣнили бы ей аналогичной по формуламъ:

$$
(215')\quad
\begin{aligned}
\int\frac{\varphi'(x')dx'}{\sqrt{R'(x')}} &= \int\frac{dy'}{\sqrt{S(y')}} + \int\frac{dz'}{\sqrt{S(z')}}\\
\int\frac{\psi'(x')dx'}{\sqrt{R'(x')}} &= \int\frac{y'dy'}{\sqrt{S(y')}} + \int\frac{z'dz'}{\sqrt{S(z')}}
\end{aligned}
$$

здѣсь $R'(x')$ четной степени, $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$ опять цѣлыя функціи.

Такимъ образомъ условныя уравненія (187) и (205) можемъ представлять въ слѣдующемъ видѣ:

$$
(183)\qquad \omega_0(x)u^2+\omega_1(x)u+\omega_2(x)=0
$$

$$
(205')\qquad \frac{\sqrt{(u-a_1)(u-a_2)(u-a_3)(u-a_4)(u-a_5)(u-a_6)}}{\sqrt{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot(x-\alpha_{2m})}}=M(u,x)
$$

$$
(216)\quad
\begin{aligned}
\omega_0(x) &= l_0x^q+l_1x^{q-1}+\cdots\cdot l_q\\
\omega_1(x) &= m_0x^q+m_1x^{q-1}+\cdots m_q\\
\omega_2(x) &= n_0x^q+n_1x^{q-1}+\cdots\cdot n_q\,,
\end{aligned}
$$

$M(u, x)$ раціональная функція отъ u, x.

Условіе, выражаемое уравненіемъ (205) равносильно слѣдующимъ[1]: функція

$$
(217)\qquad F=\frac{\sqrt{Q(u)}}{\sqrt{R(x)}}\,.
$$

1) Функція однозначная на Римановской поверхности, соотвѣтствующей (u, x),

---

[1]) Идея этого изслѣдованія принадлежитъ Кенигсбергеру, приведшему задачу аналогичную изслѣдуемой нами (а, именно, приведеніе ультраэллиптическаго интеграла къ ультраэллиптическому интегралу того же класса и вообще Абелевыхъ интеграловъ къ эллиптическимъ) къ изслѣдованію разложеній вблизи особенныхъ точекъ. Изслѣдованія Кенигсбергера страдаютъ неполнотой см. Ueber die Erweiterung des Jacobischen Transformationsprincips. Journal de Crelle B. 78. 1879 г. стр. 173 и Ueber die Reduction Abelscher Integrale и т. д. B. 89. 1880 г. стр. 89.

2) Эта функція на ней не имѣетъ другихъ особенныхъ точекъ, кромѣ полюсовъ[1]).

Въ случаѣ точки (u_0, x_0) отличной отъ точки развѣтленія, имѣемъ разложенія функціи u вблизи этой точки:

x_0 конечно, $(u_0\ x_0)$ обыкновенная точка,

$$u - u_0 = u_1(x - x_0) + u_2(x - x_0)^2 + \cdots\cdots \tag{218}$$

$x_0 = \infty$, (u_0, x_0) об. т.

$$u - u_0 = u_1 x^{-1} + u_2 x^{-2} + \cdots\cdots \tag{219}$$

x_0 конечно, (u_0, x_0) полюсъ u, кратности k

$$u = u_{-k}(x - x_0)^{-k} + u_{-k+1}(x - x_0)^{-k+1} + \cdots\cdots + u_0 + u_1(x - x_0) + \cdots \tag{220}$$

$x_0 = \infty$, (u_0, x_0) полюсъ, кратности k

$$u = u_{-k}\, x^k + u_{-k+1}\, x^{k-1} + \cdots\cdots + u_0 + u_1 x^{-1} + \cdots \tag{221}$$

Когда же (u_0, x_0) точка развѣтленія, разложенія (218) (219) (220) (221) соотвѣтственно замѣняются слѣдующими:

$$(u - u_0) = u_{\frac{1}{2}}(x - x_0)^{\frac{1}{2}} + u_1(x - x_0) + \cdots\cdots \tag{222}$$

$$(u - u_0) = u_{\frac{1}{2}}\, x^{-\frac{1}{2}} + u_1 x^{-1} + \cdots\cdots \tag{223}$$

$$u = u_{-\frac{k}{2}}(x - x_0)^{-\frac{k}{2}} + u_{-\frac{k+1}{2}}(x - x_0)^{\frac{-k+1}{2}} + \cdots\cdots u_0 + u_{\frac{1}{2}}(x - x_0)^{\frac{1}{2}} + \cdots \tag{224}$$

$$u = u_{-\frac{k}{2}}\, x^{\frac{k}{2}} + u_{-\frac{k+1}{2}}\, x^{\frac{k-1}{2}} + \cdots\cdots + u_0 + u_{\frac{1}{2}}\, x^{-\frac{1}{2}} + \cdots\cdots \tag{225}$$

---

[1]) *Appel de Goursat.* Théorie des fonctions algébriques. 1895 годъ стр. 209.

Необходимымъ и достаточнымъ условіемъ намѣченныхъ выше пунктовъ 1) и 2) будетъ слѣдующее:

При x (u_0, x_0) отличной отъ точки развѣтленія и x_0 конечномъ:

$$F = D_0 + D_1(x - x_0) + D_2(x - x_0)^2 + \cdots\cdots \tag{226}$$

или

$$F = D_{-k}(x - x_0)^{-k} + D_{-k+1}(x - x)^{-k+1} + \cdots\cdots D_0 + D_1(x - x_0) + \cdots\cdots \tag{227}$$

при $x_0 = \infty$

$$F = D_0 + Dx + D_2 x^{-2} + \cdots\cdots \tag{228}$$

или

$$F = D_{-k} x^k + D_{-k+1} x^{-k+1} + \cdots\cdots + D_0 + D_1 x^{-1} + \cdots\cdots \tag{229}$$

При (u_0, x_0) точкѣ развѣтленія и x_0 конечномъ

$$F = D_0 + D_{\frac{1}{2}}(x - x_0)^{\frac{1}{2}} + D_1(x - x_0) + \cdots\cdots \tag{230}$$

или

$$F = D_{\frac{k}{2}}(x - x_0)^{-\frac{k}{2}} + D_{-\frac{k+1}{2}}(x - x_0)^{\frac{-k+1}{2}} + \cdots\cdots D_0 + D_1(x - x_0)^{\frac{1}{2}} + \cdots \tag{231}$$

при $x_0 = \infty$

$$F = D_0 + D_{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + D_1 x + \cdots \tag{232}$$

или

$$F = D_{-\frac{k}{2}} x^{\frac{k}{2}} + D_{-\frac{k+1}{2}} x^{\frac{-k+1}{2}} + \cdots\cdots D_0 + D_{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + \cdots\cdots \tag{233}$$

Замѣтимъ также, что, если u не равно ни одной изъ величинъ:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,$$

то имѣемъ при u_0 конечномъ

$$\sqrt{Q(u)} = A_0 + A_1(u - u_0) + A_2(u - u_0)^2 + \cdots\cdots, \tag{234}$$

если же $u = a_\rho$, то

$$\sqrt{Q(u)} = [u-u_0]^{\frac{1}{2}}[A_0+A_1(u-u_0)+\cdots\cdots] \tag{235}$$

причемъ въ обоихъ случаяхъ A_0 не равно нулю, ибо въ противномъ случаѣ

$$Q(u) = (u-u_0)^2 Q_1(u),$$

чего въ предположеніи, что интегралы

$$\int\frac{du}{\sqrt{Q(u)}}\ \int\frac{udu}{\sqrt{Q(u)}}$$

интегралы ультраэллиптическія перваго класса быть не можетъ.

Такимъ же точно образомъ при x_0 отличномъ отъ x^ρ, имѣемъ

$$\sqrt{R(x)} = C_0+C_1(x-x_0)+C_2(x-x_0)^2+\cdots\cdots \tag{236}$$

а при $x = a_\rho$:

$$\sqrt{R(x)} = (x-x_0)^{\frac{1}{2}}[C_0+C_1(x-x_0)+\cdots\cdots] \tag{237}$$

причемъ C_0 не равно нулю.

При $u_0 = \infty$ (такъ какъ $Q(u)$ 6-ой степени то u_0 тогда не равно a_ρ) разложеніе (234) замѣнится слѣдующимъ:

$$\sqrt{Q(u)} = A_{-3}u^3+A_{-2}u^2+A_{-1}u+A_0+A_1u^{-1}+\cdots\cdots \tag{238}$$

гдѣ $A_{-3}=1$.

Такимъ образомъ при $x_0=\infty$, будемъ имѣть (x_0 тогда не равно α_ρ, ибо $R(x)$, по предположенію четной степени)

$$\sqrt{R(x)} = C_m x^m + C_{-m+1}x^{m-1}+\cdots\cdots C_0+C_1x^{-1}+\cdots \tag{239}$$

I) Предположимъ сперва простѣйшій случай: x_0 не равно α_i, u_0 не равно a_i.

Тогда для u будемъ имѣть одно изъ разложеній (218—225), для $\sqrt{Q(u)}$ разложеніе (234) при u_0 конечномъ, (238) для $u_0=\infty$, наконецъ для $\sqrt{R(x)}$ разложеніе (236) при x_0 конечномъ (239) при $x_0=\infty$.

Для (u_0, x_0), отличной отъ точки развѣтленія, получаемъ на основаніи этихъ разложеній:

Когда u_0, x_0 конечны

$$(240) \qquad \sqrt{Q(u)} = A_0 + B_1(x-x_0) + B_2(x-x_0)^2 + \cdots\cdots$$

$u_0 = \infty$, x_0 конечно

$$(241) \qquad \sqrt{Q(u)} = (x-x_0)^{-3k}[B_0 + B_1(x-x_0) + \cdots\cdots$$

u_0 кон., $x_0 = \infty$

$$(242) \qquad \sqrt{Q(u)} = A_0 + B_1 x^{-1} + B_2 x^{-2} + \cdots\cdots$$

$u_0 = \infty$, $x_0 = \infty$

$$(243) \qquad \sqrt{Q(u)} = x^{3k}[B_0 + B_1 x^{-1} + \cdots\cdots]$$

Раздѣляя почленно разложенія (240) и (241) на разложеніе $\sqrt{R(x)}$ (236), а (242) и (243) на (239) получаемъ для F разложенія типовъ (225) и (226) въ первомъ случаѣ, и разложенія типовъ (228) и (229) во второмъ случаѣ и тѣмъ самымъ доказываемъ, что функція F въ точки (u_0, x_0) однозначна, и не можетъ имѣть никакой другой особенной точки, кромѣ полюса.

Для точки развѣтленія (u_0, x_0) разложенія (240), (241), (242) и (243) соотвѣтственно замѣнятся слѣдующими:

$$(244) \qquad \sqrt{Q(u)} = A_0 + B_{\frac{1}{2}}(x-x_0)^{\frac{1}{2}} + B_1(x-x_0) + \cdots\cdots$$

$$(245) \qquad \sqrt{Q(u)} = (x-x_0)^{\frac{3k}{2}}[B_0 + B_1(x-x_0) + \cdots\cdots]$$

$$(246) \qquad \sqrt{Q(u)} = A_0 + B_{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + B_1 x^{-1} + \cdots\cdots$$

$$(247) \qquad \sqrt{Q(u)} = x^{\frac{3k}{2}}[B_0 + B_{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + \cdots\cdots]$$

Раздѣляя первыя два почленно на (236), а послѣднія два на (239) получаемъ для F разложенія типовъ (230) и (231), (232) и (233) по цѣлымъ степенямъ $(x-x_0)^{\frac{1}{2}}$ и $x^{\frac{1}{2}}$, какъ и разложеніе самой функціи u.

Такимъ образомъ поставленныя выше условія для точекъ изслѣдуемаго типа сами собой выполняются, не требуя никакихъ условныхъ уравненій.

II) Положимъ теперь, что

$$x_0 = \alpha_i,$$

но u_0 отлично отъ α_i.

По уравненію (206) имѣемъ

$$u = \frac{-\omega_1 + \sqrt{\Delta}}{2\omega_0}, \tag{248}$$

гдѣ

$$\Delta = \omega_1{}^2 - 4\omega_0\omega_2.$$

Мы докажемъ, что необходимымъ и достаточнымъ условіемъ однозначности F будетъ слѣдующее:

$$\Delta(x_0) = (x - x_0)^{2k+1}\Delta_1(x), \tag{249}$$

гдѣ $k \geqslant 0$ цѣлое число.

Предположивъ противное т. е. $\Delta(x_0) = (x - x_0)^{2k}\Delta_1(x)$ на основаніи выраженія u (248) получимъ для функціи u разложеніе (218) или (220), для $\sqrt{Q(u)}$ разложеніе (234), а слѣдовательно для $\sqrt{Q(u)}$ также разложеніе (240) или (241).

Для $\sqrt{R(x)}$, такъ какъ $x = \alpha_i$, разложеніе (237). Раздѣливъ почленно (240) на (237), получаемъ въ обоихъ случаяхъ разложеніе типа (231), что показываетъ, что функція F не однозначна въ точкѣ (u_0, x_0) для которой u разлагается въ ряды (218) или (220) по цѣлымъ степенямъ $(x - x_0)$.

Такимъ образомъ

$$\Delta(x_0) = 0$$

или, вообще,

$$\Delta(x_0) = (x - x_0)^{2k+1}\Delta_1(x), \tag{249}$$

гдѣ $\Delta_1(x)$ цѣлая функція.

При этомъ условіи функція F дѣйствительно однозначна и не имѣетъ другихъ особенныхъ точекъ, кромѣ полюсовъ. Въ самомъ дѣлѣ въ этомъ случаѣ разложенія (218) и (220) замѣняются разложеніями (222) и (224) комбинируя ихъ опять съ (234) получаемъ опять разложенія типовъ (244) и (245) и наконецъ, на основаніи (237) опять разложеніе типа (231), разложеніе по цѣлымъ степенямъ $(x-x_0)^{\frac{1}{2}}$, какъ и разложеніе u.

Если $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\rho$ тѣ корни полинома $R(x)$, которымъ не соотвѣтствуютъ

$$u_0 = a_i$$

т. е. для которыхъ не имѣетъ мѣсто уравненіе

$$\omega_0(\alpha_i)a_i^2 + \omega_1(\alpha_i)a_i + \omega_2(\alpha_i) = 0, \tag{250}$$

то мы должны имѣть слѣдующія условныя уравненія между величинами α и коэффиціентами полиномовъ $\omega_0(x)$. $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$:

$$l_0, l_1 \cdots l_q, m_0, m_1 \cdots m_q, n_0, n_1 \cdots n_q$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta(\alpha_1) = 0 \\ \Delta(\alpha_2) = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Delta(\alpha_q) = 0 \end{array}\right| \tag{251}$$

причемъ, если

$$\Delta'(\alpha_i) = 0\ \Delta''(\alpha_i) = 0 \cdots\cdots \Delta^{(k)}(\alpha_i) = 0 \tag{252}$$
$$\Delta^{(k+1)}(\alpha_i) \gtrless 0$$

то

$$k = 2k,$$

число четное.

III) Положимъ теперь $u_0 = a_i$.

Если (u_0, x_0) не есть точка развѣтленія, то разложенія (218) и (219) и разложеніе $\sqrt{Q(u)}$ (235) даютъ:

$$\sqrt{Q(u)} = [u_1(x-x_0)+\cdots\cdots]^{\frac{1}{2}}[A_0 + E_1(x-x_0)+\cdots\cdots]$$

$$\sqrt{Q(u)} = [u_1 x^{-1} + \cdots\cdots]^{\frac{1}{2}}[A_0 + E_1 x^{-1} + \cdots\cdots]$$

или въ общемъ случаѣ, когда

$$u_1 = u_2 = \cdots\cdots u_{1-k} = 0$$

$$\sqrt{Q(u)} = (x-x_0)^{\frac{k}{2}}[B_0+B_1(x-x_0)+\cdots\cdots] \tag{253}$$

$$\sqrt{Q(u)} = x^{-\frac{k}{2}}[B_0+B_1x^{-1}+\cdots\cdots]. \tag{254}$$

Для $\sqrt{R(x)}$ когда x_0 не равно α_i, имѣемъ разложенія (236) и (239), на основаніи которыхъ получаемъ изъ (253)

$$F = (x-x_0)^{\frac{k}{2}}[D_0+D_1(x-x_0)+\cdots\cdots], \tag{255}$$

изъ (254)

$$F = x^{\frac{k}{2}-m}[D_0+D_1x^{-1}+\cdots\cdots]. \tag{256}$$

Для однозначности F, необходимо и достаточно, чтобы

$$k = 2k_1$$

т. е. чтобы разложенія u были бы

$$u-u_0 = u_{2k_1}(x-x_0)^{2k_1}+u_{2k_1+1}(x-x_0)^{2k_1+1}+\cdots\cdots \tag{257}$$

$$u-u_0 = u_{2k_1}x^{-2k_1}+u_{2k_1+1}x^{-(2k_1+1)}+\cdots\cdots \tag{258}$$

или

$$x-x_0 = x_{\frac{1}{2k_1}}(u-u_0)^{\frac{1}{2k_1}}+x_{\frac{2}{2k_1}}(u-u_0)^{\frac{2}{2k_1}}+\cdots\cdots \tag{259}$$

$$x = x_{\frac{1}{2k_1}}(u-u_0)^{-\frac{1}{2k_1}}+x_{\frac{2}{2k_1}}(u-u_0)^{-\frac{2}{2k_1}}+\cdots\cdots \tag{260}$$

иначе говоря одному значенію $u=u_0$ соотвѣтствовало $2k_1$ кратное рѣшеніе $x=x_0$ или $x=\infty$. Изслѣдуя всѣ значенія x_0.

$$x_0^{(1)},\ x_0^{(1)}\cdots\cdots x_0^{(q)}, \tag{262}$$

соотвѣтствующія $u = u_0$, предполагая что среди нихъ нѣтъ рѣшеній $x_0=\alpha_i$ и такихъ, которымъ соотвѣтствовали точки развѣтленія (u_0, x_0) находимъ:

(263) $\omega_0(x)u_0^2+\omega_1(x)u_0+\omega(x) = (x-x_0^{(1)})^{2k_1}(x-x_0^{(2)})^{2k_2}\cdots(x-x_0^{(q)})^{2kq}$

гдѣ

(264) $$q = 2k_1+2k_2+\cdots\cdot 2k_p+2k_{p+1} = 2h,$$

если $x_0=\infty$ рѣшеніе кратности $2k_{p+1}$, такъ что изслѣдуемый случай можетъ быть лишь при q четномъ числѣ.

Условіе (263) напишемъ въ слѣдующемъ видѣ:

(265) $$f(x) = [\varphi(x)]^2,$$

положивъ

$$\varphi(x) = (x-x_0^{(1)})^{k_1}(x-x_0^{(2)})^{k_2}\cdots(x-x_0^{(p)})^{kq}.$$

Условіе (265) равносильно $h=\frac{q}{2}$ условнымъ уравненіямъ между $u_0=a_i$ и коэффиціентами полиномовъ $\omega_0(x)$, $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$:

(266) $$\begin{gathered} T_1(a_i) = 0 \\ T_2(a_i) = 0 \\ \cdots\cdots \\ T_h(a_i) = 0. \end{gathered}$$

Если число точекъ изслѣдуемаго типа σ, то такихъ условныхъ уравненій будетъ

$$N_1 = \sigma h.$$

Когда $x_0=\alpha_i$, то разложеніе (236) для $\sqrt{R(x)}$, которымъ мы выше пользовались, слѣдуетъ замѣнить (237). Тогда вмѣсто разложенія (255) получаемъ слѣдующее:

(267) $$F = (x-x_0)^{\frac{k-1}{2}}[D_0+D_1(x-x_0)+\cdots\cdot]$$

Для однозначности необходимо и достаточно, чтобы

$$k = 2k_1+1$$

или

$$f(x) = (x-\alpha_i)f_1(x)$$

вообще

$$f(x) = (x-\alpha_i)^{2k_1+1}f_1(x)$$

т. е.

$$\omega_0(\alpha_i)\alpha_i^2+\omega_1(\alpha_i)\alpha_i+\omega_2(\alpha_i)=0 \tag{268}$$

причемъ, если

$$f'(\alpha_i)=f''(\alpha_i)=\cdots\cdots=f^{(k-1)}(\alpha_i)=0 \quad f^k(\alpha_i)\gtreqless 0 \tag{269}$$

то k число нечетное.

Изслѣдуя остальныя значенія $x=x_0$, соотвѣтствующія $u=u_0$, среди которыхъ могутъ быть также α_i', α_i''. $\alpha_i'''\cdots$ и $x_0=\infty$, но предполагая, что ни одному не соотвѣтствуетъ точка развѣтленія (u_0, x_0), получаемъ въ общемъ случаѣ:

$$f(x)=(x-\alpha_{i'})^{2k_i'+1}(x-\alpha_{i''})^{2k''+1}\cdots\cdots(x-\alpha_{i^{(s)}})^{2k^{(s)}+1}f_1(x),$$

гдѣ $f_1(x)$ функція четной степени или

$$f(x)=(x-\alpha_{i'})\,(x-\alpha_{i''})\cdots(x-\alpha_{i^{(s)}})\,[\varphi(x)]^2, \tag{270}$$

если

$$\varphi(x)=(x-\alpha_{i'})^{k_1'}(x-\alpha_{i''})^{k_1'}\cdots(x-\alpha_{i^{(s)}})^{k_1^{(s)}}(x-x_0^{(1)})^{k_1}\cdots\cdots$$

Условіе (270) предполагаетъ s условій (268) для $\alpha_i=\alpha_{i'}$, $\alpha_{i''}\cdots\cdots$ $\alpha_{i^{(s)}}$ и еще $\frac{q-s}{2}$ условныхъ уравненій для коэффиціентовъ $\varphi(x)$

$$\begin{gathered} T_1^{(1)}(a_i)=0 \\ T_2^{(2)}(a_i)=0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ T_{\frac{q-s}{2}}^{(1)}(a_i)=0. \end{gathered} \tag{271}$$

Положимъ, что число q четное (оно можетъ быть при изслѣдуемомъ случаѣ и нечетнымъ, но тогда предыдущій случай не можетъ имѣть мѣсто т. е. среди величинъ (262) или существуютъ α_i или значенія $x=x_0$, соотвѣтствующія точкамъ развѣтленія $(u_0\, x_0)$.

Для нашихъ цѣлей, какъ мы ниже покажемъ достаточно ограничиться этимъ случаемъ.

Если $u=u_0^{(1)}$ соотвѣтствуетъ $s^{(1)}=2t^{(1)}$ корней α_i, $u=u_0^{(2)}-s^{(2)}=2t^{(2)}\cdots\cdots u=u_0^{(\sigma')}-s^{(\sigma')}=2t^{(\sigma')}$ корней α_i и соотвѣтственно этимъ значеніямъ s значенія $\chi=\frac{q-s}{2}$:

$$\chi^{(1)}=h-t^{(1)},\ \chi=h-t^{(2)}\cdots\cdots\chi^{(\sigma')}=h-t^{(\sigma}, $$

то всѣ точки изслѣдуемаго типа дадутъ условныя уравненія числомъ

$$N_2 = 2[t^{(1)}+t^{(2)}+\cdots\cdots t^{(\sigma')}]+\sigma' h-[t^{(1)}+t^{(2)}+\cdots\cdots t^{(\sigma')}],$$

или

$$(272) \qquad N_2 = \sigma' h + S,$$

гдѣ

$$2S = 2[t^{(1)}+t^{(2)}+\cdots t^{(\sigma')}]$$

представляетъ изъ себя число величинъ α_i, входящихъ въ разложенія, соотвѣтствующія точкамъ изслѣдуемаго типа

$$(273) \qquad \begin{aligned} f(x_1 u_0^{(1)}) &= (x-\alpha_{i'}{}^{(1)})(x-\alpha_{i''}{}^{(1)})\cdots(x-\alpha_{is'}{}^{(1)})f_1(x_1 u_0^{(1)}) \\ f(x_1 u_0^{(2)}) &= (x-\alpha_{i'}{}^{(2)})(x-\alpha_{i''}{}^{(2)})\cdots(x-\alpha_{is''}{}^{(2)})f_1(x_1 u_0^{(2)}) \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f(x_1 u_0^{(\sigma')}) &= (x-\alpha_{i'}{}^{(\sigma')})(x-\alpha_{i''}{}^{(\sigma')})\cdots(x-\alpha_{i^{s\sigma'}}{}^{(\sigma')})f_1(x_1 u_0^{(\sigma')}), \end{aligned}$$

гдѣ $f(x_1 u_0^{(i)})$ обозначаетъ функцію $f(x)$, соотвѣтствующую $u = u_0^{(i)}$.

Но такъ какъ уравненіе

$$(187) \qquad \omega_0(x)u^2+\omega_1(x)u+\omega_2(x) = 0$$

для $x = \alpha_\mu^{(\nu)}$ имѣетъ два и только два корня $u = u_0$, ибо по предположенію, (u_0, x_0) не есть точка развѣтленія, то каждой величинѣ $\alpha_\mu^{(\nu)}$ будетъ въ разложеніяхъ (273) соотвѣтствовать еще другая величина $\alpha_\pi^{(\rho)} = \alpha_\mu^{(\nu)}$ и только разъ, то

$$(274) \qquad 2S = 2\rho' \quad \text{и} \quad S = \rho'$$

гдѣ ρ' будетъ число всѣхъ величинъ α_i, которымъ соотвѣтствуютъ $u = a_i$, но при условіи, что (u_0, x_0) не есть точка развѣтленія Римановской поверхности. На основаніи (274) ур. (272) даетъ

$$(275) \qquad N_2' = \rho' + \sigma' h.$$

Такимъ образомъ число всѣхъ условныхъ уравненій, соотвѣтствующимъ точкамъ (a_i, x_0), не совпадающимъ съ точками развѣтленія будетъ:

$$N' = N_1 + N_2 = \rho' + \tau' h, \tag{276}$$

если, τ' число такихъ точекъ или такихъ величинъ a_i, а ρ' число величинъ α_i, которымъ соотвѣтствуютъ $u = a_i$ такъ, что (u_0, x_0) не точка развѣтленія.

Если теперь (u_0, x_0) точка развѣтленія Римановской поверхности (u, x) то, какъ легко видѣть, разложенія (253) замѣнится слѣдующимъ разложеніемъ

$$\sqrt{Q(u)} = (x-x_0)^{\frac{k}{4}}[B_0 + B_{\frac{1}{2}}(x-x_0)^{\frac{1}{2}} + \cdots] \tag{277}$$

откуда въ случаѣ $x_0 \gtrless a_i$

$$F = (x-x_0)^{\frac{k}{4}}[D_0 + D_{\frac{1}{2}}(x-x_0)^{\frac{1}{2}} + \cdots], \tag{278}$$

а въ случаѣ $x_0 = a_i$

$$F = (x-x_0)^{\frac{k}{4}-\frac{1}{2}}[D_0 + D_{\frac{1}{2}}(x-x_0)^{\frac{1}{2}} + \cdots]. \tag{279}$$

Въ общихъ случаяхъ, получаемъ условіе

$$k = 2k_1$$

или

$$u - u_0 = u_{2k_1}(x-x_0)^{\frac{2k_1}{2}} + u_{2k_1+1}(x-x_0)^{\frac{2k_1+1}{2}} + \cdots \tag{280}$$

$$(x - x_0)^{\frac{1}{2}} = x^{(1)}_{\frac{1}{2k_1}}(u-u_0)^{\frac{1}{2k_1}} + x^{(1)}_{\frac{2}{2k_1}}(u-u_0)^{\frac{2}{2k_1}} + \cdots$$

$$(x-x_0) = x_{\frac{2}{2k_1}}(u-u_0)^{\frac{2}{2k_1}} + x_{\frac{3}{2k_1}}(u-u_0)^{\frac{3}{2k_1}} + \cdots \tag{281}$$

откуда, какъ выше изъ (259) выводимъ условіе (265) или условныя уравненія (266). Такимъ образомъ сдѣланное ограниченіе, что среди величинъ (262) нѣтъ, соотвѣтствующихъ точкамъ развѣтленія, можетъ быть отброшено. Число условныхъ уравненій, соотвѣтствующихъ случаямъ послѣдняго рода будетъ

$$N_1 = \sigma h,$$

гдѣ σ число a_i соотвѣтствующихъ этимъ случаямъ.

Такимъ же образомъ тоже условіе можетъ быть отброшено и при изслѣдованіи случаевъ, когда $x = \alpha_j$. Изъ разложенія (280) выводимъ, что

$$f(x) = (x-\alpha_j)^{2k}\psi(x)$$

Изслѣдуя другія значенія $x = x_0$, соотвѣтствующія $u = u_0$, получаемъ условіе (270), но гдѣ въ $\varphi(x)$ на ряду съ $x_0^{(1)}\, x_0^{(2)}\cdots$ входятъ еще тѣ значенія α_i, которыя соотвѣтствуютъ точкамъ развѣтленія (a_i, α_i) т. е.

$$\varphi(x) = (x-\alpha_{i'})^{k_1'}\cdot\cdot(x-\alpha_{i(s)})^{k_1^{(s)}}(x-x_0^{(1)})^{k_1}\cdot\cdot(x-x_0^{(p)})^{kp}(x-\alpha_{j'})^{l_1}\cdot\cdot(x-\alpha_{j(r)})^{lr}.$$

Слѣдовательно мы будемъ имѣть условія (268) для $\alpha_{i'}\cdots\alpha_{i(s)}$, (271) для $x_0^{(1)}\cdots x_0^{(p)}$, $\alpha_{j'}\cdots\alpha_{j(r)}$ значитъ по (275) всего

$$\rho' + \sigma' h$$

условій, къ нимъ должны прибавить еще слѣдующія уравненія, предполагаемыя условіемъ, что при $x = \alpha_j - u = a_i$

(283) $$\omega_0(\alpha_j)a_i^2 + \omega_1(\alpha_j)a_i + \omega_2(\alpha_j) = 0$$

для $a_i = \alpha_{j'}, \alpha_{j''}\cdots\alpha_{j(r)}$ число всего r.

Число всѣхъ условныхъ уравненій, соотвѣтствующихъ изслѣдуемому случаю будетъ

(284) $$N_2 = (\rho' + r) + \sigma' h = \rho_1 + \sigma' h,$$

гдѣ ρ_1 число всѣхъ α_i, соотвѣтствующихъ $u = a_i$, число же всѣхъ условныхъ уравненій, относящихся ко всѣмъ точкамъ типа (a_i, x_0)

$$N' = \rho_1 + (\sigma' + \sigma)h,$$

или такъ какъ

$$\sigma' + \sigma = 6$$

$$N' = \rho_1 + 6h. \tag{285}$$

Присоединяя къ этимъ уравненіямъ еще (251) получаемъ всего

$$N = N' + \rho$$

условныхъ уравненій или

$$N = 2m + 6h, \tag{286}$$

ибо

$$\rho + \rho_1 = 2m.$$

Уравненіямъ этимъ должны удовлетворять величины a_i числомъ равнымъ 6, α_i числомъ $2m$ и $l_0\, l_1 \cdots m_0\, m_1 \cdots n_0\, n_1 \cdots$ числомъ $3(q+1)$ т. е. всего $3q + 2m + 9$ неизвѣстныхъ.

§ 9. Поставленная въ § 7 задача объ отысканіи условныхъ уравненій для коэффиціентовъ полинома $R(x)$ и цѣлыхъ функцій $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, при которыхъ возможно приведеніе (180):

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{Q(y)}} + \int \frac{dz}{\sqrt{Q(z)}}$$
$$\int \frac{\psi(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \int \frac{y\,dy}{\sqrt{Q(y)}} + \int \frac{z\,dz}{\sqrt{Q(z)}}, \tag{180}$$

$$Q(y) = (y - a_1)(y - a_2)(y - a_3)(y - a_4)(y - a_5)(y - a_6)$$

допускаетъ еще слѣдующее упрощеніе.

Не нарушая общности рѣшенія можно придать тремъ изъ корней $Q(u)$ напередъ заданныя значенія (удовлетворяющія, впрочемъ, условію, что нѣкоторыя функціи отъ нихъ не обращаются въ нуль).

Дѣйствительно, полагая

$$y' = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}$$

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

мы можемъ приведеніе (180) замѣнить другимъ ему аналогичнымъ:

$$(215) \qquad \begin{aligned} \int \frac{\varphi_1(x)dx}{\sqrt{R(x)}} &= \int \frac{dy'}{\sqrt{S(y')}} + \int \frac{dz'}{\sqrt{S(z')}} \\ \int \frac{\psi_1(x)dx}{\sqrt{R(x)}} &= \int \frac{y'dy'}{\sqrt{S(y')}} + \int \frac{z'dz'}{\sqrt{S(z')}} \end{aligned}$$

въ которыхъ $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ другія цѣлыя функціи, а

$$S(y') = (y' - a'_1)(y' - a'_2)(y' - a'_3)(y' - a'_4)(y' - a'_5)(y' - a'_6)$$

При заданныхъ напередъ a'_1, a'_2, a'_3 $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$, $\frac{\delta}{\gamma}$ опредѣляются изъ уравненій

$$\begin{aligned} \alpha a_1 + \beta + a'_1(\gamma a_1 + \delta) &= 0 \\ \alpha a_2 + \beta + a'_2(\gamma a_2 + \delta) &= 0 \\ \alpha a^3 + \beta + a'_3(\gamma a_3 + \delta) &= 0, \end{aligned}$$

но при этомъ во первыхъ должны имѣть

$$(287) \qquad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a'_1 \\ 1_1 & a_2 & a'_2 \\ 1 & a_3 & a'_3 \end{vmatrix} \gtrless 0$$

и, кромѣ того, для того, чтобы полиномъ $S(y)$ былъ 6-ой степени т. е. ни одна изъ величинъ a'_4, a'_5, a'_6 не равнялась бы ∞:

$$(288) \qquad \begin{aligned} \gamma a_4 + \delta &\gtrless 0 \\ \gamma a_5 + \delta &\gtrless 0 \\ \gamma a_6 + \delta &\gtrless 0. \end{aligned}$$

Рѣшеніе поставленной нами задачи сводится, какъ мы показали, къ нахожденію коэффиціентовъ функцій $\omega_0(x)$, $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$: l_0, $l_1 \dots$

m_0, $m_1 \cdots n_0$, $n_1 \cdots$ и условныхъ уравненій для коэффиціентовъ или корней $R(x)$, при которыхъ имѣютъ мѣсто уравненія (187) и (205)

$$\omega_0(x)u^2+\omega_1(x)u+\omega_2(x)=0 \tag{187}$$

$$\frac{\sqrt{Q(u)}}{\sqrt{R(x)}}=M(u,x). \tag{205}$$

Каждому значенію q, степени полиномовъ $\omega_0(x)$, $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$, будетъ соотвѣтствовать по серіи условій указанныхъ въ предыдущемъ §.

Процессъ рѣшенія поставленной задачи (который можно назвать интегрированіемъ при помощи ультраэллиптическихъ интеграловъ перваго класса) будетъ аналогиченъ тому процессу, который былъ изложенъ въ § 4 при рѣшеніи задачи о приведеніи (69) ультраэллиптическаго интеграла къ одному ультраэллиптическому интегралу I го класса А, именно, полагая послѣдовательно $q=1.2.3\cdots q_1$, для каждаго изъ этихъ случаевъ разыскиваемъ условныя уравненія, при которыхъ возможно совмѣстное существованіе уравненій (181) и (205). Для каждаго значенія $q=q_1$, соотвѣтственно различнымъ комбинаціямъ величинъ a_i и α_i, изслѣдованнымъ въ § 8, получится конечное число группъ условныхъ уравненій. Но въ этомъ процессѣ можно предполагать q числомъ четнымъ и пропускать всѣ случаи, соотвѣтствующія нечетнымъ значеніямъ q.

Въ самомъ дѣлѣ, какъ мы сейчасъ докажемъ, если приведеніе (180) существуетъ при $q=q_1$, то подобное же приведеніе должно имѣть мѣсто и при другомъ значеніи q, но, обязательно четномъ.

По доказанному выше, если приведеніе (180) имѣетъ мѣсто, то оно имѣетъ мѣсто при произвольныхъ значеніяхъ a_1, a_2, a_3.

Мы распорядимся a_1 такимъ образомъ, что среди величинъ (262) ему существующихъ нѣтъ величинъ $x=\alpha_i$. Для этого достаточно подчинить α_i условію

$$\omega_2(\alpha_i)a^2_i+\omega_1(\alpha_i)a_i+\omega_0(\alpha_i) \gtreqless 0\,^{1)}. \tag{289}$$

[1]) Для упрощенія изслѣдуемаго процесса, можно также положить

$$\omega_2(\alpha_i)a_2{}^2+\omega_1(\alpha_i)a_2{}^2+\omega_0(\alpha_i) \gtreqless 0$$
$$\omega_2(\alpha_1)a_3{}^2+\omega_1(\alpha_1)a_3{}^2+\omega_0(\alpha_i) \gtreqless 0$$

По доказанному въ § 7, степень q полинома

$$\omega_2(x)u^2+\omega_1(x)u+\omega_0(x)$$

относительно x должна быть обязательно четная.

Посмотримъ теперь, сколько условныхъ уравненій мы будемъ имѣть для $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{2m}$ корней полинома $R(x)$.

Число всѣхъ условныхъ уравненій, перечисленныхъ въ § 7 для $a_1, a_2 \cdots \alpha_1\ \alpha_2 \cdots l_0\ l_1 \cdots$ есть

$$2m+6h$$

если

$$q=2h.$$

Тремъ изъ величинъ: $a_i : a_1, a_2, a_3$ можно дать произвольныя значенія. Исключая a_4, a_5, a_6, l_0, $l_1 \cdots m_0$, $m_1 \cdots n_0$, $n_1 \cdots$, число которыхъ $3q+6=6h+6$ получаемъ условныя уравненія, которымъ должны удовлетворять $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{2m}$. Число этихъ уравненій

$$2m+6h-(6h+6)=2m-6$$

и, слѣдовательно не будетъ зависѣть отъ значенія q. Благодаря этому изслѣдованный выше процессъ является безконечнымъ, какъ въ задачѣ о приведеніи ультраэллиптическихъ интеграловъ къ эллиптическимъ, когда число условныхъ уравненій для корней $R(x)$ тоже не зависитъ отъ степени подстановки. Почему естественнымъ обобщеніемъ послѣдней задачи является не приведеніе ультраэллиптическаго интеграла къ одному ультраэллиптическому интегралу перваго класса, разсмотрѣнное въ § 4, но приведеніе этого интеграла къ суммѣ такихъ интеграловъ при разныхъ аргументахъ.

ПРИБАВЛЕНІЕ I.

Во время печатанія настоящей работы мы узнали о существованіи еще одной статьи Кенигсбергера на эту тему, а именно въ „Mathematische Annalen“ B. XV. 1879 г. подъ названіемъ: „Ueber die Reduction Abel'scher Integrale auf elliptische und hyperelliptische", гдѣ Кенигсбергеръ указываетъ на возможность обобщенія имъ полученныхъ результатовъ, касающихся связи между комплекснымъ умноженіемъ и приведеніемъ Абелевыхъ интеграловъ типа $\int\varphi(x)(\sqrt[n]{R(x)})^r dx$ къ эллиптическимъ интеграламъ, на случай ультраэллиптическихъ интеграловъ. Причемъ указываетъ, что на основаніи „извѣстныхъ принциповъ" можно вывести, что для случая ультраэллиптическихъ интеграловъ перваго класса $n=2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12$ т. е. такимъ образомъ сообщаетъ результаты указанныя нами въ началѣ нашей статьи. Въ этой статьѣ Кенигсбергеръ главнымъ образомъ разбираетъ случай приведенія типа:

$$\int\varphi(x)(\sqrt[2p+1]{R(x)})^r dx=\sum_{i=1}^{i=p}\frac{f(z_i)dz_i}{\sqrt{z_i^{2p+1}-1}}.$$

ПРИБАВЛЕНІЕ II.

Во время печатанія настоящей статьи, продолжая наши изслѣдованія мы значительно обобщили полученныя въ настоящей статьѣ результаты и въ недалекомъ будущемъ надѣемся помѣстить ихъ въ „Извѣстіяхъ". Эти изслѣдованія будутъ обнимать не только случаи приведенія Абелевыхъ интеграловъ перваго рода къ иншимъ трансцендентнымъ, но будутъ также относиться и къ приведеніямъ интеграловъ второго и третьяго рода, частными случаями которыхъ является интегрированіе при помощи алгебраическихъ и логариѳмическихъ функцій.

$$\frac{d^n \zeta_{1kps}}{dx^n} \backsim \frac{A\, e^{\pi A_k i}}{2^{A_k - 1}} \sum_{s=0}^{n} [n]_s\, \vartheta_{ks}\, x^{-s}$$

(272)

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \left(-\frac{p}{2}\right)_s}{(2\sqrt{x})^p} \sum_{q=0}^{p} (-2)^q A^{(k)}_{p-q,q}\, \Gamma(A_k + p - q)\, \Gamma(\nu + q + \tfrac{1}{2})\,.$$

Правая часть асимптотическаго равенства представляетъ результатъ n—кратнаго дифференцированія по x правой части асимптотическаго равенства (191).

Исходя изъ соотношенія (236), такимъ же образомъ придемъ къ асимптотическому равенству:

$$\frac{d^n \zeta_{2kps}}{dx^n} \backsim \frac{B}{2^{A_k - 1}} \sum_{s=0}^{n} [n]_s\, \vartheta'_{ks}\, x^{-s}$$

(273)

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{p}{2}\right)_s}{(2\sqrt{x})^p} \sum_{q=0}^{p} (-2)^q A^{(k)}_{p-q,q}\, \Gamma(A_k + p - q)\, \Gamma(\nu + q + \tfrac{1}{2}),$$

гдѣ

$$\vartheta'_{ks} = \frac{d^{n-s}\left[(\sqrt{x})^{-\nu - A_k - \frac{1}{2}}\, e^{+2a_k \sqrt{x}} \right]}{dx^{n-s}}\,. \qquad (274)$$

Замѣтимъ, что правая часть асимптотическаго равенства (273) представляетъ результатъ n— кратнаго дифференцированія по x правой части асимптотическаго равенства (239).

Асимптотическія равенства (272) и (273) сохраняютъ силу, если на мѣсто ζ_{1kps} и ζ_{2kps} поставимъ любое продолженіе этихъ интеграловъ, о которыхъ шла рѣчь въ § 3. А посему, если черезъ $S^{(n)}_{1k}$ и $S^{(n)}_{2k}$ обозначимъ правыя части асимптотическихъ равенствъ (272) и (273), то будемъ имѣть:

$$\frac{d^n Z_{1kps}}{dx^n} \sim S_{1k}^{(n)};$$

(275)

$$\frac{d^n Z_{2kps}}{dx^n} \sim S_{2k}^{(n)}.$$

Такъ какъ, согласно обнаруженному въ § 3, продолженія функцій Z_{1kps} и Z_{2kps} выражаются линейными цѣлыми и однородными формулами съ постоянными коэффиціентами отъ подобныхъ же функцій, принадлежащихъ къ разнымъ угламъ, то производная по x любого порядка отъ асимптотическаго представленія продолженія какой-либо изъ этихъ функцій есть асимптотическое представленіе производной того же порядка отъ этого продолженія.

§ 7.

О функціяхъ $Z_{1k+np+ns+n}$ и $Z_{2k+np+ns+n}$ и ихъ асимптотическихъ представленіяхъ для весьма большихъ значеній $|x|$. Основная система линейно независимыхъ интеграловъ уравненія (43). Объ асимптотическомъ представленіи всякаго интеграла этого уравненія для весьма большихъ значеній $|x|$.

Обозначая черезъ a_{n+k}, a_{n+p} и a_{n+s} соотвѣтственно $-a_k$, $-a_p$ и $-a_s$, гдѣ k, p и s берутся изъ ряда чиселъ: 1, 2, ..., n, обнаружимъ, что *функціи $Z_{1k+np+ns+n}$ и $Z_{2k+np+ns+n}$ могутъ быть асимптотически представлены для весьма большихъ значеній $|x|$ слѣдующимъ образомъ:*

$$Z_{1k+np+ns+n} \sim \frac{A}{B} e^{-\pi(\nu+\frac{1}{2})i} S_{2k};$$

(276)

$$Z_{2k+np+ns+n} \sim \frac{B}{A} e^{-\pi(\nu+\frac{1}{2})i} S_{1k}.$$

При этомъ первое асимптотическое равенство сохраняетъ силу въ области:

$$-4\pi-2\varphi_k+\Delta<argx<-2\varphi_k-\Delta;$$

(277)

$$-3\pi-2\alpha_{ks}+\varepsilon<argx<-\pi-2\alpha_{kp}-\varepsilon,$$

а второе въ области (79) *измѣняемости перемѣннаго* $argx=\varphi$.

Для доказательства этого положенія поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Въ области измѣняемости перемѣннаго $argx$:

$$-4\pi-2\varphi_k+\Delta<argx<-2\varphi_k-\Delta;$$

(278)

$$-3\pi-2\omega_{kps}<argx<-\pi-2\omega_{kps}$$

имѣетъ мѣсто соотношеніе:

$$Z_{1k+np+ns+n}=$$

$$=2A(\sqrt{x})^{-\nu-\frac{1}{2}}\int_{-\infty\sigma_{kps}}^{(-a_k)}e^{-2t\sqrt{x}}\,t^{-\nu-\frac{3}{2}}\left(t^2-a_1^{\,2}\right)^{A_1-1}\cdots\left(t^2-a^2{}_n\right)^{A_n-1}dt$$

(279)

$$\int_{-\infty}^{(0)}e^{\tau}\,\tau^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\tau}{4t\sqrt{x}}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}d\tau.$$

Пусть будетъ далѣе:

$$t=-a_k-\eta. \tag{280}$$

Тогда будемъ имѣть:

$$Z_{1k+np+ns+n}=$$

$$=2Ae^{-\pi(\nu+\frac{1}{2})i}(\sqrt{x})^{-\nu-\frac{1}{2}}e^{+2a_k\sqrt{x}}\int_{+\infty\sigma_{kps}}^{(0)}e^{+2\eta\sqrt{x}}\,\eta^{A_k-1}\,d\eta$$

(281)

$$\int_{-\infty}^{(0)}e^{\tau}\,\tau^{\nu-\frac{1}{2}}\,\Phi\left(\eta,-\frac{\tau}{\sqrt{x}}\right)d\tau.$$

Къ этому интегралу примѣняется дословно пріемъ, при помощи котораго нами вычисленъ интегралъ (**193**). При этомъ получаемъ:

$$Z_{1k+np+ns+n} \backsim$$

$$\backsim A \frac{e^{-\pi(\nu+\frac{1}{2})i} (\sqrt{x})^{-\nu-A_k-\frac{1}{2}} e^{+2a_k\sqrt{x}}}{2^{A_k-1}}.$$

(282)

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2\sqrt{x})^p} \sum_{q=0}^{p} (-2)^q A^{(k)}_{p-q,q} \Gamma(\nu+q+\tfrac{1}{2}) \Gamma(A_k+p-q).$$

Такъ какъ правая часть асимптотическаго равенства (282) есть $\frac{e^{-\pi(\nu+\frac{1}{2})i}}{B} A_{S_{2k}}$, то первое изъ соотношеній (276) установлено, если $arg x = \varphi$ не выходитъ изъ границъ (278). Но имѣя въ виду изложенное въ началѣ § 6 настоящей главы, утверждаемъ, что оно сохраняетъ силу, пока φ содержится въ границахъ (277).

Обратимся теперь къ функціи $Z_{2k+np+ns+n}$. Въ области (62) измѣненія перемѣннаго φ эта функція можетъ быть представлена такъ:

$$Z_{2k+np+ns+n} =$$

$$= 2B (\sqrt{x})^{-\nu-\frac{1}{2}} \int_{-\infty\sigma_{kps}}^{(-a_k)} e^{2t\sqrt{x}} t^{-\nu-\frac{3}{2}} \left(t^2-a^2_1\right)^{A_1-1} \cdots \left(t^2-a^2_n\right)^{A_n-1} dt$$

(283)

$$\int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{\tau}{4t\sqrt{x}}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} d\tau.$$

Пользуясь подстановкой (280), приведемъ этотъ интегралъ къ виду:

$$Z_{2k+np+ns+n} =$$

$$= 2Be^{-\pi(\nu+\frac{1}{2})i} (\sqrt{x})^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{-2a_k\sqrt{x}} \int_{+\infty\sigma_{kps}}^{(0)} e^{-2\eta\sqrt{x}} \eta^{A_k-1} d\eta$$

(284)

$$\int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}} \Phi\left(\eta, \frac{\tau}{\sqrt{x}}\right) d\tau.$$

Множитель при $2Be^{-\pi(\nu+\frac{1}{2})i}$ ничѣмъ не отличается отъ множителя при $2A$ въ правой части равенства (99).

А посему можемъ написать:

$$Z_{2k+np+ns+n} \infty$$

$$\infty \frac{B e^{\pi\left(A_k-\nu-\frac{1}{2}\right)i} (\sqrt{x})^{-\nu-A_k-\frac{1}{2}} e^{-2a_k\sqrt{x}}}{2^{A_k-1}} \cdot \tag{285}$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2\sqrt{x})^p} \sum_{q=0}^{p} (-2)^q A_{p-q,q}^{(k)} \Gamma(\nu+q+\tfrac{1}{2}) \Gamma(A_k+p-q).$$

Правая часть асимптотическаго равенства представляетъ $e^{-\pi\left(\nu+\frac{1}{2}\right)i} \frac{B}{A} S_{11}$.

Значитъ, второе изъ соотношеній (276) сохраняетъ силу въ области (62). Но при помощи пріема, выясненнаго въ началѣ § 6, убѣждаемся въ справедливости его во всей области (79) измѣненія φ.

Въ виду установленнаго положенія, въ дальнѣйшемъ мы ограничимся разсмотрѣніемъ только функцій Z_{1kps} и Z_{2kps}, гдѣ значки k, p и s берутся изъ ряда чиселъ: $1, 2, \ldots, n$. Изъ всевозможныхъ этихъ функцій каждаго рода выберемъ n такимъ, въ обозначеніи которыхъ входятъ различные значки k, и таковыя $2n$ функцій назовемъ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{gathered} Z_{11}, Z_{12}, \cdots, Z_{1n}; \\ Z_{21}, Z_{22}, \cdots, Z_{2n}, \end{gathered} \tag{286}$$

а асимптотическія ихъ представленія для весьма большихъ значеній $|x|$ будемъ по прежнему обозначать соотвѣтственно такъ:

$$\begin{gathered} S_{11}, S_{12}, \cdots, S_{1n}; \\ S_{21}, S_{22}, \cdots, S_{2n}. \end{gathered} \tag{287}$$

Пусть этимъ послѣднимъ принадлежитъ общая область T измѣняемости перемѣннаго φ. Докажемъ тогда, что *между $2n$ функціями* (286) *не можетъ существовать зависимости вида*:

(288) $$\sum_{k=1}^{n} c_k Z_{1k} + \sum_{k=1}^{n} d_k Z_{2k} = o,$$

гдѣ c_k и d_k суть постоянныя числа, изъ которыхъ не всѣ нули.

Для этой цѣли поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Выберемъ въ области T такое значеніе φ_o перемѣннаго φ, при которомъ не имѣютъ мѣста равенства: $R(a_j\sqrt{x}) = R(a_s\sqrt{x})$ и $R(a_j\sqrt{x}) + R(a_s\sqrt{x}) = o$, гдѣ j и s суть два различныя числа ряда: 1, 2, ..., n; при чемъ буква R, поставленная предъ выраженіемъ, означаетъ дѣйствительную его часть. Такое значеніе φ_o всегда можно выбрать, такъ какъ $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|$ представляютъ различныя числа. Условимся обозначать x при $\varphi = \varphi_o$ черезъ x_o. Допустимъ тогда, что

(289) $$R(a_1\sqrt{x_o}) > R(a_2\sqrt{x_o}) > \cdots\cdots > R(a_n\sqrt{x_o}).$$

Обнаружимъ предварительно, что не можетъ имѣть мѣсто ни одно изъ соотношеній:

(290) $$\sum_{k=1}^{n} c_k Z_{1k} = o$$

и

(291) $$\sum_{k=1}^{n} d_k Z_{2k} = o.$$

Остановимся сперва на соотношеніи (290). Пусть будутъ:

(292) $$Z_{1k} = e^{-2a_k\sqrt{x}} (\sqrt{x})^{-\nu - A_k - \frac{1}{2}} K_{1k};$$
$$Z_{2k} = e^{+2a_k\sqrt{x}} (\sqrt{x})^{-\nu - A_k - \frac{1}{2}} K_{2k}.$$

При этомъ

$$K_{1k}^{o} = \lim_{x=+\infty e^{\varphi_o i}} K_{1k} = \frac{e^{\pi A_k i} A A_{o,o}^{(k)} \overline{\Gamma}(A_k) \overline{\Gamma}(\nu+\frac{1}{2})}{2^{A_k-1}};$$

$$K_{2k}^{o} = \lim_{x=+\infty e^{\varphi_o i}} K_{2k} = \frac{B A_{o,o}^{(k)} \overline{\Gamma}(A_k) \overline{\Gamma}(\nu+\frac{1}{2})}{2^{A_k-1}}. \tag{293}$$

Принимая во вниманіе первое изъ равенствъ (292), соотношеніе (290) можемъ представить такъ:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k (\sqrt{x})^{A_n-A_k} e^{-2(a_k-a_n)\sqrt{x}} K_{1k} = o. \tag{294}$$

Полагая здѣсь $x = +\infty e^{\varphi_o i}$ и принимая во вниманіе неравенства (289), будемъ имѣть: $c_n K_{1n}^{o} = o$, или $c_n = o$. Соотношеніе (290) тогда можно будетъ написать такъ:

$$\sum_{k=1}^{n-1} c_k (\sqrt{x})^{A_{n-1}-A_k} e^{-2(a_k-a_{n-1})\sqrt{x}} K_{1k} = o. \tag{295}$$

Пусть въ этомъ соотношеніи будетъ $x = +\infty e^{\varphi_o i}$. Найдемъ: $c_{n-1} K_{1\,n-1}^{o} = o$, или $c_{n-1} = o$. Такимъ же путемъ убѣждаемся, что $c_{n-2} = c_{n-3} = \cdots = c_1 = o$. Итакъ, соотношеніе (290) не можетъ имѣть мѣсто, разъ не всѣ изъ величинъ $c_1, c_2, \cdots, c_n$ суть нули.

Разсмотримъ далѣе соотношеніе (291). Въ силу второго изъ равенствъ (292), представимъ его въ видѣ:

$$\sum_{k=1}^{n} d_k (\sqrt{x})^{A_1-A_k} e^{-2(a_1-a_k)\sqrt{x}} K_{2k} = o. \tag{296}$$

Полагаемъ здѣсь $x = +\infty e^{\varphi_o i}$. Получимъ: $d_1 K_{21}^{o} = o$, или $d_1 = o$. Послѣ этого соотношеніе (291) можемъ написать такъ:

$$\sum_{k=2}^{n} d_k (\sqrt{x})^{A_2 - A_k} e^{-2(a_2 - a_k)\sqrt{x}} K_{2k} = o. \tag{297}$$

Полагая въ немъ $x = +\infty e^{\varphi_0 i}$, будемъ имѣть: $d_2 K^o_{22} = o$, или $d_2 = o$. Такимъ же путемъ найдемъ: $d_3 = d_4 = \cdots = d_n = o$. Значитъ, соотношеніе (291) не имѣетъ мѣста, разъ не всѣ изъ величинъ $d_1, d_2, \cdots, d_n$ нули.

Перейдемъ теперь къ доказательству невозможности соотношенія (288). Принимая во вниманіе равенства (292), представимъ его слѣдующимъ образомъ:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k (\sqrt{x})^{-A_k} e^{-2a_k\sqrt{x}} K_{1k} + \sum_{k=1}^{n} d_k (\sqrt{x})^{-A_k} e^{+2a_k\sqrt{x}} K_{2k} = o. \tag{298}$$

Пусть удовлетворяется неравенство $R(a_1\sqrt{x_0}) + R(a_n\sqrt{x_0}) < o$. Тогда, послѣ умноженія обѣихъ частей равенства (298) на $(\sqrt{x})^{A_n} e^{+2a_n\sqrt{x}}$, приведемъ его къ виду:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k (\sqrt{x})^{A_n - A_k} e^{-2(a_k - a_n)\sqrt{x}} K_{1k} + \tag{299}$$
$$+ e^{2(a_1 + a_n)\sqrt{x}} \sum_{k=1}^{n} d_k (\sqrt{x})^{A_n - A_k} e^{-2(a_1 - a_k)\sqrt{x}} K_{2k} = o.$$

Полагая здѣсь $x = \infty e^{\varphi_0 i}$, найдемъ: $c_n K^o_{1n} = o$, или $c_n = o$. Если же $R(a_1\sqrt{x_0}) + R(a_n\sqrt{x_0}) > o$, то, умноживъ соотношеніе (298) на $e^{-2a_1\sqrt{x}} (\sqrt{x})^{A_1}$, можемъ написать его въ формѣ:

$$e^{-2(a_1 + a_n)\sqrt{x}} \sum_{k=1}^{n} c_k (\sqrt{x})^{A_1 - A_k} e^{-2(a_k - a_n)\sqrt{x}} K_{1k} + \tag{300}$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} d_k (\sqrt{x})^{A_1 - A_k} e^{-2(a_1 - a_k)\sqrt{x}} K_{2k} = o.$$

Пусть будетъ $x = +\infty e^{\varphi_0 i}$ въ соотношеніи (300). Будемъ имѣть: $d_1 K^o_{21} = o$, или $d_1 = o$. Разсмотримъ полученные въ обоихъ случаяхъ результаты. Если $c_n = o$, то соотношеніе (298) обратится въ слѣдующее:

$$\sum_{k=1}^{n-1} c_k \left(\sqrt{x}\right)^{-A_k} e^{-2a_k\sqrt{x}} K_{1k} + \sum_{k=1}^{n} d_k \left(\sqrt{x}\right)^{-A_k} e^{+2a_k\sqrt{x}} K_{2k} = o. \tag{301}$$

Пусть будетъ $R\,(a_1\sqrt{x_0}) + R\,(a_{n-1}\sqrt{x_0}) < o$. Соотношеніе (301) представимъ въ формѣ:

$$\sum_{k=1}^{n-1} c_k \left(\sqrt{x}\right)^{A_{n-1}-A_k} e^{-2(a_k-a_{n-1})\sqrt{x}} K_{1k} + e^{2(a_1+a_{n-1})\sqrt{x}} \cdot$$
$$\sum_{k=1}^{n} d_k \left(\sqrt{x}\right)^{A_{n-1}-A_k} e^{-2(a_1-a_k)\sqrt{x}} K_{2k} = o. \tag{302}$$

Полагаемъ здѣсь $x = +\infty e^{\varphi_0 i}$. Найдемъ: $K^o_{1n-1}\, c_{n-1} = o$, или $c_{n-1} = o$. Если же $R\,(a_1\sqrt{x_0}) + R\,(a_{n-1}\sqrt{x_0}) > o$, то, представивъ соотношеніе (301) въ формѣ:

$$e^{-2(a_1+a_{n-1})\sqrt{x}} \sum_{k=1}^{n-1} c_k \left(\sqrt{x}\right)^{A_1-A_k} e^{-2(a_k-a_{n-1})\sqrt{x}} K_{1k} +$$
$$\sum_{k=1}^{n} d_k \left(\sqrt{x}\right)^{A_1-A_k} e^{-2(a_1-a_k)\sqrt{x}} K_{2k} = 0 \tag{303}$$

и полагая въ немъ: $x = +e^{\varphi_0 i}$, будемъ имѣть: $d_1 K^o_{21} = o$, или $d_1 = o$. Остановимся теперь на случаѣ соотношенія (288), когда въ немъ $d_1 = o$. Если $R\,(a_2\sqrt{x_0}) + R\,(a_n\sqrt{x_0}) < o$, то напишемъ его въ видѣ:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \left(\sqrt{x}\right)^{A_n - A_k} e^{-2(a_k - a_n)\sqrt{x}} K_{1k} + e^{2(a_1 + a_n)\sqrt{x}}\,.$$

(304)

$$\sum_{k=2}^{n} d_k \left(\sqrt{x}\right)^{A_n - A_k} e^{-2(a_2 - a_k)\sqrt{x}} K_{2k} = o.$$

Пусть будетъ здѣсь: $x = \infty e^{\varphi_0 i}$. Найдемъ: $c_n K^o_{1n} = o$, или $c_n = o$. Если же $R(a_2 \sqrt{x_o}) + R(a_n \sqrt{x_o}) > o$, то, написавъ соотношеніе (298) въ формѣ:

$$e^{-2(a_2 + a_n)\sqrt{x}} \sum_{k=1}^{n} c_k \left(\sqrt{x}\right)^{A_2 - A_k} e^{-2(a_k - a_n)\sqrt{x}} K_{1k} +$$

(305)

$$\sum_{k=2}^{n} A_k \left(\sqrt{x}\right)^{A_2 - A_k} e^{-2(a_2 - a_k)\sqrt{x}} K_{2k} = o$$

и полагая въ немъ $x = +\infty e^{\varphi_0 i}$, будемъ имѣть: $d_2 K^o_{22} = o$, $d_2 = o$. Поступая въ томъ же направленіи, въ концѣ концовъ придемъ къ заключенію, что или всѣ $c_1, c_2, \cdots, c_n$ нули, или же нулями $d_1, d_2, \cdots, d_n$. Въ первомъ случаѣ соотношеніе (288) обратится въ слѣдующее:

(306) $$\sum_{k=n'}^{n} d_k Z_{2k} = o,$$

гдѣ $o < n' \leqq n$, а во второмъ окажется:

(307) $$\sum_{k=1}^{n_1} c_k Z_{1k} = o\,,$$

гдѣ $o < n_1 \leqq n$. Но было доказано, что ни одно изъ этихъ соотношеній не имѣетъ мѣста, если величины группъ: $c_1, c_2, \cdots, c_n$ и $d_1, d_2, \cdots, d_n$ не нули. Итакъ, положеніе установлено.

Теперь безъ труда можемъ обнаружить, что *не можетъ суще ствовать соотношеніе вида:*

$$\sum_{k=1}^{n} c_k Z_{1k} + \sum_{k=1}^{n} d_k Z_{2k} + c = o, \tag{308}$$

разъ не всѣ постоянныя c_k, d_k и c *нули.*

Въ самомъ дѣлѣ, взявъ производную по x отъ обѣихъ частей равенства (308), получимъ:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \frac{dZ_{1k}}{dx} + \sum_{k=1}^{n} d_k \frac{dZ_{2k}}{dx} = o. \tag{309}$$

Но имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dZ_{1k}}{dx} &= e^{-2a_k\sqrt{x}} (\sqrt{x})^{-\nu-A_k-\frac{3}{2}} \overline{K}_{1k}; \\ \frac{dZ_{2k}}{dx} &= e^{+2a_k\sqrt{x}} (\sqrt{x})^{-\nu-A_k-\frac{3}{2}} \overline{K}_{2k}, \end{aligned}\right\} \tag{310}$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} \overline{K}_{1k} &= \sqrt{x}\,\frac{dK_{1k}}{dx} - \frac{\nu+A_k+\frac{1}{2}}{2\sqrt{x}} K_{1k} - a_k K_{1k}; \\ \overline{K}_{2k} &= \sqrt{x}\,\frac{dK_{2k}}{dx} - \frac{\nu+A_k+\frac{1}{2}}{2\sqrt{x}} K_{2k} + a_k K_{2k}; \end{aligned}\right\} \tag{311}$$

при чемъ:

$$\left.\begin{aligned} \overline{K}^0_{1k} &= \lim_{x=+\infty e^{\varphi_0 i}} \overline{K}_{1k} = -a_k K^0_{1k}; \\ \overline{K}^0_{2k} &= \lim_{x=+\infty e^{\varphi_0 i}} \overline{K}_{2k} = a_k K^0_{2k}. \end{aligned}\right\} \tag{312}$$

Въ виду соотношеній (310), (311) и (312), процессъ разсужденій, при помощи котораго доказана невозможность соотношенія (288), убѣждаетъ насъ, что равенство (309) возможно лишь при $c_k = d_k = o$. Изъ соотношенія (308) тогда будетъ слѣдовать, что и $c = o$. Значитъ, положеніе справедливо.

Вмѣстѣ съ тѣмъ обнаружено, что функціи (286) и произвольное постоянное число c представляютъ основную систему линейно независимыхъ интеграловъ уравненія (43). А посему всякій интегралъ Y этого уравненія (43) въ области T измѣняемости φ можетъ быть изображенъ такъ:

$$(313) \qquad Y = \sum_{k=1}^{n} a'_k Z_{1k} + \sum_{k=1}^{n} b'_k Z_{2k} + c',$$

гдѣ $a'_1, a'_2, \cdots, a'_n, b'_1, b'_2, \cdots, b'_n$ и c' суть надлежащимъ образомъ подобранныя постоянныя числа. Въ той же области для весьма большихъ значеній $|x|$ Y имѣетъ такое асимптотическое представленіе:

$$(314) \qquad Y \backsim \sum_{k=1}^{n} a'_k S_{1k} + \sum_{k=1}^{n} b'_k S_{2k} + c'.$$

Такъ какъ функціи Z_{1k} и Z_{2k} могутъ быть продолжены по способу, выясненному въ § 3, то и функція, стоящая въ правой части равенства (313), можетъ быть также продолжена внѣ области T по тому же способу. На этомъ пунктѣ подробнѣе мы остановимся въ концѣ настоящей главы, когда будемъ изслѣдовать уравненія 2-го и 4-го порядковъ, содержащіяся въ уравненіи (43). Обозначимъ далѣе черезъ T' сплошную область, заключенную въ области T, въ которой не имѣетъ мѣста равенство: $R(a_j \sqrt{x}) = R(a_s \sqrt{x})$, гдѣ j и s суть различныя числа ряда: $1, 2, \cdots, n$. Допустимъ, что во всей области T' сохраняетъ силу неравенство:

$$(315) \qquad R(a_1 \sqrt{x}) > R(a_2 \sqrt{x}) > \cdots > R(a_n \sqrt{x}).$$

Тогда асимптотическое представленіе (314) интеграла Y можетъ быть приведено къ болѣе простой формѣ. Имѣемъ прежде всего:

$$Y = c' + \frac{A a'_n e^{\pi A_n i}}{2^{A_n - 1}} (\sqrt{x})^{-\nu - A_n - \frac{1}{2}} e^{-2a_n \sqrt{x}} .$$

$$\left[\sum_{p=0}^{m} \frac{(-1)^p}{(2\sqrt{x})^p} \sum_{q=0}^{p} (-2)^q A^{(n)}_{p-q,q} \, \Gamma(A_n + p - q) \, \Gamma(\nu + q + \tfrac{1}{2}) + \frac{\eta_{nm}}{(\sqrt{x})^m} \right] +$$

$$+ \frac{B b'_1}{2^{A_1 - 1}} (\sqrt{x})^{-\nu - A_1 - \frac{1}{2}} e^{+2a_1 \sqrt{x}} . \tag{316}$$

$$\left[\sum_{p=0}^{m} \frac{1}{(2\sqrt{x})^p} \sum_{q=0}^{p} (-2)^q A^{(1)}_{p-q,q} \, \Gamma(A_1 + p - q) \, \Gamma(\nu + q + \tfrac{1}{2}) + \frac{\eta'_{1m}}{(\sqrt{x})^m} \right],$$

гдѣ

$$\eta_{nm} = \alpha_{nm} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a'_k}{a'_n} e^{\pi(A_k - A_n) i} \, 2^{A_n - A_k} (\sqrt{x})^{A_n - A_k + m} e^{-2(a_k - a_n)\sqrt{x}} .$$

$$\left[\sum_{p=0}^{m} \frac{(-1)^p}{(2\sqrt{x})^p} \sum_{q=0}^{p} (-2)^q A^{(k)}_{p-q,q} \Gamma(A_k + p - q) \, \Gamma(\nu + q + \tfrac{1}{2}) + \frac{\alpha_{km}}{(\sqrt{x})^m} \right];$$

$$\eta'_{1m} = \beta_{1m} + \sum_{k=2}^{n} 2^{A_1 - A_k} \frac{b'_k (\sqrt{x})^{A_1 - A_k + m}}{b'_1} e^{-2(a_1 - a_k)\sqrt{x}} . \tag{317}$$

$$\left[\sum_{p=0}^{m} \frac{1}{(2\sqrt{x})^p} \sum_{q=0}^{p} (-2)^q A^{(k)}_{p-q,q} \, \Gamma(A_k + p - q) \, \Gamma(\nu + q + \tfrac{1}{2}) + \frac{\beta_{km}}{(\sqrt{x})^m} \right].$$

Замѣтимъ, что $\frac{\alpha_{km}}{(\sqrt{x})^m}$ и $\frac{\beta_{km}}{(\sqrt{x})^m}$ означаютъ соотвѣтственно остаточные члены представленій функцій K_{1k} и K_{2k} (292). Въ виду состава (317) функцій η_{nm} и η'_{1m}, утверждаемъ, что эти послѣднія съ возрастаніемъ $|x|$, начиная съ нѣкоторыхъ значеній этого модуля, равномѣрно стремятся къ нулю, если φ не выходитъ изъ области T''. А посему для весьма большихъ значеній $|x|$ въ этой области функція Y можетъ быть асимптотически представлена слѣдующимъ образомъ:

$$Y \backsim a'_n S_{1n} + b'_1 S_{21} + c'. \tag{318}$$

§ 8.

Изслѣдованіе случая, когда въ уравненіи (43) *между числами* $A_1, A_2, \cdots, A_n$ *есть цѣлыя или нули.*

Въ предыдущихъ параграфахъ настоящей главы числа $A_1, A_2, \cdots, A_n$ мы считали отличными отъ цѣлыхъ или нулей. Теперь же мы остановимся на разсмотрѣніи этихъ послѣднихъ случаевъ. Пусть прежде всего A_k, гдѣ k означаетъ одно изъ чиселъ: $1, 2, \cdots, n$, будетъ цѣлымъ отрицательнымъ числомъ $-m_k$; при чемъ m_k можетъ быть и нулемъ. Нетрудно тогда сообразить, что въ числѣ интеграловъ уравненія (43) содержатся интегральные вычеты функцій $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$ относительно точки a_k. Въ самомъ дѣлѣ, интегралы (61) въ разсматриваемомъ случаѣ обращаются въ слѣдующіе:

$$\begin{aligned} \zeta_{1k} &= \int_{(a_k)} \theta_1(t)\,dt; \\ \zeta_{2k} &= \int_{(a_k)} \theta_2(t)\,dt, \end{aligned} \tag{319}$$

гдѣ (a_k) означаетъ окружность $q_k\, s_k\, s'_k\, q_k$ (чер. 8). Займемся вычисленіемъ перваго изъ интеграловъ (319). Разложимъ для этой цѣли функцію $\theta_1(t)$ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ перемѣннаго $t - a_k$. Будемъ имѣть:

$$\theta_1(t) =$$

$$= (t-a_k)^{-m_k-1}\left[\theta_{1k}(a_k) + \cdots\cdots + \frac{(t-a_k)^{m_k}}{m_k!}\,\frac{d^{m_k}\theta_{1k}(t)}{dt^{m_k}}\bigg|_{t=a_k} + \cdots\right], \tag{320}$$

гдѣ

$$\theta_{1k}(t) = (t-a_k)^{m_k+1}\,\theta_1(t). \tag{321}$$

Внеся въ первый изъ интеграловъ (319) на мѣсто функціи $\theta_1(t)$ ея представленіе (320) и выполняя надлежащія интеграціи, получимъ:

$$\zeta_{1k} = \frac{2\pi i}{m_k!}\frac{d^{m_k}\theta_{1k}(t)}{dt^{m_k}}\Bigg|_{t=a_k}. \tag{322}$$

Далѣе имѣемъ:

$$\frac{d^{m_k}\theta_{1k}(t)}{dt^{m_k}}\Bigg|_{t=a_k} = 2\sum_{s=o}^{m_k} c_s^{(k)} \frac{d^s\omega(\nu;xt^2)}{dt^s}\Bigg|_{t=a_k}, \tag{323}$$

гдѣ

$$c_s^{(k)} = [m_k]_s \frac{d^{m_k-s}}{dt^{m_k-s}}\Bigg[t^{-1}(t^2-a_1^2)^{A_1-1}\cdots \tag{323'}$$

$$(t^2-a^2_{k-1})^{A_{k-1}-1}(t+a_k)^{-m_k-1}(t^2-a^2_{k+1})^{A_{k+1}-1}\cdots(t^2-a^2_n)^{A_n-1}\Bigg]_{t=a_k}.$$

Найдемъ теперь выраженіе для $\dfrac{d^s\omega(\nu;xt^2)}{dt^s}\Bigg|_{t=a_k}$. Принимая во вниманіе первое изъ уравненій (1) главы I, находимъ уравненіе, которому удовлетворяютъ $\omega(\nu;xt^2)$ и $\omega_1(\nu;xt^2)$, разсматриваемыя какъ функціи t:

$$t\frac{d^2y}{dt^2} + (2\nu+1)\frac{dy}{dt} = 4xty. \tag{324}$$

Взявъ отъ обѣихъ частей уравненія (324) производную $k-2$-го порядка по t, будемъ имѣть:

$$t\frac{d^k y}{dt^k} + (2\nu+k-1)\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}} - 4xt\frac{d^{k-2}y}{dt^{k-2}} - 4(k-2)x\frac{d^{k-3}y}{dt^{k-3}} = o. \tag{325}$$

Давая k значенія: 2, 3, $\cdots$, s, изъ полученныхъ такимъ образомъ $s-1$ уравненій найдемъ:

$$t^{s-1}\frac{d^s y}{dt^s}=M_{1s}\frac{dy}{dt}+M_{2s}y, \tag{326}$$

гдѣ

$$M_{1s}=$$

$$(327)=\begin{vmatrix} o & 2\nu+s-1 & -4xt & -4(s-2)x & o & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ o & t & 2\nu+s-2 & -4xt & -4(s-3)x & o & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 8x & o & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & t & 2\nu+3 & -4xt \\ 4xt & o & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & o & t & 2\nu+2 \\ -2\nu-1 & o & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & o & t \end{vmatrix};$$

$$M_{2s}=$$

$$(328)=\begin{vmatrix} o & 2\nu+s-1 & -4xt & -4(s-2)x & o & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ o & t & 2\nu+s-2 & -4xt & -4(s-3)x & o & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ o & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & o & t & 2\nu+3 & -4xt \\ 4x & o & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & o & t & 2\nu+2 \\ 4xt & o & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & o & t \end{vmatrix}.$$

Введемъ далѣе обозначенія:

$$\underset{t=a_k}{M_{1s}}=M_{1s}^{(k)};\quad \underset{t=a_k}{M_{2s}}=M_{2s}^{(k)}. \tag{329}$$

Тогда на основаніи равенства (326), будемъ имѣть:

$$\frac{d^s\omega(\nu;xt^2)}{\underset{t=a_k}{dt^s}}=\frac{2M_{1s}^{(k)}x\omega'(\nu;a^2{}_kx)}{a_k^{s-2}}+\frac{M_{2s}^{(k)}\omega(\nu;a^2{}_kx)}{a_k^{s-1}}; \tag{330}$$

при чемъ:

$$\omega'(\nu;a^2{}_kx)=\frac{d\omega(\nu;a^2{}_kx)}{d(a^2{}_kx)}. \tag{331}$$

Въ силу результата (330) и равенства (323), соотношеніе (322) представимъ слѣдующимъ образомъ:

$$\zeta_{1k}=$$

$$=\frac{4\pi i}{m_k!}\Big[2x\omega'(\nu;a^2{}_kx)\sum_{s=0}^{m_k}\frac{c_s^{(k)}M_{1s}^{(k)}}{a_k^{s-2}}+\omega(\nu;a^2{}_kx)\sum_{s=0}^{m_k}\frac{c_s^{(k)}M_{2s}^{(k)}}{a_k^{s-1}}\Big]. \quad (332)$$

Такимъ же путемъ находимъ:

$$\zeta_{2k}=$$

$$=\frac{4\pi i}{m_k!}\Big[2x\omega'_1(\nu,a^2{}_kx)\sum_{s=0}^{m_k}\frac{c_s^{(k)}M_{1s}^{(k)}}{a_k^{s-2}}+\omega_1(\nu;a^2{}_kx)\sum_{s=0}^{m_k}\frac{c_s^{(k)}M_{2s}^{(k)}}{a_k^{s-1}}\Big], \quad (333)$$

гдѣ

$$\omega'_1(\nu;a^2{}_kx)=\frac{d\omega_1(\nu;a^2{}_kx)}{d\,a^2{}_kx)}. \quad (334)$$

Соотношенія (332) и (333) можно представить въ нѣсколько иной формѣ. Для этой цѣли обнаружимъ справедливость слѣдующихъ тождествъ:

$$\omega'(\nu;a^2{}_kx)=\omega(\nu+1;a^2{}_kx);$$

$$(335)$$

$$\omega'_1(\nu;a^2{}_kx)=\omega_1(\nu+1;a^2{}_kx).$$

Принимая во вниманіе первое изъ соотношеній (159) главы I, можемъ написать:

$$\omega'(\nu;a^2{}_kx)=$$

$$=\frac{\Gamma(\nu)}{2\Gamma(2\nu)\sqrt{a^2{}_kx}}\int_{-\infty}^{(-2)}e^{u\sqrt{a^2{}_kx}}u(u^2-4)^{\nu-\frac{1}{2}}du. \quad (336)$$

Далѣе, имѣемъ:

$$\omega(\nu+1;a^2{}_kx)=$$

$$=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+2)}\int_{-\infty}^{(-2)}e^{u\sqrt{a^2{}_kx}}(u^2-4)^{\nu+\frac{1}{2}}du. \quad (337)$$

При помощи однократной интеграціи по частямъ послѣднее соотношеніе представимъ въ слѣдующей формѣ:

$$\omega(\nu+1; a^2_k x) =$$

(338) $$= -\frac{(2\nu+1)\,\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+2)\sqrt{a^2_k x}}\int_{-\infty}^{(-2)} e^{u\sqrt{a^2_k x}}\, u(u^2-4)^{\nu-\frac{1}{2}}\, du\,.$$

Имѣя въ виду формулы:

$$\Gamma(\nu+1) = -\nu\,\Gamma(\nu);$$

(339)

$$\Gamma(2\nu+2) = 2\nu(2\nu+1)\,\Gamma(2\nu),$$ [1]

изъ соотношеній (336) и (338) заключаемъ о справедливости перваго изъ тождествъ (335),

Для доказательства справедливости второго изъ тождествъ (335), исходимъ изъ второго соотношенія (159) главы I при $z = a^2_k$. Имѣемъ прежде всего:

$$\omega'_1(\nu; a^2_k x) =$$

(340) $$= \frac{\Gamma(\nu)}{2\Gamma(2\nu)\sqrt{a^2_k x}}\int_{+\infty}^{(+2)} e^{u\sqrt{a^2_k x}}\, u(u^2-4)^{\nu-\frac{1}{2}}\, du.$$

Далѣе, находимъ:

$$\omega_1(\nu+1; a^2_k x) =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+2)}\int_{+\infty}^{(+2)} e^{u\sqrt{a^2_k x}}\,(u^2-4)^{\nu+\frac{1}{2}}\, du =$$

(341)

$$= \frac{-(2\nu+1)\,\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+2)\sqrt{a^2_k x}}\int_{+\infty}^{(+2)} e^{u\sqrt{a^2_k x}}\, u(u^2-4)^{\nu-\frac{1}{2}}\, du\,.$$

---

[1] См нашу работу: „О нѣкоторыхъ дифференціальныхъ и разностныхъ линейныхъ уравненіяхъ и пр.“. Стр. 16, формула (79).

Принимая во вниманіе формулы (339), на основаніи соотношеній (340) и (341) заключаемъ о справедливости второго изъ тождествъ (335).

Въ силу тождествъ (335), соотношенія (332) и (333) напишемъ слѣдующимъ образомъ:

$$\zeta_{1k}=$$

$$=\frac{4\pi i}{m_k!}\left[2x\omega(\nu+1;a^2_kx)\sum_{s=0}^{m_k}\frac{c_s^{(k)}M_{1s}^{(k)}}{a_k^{s-2}}+\omega(\nu;a^2_kx)\sum_{s=0}^{m_k}\frac{c_s^{(k)}M_{2s}^{(k)}}{a_k^{s-1}}\right];$$

(342)

$$\zeta_{2k}=$$

$$=\frac{4\pi i}{m_k!}\left[2x\omega_1(\nu+1;a^2_kx)\sum_{s=0}^{m_k}\frac{c_s^{(k)}M_{1s}^{(k)}}{a_k^{s-2}}+\omega_1(\nu;a^2_kx)\sum_{s=0}^{m_k}\frac{c_s^{(k)}M_{2s}^{(k)}}{a_k^{s-1}}\right].$$

Пусть будетъ теперь $A_k=n_k$, гдѣ n_k цѣлое положительное число, большее единицы. Тогда интегралами уравненія (43) будутъ слѣдующія выраженія:

$$\eta_{1kps}=\int_{R_\alpha}^{a_k}\theta_1(t)\,dt;$$

(343)

$$\eta_{2kps}=\int_{R_\alpha}^{a_k}\theta_2(t)\,dt.$$

При этомъ въ началѣ R_α прямолинейнаго пути $R_\alpha\,a_k$ (чер. 8) сохраняютъ силу условія (51) при $\alpha=\omega_{kps}$; $\varphi=arg x$ въ первомъ изъ этихъ интеграловъ подчиненъ требованіямъ (52), а во второмъ условіямъ (58). Займемся предварительно изысканіемъ асимптотическаго представленія интеграла η_{1kps} для весьма большихъ значеній $|x|$. Пользуясь подстановкой (98), приведемъ его къ виду:

$$\eta_{1kps}=$$

$$=-2A(\sqrt{x})^{-\nu-\frac{1}{2}}e^{-2a_k\sqrt{x}}\int_0^{+\infty\,\omega_{kps}}e^{-2\eta\sqrt{x}}\eta^{n_k-1}d\eta$$

(344)

$$\int_{-\infty}^{(0)}e^{\tau}\tau^{\nu-\frac{1}{2}}\Phi\left(\eta,\frac{\tau}{\sqrt{x}}\right)d\tau,$$

гдѣ $\overline{\Phi}\left(\eta, \frac{\tau}{\sqrt{x}}\right)$ представляетъ функцію $\Phi\left(\eta, \frac{\tau}{\sqrt{x}}\right)$ (100) послѣ замѣны въ этой послѣдней A_k черезъ n_k, а σ_{kps} имѣетъ значеніе (97'). Далѣе, имѣемъ:

$$\overline{\Phi}\left(\eta, \frac{\tau}{\sqrt{x}}\right) =$$

(345)
$$= \sum_{p=0}^{m} \sum_{q=0}^{p} \frac{B^{(k)}_{p-q,q}\, \eta^{p-q}\, \tau^{q}}{(\sqrt{x})^{q}} + r^{(k)}_{m},$$

гдѣ $B^{(k)}_{p-q,q}$ есть $A^{(k)}_{p-q,q}$ (102) послѣ замѣны въ этомъ послѣднемъ выраженіи A_k черезъ n_k, а $r^{(k)}_m$ получается изъ $R^{(k)}_m$ (101) при помощи той же самой замѣны. Предполагаемъ, что сумма (345) при $m = \infty$ равномѣрно и абсолютно сходится для всѣхъ значеній η и $\frac{\tau}{\sqrt{x}}$, удовлетворяющихъ условіямъ (103). Какъ въ двухъ предыдущихъ параграфахъ, такъ и здѣсь мы будемъ разсматривать лишь такія значенія $|x|$, которыя удовлетворяютъ условіямъ (115) и неравенству:

(346)
$$|x|^{\frac{p'}{q'}} < 2\,|r|\sqrt{|x|}\,;$$

при чемъ p' и q' имѣютъ тотъ же смыслъ, что и въ условіяхъ (115), а $r = |r|\, e^{\omega i_{kps}}$, гдѣ число $|r|$ подчинено ограниченію (117). Далѣе, подъ S будемъ по прежнему разумѣть $|x|^{\frac{p'}{q'}}$. Внеся въ интегралъ (344) на мѣсто функціи $\overline{\Phi}\left(\eta, \frac{\tau}{\sqrt{x}}\right)$ ея представленіе (345), получимъ:

$$\eta_{ikps} =$$

(347)
$$= -2A\,(\sqrt{x})^{-\nu-\frac{1}{2}}\, e^{-2a_k\sqrt{x}} \left[\sum_{p=0}^{m} \sum_{q=0}^{p} \frac{B^{(k)}_{p-q,q}\, \overline{\Gamma}(\nu+q+\frac{1}{2})\, p_{km}}{(\sqrt{x})^{q}} + j_{km}\right],$$

гдѣ

$$p_{km}=\int_0^{+\infty\sigma_{kps}} e^{-\eta\sqrt{x}}\,\eta^{n_k+p-q-1}\,d\eta\,;$$

$$j_{km}=\int_0^{+\infty\sigma_{kps}} e^{-2\eta\sqrt{x}}\,\eta^{n_k-1}\,d\eta\int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau}\,\tau^{\nu-\frac{1}{2}}\,r_m^{(k)}\,d\tau\,. \tag{348}$$

Вычислимъ сперва интегралъ p_{km}. При помощи подстановки (106) приведемъ его къ виду:

$$p_{km}=\frac{1}{(2\sqrt{x})^{n_k+p-q}}\int_0^{+\infty\sigma'_{kps}} e^{-\eta_1}\,\eta_1^{n_k+p-q-1}\,d\eta_1, \tag{349}$$

гдѣ σ'_{kps} имѣетъ значеніе (108). Такъ какъ $arg\sigma'_{kps}<\frac{\pi}{2}$, то процессъ разсужденій, подобный тому, при помощи котораго нами установлено равенство (105) главы I, приводитъ къ выводу:

$$\int_0^{+\infty\sigma'_{kps}} e^{-\eta_1}\,\eta_1^{n_k+p-q-1}\,d\eta_1=\int_0^{+\infty} e^{-\eta_1}\,\eta_1^{n_k+p-q-1}\,d\eta_1= \tag{350}$$

$$=\Gamma(n_k+p-q)\,.$$

А посему имѣемъ:

$$p_{km}=\frac{\Gamma(n_k+p-q)}{(2\sqrt{x})^{n_k+p-q}}\,. \tag{351}$$

Остается теперь вычислить j_{km} (348). Для этой цѣли представимъ этотъ интегралъ слѣдующимъ образомъ:

$$j_{km}=g_{km}+\left(1+e^{2\pi\nu i}\right)g'_{km}+j'_{km}, \tag{352}$$

гдѣ

$$g_{km} = \int_{r}^{+\infty\sigma_{kps}} e^{-2\eta\sqrt{x}} \eta^{n_k-1}\, d\eta \int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}} r_m^{(k)}\, d\tau ;$$

(353) $$g'_{km} = \int_{0}^{r} e^{-2\eta\sqrt{x}} \eta^{n_k-1}\, d\eta \int_{-\infty}^{-S} e^{\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}} r_m^{(k)}\, d\tau ;$$

$$j'_{km} = \int_{0}^{r} e^{-2\eta\sqrt{x}} \eta^{n_k-1}\, d\eta \int_{-S}^{(0)} e^{\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}} r_m^{(k)}\, d\tau .$$

Интегралъ g_{km} получается изъ интеграла K_{km} (119) черезъ умноженіе его на -1 и замѣну въ немъ A_k числомъ n_k. А посему, имѣя въ виду соотношеніе (135), можемъ написать:

(354) $$g_{km} = \frac{\gamma_{1km}^{(ps)}\, g_{km}^{(ps)}\, e^{-2|r|\sqrt{\rho}\cos\frac{\beta_{kps}}{2}}}{\sqrt{\rho}\,\cos\frac{\beta_{kps}}{2}},$$

гдѣ $g_{km}^{(ps)}$ есть число $K_{km}^{(ps)}$, найденное въ предположеніи, что $A_k = n_k$, а

(355) $$o < |\gamma_{1km}^{(ps)}| < 1 .$$

Обратимся теперь къ интегралу g'_{km} (353). Пользуясь подстановками (136), представимъ его въ видѣ:

(356) $$g'_{km} =$$
$$= -\frac{e^{\pi(\nu+\frac{1}{2})i + n_k\frac{\beta_{kps'}}{2} - S}}{(2\sqrt{x})^{n_k}} S^{\nu-\frac{1}{2}} \Big[\int_{o}^{\Delta_1} e^{-\eta_1 e^{\frac{\beta_{kps'}}{2}}} \eta_1^{n_k-1}\, d\eta_1$$
$$\int_{o}^{+\infty} e^{-\tau'} \left(1+\frac{\tau'}{S}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} r_{1m}^{(k)}\, d\tau',$$

гдѣ $r_{1m}^{(k)}$ есть $R_{1m}^{(k)}$ (138) послѣ замѣны въ этой послѣдней функціи A_k черезъ n_k, а Δ_1 имѣетъ значеніе (139). Обозначимъ черезъ $l_{km}^{(ps)}$ наибольшее значеніе функціи $e^{-\frac{\eta_1}{2}\cos\frac{\beta_{kps}}{2}} \eta_1^{n_k-1} e^{-\frac{\tau'}{2}} \left(1+\frac{\tau'}{S}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} |r_{1m}^{(k)}|$ въ области интеграціи въ интегралѣ правой части равенства (356). $l_{km}^{(ps)}$ есть функція ρ и φ, конечная для всѣхъ разсматриваемыхъ значеній этихъ перемѣнныхъ. Тогда можемъ написать:

$$|g'_{km}| < \frac{4e^{-\pi\nu''-S} S^{\nu'-\frac{1}{2}} l_{km}^{(ps)}\left(1-e^{-\frac{\Delta_1}{2}\cos\frac{\beta_{kps}}{2}}\right)}{(2\sqrt{\rho})^{n_k \cos\frac{\beta_{kps}}{2}}}. \tag{357}$$

Пусть будетъ $g_{km}^{'(ps)}$ множитель при $\dfrac{e^{-S} S^{\nu'-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{\rho})^{n_k}}$ въ правой части неравенства (357). Тогда это послѣднее напишемъ такъ:

$$|g'_{km}| < \frac{g_{km}^{'(ps)} S^{\nu'-\frac{1}{2}} e^{-S}}{(\sqrt{\rho})^{n_k \cos\frac{\beta_{kps}}{2}}}. \tag{358}$$

Отсюда заключаемъ:

$$g'_{km} = \frac{\gamma_{2km}^{(ps)} g_{km}^{'(ps)} S^{\nu'-\frac{1}{2}} e^{-S}}{(\sqrt{x})^{n_k \cos\frac{\beta_{kps}}{2}}}, \tag{359}$$

гдѣ

$$0 < \left|\gamma_{2km}^{(ps)}\right| < 1. \tag{359'}$$

Остается теперь вычислить интегралъ j'_{km} (353). При помощи подстановокъ (151) приведемъ его къ виду:

$$j'_{km} =$$

$$= \frac{e^{\pi(\nu+\frac{1}{2})i+n_k\frac{\beta_{kps}i}{2}}}{(2\sqrt{x})^{n_k}} \int_0^{\Delta_1} e^{-\eta_1 e^{\frac{\beta_{kps}i}{2}}} \eta_1^{n_k-1} d\eta_1 \int_S^{(0)} e^{-\tau'} \tau'^{\nu-\frac{1}{2}} r_{2m}^{(k)} d\tau', \tag{360}$$

гдѣ $r_{2m}^{(k)}$ есть $R_{2m}^{(k)}$ (153) при $A_k = n_k$. Далѣе имѣемъ:

$$j'_{km} =$$

(361) $$= \frac{e^{\pi(\nu+\frac{1}{2})i + n_k \frac{\beta_{kps}i}{2}}}{(2\sqrt{x})^{n_k}} \left[g_{1km} + g_{2km} \right],$$

гдѣ

(362) $$g_{1km} = \int_S^{\Delta_1} e^{-\eta_1 e^{\frac{\beta_{kps}i}{2}}} \eta_1^{n_k-1} d\eta_1 \int_S^{(o)} e^{-\tau'} \tau'^{\nu-\frac{1}{2}} r_{2m}^{(k)} d\tau';$$

$$g_{2km} = \int_o^S e^{-\eta_1 e^{\frac{\beta_{kps}i}{2}}} \eta_1^{n_k-1} d\eta_1 \int_S^{(o)} e^{-\tau'} \tau'^{\nu-\frac{1}{2}} r_{2m}^{(k)} d\tau'.$$

Интегралъ g_{1km} получается изъ интеграла G_{km} (155) черезъ умноженіе этого послѣдняго на -1 и замѣну A_k черезъ n_k. А посему, называя $\overline{g}_{1km}$ число $\overline{G}_{km}$ (161), найденное въ предположеніи, что $A_k = n_k$, можемъ написать:

(363) $$g_{1km} = \nu_{1km}\, \overline{g}_{1km}\, S^{\nu'-\frac{1}{2}} \frac{e^{-S\cos\frac{\beta_{kps}}{2}}}{\cos\frac{\beta_{kps}}{2}},$$

гдѣ

(363') $$o < |\nu_{1km}| < 1.$$

Вычислимъ, наконецъ, интегралъ g_{2km} (362). Разумѣя подъ δ_1 положительное число, не превосходящее наименьшаго изъ значеній перемѣннаго числа S, представимъ интегралъ g_{2km} слѣдующимъ образомъ:

$$g_{2km} =$$

(364) $$= \int_o^S e^{-\eta_1 e^{\frac{\beta_{kps}i}{2}}} \eta_1^{n_k-1} d\eta_1 \int_{\delta_1(o)} e^{-\tau'} \tau'^{\nu-\frac{1}{2}} r_{2m}^{(k)} d\tau' -$$

$$- \left(1 + e^{2\pi\nu i}\right) \int_o^S e^{-\eta_1 e^{\frac{\beta_{kps}i}{2}}} \eta_1^{n_k-1} d\eta_1 \int_{\delta_1}^S e^{-\tau'} \tau'^{\nu-\frac{1}{2}} r_{2m}^{(k)} d\tau',$$

гдѣ δ_1 (o) означаетъ окружность радіуса δ_1, описанную изъ точки $\tau'=o$, какъ центра. Принимая во вниманіе выраженіе (164) для τ', на основаніи соотношенія (364) имѣемъ:

$$
\begin{aligned}
&\left|g_{2km}\right| \\
&<\delta_1^{\nu'+\frac{1}{2}}\int_o^S e^{-\eta_1\cos\frac{\beta_{kps}}{2}}\eta_1^{n_k-1}\,d\eta_1\int_o^{2\pi} e^{-\delta_1\cos\theta_1-\nu''\theta_1}\left|r_{2m}^{(k)}\right|d\theta_1+ \\
&+\left(1+e^{-2\pi\nu''}\right)\int_o^S e^{-\eta_1\cos\frac{\beta_{kps}}{2}}\eta_1^{n_k-1}\,d\eta_1\int_{\delta_1}^S e^{-\tau'}\tau'^{\nu'-\frac{1}{2}}\left|r_{2m}^{(k)}\right|d\tau'.
\end{aligned}
\tag{365}
$$

Но

$$
\left|r_{2m}^{(k)}\right|<\frac{\mu_1\left(\dfrac{|\eta_1|}{2r_1}+\dfrac{|\tau'|}{\rho_1}\right)^{m+1}}{(\sqrt{\rho})^{m+1}\left(1-\gamma\rho^{\frac{p'}{q'}-\frac{1}{2}}\right)}, \tag{366}
$$

гдѣ μ_1 представляетъ наибольшее значеніе функціи $|\overline{\Phi}(u,v)|$ для значеній u и v, удовлетворяющихъ условіемъ (168), а γ имѣетъ значеніе (115'). Внеся въ интегралъ правой части неравенства (365) на мѣсто $\left|r_{2m}^{(k)}\right|$ верхнюю границу (366) значеній этой функціи, получимъ:

$$
\begin{aligned}
&\left|g_{2km}\right| \\
&<\frac{\mu_1}{(\sqrt{\rho})^{m+1}\left(1-\gamma\rho^{\frac{p'}{q'}-\frac{1}{2}}\right)}\Bigg[\delta_1^{\nu'+\frac{1}{2}}\int_o^S e^{-\eta_1\cos\frac{\beta_{kps}}{2}}\left(\frac{\eta_1}{2r_1}+\frac{\delta_1}{\rho_1}\right)^{m+1}\eta_1^{n_k-1}\,d\eta_1 \\
&\qquad\int_o^{2\pi} e^{-\delta_1\cos\theta_1-\nu''\theta_1}\,d\theta_1+ \\
&+\left(1+e^{-2\pi\nu''}\right)\int_o^S e^{-\eta_1\cos\frac{\beta_{kps}}{2}}\eta_1^{n_k-1}\,d\eta_1\int_{\delta_1}^S e^{-\tau'}\tau'^{\nu'-\frac{1}{2}} \\
&\qquad\left(\frac{\eta_1}{2r_1}+\frac{\tau'}{\rho_1}\right)^{m+1}d\tau'\Bigg].
\end{aligned}
\tag{367}
$$

Назовемъ t_{km} множитель при $\frac{1}{(\sqrt{\rho})^{m+1}}$ въ правой части неравенства (367). Тогда это неравенство перепишемъ такъ:

$$(368) \qquad |g_{km}| < \frac{t_{km}}{(\sqrt{\rho})^{m+1}}.$$

Отсюда находимъ:

$$(369) \qquad g_{2km} = \frac{\nu_{2km}\, t_{km}}{(\sqrt{x})^{m+1}},$$

гдѣ

$$(369') \qquad o < |\nu_{2km}| < 1.$$

Въ виду результатовъ (363 и (369), соотношеніе (361) представимъ такъ:

$$j'_{km} =$$

$$(370) \qquad = \frac{e^{\pi(\nu+\frac{1}{2})i + \frac{n_k \beta_{kps} i}{2}}}{(2\sqrt{x})^{n_k}} \left[\nu_{1km}\, \overline{g}_{1\,km}\, \frac{S^{\nu'-\frac{1}{2}}\, e^{-S\cos\frac{\beta_{kps}}{2}}}{\cos\frac{\beta_{kps}}{2}} + \nu_{2km} \frac{t_{km}}{(\sqrt{x})^{m+1}} \right].$$

Принимая теперь во вниманіе результаты: (352), (354), (359) и (370), интегралъ j_{km} (348) можемъ изобразить въ формѣ:

$$(371) \qquad j_{km} = \vartheta_{km}^{(ps)} + \frac{e^{\pi(\nu+\frac{1}{2})i + n_k \frac{\beta_{kps}}{2} i}\, \nu_{2km}\, t_{km}}{2^{n_k} (\sqrt{x})^{n_k+m+1}},$$

гдѣ функція $\vartheta_{km}^{(ks)}$ обладаетъ свойствомъ:

$$(372) \qquad \lim_{x = +\infty e^{\varphi i}} \vartheta_{km}^{(ps)} (\sqrt{x})^k = o$$

при любомъ положительномъ k. Введемъ далѣе обозначеніе:

$$\frac{\gamma_{km}^{(ps)}}{2^{n_k}(\sqrt{x})^{n_k+m}} = \vartheta_{km}^{(ps)} + \frac{e^{\pi(\nu+\frac{1}{2})i+n_k\frac{\beta_{kps}i}{2}}\nu_{km}t_{km}}{2^{n_k}(\sqrt{x})^{n_k+m+1}}. \tag{373}$$

Тогда будемъ имѣть:

$$j_{km} = \frac{\gamma_{km}^{(ps)}}{2^{n_k}(\sqrt{x})^{n_k+m}}. \tag{374}$$

Въ виду равенствъ (351) и (374), соотношеніе (347) приведемъ къ виду:

$$\eta_{1kps} = -\frac{A}{2^{n_k-1}}(\sqrt{x})^{-\nu-n_k-\frac{1}{2}}e^{-2a_k\sqrt{x}}. \tag{375}$$

$$\left[\sum_{p=o}^{m}\frac{1}{(2\sqrt{x})^p}\sum_{q=}^{p}2^q B_{p-q,q}^{(k)}\,\Gamma(\nu+q+\tfrac{1}{2})\,\Gamma(n_k+p-q)+\frac{\gamma_{km}^{(ps)}}{(\sqrt{x})^m}\right].$$

Изъ состава $\gamma_{km}^{(ps)}$:

$$\gamma_{km}^{(ps)} = 2^{n_k}(\sqrt{x})^{n_k+m}\vartheta_{km}^{(ps)} + \frac{e^{\pi(\nu+\frac{1}{2})i+n_k\frac{\beta_{kps}i}{2}}\nu_{2km}\,t_{km}}{\sqrt{x}} \tag{376}$$

легко видѣть, что функція $\gamma_{km}^{(ps)}$, подобно $\alpha_{km}^{(ps)}$ (185), съ возрастаніемъ $|x|$, начиная съ нѣкотораго значенія этого модуля, равномѣрно стремится къ нулю, если $arg x$ не выходитъ изъ границъ (62). А посему въ области, опредѣляемой этими границами, имѣетъ мѣсто асимптотическое равенство:

$$\eta_{1kps} \backsim -\frac{A}{2^{n_k-1}}(\sqrt{x})^{-\nu-n_k-\frac{1}{2}}e^{-2a_k\sqrt{x}}. \tag{377}$$

$$\sum_{p=o}^{\infty}\frac{1}{(2\sqrt{x})^p}\sum_{q=o}^{p}2^q B_{p-q,q}^{(k)}\,\Gamma(\nu+q+\tfrac{1}{2})\,\Gamma(n_k+p-q).$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ соотношенія (375) и (377) замѣняютъ соотвѣтственно равенства (187) и (191).

Перейдемъ теперь къ изысканію асимптотическаго представленія второго изъ интеграловъ (343). Пользуясь подстановкой (98), представимъ его слѣдующимъ образомъ:

$$\eta_{2kps}$$

$$= -2B(\sqrt{x})^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{+2a_k\sqrt{x}} \int_{o}^{+\infty a_{kps}} e^{+2\eta\sqrt{x}}\, \eta^{n_k-1}\, d\eta$$

(378) $$\int_{-\infty}^{(o)} e^{\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}}\, \overline{\Phi}\left(\eta, -\frac{\tau}{\sqrt{x}}\right) d\tau.$$

Далѣе, имѣемъ

$$\overline{\Phi}\left(\eta, -\frac{\tau}{\sqrt{x}}\right) =$$

(379) $$= \sum_{p=o}^{m} \sum_{q=o}^{p} \frac{(-1)^q B_{p-q,q}^{(k)} \eta^{p-q} \tau^q}{(\sqrt{x})^q} + \overline{r}_m^{(k)},$$

гдѣ $\overline{r}_m^{(k)}$ есть $\rho_m^{(k)}$ (194) въ предположеніи, что $A_k = n_k$. Замѣтимъ, что сумма (379) при $m = \infty$ равномѣрно и абсолютно сходится для тѣхъ же значеній перемѣнныхъ η и $\dfrac{\tau}{\sqrt{x}}$, какъ и сумма (345) при $m = \infty$. На перемѣнное x мы налагаемъ тѣ же ограниченія, какія мы предполагали при выводѣ асимптотическаго представленія интеграла η_{1kps} (343). Внеся въ интегралъ (378) на мѣсто функціи $\overline{\Phi}\left(\eta, -\dfrac{\tau}{\sqrt{x}}\right)$ ея представленіе (379), будемъ имѣть:

$$\eta_{2kps} = -2B(\sqrt{x})^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{-2a_k\sqrt{x}}\,.$$

(380)

$$\left[\sum_{p=o}^{m} \sum_{q=o}^{p} \frac{(-1)^q B_{p-q,q}^{(k)}\, \Gamma(\nu+q+\frac{1}{2})\, p_{km}}{(\sqrt{x})^q} + \overline{j}_{km}\right],$$

гдѣ

$$p_{km}=\int_0^{+\infty\sigma_{kps}} e^{+2\eta_1\sqrt{x}}\, \eta_1^{n_k+p-q-1}\, d\eta\,;$$

$$\bar{j}_{km}=\int_0^{+\infty\sigma_{kps}} e^{+2\eta\sqrt{x}}\, \eta^{n_k-1}\, d\eta \int_{\infty}^{(o)} e^{\tau}\, \tau^{\nu-\frac{1}{2}}\, \bar{r}_m^{(k)}\, d\tau', \tag{381}$$

гдѣ $\sigma_{kps}=e^{\omega_{kps'}}$. При помощи подстановки:

$$2\eta\sqrt{x}=-\eta_1 \tag{382}$$

представимъ выраженіе для $\bar{p}_{km}$ такъ:

$$\bar{p}_{km}=\frac{(-1)^{n_k+p+q}\int_0^{+\infty\bar{\sigma}_{kps}} e^{-\eta_1}\, \eta_1^{n_k+p-q-1}\, d\eta_1}{(2\sqrt{x})^{n_k+p-q}}, \tag{383}$$

гдѣ

$$\bar{\sigma}_{kps}=e^{\frac{\beta_{kps'}}{2}}; \tag{384}$$

при чемъ:

$$|\beta_{kps}|<\pi. \tag{384'}$$

Принимая во вниманіе неравенство (384′), на основаніи формулы (350) заключаемъ:

$$\bar{p}_{km}=\frac{(-1)^{n_k+p+q}\,\Gamma(n_k+p-q)}{(2\sqrt{x})^{n_k+p-q}}. \tag{385}$$

Далѣе:

$$\bar{j}_{km}=g_{km}+(1+e^{2\pi\nu i})\,\bar{g}'_{km}+\bar{j}'_{km}, \tag{386}$$

гдѣ

$$g_{km}=\int_r^{+\infty\sigma_{kps}} e^{+2\eta\sqrt{x}}\, \eta^{n_k-1}\, d\eta \int_{-\infty}^{(o)} e^{\tau}\, \tau^{\nu-\frac{1}{2}}\, \bar{r}_m^{(k)}\, d\tau;$$

$$\bar{g}'_{km}=\int_0^{r} e^{+2\eta\sqrt{x}}\, \eta^{n_k-1}\, d\eta \int_{-\infty}^{-S} e^{\tau}\, \tau^{\nu-\frac{1}{2}}\, \bar{r}_m^{(k)}\, d\tau; \tag{387}$$

$$\bar{j}'_{km}=\int_0^{r} e^{+2\eta\sqrt{x}}\, \eta^{n_k-1}\, d\eta \int_{-S}^{(o)} e^{\tau}\, \tau^{\nu-\frac{1}{2}}\, r_m^{(k)}\, d\tau.$$

Интегралъ $\overline{g}_{km}$ получается изъ интеграла $\overline{K}_{km}$ (202) черезъ умноженіе его на -1 и замѣну въ немъ A_k числомъ n_k. А посему, имѣя въ виду соотношеніе (210), можемъ написать:

$$
\overline{g}_{km} = \frac{\overline{\gamma}_{1km}^{(ps)} \overline{g}_{km}^{(ps)} e^{-2|r|\sqrt{\rho}\cos\frac{\beta_{kps}}{2}}}{\sqrt{\rho}\cos\frac{\beta_{kps}}{2}}, \tag{388}
$$

гдѣ $\overline{g}_{km}^{(k)}$ есть число $\overline{K}_{km}^{(ps)}$ (209'), найденное въ предположеніи, что $A_k = n_k$, а

$$
o < \left|\overline{\gamma}_{1km}^{(ps)}\right| < 1. \tag{388'}
$$

Пользуясь подстановками (211), приведемъ интегралъ $\overline{g}'_{km}$ (387) къ виду:

$$
\overline{g}'_{km} = \frac{(-1)^{n_k} e^{\pi(\nu+\frac{1}{2})i + n_k \frac{\beta_{kps} i}{2} - S}}{(2\sqrt{x})^{n_k}} S^{\nu'-\frac{1}{2}} \cdot
$$

(389)

$$
\int_o^{\Delta_1} e^{-\eta_1 e^{\frac{\beta_{kps} i}{2}}} \eta_1^{n_k-1} d\eta_1 \int_o^{+\infty} e^{-\tau'} \left(1+\frac{\tau'}{S}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} r_{1m}^{(k)} d\tau',
$$

гдѣ $\overline{r}_{1m}^{(k)}$ есть $\rho_{1m}^{(k)}$ въ интегралѣ (212) при $A_k = n_k$. Назовемъ $m_{km}^{(ps)}$ наибольшее значеніе функціи $e^{-\frac{\eta_1}{2}\cos\frac{\beta_{kps}}{2}} \eta_1^{n_k-1} e^{-\frac{\tau'}{2}} \left(1+\frac{\tau'}{S}\right)^{\nu'-\frac{1}{2}} \left|\overline{r}_{1m}^{(k)}\right|$ въ области интеграціи въ интегралѣ правой части равенства (389). Тогда изъ послѣдняго соотношенія найдемъ:

$$
\left|\overline{g}'_{km}\right| < \frac{4 e^{-\pi\nu''-S} m_{km}^{(ps)} S^{\nu'-\frac{1}{2}} \left(1 - e^{-\frac{\Delta_1}{2}\cos\frac{\beta_{kps}}{2}}\right)}{(2\sqrt{\rho})^{n_k} \cos\frac{\beta_{kps}}{2}}. \tag{390}
$$

Очевидно, что $m_{km}^{(ps)}$ представляетъ функцію ρ и φ, конечную для всѣхъ разсматриваемыхъ значеній этихъ перемѣнныхъ. Изъ неравенства (390) имѣемъ:

$$\overline{g'}_{km} = \frac{4\,\theta_{km}^{(ps)}\, e^{-\pi\nu''-S}\, m_{km}^{(ps)}\, S^{\nu'-\frac{1}{2}}\left(1-e^{-\frac{\Delta_1}{2}\cos\frac{\beta_{kps}}{2}}\right)}{(2\sqrt{\rho})^{n_k \cos\frac{\beta_{kps}}{2}}}, \tag{391}$$

гдѣ

$$o < \left|\theta_{km}^{(ps)}\right| < 1. \tag{391'}$$

Остается теперь вычислить интегралъ $\overline{j'}_{km}$ (387). При помощи подстановокъ (220) представимъ его слѣдующимъ образомъ:

$$\overline{j'}_{km} = \frac{(-1)^{n_k} e^{\pi(\nu+\frac{1}{2})i+n_k\frac{\beta_{kps}i}{2}}}{(2\sqrt{x})^{n_k}}. \tag{392}$$

$$\int_o^{\Delta_1} e^{-\eta_1 e^{\frac{\beta_{kps}i}{2}}}\, \eta_1^{n_k-1}\, d\eta_1 \int_S^{(o)} e^{-\tau'}\, \tau'^{\nu-\frac{1}{2}}\, \bar{r}_{2m}^{(k)}\, d\tau',$$

гдѣ $\bar{r}_{2m}^{(k)}$ есть $\rho_{2m}^{(k)}$ въ интегралѣ (221) при $A_k = n_k$. Изобразимъ далѣе интегралъ $\overline{j'}_{km}$ такъ:

$$\overline{j}_{km} = \frac{(-1)^{n_k} e^{\pi(\nu+\frac{1}{2})i+n_k\frac{\beta_{kps}i}{2}}}{(2\sqrt{x})^{n_k}}\left[l_{km}+l'_{km}\right]. \tag{393}$$

гдѣ

$$l_{km} = \int_S^{\Delta_1} e^{-\eta_1 e^{\frac{\beta_{kps}i}{2}}}\, \eta_1^{n_k-1}\, d\eta_1 \int_S^{(o)} e^{-\tau'}\, \tau'^{\nu-\frac{1}{2}}\, \bar{r}_{2m}^{(k)}\, d\tau';$$

$$(394)$$

$$l'_{km} = \int_o^{S} e^{-\eta_1 e^{\frac{\beta_{kps}i}{2}}}\, \eta_1^{n_k-1}\, d\eta_1 \int_S^{(o)} e^{-\tau'}\, \tau'^{\nu-\frac{1}{2}}\, \bar{r}_{2m}^{(k)}\, d\tau'.$$

Интегралъ l_{km} получается изъ интеграла G'_{km} (224) черезъ умноженіе его на -1 и замѣну въ немъ A_k числомъ n_k. А посему, обозначая черезъ $l_{km}^{(ps)}$ выраженіе G_{1km} (228), найденное въ предположеніи, что $A_k = n_k$, будемъ имѣть:

(395) $$|l_{km}| < \frac{\overline{l}^{(ks)}_{km}\, e^{-S\cos\frac{\beta_{kps}}{2}}\, S^{\nu'-\frac{1}{2}}}{\cos\frac{\beta_{kps}}{2}}.$$

Отсюда заключаемъ:

(396) $$l_{km} = \frac{\overline{\nu}_{1km}\, \overline{l}^{(ps)}_{km}\, e^{-S\cos\frac{\beta_{kps}}{2}}\, S^{\nu'-\frac{1}{2}}}{\cos\frac{\beta_{kps}}{2}},$$

гдѣ

(397) $$o < |\overline{\nu}_{1km}| < 1.$$

Что же касается до интеграла l'_{km} (394), то имѣемъ:

(398) $$l'_{km} = \frac{\overline{\nu}_{2km}\, t_{km}}{(\sqrt{x})^{m+1}},$$

гдѣ

(399) $$o < |\overline{\nu}_{2km}| < 1,$$

а t_{km} имѣетъ такое же выраженіе, какъ и t_{km} въ соотношеніи (369). Принимая теперь во вниманіе результаты (388), (391), (393), (396) и (398), представимъ соотношеніе (386) слѣдующимъ образомъ:

(400) $$j_{km} = \vartheta^{(ps)}_{km} + \frac{(-1)^{n_k}\, e^{\pi(\nu+\frac{1}{2})i + n_k\frac{\beta_{kps}}{2}i}\, \overline{\nu}_{2km}\, \overline{t}_{km}}{2^{n_k}(\sqrt{x})^{m+n_k+1}};$$

при чемъ функція $\overline{\vartheta}^{(ps)}_{km}$ обладаетъ свойствомъ:

(401) $$\lim_{x=+\infty e^{\varphi i}} \vartheta^{(ps)}_{km} (\sqrt{x})^{k} = o,$$

при любомъ положительномъ k, если φ не выходитъ изъ границъ (63). Полагаемъ далѣе:

(402) $$\vartheta^{(ps)}_{km} + \frac{(-1)^{n_k}\, e^{\pi(\nu+\frac{1}{2})i + n_k\frac{\beta_{kps}}{2}i}}{2^{n_k}(\sqrt{x})^{m+n_k+1}} = \frac{(-1)^{n_k}\, \overline{\gamma}^{(ps)}_{km}}{2^{n_k}(\sqrt{x})^{m+n_k}}.$$

Тогда будемъ имѣть:

$$\bar{j}_{km} = \frac{(-1)^{n_k-(ps)} \gamma_{km}}{2^{n_k}(\sqrt{x})^{m+n_k}}. \tag{403}$$

Въ силу результатовъ (385) и (403), соотношеніе (380) представимъ такъ:

$$\eta_{2kps} = \frac{(-1)^{n_k+1} B}{2^{n_k-1}} (\sqrt{x})^{-\nu-n_k-\frac{1}{2}} e^{+2a_k\sqrt{x}}. \tag{404}$$

$$\left[\sum_{p=o}^{m} \frac{(-1)^p}{(2\sqrt{x})^p} \sum_{q=0}^{p} 2^q B_{p-q,q}^{(k)} \Gamma(\nu+q+\tfrac{1}{2}) \Gamma(n_k+p-q) + \frac{\bar{\gamma}_{km}^{(ps)}}{(\sqrt{x})^m}\right].$$

Какъ легко видѣть изъ соотношенія (402), функція $\bar{\gamma}_{km}^{(ps)}$ съ возрастаніемъ $|x|$, начиная съ нѣкотораго значенія этого модуля, равномѣрно стремится къ нулю, если φ не выходитъ изъ границъ (63). А посему въ области, опредѣляемой этими границами, для весьма большихъ значеній $|x|$ сохраняетъ силу асимптотическое равенство:

$$\eta_{2kps} \backsim \frac{(-1)^{n_k+1} B}{2^{n_k-1}} (\sqrt{x})^{-\nu-n_k-\frac{1}{2}} e^{+2a_k\sqrt{x}}. \tag{405}$$

$$\sum_{p=o}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2\sqrt{x})^p} \sum_{q=o}^{p} 2^q B_{p-q,q}^{(k)} \Gamma(\nu+q+\tfrac{1}{2}) \Gamma(n_k+p-q).$$

Соотношенія (404) и (405) въ разсматриваемомъ случаѣ замѣняютъ соотвѣтственно равенства (236) и (239).

§ 9.

Приложеніе предыдущихъ результатовъ къ уравненіямъ 2-го и 4-го порядковъ, содержащимся въ уравненіи (43).

I. Пусть въ уравненіи (43) полиномы $P(z)$ и $Q(z)$ таковы:

(406) $$P(z)=\alpha+\beta z;\ Q(z)=\gamma,$$

гдѣ α, β и γ какія-либо постоянныя числа. Уравненіе (43) обратится тогда въ слѣдующее:

(407) $$x\frac{d}{dx}[\alpha+\beta\,\delta_x]\,w+\gamma\delta_x w=o,$$

или

(407') $$\beta x^2\frac{d^3w}{dx^3}+x[\gamma+\beta(2+\nu)]\frac{d^2w}{dx^2}+[\alpha x+\gamma(1+\nu)]\frac{dw}{dx}=o.$$

Далѣе, полагаемъ:

(408) $$\frac{dw}{dx}=u.$$

Уравненіе (407') приметъ видъ:

(409) $$\beta x^2\frac{d^2u}{dx^2}+[\gamma+\beta(2+\nu)]x\frac{du}{dx}+[\alpha x+\gamma(1+\nu)]u=o.$$

Остановимся на уравненіи (409). Уравненіе (31) приметъ здѣсь составъ:

(410) $$z(\alpha+\beta z)\frac{dv}{dz}=[(\gamma-2\beta)z-\alpha]\,v.$$

Отсюда находимъ:

(411) $$v=z^{-1}(\alpha+\beta z)^{\sigma-1},$$

гдѣ

$$\sigma = \frac{\gamma}{\beta}. \tag{411'}$$

Будемъ сперва предполагать, что σ не есть цѣлое число или нуль. Тогда имѣемъ слѣдующія рѣшенія уравненія (407):

$$\begin{aligned} w_1 &= 2\int_{+\infty}^{(a)} t^{-1}\,\omega(\nu; xt^2)\,(\alpha+\beta t^2)^{\sigma-1}\,dt; \\ w_2 &= 2\int_{+\infty}^{(a)} t^{-1}\,\omega_1(\nu; xt^2)\,(\alpha+\beta t^2)^{\sigma-1}\,dt, \end{aligned} \tag{412}$$

гдѣ

$$a^2 = -\frac{\alpha}{\beta}; \tag{413}$$

при чемъ:

$$-\frac{\alpha}{\beta} = \lambda\, e^{\vartheta i}, \tag{414}$$

гдѣ

$$o \leqq \vartheta < 2\pi.$$

Замѣтимъ, что $arg x$ въ первомъ изъ интеграловъ (412) содержится въ области:

$$\begin{aligned} -2\pi-2\varphi_0+\Delta &< arg x < +2\pi-2\varphi_0-\Delta; \\ -\pi &< arg x < +\pi, \end{aligned} \tag{415}$$

а во второмъ — въ области:

$$\begin{aligned} -2\varphi_0+\Delta &< arg x < +4\pi-2\varphi_0-\Delta; \\ +\pi &< arg x < +3\pi. \end{aligned} \tag{416}$$

При этомъ φ_0 означаетъ величину угла, образованнаго векторами oa и $o+\infty$, а Δ какой-угодно малости положительную величину, отличную отъ нуля.

Вмѣсто интеграловъ (412) можно было бы разсматривать, какъ обнаружено въ § 7, слѣдующіе интегралы:

(417)
$$\overline{w_1} = 2\int_{+\infty}^{(-a)} t^{-1}\,\omega(\nu; xt^2)\,(\alpha+\beta t^2)^{\sigma-1}\,dt;$$
$$\overline{w_2} = 2\int_{+\infty}^{(-a)} t^{-1}\,\omega_1(\nu; xt^2)\,(\alpha+\beta t^2)^{\sigma-1}\,dt.$$

Дифференцируя по x выраженія (412) и принимая во вниманіе обозначеніе (408), получимъ рѣшенія уравненія (409):

(418)
$$u_1 = 2\int_{+\infty}^{(a)} t\,\omega\,(\nu+1; xt^2)\,(\alpha+\beta t^2)^{\sigma-1}\,dt;$$
$$u_2 = 2\int_{+\infty}^{(a)} t\,\omega_1\,(\nu+1; xt^2)\,(\alpha+\beta t^2)^{\sigma-1}\,dt.$$

Примѣняя къ интеграламъ (418) формы представленій (191) и (239), будемъ имѣть:

(419)
$$u_1 \infty \frac{A\beta^{\sigma-1}\,e^{\pi\sigma i-2a\sqrt{x}}}{2^{\sigma-1}}\,(\sqrt{x})^{-\nu-\sigma-\frac{3}{2}}\,.$$
$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2\sqrt{x})^p}\sum_{q=0}^{p}(-2)^q A_{p-q,q}\,\Gamma(\sigma+p-q)\,\Gamma(\nu+q+\tfrac{3}{2});$$

$$u_2 \sim \frac{B\beta^{\sigma-1} e^{+2a\sqrt{x}}}{2^{\sigma-1}} (\sqrt{x})^{-\nu-\sigma-\frac{3}{2}} \cdot$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2\sqrt{x})^p} \sum_{q=0}^{p} (-2)^q A_{p-q,q}\, \overline{\Gamma}(\sigma+p-q)\, \overline{\Gamma}(\nu+q+\tfrac{3}{2}). \tag{419}$$

При этомъ:

$$A_{p-q,q} = \frac{(-1)^q\, 2^{\sigma-1}\, [\nu+\frac{1}{2}]_q\, a^{-\nu-p+\sigma-\frac{3}{2}}}{4^q (p-q)!} \cdot$$

$$\sum_{s=0}^{p-q} 2^{-s} [p-q]_s (\sigma-1)_s (-\nu-q-\tfrac{1}{2})\, p-q-s. \tag{420}$$

Асимптотическія равенства (419) сохраняютъ силу, если на мѣсто u_1 и u_2 поставимъ продолженія этихъ интеграловъ соотвѣтственно въ областяхъ:

$$-2\pi-2\varphi_0+\Delta < arg x < +2\pi-2\varphi_0-\Delta; \tag{421}$$

и

$$-2\varphi_0+\Delta < arg x < +4\pi-2\varphi_0-\Delta. \tag{422}$$

Обозначимъ черезъ S_1 и S_2 правыя части асимптотическихъ равенствъ (419). Тогда всякій интегралъ u уравненія (409) для весьма большихъ значеній $|x|$ въ области:

$$-2\varphi_0+\Delta < arg x < +2\pi-2\varphi_0-\Delta \tag{423}$$

имѣетъ такое асимптотическое представленіе:

$$u \sim a_1 S_1 + b_1 S_2, \tag{424}$$

гдѣ a_1 и b_1 суть надлежащимъ образомъ подобранныя постоянныя числа.

Предположимъ теперь, что $\sigma = -m$, цѣлому отрицательному числу или нулю. Тогда интегралы (418) обратятся въ слѣдующіе:

(425)
$$u_1 = 2\beta^{-m-1} \int_{(a)} t\,\omega(\nu+1; xt^2)\,(t^2-a^2)^{-m-1}\,dt;$$
$$u_2 = 2\beta^{-m-1} \int_{(a)} t\,\omega_1(\nu+1; xt^2)\,(t^2-a^2)^{-m-1}\,dt,$$

гдѣ (a) означаетъ замкнутую линію, содержащую внутри себя точку a и не содержащую точекъ: o и $-a$. Выполняя въ выраженіяхъ (425) интеграціи, получимъ:

(426)
$$u_1 = \frac{2\pi i\beta^{-m-1}}{m!} \sum_{s=o}^{m} \frac{s(-1)^{m-s}(2a)^{-2m+s}(2m-s-1)_{m-1}}{s!} \frac{d^s\,\omega(\nu+1; xt^2)}{dt^s}\Big|_{t=a};$$
$$u_2 = \frac{2\pi i\beta^{-m-1}}{m!} \sum_{s=o}^{m} \frac{s(-1)^{m-s}(2a)^{-2m+s}(2m-s-1)_{m-1}}{s!} \frac{d^s\,\omega_1(\nu+1; xt^2)}{dt^s}\Big|_{t=a}.$$

Принимая во вниманіе формулу (330) и тождества (335), можемъ написать:

(427)
$$u_1 = \frac{2\pi i\beta^{-m-1}}{m!}\Bigg[2x\,\omega(\nu+2; xa^2).$$
$$\sum_{s=o}^{m} \frac{s(-1)^{m-s}(2a)^{-2m+s}(2m-s-1)_{m-1}\overline{M}_{1s}}{s!\,a^{s-2}} +$$
$$+\,\omega(\nu+1; xa^2) \sum_{s=o}^{m} \frac{s(-1)^{m-s}(2a)^{-2m+s}(2m-s-1)_{m-1}\overline{M}_{2s}}{s!\,a^{s-1}}\Bigg];$$

$$u_2 = \frac{2\pi i}{m!}\beta^{-m-1}\Big[2x\,\omega_1(\nu+2;xa^2)\,.$$

$$\sum_{s=0}^{m}\frac{s(-1)^{m-s}(2a)^{-2m+s}(2m-s-1)_{m-1}\overline{M}_{1s}}{s!\,a^{s-1}}+ \tag{427}$$

$$+\,\omega_1(\nu+1;xa^2)\sum_{s=0}^{m}\frac{s(-1)^{m-s}(2a)^{-2m+s}(2m-s-1)_{m-1}\overline{M}_{2s}}{s!\,a^{s-1}}\Big].$$

При этомъ $\overline{M}_{1s}$ и $\overline{M}_{2s}$ суть соотвѣтственно M_{1s} (327) и M_{2s} (328) послѣ замѣны t черезъ a^2.

Допустимъ, наконецъ, что $\sigma = m$, цѣлому положительному числу, большему 1. Тогда будемъ имѣть слѣдующія рѣшенія уравненія (409):

$$\overline{u}_1 = 2\beta^{m-1}\int_{+\infty}^{a} t\,\omega(\nu+1;xt^2)\,(t^2-a^2)^{m-1}\,dt;$$

$$\overline{u}_2 = 2\beta^{m-1}\int_{+\infty}^{a} t\,\omega_1(\nu+1;\,xt^2)\,(t^2-a^2)^{m-1}\,dt. \tag{428}$$

Интегралы (428) сохраняютъ смыслъ соотвѣтственно въ областяхъ (415) и (416). Примѣняя къ нимъ формулы (377) и (405), получимъ:

$$\overline{u}_1 \infty = -\frac{A\beta^{m-1}\left(\sqrt{x}\right)^{-\nu-m-\frac{3}{2}}}{2^{m-1}}e^{-2a\sqrt{x}}\,.$$

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2\sqrt{x})^p}\sum_{q=0}^{p}2^q\,\overline{A}_{p-q,q}\,\Gamma(m+p-q)\,\Gamma(\nu+q+\tfrac{3}{2});$$

$$\overline{u}_2 \infty \frac{(-1)^{m+1}B\left(\sqrt{x}\right)^{-\nu-m-\frac{3}{2}}}{2^{m-1}}e^{+2a\sqrt{x}}\,. \tag{429}$$

$$\sum_{p=0}^{m}\frac{(-1)^p}{(2\sqrt{x})^p}\sum_{q=0}^{p}2^q\,\overline{A}_{p-q,q}\Gamma(m+p-q)\,\Gamma(\nu+q+\tfrac{3}{2}),$$

гдѣ $\overline{A}_{p-q,q}$ означаетъ $A_{p-q,q}$ при $\sigma = m$. Асимптотическія равенства (429) сохраняютъ силу также для всевозможныхъ продолженій интеграловъ $\overline{u}_1$ и $\overline{u}_2$ соотвѣтственно въ областяхъ (421) и (422) измѣненія перемѣннаго $arg x$. Назовемъ правыя части этихъ равенствъ соотвѣтственно $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$. Тогда въ области (423) для весьма большихъ значеній $|x|$ всякій интегралъ $\overline{u}$ уравненія (409) имѣетъ такое асимптотическое представленіе:

(430) $$\overline{u} = a\overline{S}_1 + b\overline{S}_2,$$

гдѣ a и b суть надлежащимъ образомъ подобранныя постоянныя числа.

II. Пусть въ уравненіи (43) полиномы $P(z)$ и $Q(z)$ таковы:

(431) $$P(z) = z^2 + az + b;\ Q(z) = cz + d,$$

гдѣ a, b, c и d суть нѣкоторыя постоянныя числа. Тогда уравненіе (43) обратится въ слѣдующее:

(432) $$x\frac{d}{dx}\left[\delta^2_x w + a\delta_x w + bw\right] + c\delta^2_x w + d\delta_x w = o,$$

или

(432') $$x^3\frac{d^5 w}{dx^5} + x^2\left[c + 2(3+\nu)\right]\frac{d^4 w}{dx^4} + x\left[ax + (2+\nu)(3+\nu+2c)\right]\frac{d^3 w}{dx^3} +$$
$$+\left[c(1+\nu)(2+\nu) + x(a(\nu+2)+d)\right]\frac{d^2 w}{dx^2} + \left[bx + d(1+\nu)\right]\frac{dw}{dx} = o.$$

Если теперь введемъ обозначеніе.

(433) $$\frac{dw}{dx} = Z,$$

то будемъ имѣть.

(434) $$x^3\frac{d^4 Z}{dx^4} + x^2\left[c + 2(3+\nu)\right]\frac{d^3 Z}{dx^3} + x\left[ax + (2+\nu)(3+\nu+2c)\right]\frac{d^2 Z}{dx^2} +$$
$$+\left[c(1+\nu)(2+\nu) + x(a(\nu+2)+d)\right]\frac{dZ}{dx} + \left[bx + d(1+\nu)\right]Z = o.$$

Разсмотримъ уравненіе (434). Уравненіе (31) въ разсматриваемомъ случаѣ приметъ слѣдующій видъ:

$$z(z^2+az+b)\frac{dv}{dz}+[(3-c)z^2+(2a-d)z+b]v=0. \tag{435}$$

Полагаемъ, что

$$z^2+az+b=(z-a_1)(z-a_2), \tag{436}$$

гдѣ a_1 и a_2 суть различныя постоянныя числа. Интегрируя тогда уравненіе (435), найдемъ:

$$v=z^{-1}(z-a_1)^{A_1-1}(z-a_2)^{A_2-1}, \tag{437}$$

гдѣ

$$\begin{aligned} A_1&=\frac{(c-1)a_1{}^2+(d-a)a_1-b}{a_1(2a_1+a)};\\ A_2&=\frac{(c-1)a_2{}^2+(d-a)a_2-b}{a_2(2a_2+a)}. \end{aligned} \tag{438}$$

Пусть будетъ далѣе:

$$a_1=a^2;\ a_2=b^2. \tag{438'}$$

Тогда, предполагая, что числа A_1 и A_2 не суть цѣлыя или нули, будемъ имѣть слѣдующія рѣшенія уравненія (434):

$$\begin{aligned} Z_1&=2\int_{R_\alpha}^{(a)} t\omega(\nu+1;xt^2)(t^2-a^2)^{A_1-1}(t^2-b^2)^{A_2-1}dt;\\ Z_2&=2\int_{R_\alpha}^{(a)} t\omega_1(\nu+1;xt^2)(t^2-a^2)^{A_1-1}(t^2-b^2)^{A_2-1}dt;\\ Z_3&=2\int_{R_\beta}^{(b)} t\omega(\nu+1;xt^2)(t^2-a^2)^{A_1-1}(t^2-b^2)^{A_2-1}dt;\\ Z_4&=2\int_{R_\beta}^{(b)} t\omega_1(\nu+1;xt^2)(t^2-a^2)^{A_1-1}(t^2-b^2)^{A_2-1}dt, \end{aligned} \tag{439}$$

гдѣ

$$R_\alpha = +\infty e^{\alpha i}, \quad R_\beta = +\infty e^{\beta i}; \tag{439'}$$

при чемъ α и β представляютъ соотвѣтственно величины угловъ наклоненія векторовъ aR_α и bR_β къ вектору $o+\infty$. Интегралы (439) сохраняютъ смыслъ соотвѣтственно въ слѣдующихъ областяхъ измѣняемости перемѣннаго $arg x = \varphi$:

$$\begin{aligned} -2\pi-2\psi_0+\Delta < \varphi < +2\pi-2\psi_0-\Delta; \\ -\pi-2\alpha+\varepsilon < \varphi < +\pi-2\alpha-\varepsilon. \end{aligned} \tag{440}$$

$$\begin{aligned} -2\psi_0+\Delta < \varphi < +4\pi-2\psi_0-\Delta; \\ +\pi-2\alpha+\varepsilon < \varphi < +3\pi-2\alpha-\varepsilon. \end{aligned} \tag{441}$$

$$\begin{aligned} -2\pi-2\psi_1+\Delta < \varphi < +2\pi-2\psi_1-\Delta; \\ -\pi-2\beta+\varepsilon < \varphi < +\pi-2\beta-\varepsilon. \end{aligned} \tag{442}$$

$$\begin{aligned} -2\psi_1+\Delta < \varphi < +4\pi-2\psi_1-\Delta; \\ +\pi-2\beta+\varepsilon < \varphi < +3\pi-2\beta-\varepsilon. \end{aligned} \tag{443}$$

При этомъ ψ_0 означаетъ величину угла наклоненія вектора $0a$ къ вектору $0+\infty$, а ψ_1 — величину угла наклоненія между собою векторовъ $0b$ и $0+\infty$. Въ означенныхъ соотвѣтственно областяхъ для весьма большихъ значеній $|x|$ сохраняютъ силу асимптотическія равенства:

$$\begin{aligned} Z_1 \sim \frac{e^{\pi A_1 i} A}{2^{A_1-1}} (\sqrt{x})^{-\nu-A_1-\frac{3}{2}} e^{-2a\sqrt{x}} \,. \\ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2\sqrt{x})^p} \sum_{q=0}^{p} (-2)^q \delta_{p-q,q} \Gamma(A_1+p-q) \Gamma(\nu+q+\tfrac{3}{2}); \end{aligned} \tag{444}$$

$$Z_2 \sim \frac{B(\sqrt{x})^{-\nu-A_1-\frac{3}{2}} e^{+2a\sqrt{x}}}{2^{A_1-1}}.$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2\sqrt{x})^p} \sum_{q=0}^{p} (-2)^q \delta_{p-q,q} \, \Gamma(A_1+p-q) \, \Gamma(\nu+q+\tfrac{3}{2});$$

$$\overline{Z_1} \sim \frac{e^{\pi A_2 i} A}{2^{A_2-1}} (\sqrt{x})^{-\nu-A_2-\frac{3}{2}} e^{-2b\sqrt{x}}.$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2\sqrt{x})^p} \sum_{q=0}^{p} (-2)^q \, \overline{\delta}_{p-q,q} \, \Gamma(A_2+p-q) \, \Gamma(\nu+q+\tfrac{3}{2}); \tag{444'}$$

$$\overline{Z_2} \sim \frac{B(\sqrt{x})^{-\nu-A_2-\frac{3}{2}} e^{+2b\sqrt{x}}}{2^{A_2-1}}.$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2\sqrt{x})^p} \sum_{q=0}^{p} (-2)^q \, \overline{\delta}_{p-q,q} \, \Gamma(A_2+p-q) \, \Gamma(\nu+q+\tfrac{3}{2}).$$

При этомъ:

$$\delta_{p-q,q} = \frac{(-1)^q \, [\nu+\frac{1}{2}]_q \, 2^{A_1-1} \, a^{A_1-\nu-p-\frac{3}{2}} (a^2-b^2)^{A_2-1}}{4^q \, (p-q)!}.$$

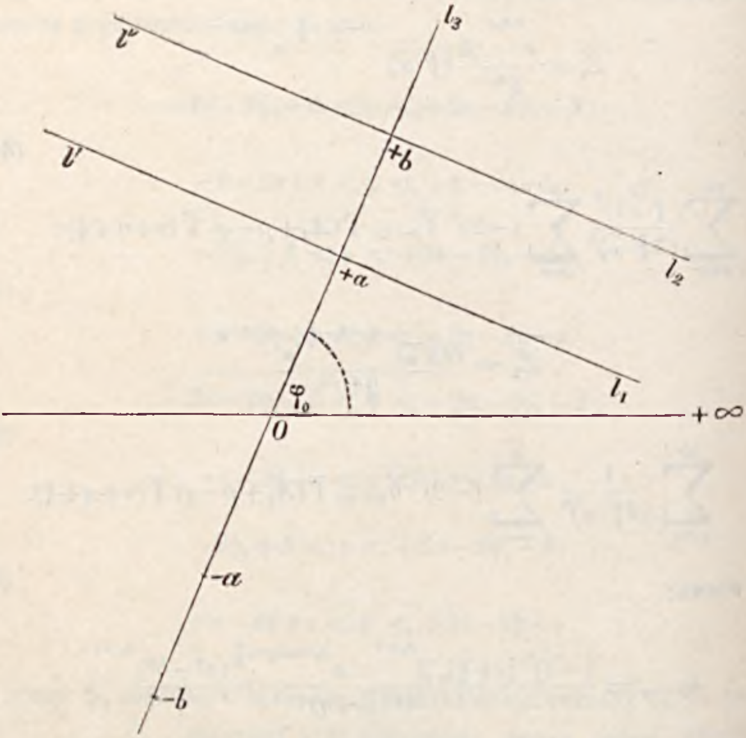
$$\sum_{s=0}^{p-q} 2^{-s} [p-q]_s (-\nu-q-\tfrac{1}{2})_{p-q-s} \sum_{s_1=0}^{s} \frac{(2a)^{s_1} [s]_{s_1} (A_1-1)_{s-s_1}}{(a-b)^{s_1}} \tag{445}$$

$$\sum_{s_2=0}^{s_1} \frac{[s_1]_{s_2} (A_2-1)_{s_1-s_2} (A_2-1)_{s_2} (a-b)^{s_2}}{(a+b)^{s_2}},$$

а $\overline{\delta}_{p-q,q}$ представляетъ выраженіе $\delta_{p-q,q}$ послѣ взаимныхъ перестановокъ чиселъ: a и b, A_1 и A_2.

Въ дальнѣйшихъ изслѣдованіяхъ будемъ различать два случая: 1) точки o, a и b лежатъ на одной прямой и 2) эти точки не расположены на одной прямой. Остановимся сперва на изслѣдованіи перваго случая. Пусть будетъ $|b| > |a|$. Тогда точки: $o, a, b, -a$ и $-b$ можемъ расположить слѣдующимъ образомъ:

Чер. 11.



Вообразимъ прямыя, проходящія черезъ точки $+a$ и $+b$ и перпендикулярныя къ прямой $o+a$. Правыя части ихъ назовемъ соотвѣтственно l_1 и l_2, а лѣвыя l' и l''. Далѣе, продолженіе $o+b$ за точку $+b$ обозначимъ черезъ l_3. Пусть величина угла наклоненія между собою векторовъ $o+b$ и $o+\infty$ будетъ φ_0. Кромѣ того, уголъ, представляющій сумму угловъ: $l_2(+b)l_3+l_3(+b)l''$, назовемъ σ_0, а углы $l_1(+a)l_3$ и $l'(+a)l_3$ обозначимъ соотвѣтственно черезъ σ_1 и σ_2. Функціи перваго и второго рода, принадлежащія къ углу σ_0, назовемъ по порядку: $Z_{1\sigma_0}$ и $Z_{2\sigma_0}$, а таковыя же функціи, принадлежащія къ угламъ σ_1 и σ_2, обозначимъ соотвѣтственно такъ: $Z_{1\sigma_1}$ и $Z_{1\sigma_2}$, $Z_{2\sigma_1}$ и $Z_{2\sigma_2}$. Наконецъ, пусть Σ_1, Σ_2, $\overline{\Sigma}_1$ и $\overline{\Sigma}_2$ обозначаютъ попорядку правыя части асимптотическихъ равенствъ (444). Тогда соотвѣтственно въ областяхъ:

$$-2\pi-2\varphi_0+\Delta<\varphi<+2\pi-2\varphi_0-\Delta; \tag{446}$$

$$-2\varphi_0+\Delta<\varphi<+4\pi-2\varphi_0-\Delta \tag{447}$$

измѣняемости перемѣннаго $arg x=\varphi$ для весьма большихъ значеній $|x|$ сохраняютъ силу асимптотическія равенства:

$$Z_{1\sigma_0}\backsim\overline{\Sigma}_1;\; Z_{2\sigma_0}\backsim\overline{\Sigma}_2. \tag{448}$$

Далѣе, въ областяхъ:

$$-\pi-2\varphi_0+\Delta<\varphi<+2\pi-2\varphi_0-\Delta; \tag{449}$$

$$+\pi-2\varphi_0+\Delta<\varphi<+4\pi-2\varphi_0-\Delta \tag{450}$$

соотвѣтственно имѣютъ мѣсто:

$$Z_{1\sigma_1}\backsim\Sigma_1;\; Z_{2\sigma_1}\backsim\Sigma_2. \tag{451}$$

Наконецъ, въ областяхъ:

$$-2\pi-2\varphi_0+\Delta<\varphi<+\pi-2\varphi_0-\Delta; \tag{452}$$

$$-2\varphi_0+\Delta<\varphi<+3\pi-2\varphi_0-\Delta \tag{453}$$

соотвѣтственно сохраняютъ силу асимптотическія равенства:

$$Z_{1\sigma_2}\backsim\Sigma_1;\; Z_{2\sigma_2}\backsim\Sigma_2. \tag{454}$$

Для изысканія зависимости между функціями $Z_{1\sigma_2}$, $Z_{1\sigma_0}$ и $Z_{1\sigma_1}$ съ одной стороны и функціями $Z_{2\sigma_0}$ $Z_{2\sigma_1}$ и $Z_{2\sigma_2}$ съ другой, пользуемся формулами (87) и (88). Имѣемъ:

$$Z_{1\sigma_2}=e^{2\pi A_2 i}Z_{1\sigma_1}+\left(1-e^{2\pi A_1 i}\right)Z_{1\sigma_0};$$

(455)

$$Z_{2\sigma_2}=e^{2\pi A_2 i}Z_{2\sigma_1}+\left(1-e^{2\pi A_1 i}\right)Z_{2\sigma_0}.$$

Первая изъ формулъ (455) позволяетъ намъ продолжить функцію $Z_{1\sigma_2}$ изъ области (452) въ область (449); а при помощи второй изъ формулъ (455) функцію $Z_{2\sigma_2}$ можно продолжать изъ области (453) въ область (450). Всякій интегралъ Z уравненія (434) въ области:

(456) $$-2\varphi_0+\Delta<\varphi<+\pi-2\varphi_0-\Delta,$$

общей областямъ: (446), (447), (452) и (453), для весьма большихъ значеній $|x|$ можетъ быть представленъ асимптотически слѣдующимъ образомъ:

(457) $$Z\backsim c_1\Sigma_1+c_2\Sigma_2+\overline{c_1}\,\overline{\Sigma_1}+\overline{c_2}\,\overline{\Sigma_2},$$

гдѣ c_1, c_2, $\overline{c_1}$ и $\overline{c_2}$ суть надлежащимъ образомъ подобранныя постоянныя числа.

Продолженіе $\overline{Z}$ функціи Z въ области:

(458) $$+\pi-2\varphi_0+\Delta<\varphi<+2\pi-2\varphi_0-\Delta,$$

общей областямъ: (446), (447), (449) и (450), имѣетъ такое асимптотическое представленіе:

$$\overline{Z}\backsim$$

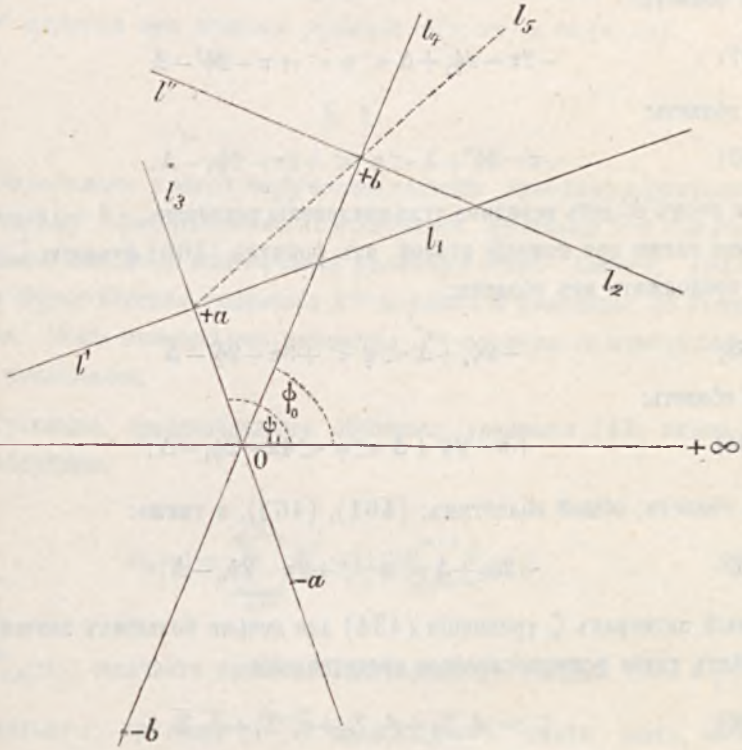
$$\backsim e^{2\pi A_1 i}\left(c_1\Sigma_1+c_2\Sigma_2\right)+\left[c_1\left(1-e^{2\pi A_1 i}\right)+\overline{c_1}\right]\Sigma_1+$$

(459)

$$+\left[c_2\left(1-e^{2\pi A_1 i}\right)+c_2\right]\Sigma_2.$$

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію второго случая, когда точки o, $+a$ и $+b$ не лежатъ на одной прямой. Положимъ, что расположеніе точекъ o, $+a$, $+b$, $-a$, $-b$ слѣдующее:

Чер. 12.



Назовемъ ψ_0 и ψ_1 величины угловъ наклоненія соотвѣтственно векторовъ $o+b$ и $o+a$ къ вектору $o+\infty$. Правыя части перпендикуляровъ, возставленные къ прямымъ $o+a$ и $o+b$ въ точкахъ $+a$ и $+b$, назовемъ l_1 и l_2, а лѣвыя l' и l''. Далѣе углы: $l_2(+b)l_4+l_4(+b)l''$, $l_1(+a)l_5$ и $l_5(+a)l'$ назовемъ попорядку s_0, s_1 и s_2. Функціи перваго рода, принадлежащія къ угламъ s_0, s_1 и s_2, обозначимъ по порядку: $\zeta_{1\sigma_0}$, $\zeta_{1\sigma_1}$ и $\zeta_{1\sigma_2}$; а функціи второго рода, принадлежащія къ тѣмъ же угламъ, назовемъ соотвѣтственно такъ: $\zeta_{2\sigma_0}$, $\zeta_{2\sigma_1}$ и $\zeta_{2\sigma_2}$. Тогда, принимая во вниманіе формулы (87) и (88), имѣемъ:

(460)
$$\zeta_{1\sigma_2} = e^{2\pi A_2 i}\zeta_{1\sigma_1} + \left(1 - e^{2\pi A_1 i}\right)\zeta_{1\sigma_0};$$
$$\zeta_{2\sigma_2} = e^{2\pi A_2 i}\zeta_{2\sigma_1} + \left(1 - e^{2\pi A_1 i}\right)\zeta_{2\sigma_0}.$$

Первая изъ этихъ формулъ позволяетъ намъ функцію $\zeta_{1\sigma_1}$ продолжить изъ области:

(461) $$-2\pi - 2\psi_1 + \Delta < \varphi < +\pi - 2\psi' - \Delta$$

въ область:

(462) $$-\pi - 2\psi' + \Delta < \varphi < +2\pi - 2\psi_1 - \Delta.$$

При этомъ ψ' есть величина угла наклоненія векторовъ $o + \infty$ и $+a+b$. Точно также при помощи второй изъ формулъ (460) функцію $\zeta_{2\sigma_1}$ можно продолжить изъ области:

(463) $$-2\psi_1 + \Delta < \varphi < +3\pi - 2\psi' - \Delta$$

въ область:

(464) $$+\pi - 2\psi' + \Delta < \varphi < 4\pi - 2\psi_1 - \Delta.$$

Въ области, общей областямъ: (461), (463), а также:

(465) $$-2\psi_0 + \Delta < \varphi < +2\pi - 2\psi_0 - \Delta,$$

всякій интегралъ ζ уравненія (434) для весьма большихъ значеній $|x|$ имѣетъ такое асимптотическое представленіе:

(466) $$\zeta \backsim d_1\,\Sigma_1 + d_2\,\Sigma_2 + \overline{d_1}\,\overline{\Sigma_1} + \overline{d_2}\,\overline{\Sigma_2},$$

гдѣ d_1, d_2, $\overline{d_1}$ и $\overline{d_2}$ суть надлежащимъ образомъ подобранныя постоянныя числа. Его продолженіе $\bar{\zeta}$ въ области, общей областямъ (462), (464) и (465), асимптотически можетъ быть представлено слѣдующимъ образомъ:

(467)
$$\bar{\zeta} \backsim$$
$$\backsim e^{2\pi A_2 i}\left(d_1\,\Sigma_1 + d_2\,\Sigma_2\right) + \left[d_1\left(1 - e^{2\pi A_1 i}\right) + \overline{d_1}\right]\overline{\Sigma_1} +$$
$$+ \left[d_2\left(1 - e^{2\pi A_1 i}\right) + \overline{d_2}\right]\overline{\Sigma_2}.$$

ГЛАВА III.

Изысканіе асимптотическихъ представленій и изслѣдованіе интеграловъ одного класса дифференціальныхъ линейныхъ уравненій 2-го порядка при помощи функцій $\omega(\nu; xz)$ и $\omega_1(\nu; xz)$.

§ 1.

Опредѣленіе класса дифференціальныхъ линейныхъ уравненій, къ которому принадлежитъ изслѣдуемое уравненіе 2-го порядка. Объ одномъ свойствѣ интеграловъ уравненій этого класса. Трансформа Фурье-Бесселя уравненія 2-го порядка и уравненіе, ей сопряженное. Связь интеграловъ уравненія 2-го порядка съ интегралами этого послѣдняго.

Уравненіе, представляющее обобщеніе уравненія (43) главы II, есть слѣдующее:

$$R_z(u)=\sum_{s=0}^{m} P^{(s)}_{n-E\left(\frac{s+1}{2}\right)}\frac{d^{m-s}u}{dz^{m-s}}=0, \tag{1}$$

гдѣ $P^{(s)}_{n-E\left(\frac{s+1}{2}\right)}$ означаетъ произвольный полиномъ степени $n-E\left(\frac{s+1}{2}\right)$ относительно z; при чемъ $E\left(\frac{s+1}{2}\right)$ представляетъ цѣлую часть числа $\frac{s+1}{2}$. Будемъ подъ u разумѣть какой-либо интегралъ уравненія (1) и обнаружимъ, что *всегда можно подобрать такое конечное положительное число R, что для $|x| \geqq R$ имѣютъ мѣсто:*

$$\lim_{z=+\infty e^{\psi i}} \omega(\nu; xz)\left(\sqrt{z}\right)^k \frac{d^n u}{dz^n}=0, \tag{2}$$

если

$$-\pi+\varepsilon < arg(xz) < +\pi-\varepsilon, \tag{3}$$

и

(4) $$\lim_{z=+\infty e^{\psi i}} \omega_1(\nu; xz) (\sqrt{z})^k \frac{d^n u}{dz^n} = 0,$$

если

(5) $$+\pi+\varepsilon < arg\,(xz) < +3\pi-\varepsilon.$$

При этомъ, n есть любое цѣлое конечное положительное число, k любое положительное конечное число, а ε какой угодно малости положительная величина, отличная отъ нуля.

Для доказательства этого предложенія преобразуемъ уравненіе (1) на основаніи подстановки:

(6) $$z = t^2.$$

Будемъ имѣть прежде всего:

(7) $$2^p \frac{d^p u}{dz^p} = \square_t^p u,$$

гдѣ

(7′) $$\square_t = t^{-1} \frac{d}{dt}.$$

По выполненіи дифференцированій, соотношеніе (7) можемъ написать такъ:

(8) $$\frac{d^p u}{dz^p} = \frac{1}{t^{2p-1}} \sum_{i=1}^{p} B_{ip}\, t^{i-1} \frac{d^i u}{dt^i};$$

при чемъ для опредѣленія постоянныхъ чиселъ: $B_{1p}, B_{2p}, \cdots, B_{1p}$ имѣемъ уравненія:

(9) $$\sum_{i=1}^{p} B_{ip}\,(2k)_i = 0;\ k = 1, 2, 3, \cdots, p-1.$$

$$\sum_{i=1}^{p} B_{ip}\,(2p)_i = p!\,.$$

Въ виду формулы (8), уравненіе (1) представимъ слѣдующимъ образомъ:

$$\sum_{s=0}^{m-1} \overline{P}^{(s)}_{n-E\left(\frac{s+1}{2}\right)}\, t^{2s} \sum_{i=1}^{m-s} B_{i(m-s)}\, t^{i-1} \frac{d^i u}{dt^i} + \tag{10}$$

$$+\, t^{2m-1}\, \overline{P}^{(m)}_{n-E\left(\frac{m+1}{2}\right)}\, u = 0\,,$$

гдѣ $\overline{P}^{(s)}_{n-E\left(\frac{s+1}{2}\right)}$ и $\overline{P}^{(m)}_{n-E\left(\frac{m+1}{2}\right)}$ означаютъ соотвѣтственно результаты подстановокъ въ функціи $P^{(s)}_{n-E\left(\frac{s+1}{2}\right)}$ и $P^{(m)}_{n-E\left(\frac{m+1}{2}\right)}$ на мѣсто z его выраженія t^2. Уравненіе (10) представимъ въ формѣ:

$$\sum_{s=0}^{m} Q_s(t) \frac{d^s u}{dt^s} = 0\,, \tag{11}$$

гдѣ $Q_m(t) = 1$, а $Q_s(t)$, гдѣ $s = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$, представляетъ раціональную алгебраическую дробь, степень числителя которой не выше степени знаменателя. Замѣнимъ его слѣдующей эквивалентной ему системой:

$$\frac{du}{dt} = v_1\,;\ \frac{dv_1}{dt} = v_2;\ \cdots\,;\ \frac{dv_{m-2}}{dt} = v_{m-1}\,; \tag{12}$$

$$\frac{dv_{m-1}}{dt} = -Q_0(t)\,u - Q_1(t)\,v_1 - \cdots - Q_{m-1}(t)\,v_{m-1}\,.$$

Къ этой системѣ уравненій примѣнимъ анализъ академика Ляпунова [1]) въ той формѣ, которую вслѣдъ за É. Picard'омъ [2]) придалъ ему Horn на стр. 555—556 своей работы: „Ueber eine Classe linearer

---

[1]) А. Ляпуновъ. Общая задача объ устойчивости движенія. Харьковъ, 1892. Стр. 20—22.

[2]) É. Picard: Traité d'Analyse, t. III, p. 362—365.

Differentialgleichungen". Не желая однако повторять разсужденія этихъ математиковъ, мы приведемъ лишь ихъ результаты: *Если* $|t| \geqq r_0$, *гдѣ* r_0 *конечное положительное число, превосходящее наибольшій изъ модулей корней полинома* $P_n^{(0)}$, *и*

$$\omega_1 < \arg t < \omega_2, \tag{13}$$

гдѣ ω_1 *и* ω_2 *какія-либо конечныя числа, то всегда можно найти такое конечное положительное число* h, *что имѣетъ мѣсто неравенство:*

$$\left|\frac{d^i u}{dt^i}\right| < e^{h|t|}\ ;\ i=0,\,1,\,\cdots,\,m-1\,. \tag{14}$$

Предполагая, что въ формулѣ (8) $p \leqq m-1$, находимъ:

$$\left|\frac{d^p u}{dz^p}\right| < e^{h|t|} \sum_{i=1}^{p} |B_{ip}|\,|t|^{i-2p}\,. \tag{15}$$

Обозначимъ ради краткости:

$$\sum_{i=1}^{p} |B_{ip}|\,|t|^{i-2p} = a_p\,(|t|)\,. \tag{16}$$

Тогда на основаніи неравенства (15) можемъ написать:

$$\frac{d^p u}{dz^p} = \lambda_p\, a_p\,(|t|)\,e^{h|t|}, \tag{17}$$

гдѣ

$$o < |\lambda_p| < 1\,. \tag{17'}$$

Замѣнивъ въ соотношеніи (17) перемѣнное t черезъ $+\sqrt{z} = +\sqrt{r}\,e^{\frac{\psi i}{2}}$, гдѣ

$$z = r\,e^{\psi i}, \tag{18}$$

получимъ:

$$\frac{d^p u}{dz^p} = \lambda'_p \, a_p \, (+\sqrt{r}) \, e^{+h\sqrt{r}}, \tag{19}$$

гдѣ

$$o < |\lambda'_p| < 1. \tag{20}$$

Полагая, что $arg\,(xz)$ содержится въ границахъ (3), умножимъ обѣ части соотношенія (19) на $e^{-2\sqrt{xz}}$. Будемъ имѣть:

$$\frac{d^p u}{dz^p} e^{-2\sqrt{xz}} = \lambda'_p \, a_p \, (+\sqrt{r}) \, e^{-2\sqrt{xz}+h\sqrt{r}}. \tag{21}$$

Полагаемъ:

$$x = \rho \, e^{\varphi i}. \tag{22}$$

Тогда соотношеніе (21) перепишемъ такъ:

$$\frac{d^p u}{dz^p} e^{-2\sqrt{xz}} = \lambda'_p \, a_p \, (+\sqrt{r}) \, e^{-\sqrt{r}\left[2\sqrt{\rho}\, e^{\frac{\varphi+\psi}{2} i} - h\right]}. \tag{23}$$

Такъ какъ $|\varphi + \psi| < +\pi - \varepsilon$, то ρ можно выбрать подъ условіемъ, что

$$2\sqrt{\rho} \cos\frac{\varphi+\psi}{2} - h > 0 \tag{24}$$

и, слѣдовательно:

$$\rho > \frac{h^2}{4\cos^2\frac{\varphi+\psi}{2}}. \tag{25}$$

При такомъ выборѣ ρ и $arg\,(xz)$, заключаемъ, что

$$\lim_{z=+\infty e^{\psi i}} \frac{d^p u}{dz^p} e^{-2\sqrt{xz}} (\sqrt{z})^k = 0 \tag{26}$$

при любомъ конечномъ положительномъ числѣ k. Соотношеніе (26) доказано, если p не превосходитъ $m-1$. Но, принимая во вниманіе уравненіе (1) и тѣ, которыя получаются изъ него дифференцированіемъ по z, утверждаемъ, что оно справедливо при всякомъ конечномъ цѣломъ положительномъ p. Имѣя послѣ этого въ виду составъ (171) главы I функціи $\omega(\nu;\, xz)$, заключаемъ о справедливости равенства (2). Пусть теперь $arg\,(xz)$ содержится въ промежуткѣ (5). Умноживъ обѣ части соотношенія (19) на $e^{+2\sqrt{xz}}$ и принимая во вниманіе обозначенія (18) и (22), найдемъ:

$$\frac{d^p u}{dz^p}\, e^{+2\sqrt{xz}} = \lambda'_p\, a_p\, (+\sqrt{r})\, e^{+\sqrt{r}\left[2\sqrt{\rho}\, e^{\frac{\varphi+\psi}{2}} + h\right]}. \tag{27}$$

Но

$$\varphi + \psi = 2\pi + \eta, \tag{28}$$

гдѣ

$$|\eta| < +\pi - \varepsilon. \tag{29}$$

А посему имѣемъ:

$$\frac{d^p u}{dz^p}\, e^{+2\sqrt{xz}} = \lambda'_p\, a_p(+\sqrt{r})\, e^{-\sqrt{r}\left[2\sqrt{\rho}\, e^{\frac{\eta}{2} i} - h\right]}. \tag{30}$$

Пусть будетъ:

$$2\sqrt{\rho}\cos\frac{\eta}{2} - h > 0 \tag{31}$$

и, слѣдовательно:

$$\rho > \frac{h^2}{4\cos^2\frac{\eta}{2}}. \tag{32}$$

Тогда на основаніи соотношенія (30) находимъ:

$$\lim_{z=+\infty e^{\psi i}} \frac{d^p u}{dz^p} e^{+2\sqrt{xz}} (\sqrt{z})^k = 0 \tag{33}$$

при любомъ положительномъ конечномъ числѣ k. Соотношеніе (33) найдено нами въ предположеніи, что $p \leqq m-1$. Но, принимая во вниманіе уравненіе (1) и тѣ, которыя получаются изъ него при помощи дифференцированія по z, утверждаемъ, что оно справедливо для всякаго конечнаго цѣлаго положительнаго p. Имѣя тогда въ виду составъ (184) главы I функціи $\omega_1(\nu; xz)$, заключаемъ о справедливости равенства (4). Замѣтимъ, что подъ R, о которомъ говорится въ предложеніи, можемъ разумѣть наибольшее изъ разсматриваемыхъ значеній функцій: $\frac{h^2}{4\cos^2\frac{\varphi+\psi}{2}}$ и $\frac{h^2}{4\cos^2\frac{\eta}{2}}$.

Въ настоящей главѣ мы ограничимся лишь изслѣдованіемъ уравненія 2-го порядка:

$$\psi_z(u) = P_0 \frac{d^2u}{dz^2} + P_1 \frac{du}{dz} + P_2 u = 0, \tag{34}$$

которое получается изъ уравненія (1), если положить $m=2$, а

$$P_n^{(0)} = P_0;\ P_{n-1}^{(1)} = P_1;\ P_{n-1}^{(2)} = P_2; \tag{35}$$

при чемъ P_0, P_1 и P_2 суть полиномы соотвѣтственно степеней n, $n-1$ $n-1$. Но метода, которую мы при этомъ раскроемъ, примѣнима и къ уравненію (1) при m четномъ. Пользуясь функціями $\omega(\nu; xz)$ и $\omega_1(\nu; xz)$, отыщемъ сперва два линейно независимыхъ рѣшенія уравненія (34) въ формѣ опредѣленныхъ интеграловъ. Для этой цѣли поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Возьмемъ отъ второго изъ уравненій (1) главы I производную по z. Тогда, имѣя въ виду то же самое уравненіе, найдемъ:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \left(\frac{x}{z}\right)^2 \frac{d^2y}{dx^2}. \tag{36}$$

Въ силу перваго изъ уравненій (1) главы I, соотношеніе (36) представимъ слѣдующимъ образомъ:

$$(37)\qquad \frac{d^2y}{dz^2}=\frac{x}{z^2}\left[zy-(1+\nu)\frac{dy}{dx}\right].$$

Замѣнимъ теперь въ выраженіи $\psi_z(u)$ функцію u черезъ y, а функціи $\frac{du}{dz}$ и $\frac{d^2u}{dz^2}$ соотвѣтственно черезъ выраженія для $\frac{dy}{dz}$ и $\frac{d^2y}{dz^2}$, опредѣляемыя согласно второму изъ уравненій (1) главы I и (37), получимъ:

$$(38)\qquad \psi_z(y)=\\ =\frac{1}{z^2}\left\{[xP_0(z)+zP_2(z)]zy+x\frac{d}{dx}[zP_1(z)-(1+\nu)P_0(z)]y\right\},$$

гдѣ

$$(38')\qquad P_0(z)=P_0; P_1(z)=P_1; P_2(z)=P_2.$$

Принимая во вниманіе первое изъ уравненій (1) главы I, тождеству (38) дадимъ видъ:

$$(39)\qquad z^2\psi_z(y)=\theta_x(y),$$

гдѣ

$$(40)\qquad \theta_x(y)=\\ =[xP_0(\delta_x)+\delta_xP_2(\delta_x)]\delta_xy+x\frac{d}{dx}[\delta_xP_1(\delta_x)-(1+\nu)P_0(\delta_x)]y.$$

Уравненіе

$$(41)\qquad \theta_x(w)=0$$

есть *трансформа Фурье-Бесселя* уравненія (34). Пусть будутъ:

$$P_0(z)=\sum_{k=0}^{n}A_k\,z^k;$$

$$(42)\qquad P_1(z)=\sum_{k=0}^{n}B_k\,z^{k-1};$$

$$P_2(z)=\sum_{k=0}^{n}C_k\,z^{k-1},$$

гдѣ A_k, B_k и C_k суть постоянныя числа; при чемъ $B_0 = C_0 = 0$. Пользуясь далѣе формулой (15) главы II, уравненіе (41), или:

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\, \delta_x^{k+1}\, w + x\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n} \beta_k\, \delta_x^{k}\, w = 0, \tag{43}$$

гдѣ

$$\begin{aligned} \alpha_k &= x A_k + C_k; \\ \beta_k &= B_k - (1+\nu) A_k, \end{aligned} \tag{44}$$

представимъ такъ:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{k+1} x^{k+1-p}\Big[\alpha_k [k+1]_p (k+1+\nu)_p + \beta_k [k]_{p-1} (k+\nu+1)_{p-1} x\Big]\frac{d^{2k+2-p} w}{dx^{2k+2-p}} = 0. \tag{45}$$

Это послѣднее соотношеніе можно привести къ виду:

$$\theta_x(w) = \sum_{s=0}^{2n+1} \varphi_s(x)\frac{d^{2n+2-s} w}{dx^{2n+2-s}} = 0, \tag{46}$$

гдѣ

$$\begin{aligned} \varphi_s(x) &= \\ &= x^{n-s+1}\Big[\alpha_n [n+1]_s (n+1+\nu)_s + \beta_n [n]_{s-1} (n+1+\nu)_{s-1}\, x\Big] + \\ &+ x^{n-s+2}\Big[\alpha_{n-1} [n]_{s-2} (n+\nu)_{s-2} + \beta_{n-1} [n-1]_{s-3} (n+\nu)_{s-3}\, x\Big] + \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ x^{n-s+1+E\left(\frac{s}{2}\right)}\Big[\alpha_{n-E\left(\frac{s}{2}\right)} \Big[n+1-E\Big(\frac{s}{2}\Big)\Big]_{s-2E\left(\frac{s}{2}\right)} \Big(n+1+\nu-E\Big(\frac{s}{2}\Big)\Big)_{s-2E\left(\frac{s}{2}\right)} + \\ &+ \beta_{n-E\left(\frac{s}{2}\right)} \Big[n-E\Big(\frac{s}{2}\Big)\Big]_{s-1-2E\left(\frac{s}{2}\right)} \Big(n+\nu-E\Big(\frac{s}{2}\Big)\Big)_{s-1-2E\left(\frac{s}{2}\right)} x\Big]. \end{aligned} \tag{47}$$

Уравненіе (46) представляетъ частный видъ уравненія (1) при $z=x$. Обозначимъ далѣе черезъ $\theta'_x(v)$ выраженіе:

$$\theta'_x(v)=\sum_{s=0}^{2n+1}(-1)^{2n+2-s}\frac{d^{2n+2-s}[\varphi_s(x)v]}{dx^{2n+2-s}}, \tag{48}$$

и составимъ тождество:

$$v\,\theta_x(w)-w\,\theta'_x(v)=\frac{d}{dx}\nabla(w,v), \tag{49}$$

гдѣ

$$\nabla(w,v)=$$

$$\sum_{s=0}^{2n+1}\sum_{t=0}^{2n+1-s}(-1)^t\frac{d^t[v\varphi_s(x)]}{dx^t}\frac{d^{2n+1-s-t}w}{dx^{2n+1-s-t}}. \tag{50}$$

Разумѣя подъ y либо $\omega(\nu;xz)$, либо $\omega_1(\nu;xz)$, внесемъ въ соотношеніе (49) на мѣсто w функцію y. Принимая тогда во вниманіе формулу (39), найдемъ:

$$vz^2\psi_z(y)-y\theta'_x(v)=\frac{d}{dx}\nabla(y,v). \tag{51}$$

Пусть v будетъ функціей только x. Тогда можемъ написать:

$$z^2\psi_z(vy)=y\theta'_x(v)+\frac{d}{dx}\nabla(y,v). \tag{52}$$

Умноживъ теперь обѣ части соотношенія (52) на dx и взявъ отъ полученнаго результата интегралъ по нѣкоторому пути L, будемъ имѣть:

$$z^2\psi_z\int_L vy\,dx=\int_L y\,\theta'_x(v)\,dx+\int_L\frac{d}{dx}\nabla(y,v)\,dx. \tag{53}$$

Такъ какъ выраженіе $\theta'_x(v)$ (48) не содержитъ члена, свободнаго отъ знака операціи $\frac{d^2}{dx^2}$, ибо $\varphi_{2n+1}(x)=0$, то можемъ положить:

$$\theta'_x(v) = \frac{d^2}{dx^2}\,\vartheta_x(v)\,, \tag{54}$$

гдѣ

$$\vartheta_x(v) = \sum_{s=0}^{2n} (-1)^s \frac{d^{2n-s}\,[\varphi_s(x)\,v]}{dx^{2n-s}}\,. \tag{54'}$$

Внеся въ соотношеніе (53) на мѣсто $\theta'_x(v)$ выраженіе $\frac{d^2}{dx^2}\,\vartheta_x(v)$, можемъ его написать слѣдующимъ образомъ:

$$z^2\varphi_z \int_L vy\,dx = -\int_L \frac{dy}{dx}\frac{d}{dx}\,\vartheta_x(v)\,dx + \int_L \frac{d}{dx}[\nabla\, y, v) + y\frac{d}{dx}\vartheta_x(v)\,]\,dx\,. \tag{55}$$

Пусть теперь функція v и путь L удовлетворяютъ условіямъ:

$$\vartheta_x(v) = 0; \tag{56}$$

$$\int_L \frac{d}{dx}\;\nabla(y,v)\,dx = 0. \tag{57}$$

Тогда выраженіе:

$$u = \int_L vy\,dx \tag{58}$$

представитъ рѣшеніе уравненія (34). Какъ видно изъ выраженія (54'), уравненіе (56) $2n$-го порядка.

Заслуживаетъ вниманіе также случай, когда $\nu = -\frac{1}{2}$. Какъ видно изъ выраженій (171) и (184) главы I при значеніяхъ A и B, данныхъ на основаніи равенствъ (164) и (180) той же главы, функціи $\omega(\nu; xz)$ и $\omega_1(\nu; xz)$ обратятся въ показательныя:

$$\begin{aligned} \omega(-\tfrac{1}{2}; xz) &= \overline{\Gamma}(\tfrac{3}{2})\,e^{-2\sqrt{xz}}; \\ \omega_1(-\tfrac{1}{2}; xz) &= -\,\overline{\Gamma}(\tfrac{3}{2})\,e^{+2\sqrt{xz}}. \end{aligned} \tag{59}$$

Разумѣя подъ η либо $\omega(-\frac{1}{2}; xz)$, либо $\omega_1(-\frac{1}{2}; xz)$, а подъ $\overline{\vartheta}_x(v)$ выраженіе $\vartheta_x(v)$ послѣ замѣны ν черезъ $-\frac{1}{2}$, будемъ имѣть рѣшеніе уравненія (34):

$$\overline{u} = \int_L v\eta dx, \tag{60}$$

если функція v и путь L выбраны согласно условіямъ:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\vartheta}_x(v) = 0; \\ &\int_L \frac{d}{dx}\Big[\nabla(\eta, v)\Big]dx = 0. \end{aligned}\right. \tag{61}$$

Въ дальнѣйшихъ своихъ изслѣдованіяхъ мы будемъ предполагать рѣшенія уравненія (34) въ формѣ опредѣленнаго интеграла (58); при чемъ на ν мы наложимъ *особыя* ограниченія. Но для той же цѣли годилось бы также интегральное выраженіе (60). Хотя въ случаѣ, когда $\nu = -\frac{1}{2}$, интегральная форма выраженія рѣшеній уравненія (34) проще,—интегралъ однократный: все-же метода, основанная на функціяхъ $\omega(\nu; xz)$ и $\omega_1(\nu; xz)$, гдѣ ν выбрано *особымъ* образомъ, предпочтительна, какъ видно будетъ въ слѣдующемъ параграфѣ.

§ 2.

Изысканіе функціи v. Особый выборъ параметра ν. Выборъ путей интеграціи и интеграловъ. Продолженіе опредѣленныхъ интеграловъ, представляющихъ рѣшенія уравненія (34).

Займемся предварительно изысканіемъ функціи V, общаго интеграла уравненія (56), или:

$$\sum_{s=0}^{2n} (-1)^s \sum_{t=0}^{2n-s} [2n-s]_t\, \varphi_s^{(2n-s-t)}(x) \frac{d^t v}{dx^t} = 0, \tag{62}$$

гдѣ

$$\varphi_s^{2n-s-t}(x) = \frac{d^{2n-s-t}\varphi_s(x)}{dx^{2n-s-t}}. \tag{63}$$

Уравненіе (62) представляетъ частный видъ уравненія (1) при $z = x$. А посему при достаточно большихъ значеніяхъ $|z|$ сохраняетъ силу:

$$\lim_{x=+\infty e^{\varphi i}} \omega(\nu; xz)(\sqrt{x})^k \frac{d^p v}{dx^p} = 0, \tag{64}$$

если $arg\,(xz)$ содержится въ промежуткѣ (3), и

$$\lim_{x=+\infty e^{\varphi i}} \omega_1(\nu; xz)(\sqrt{x})^k \frac{d^p v}{dx^p} = 0, \tag{65}$$

если $arg(xz)$ не выходитъ изъ границъ (5). При этомъ k и p суть любыя цѣлыя положительныя конечныя числа или нули.

Уравненіе (62) имѣетъ три особыя точки: $0, -\frac{C_n}{A_n} = \alpha$ и ∞. Изъ нихъ первыя двѣ правильныя, а третья неправильная. Изъ первыхъ двухъ точекъ насъ будетъ занимать лишь α. Основное опредѣляющее уравненіе Л. Фукса, относящееся къ области этой точки, есть слѣдующее:

$$\sigma(\sigma-1) \cdots (\sigma-2n+2)\left(\sigma - \frac{B_n}{A_n} + \nu + 2\right) = 0. \tag{66}$$

Значитъ, корни этого уравненія таковы:

$$\begin{gathered} \sigma_0 = 0; \sigma_1 = 1; \cdots ; \sigma_{2n-2} = 2n-2; \\ \sigma_{2n-1} = \frac{B_n}{A_n} - \nu - 2. \end{gathered} \tag{67}$$

До сихъ поръ на параметръ ν мы не налагали никакихъ ограниченій. Теперь же мы подчинимъ его слѣдующимъ условіямъ: 1) *Пусть бу-*

детъ ν *раціональною дробью, только не вида* $m+\frac{1}{2}$, *гдѣ* m *цѣлое число или нуль*; 2) $\frac{B_n}{A_n}-\nu-2$ *не должно быть цѣлымъ числомъ или нулемъ* и 3) $R\left(\frac{B_n}{A_n}-\nu-2\right)>0$. Въ виду второго изъ этихъ условій, интегральные элементы, принадлежащіе къ показателямъ (66), *не содержатъ логариѳмовъ* [1]) и, слѣдовательно, имѣемъ:

$$v_i=(x-\alpha)^{\sigma_i}P_i(x-\alpha);\ i=0,1,2,\cdots,2n-2.$$

(68)

$$v=(x-\alpha)^{\mu-\nu-2}P(x-\alpha),$$

гдѣ

(69)
$$\mu=\frac{B_n}{A_n}.$$

При этомъ $P_i(x-\alpha)$ и $P(x-\alpha)$ имѣютъ видъ:

$$P_i(x-\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{ki}(x-\alpha)^k,$$

(70)

$$P(x-\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-\alpha)^k,$$

гдѣ a_{ki} и a_k суть постоянныя числа, опредѣляемыя изъ уравненія (62) по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ; при чемъ a_{0i} и a_0 не нули. Замѣтимъ, что суммы (70), согласно изслѣдованіямъ Л. Фукса [2]), равномѣрно и абсолютно сходятся внутри круговъ съ центрами въ точкѣ $x=\alpha$, длины радіусовъ которыхъ отличны отъ нуля. А посему общій интегралъ V уравненія (70) въ области точки α имѣетъ такое представленіе:

(71)
$$V=\sum_{i=0}^{2n-2}c_i v_i+cv,$$

---

[1]) Въ этомъ состоитъ первое преимущество методы.

[2]) Crelle's Journal, Bd. 66. Berlin, 1866. S. 194.

гдѣ c_i и c суть произвольныя постоянныя числа. Впредь подъ v_i и v мы будемъ разумѣть символы, которыя означаютъ соотвѣтственно представленія (68) и ихъ всевозможныя продолженія на всей конечной плоскости комплекснаго перемѣннаго x. Итакъ, имѣемъ рѣшеніе уравненія (34):

$$U = \int_L V y dx; \tag{72}$$

при чемъ должно быть:

$$\int_L \frac{d}{dx}\left[\nabla(y, V)\right] dx = 0. \tag{73}$$

Введемъ теперь на мѣсто x новое перемѣнное t, связанное съ нимъ при помощи подстановки:

$$x = t^2. \tag{74}$$

Тогда будемъ имѣть:

$$U = 2\int_M t\, \bar{V} \bar{y}\, dt; \tag{75}$$

$$\int_M \frac{d}{dt}\left[\nabla'(\bar{y}, \bar{V})\right] dt = 0, \tag{76}$$

гдѣ $\bar{V}$ и $\bar{y}$ представляютъ соотвѣтственно результаты подстановокъ на мѣсто x перемѣннаго t^2 въ функціи V и y, M есть отображеніе пути L на плоскости перемѣннаго t, а

$$\nabla'(\bar{y}, \bar{V}) = 2^{-2n-1} \sum_{s=0}^{2n+1} 2^s \sum_{p=0}^{2n+1-s} (-1)^p \square_t^p \left[\bar{V} \varphi_s(t^2)\right] \square_t^{2n+1-s-p} \bar{y}; \tag{77}$$

при чемъ $\square_t = t^{-1} \dfrac{d}{dt}$. Замѣтимъ, что

$$\bar{V} = \sum_{i=0}^{2n-2} c_i \bar{v}_i + c\bar{v}; \tag{77'}$$

при чемъ $\bar{v}_i$ и $\bar{v}$ имѣютъ такія представленія въ области точки:

(78) $$+a = +\sqrt{\alpha} = \delta e^{\theta i},$$

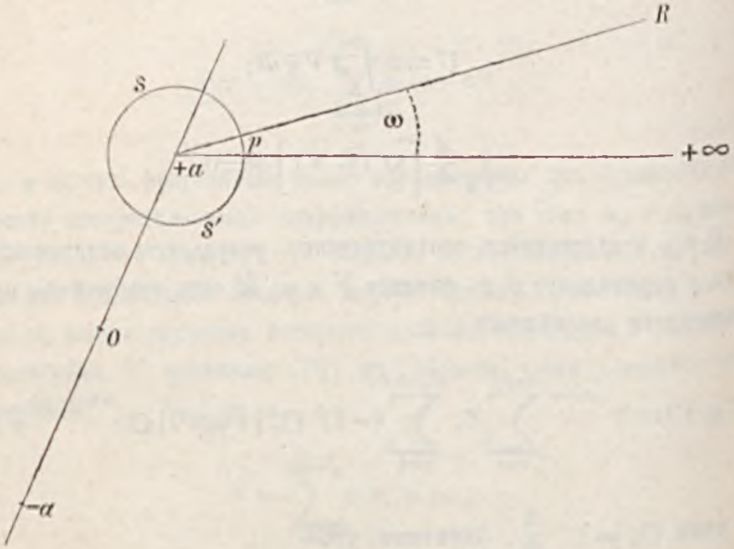
гдѣ

(79) $$o \leqq \theta < \pi;$$

(80) $$\bar{v}_i = (t^2-a^2)^{\sigma_i} P_i(t^2-a^2);\ i=0,1,\cdots,2n-2.$$
$$\bar{v} = (t^2-a^2)^{\mu-\nu-2} P(t^2-a^2).$$

Займемся теперь разысканіемъ пути M, удовлетворяющаго условію (76). Къ результатамъ (75) и (76) мы пришли бы, измѣнивъ въ соотношеніи (52) перемѣнное x на t^2 и оперируя надъ полученнымъ такимъ образомъ соотношеніемъ такъ же, какъ это мы дѣлали съ равенствомъ (52). Отсюда ясно, что путь M мы можемъ выбрать независимо отъ L, лишь бы онъ удовлетворялъ условію (76). Имѣя въ виду равенства (64) и (65), искомый путь строимъ слѣдующимъ образомъ. Отмѣтимъ на плоскости перемѣннаго t точки $+a$, 0 и $-a$ (чер. 13).

Чер. 13.



Потомъ изъ точки $+a$, какъ центра, опишемъ окружность, радіусъ которой не больше наименьшаго изъ радіусовъ круговъ сходимости рядовъ $P_i(t^2-a^2)$ и $P(t^2-a^2)$. Далѣе, изъ точки $+a$ проведемъ безконечной длины векторъ $+aR$ подъ угломъ ω къ вектору $0+\infty$. Точку пересѣченія его съ окружностью назовемъ p, точку пересѣченія съ окружностью продолженія вектора $0+a$ назовемъ q, а самую окружность $pss'p$. Обозначая черезъ β величину угла наклоненія между собою векторовъ $0+a$ и $+a+\infty$, предположимъ, что въ точкѣ q окружности сохраняютъ силу равенства:

$$arg(t-a)=arg(t+a)=arg\,t=\beta, \tag{81}$$

и пусть величина ω совпадаетъ съ β, если векторъ $+aR$ придетъ въ совпаденіе съ $0+a$ послѣ поворота на уголъ ω. Если теперь

$$\begin{gathered} -2\pi-2\beta+\Delta<arg\,z<+2\pi-2\beta-\Delta; \\ -\pi-2\omega+\varepsilon<arg\,z<+\pi-2\omega-\varepsilon; \end{gathered} \tag{82}$$

$$4\,|t\sqrt{z}|>\rho_0, \tag{83}$$

гдѣ ρ_0 означаетъ радіусъ окружности, входящей въ составъ пути интеграціи въ интегралѣ (54) главы II, Δ и ε суть какой угодно малости положительныя величины, отличныя отъ нуля, а $|z|$ достаточно великъ, то построенный такимъ образомъ путь удовлетворитъ условію (76) и интегралъ отъ $t\,\overline{V}\omega(\gamma;xt^2)\,dt$, взятый по этому пути, который мы обозначимъ такъ:

$$U=2\int_R^{(+a)} t\,\overline{V}\omega(\gamma;zt^2)\,dt, \tag{84}$$

представитъ рѣшеніе уравненія (34) Точно также, если

$$\begin{gathered} -2\beta+\Delta<arg\,z<+4\pi-2\beta-\Delta; \\ +\pi-2\omega+\varepsilon<arg\,z<+3\pi-2\omega-\varepsilon; \end{gathered} \tag{85}$$

$$4\,|t\sqrt{z}|>\rho'_0, \tag{86}$$

гдѣ ρ'_0 означаетъ радіусъ окружности, входящей въ составъ пути интеграціи въ интегралѣ (57) главы II, а $|z|$ достаточно великъ, то выраженіе:

$$U = 2\int_R^{(+a)} t\,\overline{V}\,\omega_1(\nu; zt^2)\,dt \tag{87}$$

служитъ вторымъ частнымъ рѣшеніемъ уравненія (34).

Замѣнивъ въ интегралѣ (84) функцію $\overline{V}$ ея выраженіемъ (77'), получимъ:

$$\begin{aligned} U = 2\sum_{i=0}^{2n-2} c_i \int_R^{(+a)} t\,\overline{v}_i\,\omega(\nu; zt^2)\,dt + \\ + 2c\int_R^{(+a)} t\,\bar{v}\,\omega(\nu; zt^2)\,dt. \end{aligned} \tag{88}$$

Но по теоремѣ Коши имѣемъ:

$$\int_R^{(+a)} t\,\overline{v}_i\,\omega(\nu; zt^2)\,dt = 0. \tag{89}$$

А посему:

$$U = 2c\int_R^{(+a)} t\,\bar{v}\,\omega(\nu; zt^2)\,dt. \tag{90}$$

Этотъ послѣдній интегралъ можемъ представить въ формѣ:

$$\begin{aligned} U = \\ = 2c\Big[\Big(1 - e^{2\pi(\mu-\nu)i}\Big)\int_R^{p} t\,\bar{v}\,\omega(\nu; zt^2)\,dt + \\ + \int_{pss'p} t\,\bar{v}\,\omega(\nu; z\,t^2)\,dt\Big]. \end{aligned} \tag{91}$$

Въ виду того, что $R(\mu - \nu - 2) > 0$, имѣемъ право во второй части соотношенія (91) контуръ $pss'p$ уменьшить до совпаденія его съ точкой $+a$. Въ предѣлѣ тогда получимъ:

$$\lim \int_{pss'p} t\,\bar{v}\,\omega(\nu; zt^2)\,dt = 0, \tag{92}$$

и, слѣдовательно, будемъ имѣть:

$$U = -2c\left(1 - e^{2\pi(\mu-\nu)i}\right)\int_{+a}^{R} t\bar{v}\,\omega(\nu; zt^2)\,dt. \tag{93}$$

Полагая, что

$$c = \frac{1}{e^{2\pi(\mu-\nu)i} - 1}, \tag{94}$$

и обозначая при этомъ U черезъ u_1, будемъ имѣть:

$$u_1 = 2\int_{+a}^{R} t\bar{v}\,\omega(\nu; zt^2)\,dt. \tag{95}$$

Такимъ же путемъ отъ интеграла (87) переходимъ къ слѣдующему:

$$u_2 = 2\int_{+a}^{R} t\bar{v}\,\omega_1(\nu; zt^2)\,dt. \tag{96}$$ [1])

Подобно интеграламъ (61) главы II, u_1 и u_2 могутъ быть продолжены. Такъ какъ доказательство этого было бы въ сущности повтореніемъ того, что было изложено въ § 3 предыдущей главы относительно продолженія интеграловъ (61), то здѣсь мы ограничимся лишь указаніемъ областей продолженія интеграловъ (95) и (96). Въ случаѣ интеграла (95) эта область такова:

$$-2\pi - 2\beta + \Delta < \arg z < +2\pi - 2\beta - \Delta, \tag{97}$$

а въ случаѣ интеграла (96) искомая область опредѣляется неравенствами:

$$-2\beta + \Delta < \arg z < +4\pi - 2\beta - \Delta. \tag{98}$$

Значитъ, областямъ (97) и (98) принадлежитъ общая область:

$$-2\beta + \Delta < \arg z < +2\pi - 2\beta - \Delta. \tag{99}$$

---

[1]) Въ томъ, что во всѣхъ случаяхъ путь интеграціи по t въ интегралахъ (95) и (96) приводится къ прямолинейному отрѣзку $+aR$, состоитъ второе преимущество методы.

Кромѣ интеграловъ (95) и (96), будемъ также разсматривать слѣдующія рѣшенія уравненія (34):

(100)
$$\bar{u}_1 = 2\int_{-a}^{-R} t\,\bar{v}\,\omega(\nu; zt^2)\,dt;$$
$$\bar{u}_2 = 2\int_{-a}^{-R} t\,\bar{v}\,\omega_1(\nu; zt^2)\,dt.$$

Предполагаемъ, что въ первомъ изъ интеграловъ $arg z$ содержится въ промежуткѣ:

(101)
$$-4\pi - 2\beta + \Delta < arg z < -2\beta - \Delta;$$
$$-3\pi - 2\omega + \varepsilon < arg z < -\pi - 2\omega - \varepsilon,$$

а во второмъ въ промежуткѣ (82).

§ 3.

Объ асимптотическомъ представленіи интеграла u_1 (95) *для весьма большихъ значеній* $|z|$.

Остановимся теперь на изысканіи асимптотическаго представленія интеграла u_1 (95) для весьма большихъ значеній $|z|$. Принимая во вниманіе представленіе (54) главы II функціи $\omega(\nu; zt^2)$, изобразимъ u_1 слѣдующимъ образомъ:

(102)
$$u_1 = 2A(\sqrt{z})^{-\nu-\frac{1}{2}} \int_{+a}^{R} e^{-2t\sqrt{z}}\, t^{-\nu+\frac{1}{2}}\, \bar{v}\, dt \int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau}\, \tau^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\tau}{4t\sqrt{z}}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} d\tau.$$

Пусть будетъ:

(103)
$$t = a + \eta.$$

Будемъ имѣть:

(104)
$$u_1 = 2A(\sqrt{z})^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{-2a\sqrt{z}} \int_0^{R} e^{-2\eta\sqrt{z}} \left(\eta + a\right)^{-\nu+\frac{1}{2}} \bar{v}_1\, d\eta$$
$$\int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau}\, \tau^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\tau}{4(\eta+a)\sqrt{z}}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} d\tau.$$

Замѣтимъ, что интегрированіе по η въ интегралѣ (104) выполняется по прямолинейному отрѣзку $0R$ отъ 0 до $R=+\infty e^{\omega i}$, а $\bar{v}_1$ означаетъ результатъ подстановки въ функціи $\bar{v}$ на мѣсто t его значенія $a+\eta$. Введемъ далѣе обозначеніе:

$$\vartheta\left(\eta, \frac{\tau}{\sqrt{z}}\right)= \tag{105}$$
$$=\eta^{-\mu+\nu+2}(\eta+a)^{-\nu+\frac{1}{2}}\,\bar{v}_1\left(1-\frac{\tau}{4(a+\eta)\sqrt{z}}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}.$$

Тогда интегралъ (104) перепишется слѣдующимъ образомъ:

$$u_1= \tag{106}$$
$$=2A(\sqrt{z})^{-\nu-\frac{1}{2}}e^{-2a\sqrt{z}}\int_0^R e^{-2\eta\sqrt{z}}\,\eta^{\mu-\nu-2}\,d\eta\int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau}\,\tau^{\nu-\frac{1}{2}}\,\vartheta\left(\eta, \frac{\tau}{\sqrt{z}}\right)d\tau.$$

Функція $\vartheta\left(\eta, \frac{\tau}{\sqrt{z}}\right)$ можетъ быть разложена въ рядъ Тэйлора-Коши по степенямъ перемѣнныхъ η и $\frac{\tau}{\sqrt{z}}$, равномѣрно и абсолютно сходящійся для всѣхъ значеній этихъ перемѣнныхъ, удовлетворяющихъ условіямъ:

$$|\eta|\leqq r_1;\ \left|\frac{\tau}{\sqrt{z}}\right|\leqq \rho_1, \tag{107}$$

гдѣ r_1 и ρ_1 суть нѣкоторыя положительныя числа, отличныя отъ нуля. Пусть будетъ:

$$\vartheta\left(\eta, \frac{\tau}{\sqrt{z}}\right)=\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{p}\frac{\Delta_{p-q,q}\,\eta^{p-q}\,\tau^{q}}{(\sqrt{z})^{q}}+s_m, \tag{108}$$

гдѣ

$$\Delta_{p-q,q}=\frac{1}{(p-q)!\,q!}\left.\frac{d^p\,\vartheta(u,v)}{du^{p-q}\,dv^{q}}\right|_{u=0,\ v=0}, \tag{109}$$

а s_m дополнительный членъ разложенія. Внеся въ интегралъ (106) на мѣсто функціи $\vartheta\left(\eta, \frac{\tau}{\sqrt{z}}\right)$ ея представленіе (108), получимъ:

$$u_1 =$$

$$(110) = 2A(\sqrt{z})^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{-2a\sqrt{z}} \left[\sum_{p=0}^{m} \sum_{q=0}^{p} \frac{\Delta_{p-q,q}\, \Gamma(\nu+q+\frac{1}{2}) j_m}{(\sqrt{z})^q} + i_m \right].$$

гдѣ

$$j_m = \int_0^R e^{-2\eta\sqrt{z}} \eta^{\mu-\nu+p-q-2} d\eta;$$

(111)

$$i_m = \int_0^R e^{-2\eta\sqrt{z}} \eta^{\mu-\nu-2} d\eta \int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}} s_m d\tau.$$

Вычислимъ сперва интегралъ j_m. Полагая въ немъ:

$$(112) \qquad 2\eta\sqrt{z} = \eta_1,$$

будемъ имѣть:

$$(113) \qquad j_m = \frac{1}{(2\sqrt{z})^{\mu-\nu+p-q-1}} \int_0^{R'} e^{-\eta_1} \eta_1^{\mu-\nu+p-q-2} d\eta_1,$$

гдѣ

$$(114) \qquad R' = \infty e^{\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)i};$$

при чемъ:

$$(114') \qquad \left|\omega + \frac{\psi}{2}\right| < \pi - \varepsilon.$$

Въ виду неравенства (114′), разсужденіями, аналогичными тѣмъ, при помощи которыхъ нами установлено тождество (105) главы I, убѣждаемся, что

$$(115) \qquad \int_0^{R'} e^{-\eta_1} \eta_1^{\mu-\nu+p-q-2} d\eta_1 = \Gamma(\mu-\nu+p-q-1).$$

А посему:

$$(116) \qquad j_m = \frac{\Gamma(\mu-\nu+p-q-1)}{(2\sqrt{z})^{\mu-\nu+p-q-1}}.$$

Остановимся теперь на вычисленіи интеграла i_m (111). Будемъ подъ $\bar{r}$ разумѣть такое комплексное число, аргументъ котораго есть ω, а модуль $|\bar{r}|$ удовлетворяетъ условію:

$$o < |\bar{r}| < r_1. \tag{117}$$

Впредь мы будемъ предполагать, что $|z|$ настолько великъ, что сохраняютъ силу всѣ разсматриваемые нами интегралы; при чемъ

$$|z|^{\frac{p'}{q'}-\frac{1}{2}} < r'; \gamma_1 |z|^{\frac{p'}{q'}-\frac{1}{2}} < 1,2|\bar{r}| \quad |\sqrt{z}| > |z|^{\frac{p'}{q'}-\frac{1}{2}}, \tag{118}$$

гдѣ p' и q' означаютъ взаимно простыя цѣлыя положительныя числа, отношеніе $\frac{p'}{q'}$ которыхъ меньше $\frac{1}{2}$, r' есть наименьшее изъ чиселъ r_1 и ρ_1, а

$$\gamma_1 = \frac{1}{2r_1} + \frac{1}{\rho_1}. \tag{119}$$

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ прибѣгать также къ обозначенію:

$$\sigma = |z|^{\frac{p'}{q'}}. \tag{120}$$

Послѣ этого интегралъ i_m представимъ слѣдующимъ образомъ:

$$i_m = i'_m + i''_m, \tag{121}$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} i'_m &= \int_{\bar{r}}^{R} e^{-2\eta\sqrt{z}}\, \eta^{\mu-\nu-2}\, d\eta \int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau}\, \tau^{\nu-\frac{1}{2}}\, s_m\, d\tau; \\ i''_m &= \int_{0}^{\bar{r}} e^{-2\eta\sqrt{z}}\, \eta^{\mu-\nu-2}\, d\eta \int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau}\, \tau^{\nu-\frac{1}{2}}\, s_m\, d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{122}$$

Займемся сперва вычисленіемъ интеграла i'_m. Полагаемъ въ немъ:

$$\eta = \bar{r} + e^{\omega i}\eta_1;\ \tau = -\tau'. \tag{123}$$

Будемъ имѣть:

$$i'_m=$$

$$=e^{\pi(\nu+\frac{1}{2})i+(\mu-\nu-1)\,\omega i-2\bar{r}\sqrt{z}}\int_0^{+\infty}e^{-2\eta_1 e^{\omega i}\sqrt{z}}\left(|\bar{r}|+\eta_1\right)^{\mu-\nu-2}d\eta_1$$

(124)

$$\int_{+\infty}^{(0)}e^{-\tau'}\tau'^{\nu-\frac{1}{2}}\bar{s}_m\,d\tau',$$

гдѣ

$$(125)\quad \bar{s}_m=\vartheta\left(\bar{r}+e^{\omega i}\eta_1;\frac{-\tau'}{\sqrt{z}}\right)-\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{p}\frac{(-1)^q\Delta_{p-q,q}\left(\bar{r}+e^{\omega i}\eta_1\right)^{p-q}\tau'^q}{(\sqrt{z})^q}.$$

Обозначая черезъ δ положительное постоянное число, меньшее $\rho_1\sqrt{|z|}$, представимъ i'_m такъ:

$$i'_m=$$

$$=e^{\pi(\nu+\frac{1}{2})i+(\mu-\nu-1)\omega i-2\bar{r}\sqrt{z}}\left[\int_0^{+\infty}e^{-2\eta_1 e^{\omega i}\sqrt{z}}\left(|\bar{r}|+\eta_1\right)^{\mu-\nu-2}d\eta_1\right.$$

$$(126)\qquad \int_{\delta(0)}e^{-\tau'}\tau'^{\nu-\frac{1}{2}}\bar{s}_m\,d\tau'-$$

$$\left.-\left(1+e^{2\pi\nu i}\right)\int_0^{+\infty}e^{-2\eta_1 e^{\omega i}\sqrt{z}}\left(|\bar{r}|+\eta_1\right)^{\mu-\nu-2}d\eta_1\int_\delta^{+\infty}e^{-\tau'}\tau'^{\nu-\frac{1}{2}}\bar{s}_m\,d\tau'\right],$$

гдѣ $\delta(0)$ означаетъ окружность радіуса δ, описанную изъ точки $\tau'=0$, какъ центра. Пусть на этой окружности положеніе точекъ опредѣляется такъ:

$$(127)\qquad \tau'=\delta e^{\theta i}.$$

Тогда изъ соотношенія (126) найдемъ:

$$
\begin{aligned}
|i'_m| &< e^{-\pi\nu''-(\mu''-\nu'')\omega-2|\bar r|\sqrt{r}\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)}\Bigg[\delta^{\nu'+\frac{1}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-2\eta_1\sqrt{r}\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)} \qquad (128)\\
&\left(|\bar r|+\eta_1\right)^{\mu'-\nu'-2} d\eta_1\int_0^{2\pi} e^{-\delta\cos\theta-\nu''\theta}\,|\bar s_m|\,d\theta+\left(1+e^{-2\pi\nu''}\right).\\
&\int_0^{+\infty} e^{-2\eta_1\sqrt{r}\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)}\left(|\bar r|+\eta_1\right)^{\mu'-\nu'-2} d\eta_1\int_\delta^{+\infty} e^{-\tau'}\tau'^{\nu'-\frac{1}{2}}\,|\bar s_m|\,d\tau'\Bigg],
\end{aligned}
$$

гдѣ

$$\mu=\mu'+i\mu''. \tag{129}$$

Назовемъ k_m наибольшее значеніе функціи $e^{-\eta_1\sqrt{r}\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)}\cdot$ $\left(|\bar r|+\eta_1\right)^{\mu'-\nu'-2} e^{-\delta\cos\theta-\nu''\theta}\,|\bar s_m|$ въ области интеграціи въ первомъ изъ интеграловъ правой части неравенства (128). Далѣе пусть $\bar k_m$ будетъ представлять наибольшее значеніе функціи $e^{-\eta_1\sqrt{r}\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)}\cdot$ $\left(|\bar r|+\eta_1\right)^{\mu'-\nu'-2} e^{-\frac{\tau'}{2}}\tau'^{\nu'-\frac{1}{2}}\,|\bar s_m|$ въ области интеграціи во второмъ изъ интеграловъ правой части неравенства (128). k_m и $\bar k_m$ суть функціи r и ψ, конечныя для всѣхъ разсматриваемыхъ значеній этихъ перемѣнныхъ. Имѣя въ виду неравенство (128), можемъ написать:

$$
<\frac{2e^{-\pi\nu''-(\mu''-\nu'')\omega-2|\bar r|\sqrt{r}\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)}}{\sqrt{r}\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)}\left[k_m\delta^{\nu'+\frac{1}{2}}\pi+\left(1+e^{-2\pi\nu''}\right)\bar k_m e^{-\frac{\delta}{2}}\right]. \tag{130}
$$

Называя i_{1m} множитель при $\dfrac{e^{-2|\bar r|\sqrt{r}\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)}}{\sqrt{r}\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)}$ въ правой части неравенства (130), перепишемъ его слѣдующимъ образомъ:

$$
|i'_m|<\frac{i_{1m}\,e^{-2|\bar r|\sqrt{r}\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)}}{\sqrt{r}\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)}. \tag{131}
$$

Отсюда заключаемъ:

(132)
$$i'_m = \frac{\vartheta_m i_{1m} e^{-2|r|\sqrt{r}\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)}}{\sqrt{r}\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)},$$

гдѣ

(132')
$$0 < |\vartheta_m| < 1.$$

Обратимся теперь къ интегралу i''_m (122). Представимъ его въ формѣ:

(133)
$$i''_m = j''_m + \left(1+e^{2\pi\nu i}\right) j'_m,$$

гдѣ

(134)
$$j'_m = -\int_0^{\bar r} e^{-2\eta\sqrt{z}} \eta^{\mu-\nu-2} d\eta \int_{-\sigma}^{-\infty} e^{\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}} s_m\, d\tau;$$
$$j''_m = \int_0^{\bar r} e^{-2\eta\sqrt{z}} \eta^{\mu-\nu-2} d\eta \int_{-\sigma}^{(o)} e^{\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}} s_m\, d\tau.$$

Полагаемъ въ первомъ изъ интеграловъ (134):

(135)
$$\eta = e^{\omega i}\eta_1;\ \tau = -\tau' - \sigma.$$

Будемъ имѣть:

(136)
$$j'_m = -e^{\pi\left(\nu+\frac{1}{2}\right)i + (\mu-\nu-1)\omega i - \sigma}\, \sigma^{\nu-\frac{1}{2}} \int_0^{|r|} e^{-2\eta_1 e^{\omega i}\sqrt{z}} \eta_1^{\mu-\nu-2} d\eta_1$$
$$\int_0^{\infty} e^{-\tau'}\left(1+\frac{\tau'}{\sigma}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} s_{1m}\, d\tau',$$

гдѣ

(136')
$$s_{1m} = \vartheta\left(e^{\omega i}\eta_1, -\frac{\tau'+\sigma}{\sqrt{z}}\right) - \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{p} \frac{(-1)^q \Delta_{p-q,q}\, e^{(p-q)\omega i}\, \eta_1^{p-q} (\tau'+\sigma)^q}{(\sqrt{z})^q}.$$

Изъ соотношенія (136) находимъ:

$$|j'_m| < e^{-\pi\nu''-(\mu''-\nu'')\omega-\sigma}\,\sigma^{\nu'-\frac{1}{2}}\int_0^{|r|} e^{-2\eta_1\sqrt{r}\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)}\,\eta_1^{\mu'-\nu'-2}\,d\eta_1$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\tau'}\left(1+\frac{\tau}{\sigma}\right)^{\nu'-\frac{1}{2}}|\,s_{1m}\,|\,d\tau'. \tag{137}$$

Назовемъ m_m наибольшее значеніе функціи $e^{-2\eta_1\sqrt{r}\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)}\eta_1^{\mu'-\nu'-2}e^{-\frac{\tau'}{2}}$. $\left(1+\frac{\tau'}{\sigma}\right)^{\nu'-\frac{1}{2}}|\,s_{1m}|$ въ области интеграціи въ интегралѣ правой части неравенства (137). m_m есть функція r и ψ, конечная для всѣхъ разсматриваемыхъ значеній этихъ перемѣнныхъ. Тогда, въ виду неравенства (137), можемъ написать:

$$|\,j'_m| < 2\,|\,\bar{r}\,|\,e^{-\pi\nu''-(\mu''-\nu'')\omega-\sigma}\,m_m\,\sigma^{\nu'-\frac{1}{2}}. \tag{138}$$

Отсюда находимъ:

$$j'_m = 2\,\vartheta'_m\,|\,\bar{r}\,|\,e^{-\pi\nu''-(\mu''-\nu'')\omega-\sigma}m_m\,\sigma^{\nu'-\frac{1}{2}}, \tag{139}$$

гдѣ

$$0 < |\,\vartheta'_m| < 1. \tag{140}$$

Полагая въ интегралѣ j''_m (134):

$$2\eta\sqrt{z} = \eta_1\,e^{\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)i};\ \tau = -\tau', \tag{141}$$

приведемъ его къ слѣдующему виду;

$$j''_m =$$

$$= \frac{e^{\pi\left(\nu+\frac{1}{2}\right)i+(\mu-\nu-1)\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)i}}{(2\sqrt{z})^{\mu-\nu-1}}\int_0^{\sigma_1} e^{-\eta_1 e^{\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)i}}\,\eta_1^{\mu-\nu-2}\,d\eta_1$$

$$\int_\sigma^{(0)} e^{-\tau'}\,\tau'^{\nu-\frac{1}{2}}\,\bar{s}_{1m}\,d\tau', \tag{142}$$

гдѣ

$$(143)\qquad \bar{s}_{1m} = \sum_{p=m+1}^{\infty} \frac{1}{(2\sqrt{z})^p} \sum_{q=0}^{p} (-2)^q \Delta_{p-q,q}\, e^{(p-q)\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)i} \eta_1^{\,p-q} \tau'^{q},$$

а

$$(144)\qquad \sigma_1 = 2\bar{r}\sqrt{\bar{z}}\, e^{-\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)i}.$$

Далѣе, имѣемъ:

$$(145)\qquad j''_m = \frac{e^{\pi\left(\nu+\frac{1}{2}\right)i+(\mu-\nu-1)\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)i}}{(2\sqrt{z})^{\mu-\nu-1}}\left[j_{1m}+j_{2m}\right],$$

гдѣ

$$(146)\qquad \begin{aligned} j_{1m} &= \int_{\sigma}^{\sigma_1} e^{-\eta_1 e^{\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)i}} \eta_1^{\mu-\nu-2}\, d\eta_1 \int_{\sigma}^{(0)} e^{-\tau'} \tau'^{\nu-\frac{1}{2}} \bar{s}_{1m}\, d\tau'; \\ j_{2m} &= \int_{0}^{\sigma} e^{-\eta_1 e^{\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)i}} \eta_1^{\mu-\nu-2}\, d\eta_1 \int_{\sigma}^{(0)} e^{\tau'} \tau'^{\nu-\frac{1}{2}} \bar{s}_{1m}\, d\tau'. \end{aligned}$$

Интегралъ j_{1m} представимъ въ формѣ:

$$(147)\qquad j_{1m} = l'_m + \left(1+e^{2\pi\nu i}\right) l_m,$$

гдѣ

$$(148)\qquad \begin{aligned} l_m &= -\int_{\sigma}^{\sigma_1} e^{-\eta_1 e^{\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)i}} \eta_1^{\mu-\nu-2}\, d\eta_1 \int_{\delta_1}^{\sigma} e^{-\tau'} \tau'^{\nu-\frac{1}{2}} \bar{s}_{1m}\, d\tau'; \\ l'_m &= \int_{\sigma}^{\sigma_1} e^{-\eta_1 e^{\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)i}} \eta_1^{\mu-\nu-2}\, d\eta_1 \int_{\delta_1\,(0)} e^{-\tau'} \tau'^{\nu-\frac{1}{2}} \bar{s}_{1m}\, d\tau', \end{aligned}$$

гдѣ δ_1 представляетъ постоянное положительное число, не превосходящее наименьшаго изъ разсматриваемыхъ значеній перемѣннаго числа σ, а $\delta_1(o)$ означаетъ окружность радіуса δ_1, описанную изъ точки $\tau'=0$, какъ центра.

Остановимся на вычисленіи интеграловъ (148). Полагаемъ въ первомъ изъ нихъ:

$$\eta_1 = \sigma + \eta'. \tag{149}$$

Найдемъ:

$$\begin{aligned} l_m = -\sigma^{\mu-\nu-2} e^{-\sigma e^{\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)i}} \int_0^{\sigma_2} e^{-\eta' e^{\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)i}} \left(1+\frac{\eta'}{\sigma}\right)^{\mu-\nu-2} d\eta' \\ \int_{\delta_1}^{\sigma} e^{-\tau'} \tau'^{\nu-\frac{1}{2}} s_{2m}\, d\tau', \end{aligned} \tag{150}$$

гдѣ s_{2m} представляетъ $\overline{s}_{1m}$ послѣ замѣны въ этой послѣдней функціи η_1 черезъ $\sigma+\eta'$, а

$$\sigma_2 = \sigma_1 - \sigma. \tag{151}$$

На основаніи соотношенія (150) имѣемъ:

$$\begin{aligned} |l_m| < \sigma^{\mu'-\nu'-2} e^{-\sigma\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)} \int_0^{\sigma_2} e^{-\eta'\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)} \left(1+\frac{\eta'}{\sigma}\right)^{\mu'-\nu'-2} d\eta' \\ \int_{\delta_1}^{\sigma} e^{-\tau'} \tau'^{\nu'-\frac{1}{2}} |s_{2m}|\, d\tau'. \end{aligned} \tag{152}$$

Пусть n_m будетъ наибольшее значеніе функціи $e^{-\frac{\eta'}{2}\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)}$. $\left(1+\frac{\eta'}{\sigma}\right)^{\mu'-\nu'-2} e^{-\frac{\tau'}{2}} \tau'^{\nu'-\frac{1}{2}} |s_{2m}|$ въ области интеграціи въ интегралѣ правой части неравенства (152). n_m есть функція r и ψ, конечная для разсматриваемыхъ значеній этихъ перемѣнныхъ. Тогда, имѣя въ виду неравенство (152), можемъ написать:

$$(153)\qquad |l_m| < \frac{4 n_m \sigma^{\mu'-\nu'-2}\left(1-e^{-\frac{\sigma_1}{2}\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)}\right)\left(e^{-\frac{\delta_1}{2}}-e^{-\frac{\sigma}{2}}\right)e^{-\sigma\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)}}{\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)}.$$

Отсюда заключаемъ:

$$(154)\qquad l_m = \frac{4 \zeta_m n_m \sigma^{\mu'-\nu'-2}\left(1-e^{-\frac{\sigma_1}{2}\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)}\right)\left(e^{-\frac{\delta_1}{2}}-e^{-\frac{\sigma}{2}}\right)e^{-\sigma\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)}}{\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)},$$

гдѣ

$$(154')\qquad 0 < |\zeta_m| < 1.$$

Далѣе, полагаемъ въ интегралѣ l'_m (148):

$$(155)\qquad \eta_1 = \sigma + \eta'; \; \tau' = \delta_1 e^{\theta i}.$$

Будемъ имѣть:

$$(156)\qquad l'_m = -i\delta_1^{\nu+\frac{1}{2}} \sigma^{\mu-\nu-2} e^{-\sigma e^{\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)i}} \int_0^{\sigma_1} e^{-\eta_1 e^{\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)i}} \left(1+\frac{\eta'}{\sigma}\right)^{\mu-\nu-2} d\eta' \int_0^{2\pi} e^{-\delta_1 e^{\theta i}+(\nu+\frac{1}{2})\theta i}\, \overline{s}_{2m}\, d\theta,$$

гдѣ $\overline{s}_{2m}$ есть s_{2m} послѣ замѣны въ этой послѣдней функціи η_1 черезъ $\sigma+\eta'$ и τ' черезъ $\delta_1 e^{\theta i}$. Изъ соотношенія (156) находимъ:

$$(157)\qquad |l'_m| < \delta_1^{\nu'+\frac{1}{2}} \sigma^{\mu'-\nu'-2} e^{-\sigma\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)} \int_0^{\sigma_1} e^{-\eta'\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)} \left(1+\frac{\eta'}{\sigma}\right)^{\mu'-\nu'-2} d\eta' \int_0^{2\pi} e^{-\delta_1\cos\theta-\nu''\theta} \left|\overline{s}_{2m}\right| d\theta.$$

Назовемъ $\bar{n}_m$ наибольшее значеніе функціи въ $e^{-\frac{\eta'}{2}\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)}$. $\left(1+\frac{\eta'}{\sigma}\right)^{\mu'-\nu'-2} e^{-\delta_1\cos\theta-\nu''\theta} |\bar{s}_{2m}|$ въ области интеграціи въ интегралѣ правой части неравенства (157). $\bar{n}_m$ есть функція r и ψ, конечная для разсматриваемыхъ значеній этихъ перемѣнныхъ. Тогда, на основаніи неравенства (157), можемъ написать:

$$|l'_m| < \frac{4\pi\delta^{\nu'+\frac{1}{2}}\sigma^{\mu'-\nu'-2}\bar{n}_m e^{-\sigma\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)}\left(1-e^{-\frac{\sigma_2}{2}\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)}\right)}{\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)}. \qquad (158)$$

Отсюда заключаемъ:

$$l'_m = \frac{4\pi\bar{n}_m\zeta'_m\delta^{\nu'+\frac{1}{2}}\sigma^{\mu'-\nu'-2}e^{-\sigma\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)}\left(1-e^{-\frac{\sigma_2}{2}\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)}\right)}{\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)}, \qquad (159)$$

гдѣ

$$o < |\zeta'_m| < 1. \qquad (159')$$

Займемся, наконецъ вычисленіемъ интеграла j_{2m} (146). Представимъ его въ формѣ:

$$j_{2m} = \int_0^\sigma e^{-\eta_1 e^{\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)i}} \eta_1^{\mu-\nu-2} d\eta_1 \int_{\delta_1(0)} e^{-\tau'} \tau'^{\nu-\frac{1}{2}} \bar{s}_{1m} d\tau' -$$
$$- \left(1+e^{2\pi\nu i}\right) \int_0^\sigma e^{-\eta_1 e^{\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)i}} \eta_1^{\mu-\nu-2} d\eta_1 \int_{\delta_1}^\sigma e^{-\tau'} \tau'^{\nu-\frac{1}{2}} \bar{s}_{1m} d\tau'. \qquad (160)$$

Принимая во вниманіе вторую изъ подстановокъ (155), на основаніи соотношенія (160) находимъ:

$$|j_{2m}| < \delta_1^{\nu'+\frac{1}{2}} \int_0^\sigma e^{-\eta_1\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)} \eta_1^{\mu'-\nu'-2} d\eta_1 \int_0^{2\pi} e^{-\delta_1\cos\theta-\nu''\theta} |\bar{s}_{1m}| d\theta +$$
$$+ \left(1+e^{-2\pi\nu''}\right) \int_0^\sigma e^{-\eta_1\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)} \eta_1^{\mu'-\nu'-2} d\eta_1 \int_{\delta_1}^\sigma e^{-\tau'} \tau'^{\nu'-\frac{1}{2}} |\bar{s}_{1m}| d\tau'. \qquad (161)$$

Но имѣемъ:

$$|\bar{s}_{1m}| < \sum_{p=m+1}^{\infty}\frac{1}{(2\sqrt{r})^p}\sum_{q=0}^{p}2^q\,|\Delta_{p-q,q}|\,|\eta_1|^{p-q}\,|\tau'|^q$$

(162)

$$< \mu\sum_{p=m+1}^{\infty}\sum_{q=0}^{p}\left(\frac{|\eta_1|}{2r_1\sqrt{r}}\right)^{p-q}\left(\frac{|\tau'|}{\rho_1\sqrt{r}}\right)^{q},$$

гдѣ μ есть наибольшее значеніе функціи $|\vartheta(u,v)|$ для всѣхъ значеній u и v, удовлетворяющихъ условіямъ:

(163) $$|u| = r_1\,;\ |v| = \rho_1\,.$$

Имѣя въ виду второе изъ условій (118), можемъ написать:

(164) $$\sum_{p=m+1}^{\infty}\sum_{q=0}^{p}\left(\frac{|\eta_1|}{2r_1\sqrt{r}}\right)^{p-q}\left(\frac{|\tau'|}{\rho_1\sqrt{r}}\right)^{q} < \frac{\left(\frac{|\eta_1|}{2r_1}+\frac{|\tau'|}{\rho_1}\right)^{m+1}}{(\sqrt{r})^{m+1}\left[1-\gamma_1 r^{\frac{p'}{q'}-\frac{1}{2}}\right]}.$$

Принимая во вниманіе результаты (162) и (164), имѣемъ:

(165) $$|\bar{s}_{1m}| < \frac{\mu\left(\frac{|\eta_1|}{2r_1}+\frac{|\tau'|}{\rho_1}\right)^{m+1}}{(\sqrt{r})^{m+1}\left[1-\gamma_1 r^{\frac{p'}{q'}-\frac{1}{2}}\right]}.$$

Замѣнивъ въ интегралахъ правой части неравенство (161) функцію $|s_{1m}|$ верхней границей (165) ея значеній, получимъ:

$$|j_{2m}|$$

$$< \frac{\mu}{(\sqrt{r})^{m+1}\left[1-\gamma_1 r^{\frac{p'}{q'}-\frac{1}{2}}\right]}\left[\delta_1^{\nu'-\frac{1}{2}}\int_0^{\sigma}e^{-\eta_1\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)}\eta_1^{\mu'-\nu'-2}\right.$$

(166)

$$\left(\frac{\eta_1}{2r_1}+\frac{\delta_1}{\rho_1}\right)^{m+1}d\eta_1\int_0^{2\pi}e^{-\delta\cos\theta-\nu''\theta}\,d\theta_1+\left(1+e^{-2\pi\nu''}\right)\cdot$$

$$\left.\int_0^{\sigma}e^{-\eta_1\cos\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)}\eta_1^{\mu'-\nu'-2}\,d\eta_1\int_{\delta_1}^{\sigma}e^{-\tau'}\tau'^{\nu'-\frac{1}{2}}\left(\frac{\eta_1}{2r_1}+\frac{\tau'}{\rho_1}\right)^{m+1}d\tau'\right].$$

Обозначимъ черезъ Λ_m множитель при $\frac{1}{(\sqrt{r})^{m+1}}$ въ правой части неравенства (166). Тогда это послѣднее перепишемъ слѣдующимъ образомъ:

$$|j_{2m}| < \frac{\Lambda_m}{(\sqrt{r})^{m+1}}. \tag{167}$$

Отсюда находимъ:

$$j_{2m} = \frac{\nu_m \Lambda_m}{(\sqrt{z})^{m+1}}, \tag{168}$$

гдѣ

$$0 < |\nu_m| < 1. \tag{168'}$$

Имѣя теперь въ виду результаты: (132), (133), (139), (145), (147), (154), (159) и (168), на основаніи соотношенія (121) имѣемъ:

$$i_m = \delta_m + \frac{e^{\pi(\nu+\frac{1}{2})i+(\mu-\nu-1)\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)i} \nu_m \Lambda_m}{2^{\mu-\nu-1}(\sqrt{z})^{\mu-\nu+m}}, \tag{169}$$

гдѣ функція δ_m обладаетъ свойствомъ:

$$\lim_{z=+\infty e^{\psi i}} \delta_m(\sqrt{z})^k = 0 \tag{170}$$

при всякомъ конечномъ положительномъ k, если ψ не выходитъ изъ границъ (82). Введемъ далѣе обозначеніе:

$$\delta_m + \frac{e^{\pi(\nu+\frac{1}{2})i+(\mu-\nu-1)\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)i} \nu_m \Lambda_m}{2^{\mu-\nu-1}(\sqrt{z})^{\mu-\nu+m}} = \frac{\eta_m}{2^{\mu-\nu-1}(\sqrt{z})^{\mu-\nu+m-1}}. \tag{171}$$

Значитъ:

$$i_m = \frac{\eta_m}{2^{\mu-\nu-1}(\sqrt{z})^{\mu-\nu+m-1}}. \tag{172}$$

Въ виду результатовъ (116) и (172), соотношеніе (110) напишется слѣдующимъ образомъ:

$$u_1 = \frac{A}{2^{\mu-\nu-2}} (\sqrt{z})^{-\mu+\frac{1}{2}} e^{-2a\sqrt{z}} \, .$$

(173)

$$\left[\sum_{p=0}^{m} \frac{1}{(2\sqrt{z})^p} \sum_{q=0}^{p} 2^q \Delta_{p-q,q} \Gamma(\nu+q+\tfrac{1}{2}) \Gamma(\mu-\nu+p-q-1) + \frac{\eta_m}{(\sqrt{z})^m} \right] .$$

Легко обнаружить, что *функція η_m съ безграничнымъ возрастаніемъ $|z|$, начиная съ нѣкотораго значенія этого модуля, равномѣрно стремится къ нулю, если $\arg z = \psi$ не выходитъ изъ границъ* (82). Въ самомъ дѣлѣ, назовемъ ε':

(174) $$\varepsilon' = \frac{1}{\sqrt[n]{r}},$$

гдѣ $n > 2$. Тогда можно найти такое положительное конечное число R, что для $|z| \geqq R$ сохраняютъ силу неравенства:

(175)

$$\left| 2^{\mu-\nu-1} \delta_m \, (\sqrt{z})^{\mu-\nu+m-1} \right| < \frac{\varepsilon'}{2} ;$$

$$\frac{e^{-\pi\nu''-(\mu''-\nu'')\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)} \Lambda_m}{\sqrt{r}} < \frac{\varepsilon'}{2} .$$

Принимая во вниманіе составъ функціи η_m, опредѣляемой изъ соотношенія (171), приходимъ къ заключенію:

(175') $$|\eta_m| < \varepsilon' .$$

Значитъ, положеніе справедливо и, при томъ, для всякаго конечнаго m. А посему имѣетъ мѣсто для весьма большихъ $|z|$ асимптотическое равенство:

$$u_1 \backsim \frac{A}{2^{\mu-\nu-2}} (\sqrt{z})^{-\mu+\frac{1}{2}} e^{-2a\sqrt{z}} \, .$$

(176)

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2\sqrt{z})^p} \sum_{q=0}^{p} 2^q \Delta_{p-q,q} \Gamma(\nu+q+\tfrac{1}{2}) \Gamma(\mu-\nu+p-q-1) .$$

§ 4.

Объ асимптотическомъ представленіи интеграла (96) *для весьма большихъ значеній* $|z|$.

Займемся теперь разысканіемъ асимптотическаго представленія интеграла u_2 (96) для весьма большихъ значеній $|z|$. Пользуясь подстановкой (103), представимъ этотъ интегралъ въ формѣ:

$$u_2 = 2B(\sqrt{z})^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{+2a\sqrt{z}} \int_0^R e^{+2\eta\sqrt{z}} \eta^{\mu-\nu-2} d\eta$$
$$\int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}} \vartheta\left(\eta, -\frac{\tau}{\sqrt{z}}\right) d\tau. \tag{177}$$

Далѣе, представимъ $\vartheta\left(\eta, -\frac{\tau}{\sqrt{z}}\right)$ такъ:

$$\vartheta\left(\eta, -\frac{\tau}{\sqrt{z}}\right) = \sum_{p=0}^{m} \sum_{q=0}^{p} \frac{(-1)^q \Delta_{p-q,q}\, \eta^{p-q} \tau^q}{(\sqrt{z})^q} + T_m, \tag{178}$$

гдѣ T_m формально получается изъ s_m (108) замѣной въ этой послѣдней функціи τ черезъ $-\tau$. Сумма (178) при $m = \infty$ равномѣрно и абсолютно сходится для всѣхъ значеній η и $\frac{\tau}{\sqrt{z}}$, удовлетворяющихъ условіямъ (107). Внеся въ интегралъ (177) на мѣсто функціи $\vartheta\left(\eta, \frac{-\tau}{\sqrt{z}}\right)$ ея представленія (178), получимъ:

$$u_2 =$$
$$= 2B(\sqrt{z})^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{+2a\sqrt{z}} \left[\sum_{p=0}^{m} \sum_{q=0}^{p} \frac{(-1)^q \Delta_{p-q,q}\, \Gamma(\nu+q+\frac{1}{2}) \bar{j}_m + \bar{i}_m}{(\sqrt{z})^q}\right], \tag{179}$$

гдѣ

$$\overline{j_m} = \int_0^R e^{+2\eta\sqrt{z}} \eta^{\mu-\nu+p-q-2} d\eta;$$

(180)

$$\overline{i_m} = \int_0^R e^{+2\eta\sqrt{z}} \eta^{\mu-\nu-2} d\eta \int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}} T_m \, d\tau.$$

Остановимся сперва на вычисленіи интеграла $\overline{j_m}$. При помощи подстановки:

(181) $$2\eta\sqrt{z} = -\eta_1$$

приведемъ его къ виду:

(182) $$\overline{j_m} = \frac{(-1)^{p+q+1} e^{\pi(\mu-\nu)i}}{(2\sqrt{z})^{\mu-\nu+p-q-1}} \int_0^{\overline{R}} e^{-\eta_1} \eta_1^{\mu-\nu+p-q-2} d\eta_1,$$

гдѣ

(182′) $$\overline{R} = -\infty e^{\left(\omega+\frac{\psi}{2}\right)i}.$$

Такъ какъ, въ силу неравенствъ (85),

(183) $$\psi = 2\pi - 2\omega + \beta',$$

гдѣ

(184) $$|\beta'| < \pi - \varepsilon,$$

то, принимая во вниманіе, тождество (115), можемъ написать:

(185) $$\overline{j_m} = \frac{(-1)^{p+q+1} e^{\pi(\mu-\nu)i} \Gamma(\mu-\nu+p-q-1)}{(2\sqrt{z})^{\mu-\nu+p-q-1}}.$$

Займемся теперь вычисленіемъ интеграла $\overline{i_m}$ (180). Мы удерживаемъ здѣсь обозначенія и условія (117), (118) и (119) предыдущаго параграфа. Вычисленіе $\overline{i_m}$ производится по тому же пріему, при помощи котораго мы вычислили интегралъ i_m (111). Представимъ $\overline{i_m}$ прежде всего въ формѣ:

(186) $$\overline{i_m} = \overline{i'_m} + \overline{i''_m},$$

гдѣ

$$\overline{i'_m} = \int_{\overline{r}}^{R} e^{+2\eta\sqrt{z}} \eta^{\mu-\nu-2} d\eta \int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}} T_m \, d\tau;$$

$$\overline{i''_m} = \int_0^{\overline{r}} e^{+2\eta\sqrt{z}} \eta^{\mu-\nu-2} d\eta \int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}} T_m \, d\tau. \tag{187}$$

Принимая во вниманіе подстановки (123), приведемъ $\overline{i'_m}$ къ виду:

$$\overline{i'_m} = e^{\pi(\nu+\frac{1}{2})i+(\mu-\nu-1)\omega i+2\overline{r}\sqrt{z}} \Big[\int_0^{+\infty} e^{+2\eta_1 e^{\omega i}\sqrt{z}} \left(|\overline{r}|+\eta_1\right)^{\mu-\nu-2} d\eta_1 \int_{\delta(0)} e^{-\tau'} \tau'^{\nu-\frac{1}{2}} \overline{T}_m \, d\tau' - \left(1+e^{2\pi\nu i}\right) \int_0^{+\infty} e^{+2\eta_1 e^{\omega i}\sqrt{z}} \left(|\overline{r}|+\eta_1\right)^{\mu-\nu-2} d\eta_1 \int_{\delta}^{+\infty} e^{-\tau'} \tau'^{\nu-\frac{1}{2}} \overline{T}_m \, d\tau' \Big], \tag{188}$$

гдѣ δ и $\delta(o)$ имѣютъ тотъ же смыслъ, какъ и въ интегралахъ (126), а

$$\overline{T}_m = \vartheta\left(\overline{r}+e^{\omega i}\eta_1, \frac{\tau'}{\sqrt{z}}\right) - \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{p} \frac{\Delta_{p-q,q}\left(\overline{r}+e^{\omega i}\eta_1\right)^{p-q} \tau'^{q}}{(\sqrt{z})^q}. \tag{189}$$

Имѣя въ виду подстановку (127), на основаніи соотношенія (188) находимъ:

$$|\overline{i'_m}| < \frac{2e^{-\pi\nu''-(\mu''-\nu'')\omega-2|\overline{r}|\sqrt{r}\cos\frac{\beta'}{2}}}{\sqrt{r}\cos\frac{\beta'}{2}} \left[k_{1m}\delta^{\nu'}{}_{\pi}{}^{+\frac{1}{2}} + \overline{k}_{1m}\left(1+e^{-2\pi\nu''}\right)e^{-\frac{\delta}{2}} \right], \tag{190}$$

гдѣ k_{1m} представляетъ наибольшее значеніе функціи $e^{-\eta_1\sqrt{r}\cos\frac{\beta'}{2}}$. $\left(|\overline{r}|+\eta_1\right)^{\mu'-\nu'-2} e^{-\delta\cos\theta-\nu''\theta} \left|\overline{T}_m\right|$ въ области интеграціи въ первомъ интегралѣ правой части равенства (188), а $\overline{k}_{1m}$ есть наибольшее значеніе функціи $e^{-\eta_1 \cos\frac{\beta'}{2}}(|\overline{r}|+\eta_1)^{\mu'-\nu'-2} e^{-\frac{\tau'}{2}} \tau'^{\nu'-\frac{1}{2}} \left|\overline{T}_m\right|$ въ области интеграціи во второмъ интегралѣ правой части соотношенія (188). k_{1m} и $\overline{k}_{1m}$ суть функціа r и ψ, конечныя для разсматриваемыхъ значеній этихъ перемѣнныхъ. Назовемъ $\overline{i}_{1m}$ множитель при $\dfrac{e^{-2|\overline{r}|\sqrt{\overline{r}\cos\frac{\beta'}{2}}}}{\sqrt{\overline{r}\cos\frac{\beta'}{2}}}$ въ правой части неравенства (190). Будемъ имѣть:

$$(191)\qquad |\overline{i}'_m| < \frac{\overline{i}_{1m} e^{-2|r|\sqrt{\overline{r}\cos\frac{\beta'}{2}}}}{\sqrt{\overline{r}\cos\frac{\beta'}{2}}}.$$

Отсюда находимъ:

$$(192)\qquad \overline{i}'_m = \frac{\overline{\vartheta}_m \overline{i}_{1m} e^{-2|\overline{r}|\sqrt{\overline{r}\cos\frac{\beta'}{2}}}}{\sqrt{\overline{r}\cos\frac{\beta'}{2}}},$$

гдѣ

$$(192')\qquad o < |\overline{\vartheta}_m| < 1.$$

Далѣе, интегралъ $\overline{i}''_m$ (187) напишемъ въ формѣ:

$$(193)\qquad \overline{i}''_m = \overline{j}''_m + (1+e^{2\pi\nu i})\, \overline{j}'_m,$$

гдѣ

$$(194)\qquad \begin{aligned} \overline{j}'_m &= -\int_0^{\overline{r}} e^{+2\eta\sqrt{z}} \eta^{\mu-\nu-2} d\eta \int_{-\sigma}^{-\infty} e^{\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}} T_m d\tau; \\ \overline{j}''_m &= \int_0^{\overline{r}} e^{+2\eta\sqrt{z}} \eta^{\mu-\nu-2} d\eta \int_{-\sigma}^{(0)} e^{\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}} T_m d\tau. \end{aligned}$$

При помощи подстановокъ (135) интегралъ $\overline{j}'_m$ приведемъ къ виду:

$$\bar{j}'_m = -e^{\pi(\nu+\frac{1}{2})i+(\mu-\nu-1)\omega i-\sigma}\sigma^{\nu-\frac{1}{2}}\int_0^{|\bar{r}|} e^{+2\eta_1 e^{\omega i}\sqrt{z}}\eta_1^{\mu-\nu-2}\,d\eta_1 \tag{195}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\tau'}\left(1+\frac{\tau'}{\sigma}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} T'_m\,d\tau',$$

гдѣ

$$T'_m =$$

$$= \vartheta\left(\eta_1 e^{\omega i}, \frac{\tau'+\sigma}{\sqrt{z}}\right) - \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{p} \frac{\Delta_{p-q,q}\, e^{(p-q)\omega i}\,\eta_1^{p-q}\,(\tau'+\sigma)^q}{(\sqrt{z})^q}. \tag{196}$$

Изъ соотношенія (195) находимъ:

$$|\bar{j}'_m| < 2\,|\bar{r}|\,\bar{m}_m\, e^{-\pi\nu''-(\mu''-\nu'')\omega-\sigma}\sigma^{\nu'-\frac{1}{2}}, \tag{197}$$

гдѣ $\bar{m}_m$ есть наибольшее значеніе функціи $e^{-2\eta_1\sqrt{r}\cos\frac{\beta'}{2}}\eta_1^{\mu'-\nu'-2}e^{-\frac{\tau'}{2}}$. $\left(1+\frac{\tau'}{\sigma}\right)^{\nu'-\frac{1}{2}}|T'_m|$ въ области интеграціи въ интегралѣ правой части соотношенія (195). $\bar{m}_m$ есть функція r и ψ, конечная для разсматриваемыхъ значеній этихъ перемѣнныхъ. Изъ неравенства (197) находимъ:

$$\bar{j}'_m = 2\,\bar{\vartheta}'_m\,|\bar{r}|\,\bar{m}_m\, e^{-\pi\nu''-(\mu''-\nu'')\omega-\sigma}\sigma^{\nu'-\frac{1}{2}}, \tag{198}$$

гдѣ

$$0 < |\bar{\vartheta}'_m| < 1. \tag{198'}$$

Пользуясь далѣе подстановками:

$$2\eta\sqrt{z} = -\eta_1 e^{\frac{\beta'_i}{2}};\ \tau = -\tau', \tag{199}$$

интегралъ $\bar{j}''_m$ (194) представимъ слѣдующимъ образомъ:

$$\overline{j''_m} =$$

(200) $$= \frac{e^{\pi(\mu-\frac{1}{2})i+(\mu-\nu-1)\frac{\beta' i}{2}}}{(2\sqrt{z})^{\mu-\nu-1}} \int_0^{\sigma_1} e^{-\eta_1 e^{\frac{\beta' i}{2}}} \eta_1^{\mu-\nu-2} d\eta_1 \int_\sigma^{(0)} e^{-\tau'} \tau'^{\nu-\frac{1}{2}} T_{1m}\, d\tau',$$

гдѣ

(201) $$T_{1m} = \sum_{p=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2\sqrt{z})^p} \sum_{q=0}^{p} (-2)^q \Delta_{p-q,q}\, e^{\frac{(p-q)\beta' i}{2}} \eta_1^{p-q} \tau'^q .$$

Далѣе, разобъемъ интегралъ $\overline{j''_m}$ слѣдующимъ образомъ:

$$\overline{j''_m} =$$

(202) $$= \frac{e^{\pi(\mu-\frac{1}{2})i+(\mu-\nu-1)\frac{\beta' i}{2}}}{(2\sqrt{z})^{\mu-\nu-1}} \left[g_m + g'_m\right],$$

гдѣ

(203)
$$g_m = \int_\sigma^{\sigma_1} e^{-\eta_1 e^{\frac{\beta' i}{2}}} \eta_1^{\mu-\nu-2} d\eta_1 \int_\sigma^{(0)} e^{-\tau'} \tau'^{\nu-\frac{1}{2}} T_{1m}\, d\tau';$$

$$g'_m = \int_0^{\sigma} e^{-\eta_1 e^{\frac{\beta' i}{2}}} \eta_1^{\mu-\nu-2} d\eta_1 \int_\sigma^{(0)} e^{-\tau'} \tau'^{\nu-\frac{1}{2}} T_{1m}\, d\tau'.$$

Интегралъ g_m въ свою очередь представимъ такъ:

(204) $$g_m = g_{2m} + \left(1 + e^{2\pi\nu i}\right) g_{1m},$$

гдѣ

(205)
$$g_{1m} = -\int_\sigma^{\sigma_1} e^{-\eta_1 e^{\frac{\beta' i}{2}}} \eta_1^{\mu-\nu-2} d\eta_1 \int_{\delta_1}^{\sigma} e^{-\tau'} \tau'^{\nu-\frac{1}{2}} T_{1m}\, d\tau';$$

$$g_{2m} = \int_\sigma^{\sigma_1} e^{-\eta_1 e^{\frac{\beta' i}{2}}} \eta_1^{\mu-\nu-2} d\eta_1 \int_{\delta_1(0)} e^{-\tau'} \tau'^{\nu-\frac{1}{2}} T_{1m}\, d\tau';$$

при чемъ δ_1 и $\delta_1(o)$ имѣютъ тотъ же смыслъ, что и въ интегралахъ (148). При помощи подстановки (149) интегралъ g_{1m} приведемъ къ виду:

$$g_{1m} = -\sigma^{\mu-\nu-2} e^{-\sigma e^{\frac{\beta' i}{2}}} \int_0^{\sigma_1} e^{-\eta' e^{\frac{\beta' i}{2}}} \left(1+\frac{\eta'}{\sigma}\right)^{\mu-\nu-2} d\eta' \tag{206}$$

$$\int_{\delta_1}^{\sigma} e^{-\tau'} \tau'^{\nu-\frac{1}{2}} \overline{T}_{1m}\, d\tau',$$

гдѣ $\overline{T}_{1m}$ означаетъ результатъ замѣны въ функціи T_{1m} перемѣннаго η_1 черезъ $\eta'+\sigma$, а $\sigma_2 = \sigma_1 - \sigma$. Изъ соотношенія (206) заключаемъ:

$$|g_{1m}| < \frac{4\,\sigma^{\mu'-\nu'-2} e^{-\sigma\cos\frac{\beta'}{2}}}{\cos\frac{\beta'}{2}} n_{1m} \left(1-e^{-\frac{\sigma_1}{2}\cos\frac{\beta'}{2}}\right)\left(e^{-\frac{\delta_1}{2}} - e^{-\frac{\sigma}{2}}\right), \tag{207}$$

гдѣ n_{1m} есть наибольшее значеніе функціи $e^{-\frac{\eta'}{2}\cos\frac{\beta'}{2}}\left(1+\frac{\eta'}{\sigma}\right)^{\mu'-\nu'-2}$. $e^{-\frac{\tau'}{2}} \tau'^{\nu'-\frac{1}{2}} |\overline{T}_{1m}|$ въ области интеграціи въ интегралѣ правой части соотношенія (206); при чемъ n_{1m} есть функція r и ψ, конечная для разсматриваемыхъ значеній этихъ перемѣнныхъ. На основаніи неравенства (207) имѣемъ:

$$g_{1m} = \frac{4\theta_m n_{1m} \sigma^{\mu'-\nu'-2} e^{-\sigma\cos\frac{\beta'}{2}}}{\cos\frac{\beta'}{2}} \left(1-e^{-\frac{\sigma_1}{2}\cos\frac{\beta'}{2}}\right)\left(e^{-\frac{\delta_1}{2}} - e^{-\frac{\sigma}{2}}\right), \tag{208}$$

гдѣ

$$0 < |\theta_m| < 1. \tag{208'}$$

Пользуясь далѣе подстановками (155), представимъ интегралъ g_{2m} (205) въ формѣ:

$$g_{2m} = i\,\delta_1^{\nu+\frac{1}{2}} \sigma^{\mu-\nu-2} e^{-\sigma e^{\frac{\beta' i}{2}}} \int_0^{\sigma_1} e^{-\eta' e^{\frac{\beta' i}{2}}} \left(1+\frac{\eta'}{\sigma}\right)^{\mu-\nu-2} d\eta' \tag{209}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-\delta_1 e^{\theta i} + (\nu+\frac{1}{2})\theta i}\, T_{2m}\, d\theta,$$

гдѣ T_{2m} означаетъ T_{1m} послѣ замѣны въ ней η_1 черезъ $\eta'+\sigma$ и τ' черезъ $\delta_1 e^{\theta i}$.

Изъ соотношенія (209) имѣемъ:

(210) $$|g_{2m}| < \frac{4\pi\delta_1^{\nu'+\frac{1}{2}}}{\cos\frac{\beta'}{2}} \sigma^{\mu'-\nu'-2} e^{-\sigma\cos\frac{\beta'}{2}} n_{2m}\left(1-e^{-\frac{\sigma_1}{2}\cos\frac{\beta'}{2}}\right),$$

гдѣ n_{2m} представляетъ наибольшее значеніе функціи $e^{-\frac{\eta'}{2}\cos\frac{\beta'}{2}}$. $\left(1+\frac{\eta'}{\sigma}\right)^{\mu'-\nu'-2} e^{-\delta_1\cos\theta-\nu''\theta} |T_{2m}|$ въ области интеграціи въ интегралѣ правой части соотношенія (209); n_{2m} есть функція r и ψ, конечная для разсматриваемыхъ значеній этихъ перемѣнныхъ.

Изъ неравенства (210) слѣдуетъ:

(211) $$g_{2m} = \frac{4\pi\theta'_m\delta_1^{\nu'+\frac{1}{2}}}{\cos\frac{\beta'}{2}} \sigma^{\mu'-\nu'-2} e^{-\sigma\cos\frac{\beta'}{2}} n_{2m}\left(1-e^{-\frac{\sigma_1}{2}\cos\frac{\beta'}{2}}\right),$$

гдѣ

(211') $$0 < |\theta'_m| < 1.$$

Остается теперь вычислить интегралъ g'_m (203). Примѣняя къ нему дословно разсужденія, на основаніи которыхъ нами вычисленъ интегралъ j_{2m} (146), придемъ къ слѣдующему результату:

(212) $$g'_m = \frac{\bar{\nu}_{1m}\bar{\Lambda}_m}{(\sqrt{z})^{m+1}},$$

гдѣ

(213) $$0 < |\nu_{1m}| < 1,$$

а

$$\bar{\Lambda}_m =$$

(214) $$= \frac{\mu}{1-\gamma_1 r^{\frac{p'}{q'}-\frac{1}{2}}}\left[\delta_1^{\nu'+\frac{1}{2}}\int_0^{\sigma} e^{-\eta_1\cos\frac{\beta'}{2}}\left(\frac{\eta_1}{2r_1}+\frac{\delta_1}{\rho_1}\right)^{m+1}\eta_1^{\mu'-\nu'-2}\,d\eta_1\right.$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-\delta_1 \cos\theta - \nu''\theta}\, d\theta + \left(1 + e^{-2\pi\nu''}\right) \int_0^{\sigma} e^{-\eta_1 \cos\frac{\beta'}{2}}\, \eta_1^{\mu'-\nu'-2}\, d\eta_1$$

$$\int_{\delta_1}^{\sigma} e^{-\tau'} \tau'^{\nu'-\frac{1}{2}} \left(\frac{\eta_1}{2r_1} + \frac{\tau'}{\rho_1}\right)^{m+1} d\tau'. \tag{214}$$

Въ виду результатовъ: (192), (193), (198), (202), (208), (211) и (212), соотношеніе (186) представимъ такъ:

$$\bar{i}_m = \bar{\delta}_m + \frac{\bar{\nu}_{1m}\,\bar{\Lambda}_m\, e^{\pi(\mu-\frac{1}{2})i + \frac{(\mu-\nu-1)\beta' i}{2}}}{2^{\mu-\nu-1}(\sqrt{z})^{\mu-\nu+m}}; \tag{215}$$

при чемъ функція $\bar{\delta}_m$ обладаетъ свойствомъ:

$$\lim_{z=+\infty e^{\psi i}} \bar{\delta}_m (\sqrt{z})^k = 0 \tag{216}$$

при любомъ положительномъ конечномъ числѣ k, если ψ не выходитъ изъ границъ (85).

Введемъ далѣе обозначеніе:

$$\bar{\delta}_m + \frac{\bar{\nu}_{1m}\,\bar{\Lambda}_m\, e^{\pi(\mu-\frac{1}{2})i + \frac{(\mu-\nu-1)\beta' i}{2}}}{2^{\mu-\nu-1}(\sqrt{z})^{\mu-\nu+m}} = -\frac{\eta'_m\, e^{\pi(\mu-\nu)i}}{2^{\mu-\nu-1}(\sqrt{z})^{\mu-\nu+m-1}}. \tag{217}$$

Значитъ:

$$\bar{i}_m = -\frac{\eta'_m\, e^{\pi(\mu-\nu)i}}{2^{\mu-\nu-1}(\sqrt{z})^{\mu-\nu+m-1}}. \tag{218}$$

Имѣя въ виду результаты (185) и (218), соотношеніе (179) представимъ слѣдующимъ образомъ:

$$u_2 =$$

$$= \frac{e^{\pi(\mu-\nu-1)i} B (\sqrt{z})^{-\mu+\frac{1}{2}} e^{+2a\sqrt{z}}}{2^{\mu-\nu-2}} \cdot$$

(219)

$$\Big[\sum_{p=0}^{m} \frac{(-1)^p}{(2\sqrt{z})^p} \sum_{q=0}^{p} 2^q \Delta_{p-q,q} \Gamma(\nu+q+\tfrac{1}{2}) \Gamma(\mu-\nu+p-q-1) + \frac{\eta'_m}{(\sqrt{z})^m} \Big] .$$

Разумѣя подъ ε' число $\frac{1}{\sqrt[n]{r}}$, гдѣ $n > 2$, можно всегда подобрать такое конечное положительное число R, что для $|z| \geqq R$ сохранитъ силу неравенство:

(220) $$|\eta_m| < \varepsilon',$$

если $arg z$ не выходитъ изъ границъ (85); другими словами, функція η'_m въ означенныхъ границахъ съ возрастаніемъ $|z|$, начиная съ нѣкотораго значенія этого модуля, равномѣрно стремится къ нулю. А посему для весьма большихъ значеній $|z|$ въ области (85) имѣетъ мѣсто асимптотическое равенство:

$$u_2 \backsim$$

(221)

$$\backsim - \frac{e^{\pi(\mu-\nu)i} B}{2^{\mu-\nu-2}} (\sqrt{z})^{-\mu+\frac{1}{2}} e^{+2a\sqrt{z}} .$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2\sqrt{z})^p} \sum_{q=0}^{p} 2^q \Delta_{p-q,q} \Gamma(\nu+q+\tfrac{1}{2}) \Gamma(\mu-\nu+p-q-1) .$$

§ 5.

Объ асимптотическихъ представленіяхъ интеграловъ (100) *для весьма большихъ значеній* $|z|$. *Функція* v_1 *и* v_2; *ихъ асимпто-*

тическія представленія для весьма большихъ значеній $|z|$. *Линейная независимость этихъ функцій. Объ асимптотическомъ представленіи всякаго интеграла уравненія* (34) *для весьма большихъ значеній* $|z|$. *О возможности дифференцировать по* z *асимптотическія представленія функцій* v_1 *и* v_2, *а также асимптотическое представленіе всякаго интеграла уравненія* (34). *Замѣчаніе о нуляхъ функцій* v_1 *и* v_2 *въ области точки* $z=\infty$.

Обнаружимъ теперь справедливость слѣдующаго положенія: *Интегралы* (100) *имѣютъ такія асимптотическія представленія для весьма большихъ значеній* $|z|$:

$$\begin{aligned}\bar{u}_1 &\sim \frac{A}{B} e^{-\pi\left(\nu-\frac{3}{2}\right)i} s_2; \\ \bar{u}_2 &\sim \frac{B}{A} e^{-\pi\left(\nu-\frac{3}{2}\right)} s_1,\end{aligned} \tag{222}$$

гдѣ s_1 *и* s_2 *означаютъ соотвѣтственно правыя части асимптотическихъ равенствъ* (176) *и* (221). *При этомъ первое изъ равенствъ* (222) *сохраняетъ силу, если*

$$\begin{gathered}-4\pi-2\beta+\Delta<\psi<-2\beta-\Delta; \\ -3\pi-2\omega+\varepsilon<\psi<-\pi-2\omega-\varepsilon,\end{gathered} \tag{223}$$

а второе въ области (82).

Принимая во вниманіе составъ (54) главы II функціи $\omega(\nu; zt^2)$, напишемъ интегралъ $\bar{u}_1$ въ формѣ.

$$\bar{u}_1 = \\ =2A(\sqrt{z})^{-\nu-\frac{1}{2}}\int_{-a}^{-R} e^{-2t\sqrt{z}}\, t^{-\nu+\frac{1}{2}}\, v\,dt \int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau}\, \tau^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\tau}{4t\sqrt{z}}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} d\tau. \tag{224}$$

Полагая здѣсь:

$$t=-a-\eta, \tag{225}$$

будемъ имѣть:

$$\overline{u_1}=$$

$$=2Ae^{-\pi(\nu-\frac{3}{2})i+2a\sqrt{z}}(\sqrt{z})^{-\nu-\frac{1}{2}}.$$

(226)

$$\int_0^R e^{+2\eta\sqrt{z}}\eta^{\mu-\nu-2}d\eta\int_{-\infty}^{(0)}e^{\tau}\tau^{\nu-\frac{1}{2}}\vartheta\left(\eta,-\frac{\tau}{\sqrt{z}}\right)d\tau.$$

Форма выраженія множителя при $Ae^{-\pi(\nu-\frac{3}{2})i}$ въ правой части равенства (226) одинакова съ формой выраженія множителя при B во второй части соотношенія (177). А посему сохраняетъ силу первое изъ асимптотическихъ равенствъ (222). Далѣе, пользуясь подстановкой (225), представимъ интегралъ $\overline{u_2}$ (100) слѣдующимъ образомъ:

$$\overline{u_2}=$$

$$=2Be^{-\pi(\nu-\frac{3}{2})i-2a\sqrt{z}}(\sqrt{z})^{-\nu-\frac{1}{2}}.$$

(227)

$$\int_0^R e^{-2\eta\sqrt{z}}\eta^{\mu-\nu-2}d\eta\int_{-\infty}^{(0)}e^{\tau}\tau^{\nu-\frac{1}{2}}\vartheta\left(\eta,\frac{\tau}{\sqrt{z}}\right)d\tau.$$

Множитель при $Be^{-\pi(\nu-\frac{3}{2})i}$ въ правой части соотношенія (227) ничѣмъ не разнится отъ множителя при A во второй части равенства (104). Изъ этого заключаемъ о справедливости второго изъ асимптотическихъ равенствъ (222).

Въ виду установленнаго положенія, въ послѣдующемъ мы будемъ заниматься лишь интегралами u_1 и u_2. Назовемъ v_1 совокупность продолженій интеграла u_1 въ области (97); а совокупность продолженій интеграла u_2 въ области (98) обозначимъ черезъ v_2. Буквально тѣмъ же пріемомъ, при помощи котораго установлены нами асимптотическія равенства (240) и (241) главы II, доказывается и здѣсь справедливость асимптотическихъ равенствъ:

$$v_1 \backsim s_1;$$

(228)

$$v_2 \backsim s_2.$$

При этомъ, первое изъ нихъ имѣетъ мѣсто во всей области (97), а второе—во всей области (98).

Легко далѣе обнаружить, что между функціями v_1 и v_2 не можетъ существовать зависимость вида:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0, \tag{229}$$

гдѣ c_1 и c_2 суть постоянныя числа, отличныя отъ нуля. Въ самомъ дѣлѣ, изъ асимптотическихъ равенствъ (228) слѣдуетъ, что

$$\begin{aligned} v_1 &= A_1 (\sqrt{z})^{-\mu+\frac{1}{2}} e^{-2a\sqrt{z}} [1+\varepsilon_0]; \\ v_2 &= B_1 (\sqrt{z})^{-\mu+\frac{1}{2}} e^{-2a\sqrt{z}} [1+\eta_0], \end{aligned} \tag{230}$$

гдѣ

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{A\,\Delta_{0,0}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\,\Gamma(\mu-\nu-1)}{2^{\mu-\nu-2}}; \\ B_1 &= \frac{e^{\pi(\mu-\nu-1)i}\,B\,\Delta_{0,0}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\,\Gamma(\mu-\nu-1)}{2^{\mu-\nu-2}}, \end{aligned} \tag{231}$$

а

$$\lim_{z=+\infty e^{\psi i}} \varepsilon_0 = \lim_{z=+\infty e^{\psi i}} \eta_0 = 0. \tag{232}$$

Внеся на мѣсто функцій v_1 и v_2 въ соотношеніе (229) ихъ представленія (230), послѣ умноженія полученнаго результата на $(\sqrt{z})^{\mu-\frac{1}{2}}$ найдемъ:

$$c_1 A_1 e^{-2a\sqrt{z}} (1+\varepsilon_0) + c_2 B_1 e^{+2a\sqrt{z}} (1+\eta_0) = 0. \tag{233}$$

Пусть будетъ ψ_0 такое значеніе ψ, что $R(a\sqrt{z_0}) \gtreqless 0$, гдѣ z_0 есть z при $\psi = \psi_0$. Разсмотримъ сперва случай, когда $R(a\sqrt{z_0}) > 0$. Соотношеніе (233) представимъ тогда въ формѣ:

$$c_1 A_1 e^{-4a\sqrt{z}} (1+\varepsilon_0) + c_2 B_1 (1+\eta_0) = 0. \tag{234}$$

Полагая здѣсь $z = +\infty e^{\psi_0 i}$, будемъ имѣть: $c_2 B_1 = 0$, или $c_2 = 0$.

Въ виду соотношенія (229), заключаемъ послѣ этого, что $c_1 = 0$. Если же $R(a\sqrt{z_0}) < 0$, то соотношеніе (233) напишемъ въ формѣ:

$$c_1 A_1 (1+\varepsilon_0) + c_2 B_1 e^{+4a\sqrt{z}} (1+\eta_0) = 0. \tag{235}$$

Пусть будетъ здѣсь: $z = +\infty e^{\psi_0 i}$. Будемъ имѣть: $c_1 A_1 = 0$, или $c_1 = 0$. Изъ соотношенія (229) будетъ тогда слѣдовать, что и $c_2 = 0$. Итакъ, доказано, что разъ c_1 и c_2 не нули, соотношеніе (229) существовать не можетъ. А посему всякій интегралъ u уравненія (34) для весьма большихъ значеній $|z|$ въ области (99) можетъ быть асимптотически представленъ слѣдующимъ образомъ:

$$u \backsim a_1 s_1 + a_2 s_2, \tag{236}$$

гдѣ a_1 и a_2 суть надлежащимъ образомъ подобранныя постоянныя числа.

Для послѣдующихъ цѣлей обнаружимъ справедливость такого положенія: *Функція* $z^n \dfrac{d^n\eta_m}{dz^n}$, *гдѣ n какое-либо цѣлое положительное число, съ возрастаніемъ $|z|$, начиная съ нѣкотораго значенія этого модуля, равномѣрно стремится къ нулю, если $\arg z = \psi$ не выходитъ изъ границъ* (82); *такимъ же свойствомъ обладаетъ и функція* $z^n \dfrac{d^n\eta'_m}{dz^n}$, *если ψ содержится въ границахъ* (85).

Для доказательства этого положенія поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Сличая соотношенія (172) и второе (111), заключаемъ, что

$$\eta_m = 2^{\mu-\nu-1} (\sqrt{z})^{\mu-\nu+m-1} \int_0^R e^{-2\eta\sqrt{z}} \eta^{\mu-\nu-2} d\eta \int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}} s_m d\tau. \tag{237}$$

Возьмемъ отъ обѣихъ частей соотношенія (237) производную по z. Будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_m}{dz} &= \frac{m+\mu-\nu-1}{2z} \eta_m + \\ &+ 2^{\mu-\nu-1} (\sqrt{z})^{\mu-\nu+m-1} \int_0^R e^{-2\eta\sqrt{z}} \eta^{\mu-\nu-2} d\eta \int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}} \frac{ds_m}{dz} d\tau - \\ &- 2^{\mu-\nu-1} (\sqrt{z})^{\mu-\nu+m-2} \int_0^R e^{-2\eta\sqrt{z}} \eta^{\mu-\nu-1} d\eta \int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}} s_m d\tau. \end{aligned} \tag{238}$$

Принимая во вниманіе формулу:

$$\frac{ds_m}{dz} = -\frac{\tau}{2z}\frac{ds_m}{d\tau}, \tag{239}$$

соотношеніе (238) представимъ такъ:

$$\begin{aligned}\frac{d\eta_m}{dz} &= \frac{\mu-\nu+m-1}{2z}\eta_m - \\ &- \frac{2^{\mu-\nu-1}(\sqrt{z})^{\mu-\nu+m-1}}{2z}\int_0^R e^{-2\eta\sqrt{z}}\eta^{\mu-\nu-2}d\eta\int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau}\tau^{\nu+\frac{1}{2}}\frac{ds_m}{d\tau}d\tau - \\ &- 2^{\mu-\nu-1}(\sqrt{z})^{\mu-\nu+m-2}\int_0^R e^{-2\eta\sqrt{z}}\eta^{\mu-\nu-1}d\eta\int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau}\tau^{\nu-\frac{1}{2}}s_m d\tau.\end{aligned} \tag{240}$$

Имѣя въ виду формулы:

$$\int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau}\tau^{\nu+\frac{1}{2}}\frac{ds_m}{d\tau}d\tau = -\int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau}\tau^{\nu+\frac{1}{2}}s_m\,d\tau - (\nu+\tfrac{1}{2})\int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau}\tau^{\nu-\frac{1}{2}}s_m d\tau;$$

$$\begin{aligned}\int_0^R e^{-2\eta\sqrt{z}}\eta^{\mu-\nu-1}d\eta\int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau}\tau^{\nu-\frac{1}{2}}s_m d\tau &= \\ = \frac{\mu-\nu-1}{2\sqrt{z}}\int_0^R e^{-2\eta\sqrt{z}}\eta^{\mu-\nu-2}d\eta\int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau}\tau^{\nu-\frac{1}{2}}s_m\,d\tau &+ \\ + \frac{1}{2\sqrt{z}}\int_0^R e^{-2\eta\sqrt{z}}\eta^{\mu-\nu-1}d\eta\int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau}\tau^{\nu-\frac{1}{2}}\frac{ds_m}{d\eta}d\tau&,\end{aligned} \tag{241}$$

соотношеніе (240) представимъ въ слѣдующей формѣ:

$$z\frac{d\eta_m}{dz} = \frac{m+\nu+\frac{1}{2}}{2}\eta_m + \frac{\eta_{1m}}{2}, \tag{242}$$

гдѣ

$$\eta_{1m} = 2^{\mu-\nu-1}(\sqrt{z})^{\mu-\nu+m-1}\int_0^R e^{-2\eta\sqrt{z}}\eta^{\mu-\nu-2}d\eta\int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau}\tau^{\nu-\frac{1}{2}}\sigma_{1m}\,d\tau; \tag{243}$$

при чемъ

$$\sigma_{1m} = \tau s_m - \eta \frac{ds_m}{d\eta}. \tag{244}$$

Въ силу состава (244) функціи σ_{1m}, къ интегралу η_{1m} дословно примѣняется процессъ разсужденій, при помощи котораго мы вычислили въ § 3 интегралъ η_m. При этомъ оказывается, что η_{1m} съ возрастаніемъ $|z|$, начиная съ нѣкотораго значенія этого модуля, равномѣрно стремится къ нулю, если ψ не выходитъ изъ границъ (82). Далѣе, такимъ же путемъ находимъ:

$$z\frac{d\eta_{1m}}{dz} = \frac{m+\nu+\frac{1}{2}}{2}\eta_{1m} + \frac{\eta_{2m}}{2}, \tag{245}$$

гдѣ

$$\eta_{2m} = 2^{\mu-\nu-1}(\sqrt{z})^{\mu-\nu+m-1}\int_0^R e^{-2\eta\sqrt{z}}\eta^{\mu-\nu-2}d\eta\int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau}\tau^{\nu-\frac{1}{2}}\sigma_{2m}\,d\tau; \tag{246}$$

при чемъ

$$\sigma_{2m} = \tau\sigma_{1m} - \eta\frac{d\sigma_{1m}}{d\eta}. \tag{247}$$

Функція η_{2m}, въ виду состава (247) σ_{2m}, обладаетъ вышеупомянутымъ свойствомъ функцій η_m и η_{1m}. Такихъ соотношеній, подобно равенствамъ (242) и (245), можно получить неограниченное число. Пользуясь послѣдовательно этими соотношеніями, можно обнаружить справедливость первой части положенія. Въ самомъ дѣлѣ, изъ соотношенія (242) слѣдуетъ, что она имѣетъ мѣсто при $n=1$. Далѣе, взявъ производную по z отъ обѣихъ частей равенства (242) и принимая во вниманіе (245), получимъ:

$$z^2\frac{d^2\eta_m}{dz^2} = \frac{m+\nu-\frac{3}{2}}{2}z\frac{d\eta_m}{dz} + \tag{248}$$
$$+\frac{m+\nu+\frac{1}{2}}{4}\eta_{1m} + \frac{\eta_{2m}}{4}.$$

Отсюда дѣлаемъ выводъ, что первая часть положенія справедлива при $n=2$. Оперируя надъ соотношеніемъ (248) такъ же, какъ это мы дѣлали съ равенствомъ (242), получимъ результатъ, изъ котораго въ правѣ сдѣлать заключеніе, что вышеозначеннымъ свойствомъ функцій η_m, $z\dfrac{d\eta_m}{dz}$ и $z^2\dfrac{d^2\eta_m}{dz^2}$ обладаетъ и $z^3\dfrac{d^3\eta_m}{dz^3}$. Разсуждая въ томъ же направленіи, подтвердимъ справедливости первой части положенія для всякаго конечнаго n.

Прилагая тотъ же самый процессъ разсужденій къ выраженію:

$$\eta'_m = e^{-\pi(\mu-\nu-1)i}\, 2^{\mu-\nu-1} (\sqrt{z})^{\mu-\nu+m-1} \int_0^R e^{+2\eta\sqrt{z}}\, \eta^{\mu-\nu-2}\, d\eta$$

$$\int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau}\, \tau^{\nu-\frac{1}{2}}\, \mathrm{T}_m\, d\tau, \tag{249}$$

обнаружимъ справедливость и второй части положенія.

Теперь можемъ обнаружить, что *асимптотическія равенства* (176) *и* (221) *можно дифференцировать по z любое число разъ.* Для этой цѣли будемъ исходить изъ соотношенія (173). Возьмемъ отъ его обѣихъ частей производную n-го порядка по z. Получимъ:

$$\frac{d^n u_1}{dz^n} = \frac{A}{2^{\mu-\nu-2}} \sum_{s=0}^{n} [n]_s\, \rho_{n-s}\, z^{-s}$$

$$\Big[\sum_{p=1}^{m} \frac{\left(-\frac{p}{2}\right)_s}{(2\sqrt{z})^p} \sum_{q=0}^{p} 2^q\, \Delta_{p-q,q}\, \Gamma(\mu-\nu+p-q-1)\Gamma(\nu+q+\tfrac{1}{2}) +$$

$$+ \frac{1}{(\sqrt{z})^m} \sum_{p=0}^{s} [s]_p \left(-\frac{m}{2}\right)_p z^{s-p} \frac{d^{s-p}\eta_m}{dz^{s-p}} \Big], \tag{250}$$

гдѣ

$$\rho_{n-s} = \frac{d^{n-s}\left[(\sqrt{z})^{-\mu+\frac{1}{2}}\, e^{-2a\sqrt{z}} \right]}{dz^{n-s}}. \tag{251}$$

Такъ какъ по доказанному съ безграничнымъ возрастаніемъ $|z|$, начиная съ нѣкотораго значенія этого модуля, функція $z^{s-p}\dfrac{d^{s-p}\eta_m}{dz^{s-p}}$ въ разсматриваемой области измѣненія ψ равномѣрно стремится къ нулю, то можемъ написать:

$$\frac{d^n u_1}{dz^n} \backsim \frac{A}{2^{\mu-\nu-2}} \sum_{s=0}^{n} [n]_s \rho_{n-s} z^{-s}$$

(252)

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{p}{2}\right)_s}{(2\sqrt{z})^p} \sum_{q=0}^{p} 2^q \Delta_{p-q,q} \Gamma(\mu-\nu+p-q-1)\Gamma(\nu+q+\tfrac{1}{2}).$$

Правая часть асимптотическаго равенства (252) есть результатъ n-кратнаго дифференцированія по z правой части асимптотическаго равенства (176).

Исходя изъ соотношенія (219), тѣмъ же процессомъ разсужденій придемъ къ результату:

$$\frac{d^n u_2}{dz^n} \backsim \frac{e^{\pi(\mu-\nu-1)i} B}{2^{\mu-\nu-2}} \sum_{s=0}^{n} [n]_s \bar{\rho}_{n-s} z^{-s}$$

(253)

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \left(-\frac{p}{2}\right)_s}{(\sqrt{2z})^p} \sum_{q=0}^{p} 2^q \Delta_{p-q,q} \Gamma(\mu-\nu+p-q-1)\bar{\Gamma}(\nu+q+\tfrac{1}{2}),$$

гдѣ

(254) $$\bar{\rho}_{ns} = \frac{d^{n-s}\left[(\sqrt{z})^{-\mu+\frac{1}{2}} e^{+2a\sqrt{z}}\right]}{dz^{n-s}}.$$

Правая часть асимптотическаго равенства (253) представляетъ результатъ n-кратнаго дифференцированія по z правой части асимптотическаго равенства (221).

Разсматривая, вмѣсто интеграловъ u_1 и u_2, ихъ продолженія, мы такимъ же процессомъ разсужденій можемъ убѣдиться, что и ихъ асимптотическія представленія можно дифференцировать по z произвольное конечное число разъ. Это значитъ, имѣютъ мѣсто:

$$\frac{d^n v_1}{dz^n} \backsim s_1^{(n)};$$

$$\frac{d^n v_2}{dz^n} \backsim s_2^{(n)}, \tag{255}$$

гдѣ $s_1^{(n)}$ и $s_2^{(n)}$ представляютъ соотвѣтственно правыя части асимптотическихъ равенствъ (252) и (253). Замѣтимъ, что первое изъ равенствъ (255) сохраняетъ силу во всей области (97), а второе — во всей области (98). Имѣя въ виду асимптотическое равенство (236), гдѣ

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2, \tag{256}$$

находимъ:

$$\frac{d^n u}{dz^n} \backsim a_1 s_1^{(n)} + a_2 s_2^{(n)}. \tag{257}$$

Это асимптотическое равенство сохраняетъ силу во всей области (99) измѣняемости перемѣннаго $arg z = \psi$. Въ заключеніе настоящаго параграфа, обнаружимъ справедливость слѣдующаго положенія: *Функція v_1 въ смежности съ точкой $z = \infty$ въ области* (97) *не имѣетъ нулей; точно также не имѣетъ нулей и функція v_2 въ смежности съ точкой $z = \infty$ въ области* (98). Для доказательства положенія пользуемся соотношеніями (230). Всегда можно подобрать такое положительное конечное число R, что для $|z| \geqq R$ будетъ сохранять сулу неравенство:

$$|\varepsilon_0| < 1, \tag{258}$$

если ψ не выходитъ изъ границъ (97). Но тогда будемъ имѣть:

$$|1+\varepsilon_0| > 1 - |\varepsilon_0| > 0, \tag{259}$$

т. е., для всѣхъ указанныхъ значеній z функція $1 + \varepsilon_0$ не можетъ обратиться въ нуль. Далѣе, функція $(\sqrt{z})^{-\mu+\frac{1}{2}} e^{-2a\sqrt{z}}$ изъ разсматриваемыхъ значеній z можетъ обратиться въ нуль только для $z = +\infty e^{\psi i}$. Въ силу перваго изъ соотношеній (230) тогда утверждаемъ, что первая часть положенія справедлива. Пусть далѣе для $|z| \overline{\geqslant} R_1$, гдѣ R_1 нѣкоторое конечное положительное число,

(260) $$|\eta_0| < 1.$$

Тогда для тѣхъ же значеній z имѣетъ мѣсто:

(261) $$|1+\eta_0| > 1-|\eta_0| > 0,$$

т. е., ни при одномъ изъ разсматриваемыхъ значеній z функція $1+\eta_0$ не можетъ обратиться въ нуль. Съ другой стороны, функція $(\sqrt{z})^{-\mu+\frac{1}{2}}\cdot e^{+2a\sqrt{z}}$ изъ разсматриваемыхъ значеній z можетъ обратиться въ нуль только при $z = +\infty e^{\psi i}$. Имѣя въ виду второе изъ соотношеній (230), утверждаемъ, что и вторая часть положенія справедлива.

ВВЕДЕНІЕ.

Въ вопросахъ приложенія опредѣленныхъ интеграловъ къ интегрированію дифференціальныхъ линейныхъ уравненій можно отмѣтить въ литературѣ два направленія. Многіе математики смотрѣли на опредѣленный интегралъ, какъ на конечную форму рѣшеній нѣкоторыхъ уравненій. Этотъ взглядъ былъ переданъ въ наслѣдство Эйлеромъ [1]) и продолжателями его идеи Лапласомъ [2]) и Коши [3]). Вслѣдъ за этими математиками цѣлый рядъ ученыхъ занимался изысканіемъ типовъ уравненій, рѣшенія которыхъ способны выражаться въ той или другой формѣ опредѣленнаго интеграла. Между ними особеннаго вниманія заслуживаютъ слѣдующіе: Пуассонъ, Шеркъ, Якоби, Куммеръ, Лобатто, Тиссо, Шпицеръ, Вейлеръ, Погхаммеръ, А. В. Лѣтниковъ, Гурза, Жорданъ, П. А. Некрасовъ, Шлезингеръ, Пинкерль и Меллинъ [4]).

На ряду съ означеннымъ направленіемъ, въ 1884 году было выдвинуто Пуанкарэ другое. Здѣсь опредѣленный интегралъ служитъ

---

[1]) Institutiones calculi integralis. Vol. II, Petropolis, 1792, p. 230—255.

[2]) Oeuvres complètes, t. VII, Paris, 1886. pp. 84—88, 111—180, 294—308.

[3]) Oeuvres complètes, Paris; 1881, 1885, 1889, 1892.

[4]) Краткій историко критическій обзоръ работъ этихъ математиковъ данъ нами во введеніи къ нашей работѣ: „О нѣкоторыхъ дифференціальныхъ и разностныхъ линейныхъ уравненіяхъ, интегрируемыхъ посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ“. Извѣстія Варш. Полит. Инст. за 1900—1901 годы.

лишь вспомогательнымъ средствомъ при изученіи иррегулярныхъ интеграловъ дифференціальныхъ линейныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами въ безконечной смежности съ ихъ точками неопредѣленности (Unbestimmtheitsstelle). Основаніе этого направленія положено было Пуанкарэ въ двухъ работахъ: „Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies“ [1]) и „Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires“ [2]). Остановимся на выясненіи сущности этихъ работъ французскаго ученаго. Еще раньше Пуанкарэ, Thomé [3]), продолжая развивать идеи Л. Фукса, пришелъ въ общемъ случаѣ къ слѣдующей формѣ представленія интеграловъ дифференціальнаго линейнаго уравненія съ раціональными коэффиціентами въ области ихъ точки неопредѣленности a:

$$(1)\qquad y = e^{Q(x-a)}(x-a)^{\alpha} P(x-a),$$

гдѣ $Q(x-a)$ есть полиномъ относительно $x-a$, α нѣкоторое постоянное число, а $P(x-a)$ имѣетъ видъ:

$$(2)\qquad P(x-a) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k;$$

при чемъ a_k не зависитъ отъ x. Въ нѣкоторыхъ особыхъ случаяхъ эта форма не годится. Но тогда, какъ обнаружено Fabry [4]), искомое представленіе отличается отъ (1) или тѣмъ, что содержитъ цѣлыя положительныя конечныя степени $lg(x-a)$, или же, вмѣсто $x-a$, въ немъ входитъ $(x-a)^{\frac{1}{p}}$, гдѣ p цѣлое число. Форма представленія (1) интеграловъ однако носитъ чисто формальный характеръ,—безконечный рядъ $P(x-a)$ вообще расходящійся. Заслуга Пуанкарэ состоитъ

---

[1]) American Journal of Mathematics, vol. VII, Baltimore, 1884, p. 203—258.

[2]) Acta Mathematica. 8:1. Stockholm, Berlin, Paris, 1886 p. 295—344.

[3]) „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen“. Crelle's Journal, Bd. 74, 75, 76.

[4]) „Sur les intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients rationels“. Paris, Gauthier-Villars, 1885.

въ обнаруженіи того, что выраженіе, стоящее въ правой части соотношенія (1), асимптотически представляетъ интегралъ y для значеній x, близкихъ къ a, и при опредѣленномъ значеніи $arg(x-a)$; другими словами, существуетъ по крайней мѣрѣ одно такое значеніе α аргумента отъ $x-a$, что модуль отъ

$$(x-a)^{-m}\left[y\,e^{-Q(x-a)}(x-a)^{-\alpha}-\sum_{k=0}^{m}a_k(x-a)^k\right], \tag{3}$$

при любомъ конечномъ числѣ m, становится менѣе всякой напередъ заданной сколько угодно малой положительной величины по мѣрѣ того, какъ x приближается къ a въ предположеніи, что $arg(x-a)=\alpha$, и въ предѣлѣ обращается въ нуль, т. е.:

$$\lim_{x=a+\rho e^{\alpha i},\ \rho=0}(x-a)^{-m}\left[y\,e^{-Q(x-a)}(x-a)^{-\alpha}-\sum_{k=0}^{m}a_k(x-a)^k\right]=0. \tag{4}$$

Формальное соотношеніе (3) при $arg(x-a)=\alpha$ названо Пуанкарэ асимптотическимъ равенствомъ. Для достиженія такихъ важныхъ результатовъ, Пуанкарэ пользуется особой классификаціей дифференціальныхъ линейныхъ уравненій съ иррегулярными интегралами. При этомъ, онъ ограничивается разсмотрѣніемъ одной только точки неопредѣленности, а именно—безконечно удаленной, чѣмъ нисколько не умаляется общность изслѣдованій, такъ какъ всякая конечная точка a плоскости перемѣннаго x при помощи подстановки:

$$t=\frac{1}{x-a} \tag{5}$$

можетъ быть преобразована въ точку $t=\infty$. Согласно упомянутой классификаціи, уравненіе:

$$P_n\frac{d^ny}{dx^n}+P_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+P_0y=0, \tag{6}$$

гдѣ степени полиномовъ P_{n-1}, P_{n-2}, $\cdots$, P_0 не выше m, степени полинома P_n, принадлежитъ къ первому рангу. Уравненіе же вида (6), въ которомъ степень полинома P_n менѣе степени по крайней мѣрѣ одного изъ полиномовъ P_{n-1}, P_{n-2}, $\cdots$, P_0, есть высшаго ранга. Пуанкарэ показалъ, что интегрированіе уравненія высшаго ранга типа (6) приводится къ интегрированію уравненія перваго ранга того же типа. Въ виду этого, онъ предварительно останавливается на уравненіи вида (6) перваго ранга. Значитъ:

$$P_{n-i} = a_{mi}\, x^m + a_{(m-1)\,i}\, x^{m-1} + \cdots + a_{0i}, \tag{7}$$

гдѣ a_{mi}, $a_{(m-1)\,i}$, $\cdots$, a_{0i} суть постоянныя величины; при чемъ a_{mo} не нуль. Пуанкарэ ограничился изученіемъ случая, когда корни алгебраическаго уравненія:

$$a_{m0}\, z^m + a_{m1}\, z^{m-1} + \cdots + a_{mn} = 0 \tag{8}$$

суть однократные. Исходя изъ доказаннаго имъ положенія, что, если y интегралъ уравненія (6) перваго ранга, то всегда можно найти такія два числа α и β, что

$$\lim_{x = +\infty e^{\beta i}} e^{\alpha x} x^k\, y = 0 \tag{9}$$

при любомъ конечномъ положительномъ k, онъ приходитъ къ слѣдующему рѣшенію уравненія (6):

$$y = \int_L e^{zx}\, v dz, \tag{10}$$

гдѣ v есть интегралъ уравненія:

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{p=0}^{m} a_{(m-p)i}\, (-1)^{m-p} \frac{d^{m-p}\,(z^{n-i}\, v)}{dz^{m-p}} = 0; \tag{11}$$

а путь L выберается подъ условіемъ, чтобы онъ удовлетворялъ требованію:

$$\Big|_L e^{zx}\,\theta(z)=0, \tag{12}$$

гдѣ

$$\theta(z)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{p=0}^{m}a_{(m-p)i}\sum_{q=1}^{m-p}(-1)^{q-1}x^{m-p-q}\frac{d^{q-1}(z^{n-i}v)}{dz^{q-1}}. \tag{12'}$$

Замѣтимъ, что лѣвая часть соотношенія (12) представляетъ разность значеній функціи $e^{zx}\theta(z)$ въ концѣ и началѣ пути L. Уравненіе (11) названо Пуанкарэ трансформой Лапласа (la transformée de Laplace). Оно обладаетъ однимъ замѣчательнымъ свойствомъ: всѣ конечныя особыя точки его интеграловъ суть правильныя въ смыслѣ Л. Фукса. Эта особенность имѣетъ существенное значеніе въ методѣ Лапласъ-Пуанкарэ. Обозначимъ черезъ a какую либо изъ таковыхъ точекъ. Основное опредѣляющее уравненіе Л. Фукса, относящееся къ области точки a, имѣетъ слѣдующіе корни:

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m-2, \sigma; \tag{13}$$

при чемъ, σ зависитъ отъ коэффиціентовъ уравненія (11). Въ случаѣ, если σ отлично отъ цѣлаго числа или нуля, къ показателямъ (13) принадлежатъ m интегральныхъ элементовъ:

$$\begin{aligned}&(x-a)^i P_i(x-a);\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m-2.\\ &(x-a)^\sigma P(x-a),\end{aligned} \tag{14}$$

гдѣ $P_i(x-a)$ и $P(x-a)$ суть безконечные ряды, расположенные по цѣлымъ и положительнымъ степенямъ перемѣннаго $x-a$, сходящіеся внутри круговъ, описанныхъ изъ точки a, какъ центра, радіусами, отличными отъ нуля.

Если же σ есть цѣлое число, тогда требуются особыя изслѣдованія относительно того интегральнаго элемента, который принадлежитъ къ показателю σ —, этотъ элементъ можетъ содержать $lg(x-a)$, но также можетъ быть и свободенъ отъ него. Въ каждомъ изъ этихъ случаевъ Пуанкарэ изыскиваетъ путь, удовлетворяющій условію (12), а потомъ находитъ представленіе интеграла y. За исключеніемъ случая, когда σ есть цѣлое отрицательное число и интегральный элементъ, принадлежащій къ этому показателю, не содержитъ $lg\,(x-a)$, эта форма представленія слѣдующая:

$$y = e^{ax} x^{\alpha} q\left(\frac{1}{x}\right), \tag{15}$$

гдѣ α есть нѣкоторое постоянное число, а

$$q\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \frac{1}{x^i}; \tag{16}$$

при чемъ, b_i не зависитъ отъ x. Безконечный рядъ (16) вообще расходящійся. Но, какъ обнаружено Пуанкарэ, по крайней мѣрѣ для одного значенія $arg\,(x-a) = \beta$ имѣетъ мѣсто:

$$\lim_{x = +\infty e^{\beta i}} x^m \left[y e^{-ax} x^{-\alpha} - \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{1}{x^i} \right] = 0 \tag{17}$$

при любомъ конечномъ m. Формальное соотношеніе (15) при $arg\,(x-a) = \beta$ есть асимптотическое равенство. Отъ этихъ результатовъ Пуанкарэ переходитъ, къ результатамъ (1) и (4) при помощи пріема, обратнаго тому, посредствомъ котораго сведено имъ интегрированіе уравненія высшаго ранга вида (6) къ интегрированію уравненія перваго ранга того же вида. Таковы въ общихъ чертахъ выводы вышеупомянутыхъ работъ Пуанкарэ. Какъ теоретическое, такъ и практическое (въ смыслѣ приложенія въ механикѣ, физикѣ и астрономіи) ихъ значеніе не подлежитъ сомнѣнію. Въ теорію дифференціальныхъ уравненій былъ пролитъ новый свѣтъ,—указанъ былъ путь, ведущій къ изученію характера иррегулярныхъ интеграловъ въ безконечной смежности съ точками ихъ неопредѣленности. Что же касается до практическаго ихъ значенія, то это наилучшимъ образомъ обнаружено самимъ Пуанкарэ въ его „Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste“ [t. II, Paris, Gauthier-Villars, 1893]. Результаты Пуанкарэ въ предположеніи, что коэффиціенты уравненія (6) не суть раціональныя, но только однозначныя въ области точки ∞, иными пріемами, не прибѣгая къ опредѣленнымъ интеграламъ, пытались подтвердить Кнэзеръ и Горнъ. Это удалось имъ достигнуть въ случаѣ линейнаго уравненія 2-го порядка [1]). Въ томъ же направленіи Горнъ трактовалъ нѣкоторыя и нелинейныя уравненія [2]).

---

[1]) *Kneser.* „Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen bei grossen reellen Werthen des Arguments“ [Drei Aufsätze].
Crelle's Journal. Bd, 116 (S. 178—212).
Bd. 117 (S. 72—103).
Bd. 120 (S. 267—275).

„ „Einige Sätze über die Asymptotische Darstellung von Integralen linearer Differentialgleichungen“. Math. Ann., Bd. 49, 1897. S. 383.

Horn. Ueber das Verhalten der Integrale von Differentialgleichungen bei der Annäherung der Veränd1ichen an eine Unbestimmtheitsstelle“.
Crelle's Journal, Bd. 118. S. 257—274.

[2]) „Ueber das Verhalten der Integrale von Differentialgleichungen bei Annäherung der Veränd1ichen an eine Unbestimmtheitsstelle“.
Crelle's Journal, Bd. 119, s. 196—209, 267—290.

„Untersuchung der Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung vermittelst successiver Annäherungen“. Math. Ann., Bd. 51 1899. S. 346—359.

„Ueber eine Differentialgleichung erster Ordnung“. Ibidem. S. 360—368.

Укажемъ здѣсь также слѣдующія работы Горна:

„Ueber eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem willkürlichen Parameter“. Math. Ann., Bd. 52, 1899. S. 271—292.

„Ueber lineare Differentialgleichungen mit einem veränd1ichen Parameter“. Ibidem. S. 340—362.

„Ueber das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle“.
Crelle's Journal, Bd. 120, 1899. S. 1—26.

„Ueber das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle“.
Crelle's Journal, Bd. 122, 1900, S. 73—83.

Но Горна можно считать также продолжателемъ идеи Лапласъ-Пуанкарэ. Онъ обратилъ вниманіе на одну особенность нормальныхъ [1]) рядовъ Thomé, способныхъ асимптотически представлять интегралы уравненія перваго ранга (6). Дѣло въ томъ, что равенство (17) въ изслѣдованіяхъ Пуанкарэ сохраняетъ силу только при опредѣленномъ значеніи $arg x$. Но самъ собою навязывается важный вопросъ, будетъ ли оно имѣть мѣсто, если $arg x$ непрерывно начнетъ мѣняться, и, если да, то въ какихъ предѣлахъ, или, какъ мы выражаемся, въ какой области. Эти вопросы детально были разработаны Горномъ по методѣ Лапласъ-Пуанкарэ сначала по отношенію къ уравненію:

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(\lambda_1+\lambda_2+2)\frac{dy}{dx}+\Big[x+(\lambda_1+\lambda_2)\,i\Big]y=0, \tag{18}$$ [2])

гдѣ $i=\sqrt{-1}$, λ_1 и λ_2 постоянныя числа, подчиненныя условію, чтобы ни каждое изъ нихъ въ отдѣльности, ни сумма ихъ не равнялись цѣлымъ числамъ или нулю; а потомъ подобныя изслѣдованія онъ направилъ и на уравненіе перваго ранга (6) при условіи, что корни уравненія (8) однократные, а показатель σ (13) не есть число цѣлое или нуль [3]). Горномъ достигнуто выдѣленіе непрерывныхъ областей, въ которыхъ сохраняетъ силу равенства вида (17). Дальнѣйшія желательныя изслѣдованія въ томъ же направленіи Горнъ обѣщалъ произвести въ слѣдующей статьѣ, которая еще не появилась въ печати

Останавливаясь на анализѣ самой методы Лапласъ-Пуанкарэ, легко видѣть въ ней такіе пункты, которые должны считаться нежелатель-

---

[1]) Такъ Thomé назвалъ ряды вида (1) [въ частности (15)].

[2]) „Verwendung asymptotischer Darstellungen zur Untersuchung der Integrale einer speciellen linearen Differentialgleichung“. Math. Ann., Bd. 49, S. 453—496.

[3]) „Ueber eine Classe linearer Differentialgleichungen“. (Erster Aufsatz). Math. Ann., Bd. 50. S. 525—556.

Упомянемъ здѣсь также работу Jacobstahl'я: „Asymptotische Darstellung von Lösungen linearer Differentialgleichungen“ (Math. Ann., Bd. 56, 1902), въ основу которой положена метода Weber'а, изложенная въ его статьѣ: „Zur Theorie der Bessel'schen Functionen“. Math. Ann., Bd. 37, S. 404—416.

ными. Дѣло въ томъ, что, какъ мы уже знаемъ, существенное значеніе въ этой методѣ имѣетъ уравненіе (11), трансформа Лапласа уравненія (6). Составъ его зависитъ, кромѣ природы функціи e^{zx}, отъ состава уравненія (6). Уравненіе же (11) между тѣмъ представляетъ только вспомогательную стадію въ развитіи методы. Было бы поэтому желательно, чтобы при этомъ не потребовалось добавочныхъ изслѣдованій, сопровождаемыхъ сложными выкладками. Но избѣгнуть этого въ методѣ Лапласъ-Пуанкарэ не возможно, разъ коэффиціенты полиномовъ (7) имѣютъ частныя значенія. Въ самомъ дѣлѣ, ничто не мѣшаетъ показателю σ быть числомъ не цѣлымъ и не нулемъ, а равно цѣлымъ и нулемъ, и, слѣдовательно, возможна встрѣча любого изъ четырехъ случаевъ: 1) σ не цѣлое и не нуль и, слѣдовательно, интегральный элементъ, принадлежащій къ σ, не содержитъ логариѳма; 2) σ цѣлое положительное, но этотъ элементъ не содержитъ логариѳма; 3) σ цѣлое отрицательное число и элементъ не содержитъ логариѳма, и 4) σ цѣлое число или нуль и трактуемый элементъ заключаетъ въ себѣ логариѳмъ. Само собою разумѣется, появленіе всегда одного случая, а именно—перваго, не требующаго никакихъ провѣрочныхъ изслѣдованій, весьма желательно въ методѣ. Точно также желательно было бы имѣть возможность криволинейные пути L, удовлетворяющіе условію (12), замѣнить прямолинейными отрѣзками. Все это можно было бы достигнуть, если бы представилась возможность функцію e^{zx} замѣнить такою функціей, зависящей отъ одного или нѣсколькихъ параметровъ: $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_\mu$, которая позволила бы при помощи опредѣленнаго интеграла уравненіе (6) преобразовать въ нѣкоторое уравненіе, обладающее тѣмъ существеннымъ свойствомъ уравненія (11), о которомъ говорилось выше, съ коэффиціентами, зависящими отъ $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_\mu$. Въ самомъ дѣлѣ, въ такомъ случаѣ величина σ зависѣла бы также отъ этихъ параметровъ и тогда ее можно было бы подобрать такъ, чтобы осуществить желаемыя условія. Ставши на такую точку зрѣнія, мы обратились къ функціямъ, которыя, начиная съ 1888 года, служили предметомъ тщательныхъ изслѣдованій Л. Фукса. Какъ извѣстно [1]), Л. Фуксъ поставилъ себѣ слѣдующую задачу: Изслѣдовать функціи независимыхъ

[1]) Sitzungsberichte der Berl. Akademie. 1888—1898.

перемѣнныхъ x и z, удовлетворяющія слѣдующей системѣ совмѣстныхъ уравненій:

$$
(19)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial^m y}{\partial x^m} + p_1 \frac{\partial^{m-1} y}{\partial x^{m-1}} + \cdots + p_m\, y = 0;\\
&\frac{\partial y}{\partial z} = A_0 y + A_1 \frac{\partial y}{\partial x} + \cdots + A_m \frac{\partial^{m-1} y}{\partial x^{m-1}};
\end{aligned}
$$

при чемъ $p_1, p_2, \cdots, p_m$ суть раціональныя функціи перемѣнныхъ x и z и также функціи η, корня уравненія:

$$
(20)\qquad f(x, \eta) = 0,
$$

гдѣ $f(x, \eta)$ есть полиномъ относительно x и η,—а $A_0, A_1, \cdots, A_m$ суть раціональныя функціи x и η. Сложный анализъ уравненій (19), при особыхъ ограниченіяхъ ихъ коэффиціентовъ, привелъ насъ къ убѣжденію, что единственныя функціи класса Л. Фукса, годныя для нашихъ цѣлей, суть тѣ, которыя удовлетворяютъ нормальной системѣ уравненій:

$$
(21)\qquad
\begin{aligned}
&a_0 x^{m-1} \frac{\partial^m y}{\partial x^m} + a_1 x^{m-2} \frac{\partial^{m-1} y}{\partial x^{m-1}} + \cdots + a_{m-1} \frac{\partial y}{\partial x} = zy;\\
&\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{x}{z} \frac{\partial y}{\partial x},
\end{aligned}
$$

гдѣ $a_0, a_1, \cdots, a_{m-1}$ суть величины, не зависящія отъ x и z. При $m = 1$ и $a_0 = 1$, система (21) опредѣляетъ функцію e^{zx}. Если же $m = 2$, $a_0 = 1$ и $a_1 = \nu + 1$, то система (21) обратится въ слѣдующую:

$$
(22)\qquad
\begin{aligned}
&x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (1+\nu) \frac{\partial y}{\partial x} = zy\ ^{1)};\\
&\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{x}{z} \frac{\partial y}{\partial x},
\end{aligned}
$$

---

¹) Замѣтимъ, что въ работѣ мы, вмѣсто символовъ $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$, употребляемъ $\frac{d}{dx}$ и $\frac{d}{dz}$.

и будетъ опредѣлять функціи Фурье-Бесселя (Фурье, Бесселя, цилиндрическія и т. д.) въ широкомъ смыслѣ. Особымъ образомъ подобранныя функціи, удовлетворяющія системѣ уравненій (21) при опредѣленномъ m, большемъ 1, можетъ быть положена въ основу методы, аналогичной методѣ Лапласъ-Пуанкарэ, но свободной отъ тѣхъ нежелательныхъ пунктовъ этой послѣдней, о которыхъ шла рѣчь выше. Эта метода прилагается къ интегрированію особаго типа уравненій перваго ранга, къ которому метода Лапласъ-Пуанкарэ непосредственно не примѣняется.

Въ настоящей своей работѣ мы остановились на методѣ, въ основу которой положены особымъ образомъ подобранныя двѣ функціи $\omega(\nu; xz)$ и $\omega_1(\nu; xz)$, линейно независимые интегралы системы уравненій (22). Эту методу мы примѣняемъ для изысканія асимптотическихъ представленій при весьма большихъ значеній $|x|$ [1]) интеграловъ уравненія:

$$\sum_{s=0}^{m} P^{(s)}_{n-E\left(\frac{s+1}{2}\right)} \frac{d^{m-s}u}{dx^{m-s}} = 0\,, \tag{23}$$

гдѣ $P^{(s)}_{n-E\left(\frac{s+1}{2}\right)}$ есть произвольный полиномъ степени $n-E\left(\frac{s+1}{2}\right)$ относительно x; при чемъ $E\left(\frac{s+1}{2}\right)$ означаетъ цѣлую часть числа $\frac{s+1}{2}$.

Въ своихъ изслѣдованіяхъ мы остановились на двухъ уравненіяхъ, въ приложеніи къ которымъ ближе всего раскрывается излагаемая метода. Однимъ изъ такихъ уравненій есть слѣдующее:

$$x\frac{d}{dx}P(\delta_x)w + \delta_x Q(\delta_x)w = 0\,, \tag{24}$$

гдѣ

$$\delta_x = x\frac{d^2}{dx^2} + (1+\nu)\frac{d}{dx}. \tag{25}$$

Уравненіе (24) по своему происхожденію изъ уравненія:

---

[1]) $|x|$ означаетъ модуль величины x.

$$(26) \qquad P(z)\frac{du}{dz} + Q(z)\,u = 0,$$

гдѣ $P(z)$ и $Q(z)$ суть произвольные полиномы относительно z, а также по способу интегрированія при помощи опредѣленныхъ интеграловъ имѣетъ сходство съ извѣстнымъ уравненіемъ Эйлера—Лапласа:

$$(27) \qquad x\,P\left(\frac{d}{dx}\right)v + Q\left(\frac{d}{dx}\right)v = 0.$$

Далѣе, нами объизслѣдовано уравненіе 2-го порядка, получающееся изъ уравненія (23) при условіи, что $m = 2$.

Переходимъ къ краткому обзору работы. Она состоитъ изъ трехъ главъ.

Въ главѣ I мы занимаемся изысканіемъ функцій $\omega(\nu; xz)$ и $\omega_1(\nu; xz)$, двухъ линейно независимыхъ интеграловъ системы уравненій (22), которыя должны лечь въ основу методы, раскрытой въ последующихъ главахъ. Эти функціи мы назвали функціями Фурье—Бесселя, хотя онѣ не представляютъ обычно называемыхъ функцій Фурье, Бесселя, Фурье—Бесселя, цилиндрическихъ, но являются особыми ихъ линейными комбинаціями. Функціи $\omega(\nu; xz)$ и $\omega_1(\nu; xz)$ мы опредѣляемъ двоякимъ образомъ: 1) при помощи безконечныхъ рядовъ, сходящихся на всей конечной плоскости перемѣннаго xz [формулы (157)] и 2) при помощи опредѣленныхъ интеграловъ [формулы: (158), (159), (171) и (184)]. Опредѣленные интегралы (171) и (184) позволяютъ изслѣдовать характеръ этихъ функцій въ безконечной смежности съ точкой ∞. Этому вопросу посвященъ § 5. Здѣсь же даются безконечные ряды, которые для весьма большихъ значеній $|xz|$ асимптотически представляютъ функціи $\omega(\nu; xz)$ и $\omega_1(\nu; xz)$. При этомъ, указаны широкія области измѣненія перемѣннаго $arg\,(xz)$, въ которыхъ сохраняютъ силу получаемыя асимптотическія равенства. Въ концѣ параграфа доказывается возможность дифференцировать по xz какое-угодно число разъ эти асимптотическія равенства.

Въ главѣ II раскрывается метода въ приложеніи къ уравненію (24) при слѣдующихъ ограниченіяхъ: 1) степень полинома $P(z)$ болѣе степени полинома $Q(z)$ и 2) всѣ корни полинома $P(z)$ однократные. Мы предварительно даемъ рѣшенія уравненія въ формѣ опредѣленныхъ интеграловъ [формулы: (55) и (60), или (61)]; при чемъ, полагаемъ, что въ разложеніи:

$$\frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{A_1}{z-\alpha_1} + \frac{A_2}{z-\alpha_2} + \cdots + \frac{A_n}{z-\alpha_n}, \tag{28}$$

гдѣ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ суть различные корни полинома $P(z)$, числа $A_1, A_2, \cdots, A_n$ отличны отъ цѣлыхъ или нуля. Указавъ способъ продолженія этихъ интеграловъ, мы вводимъ символы Z_{1kps} и Z_{2kps}, представляющіе совокупности ихъ продолженій, и изыскиваемъ зависимости между функціями Z_{1kps} и Z_{2kps} (§ 3). Здѣсь же указывается также способъ продолженія этихъ функцій. Пользуясь интегральной формой рѣшеній ζ_{1kps} и ζ_{2kps} уравненія, мы изыскиваемъ ихъ асимптотическія представленія для весьма большихъ значеній $|xz|$ [(191) и (239)]. Изысканію асимптотическихъ представленій функцій Z_{1kps} и Z_{2kps} посвященъ § 6; при чемъ даны широкія области годности получаемыхъ асимптотическихъ равенствъ. Здѣсь же доказывается возможность дифференцированія по xz любое конечное число разъ означенныхъ асимптотическихъ равенствъ. Далѣе, находимъ асимптотическія представленія всякаго интеграла уравненія (24) [§ 7]. Разысканіемъ асимптотическихъ представленій интеграловъ уравненія въ предположеніи, что между числами $A_1, A_2, \cdots, A_n$ есть цѣлыя или нули, мы занимаемся въ § 8. Наконецъ, § 9 посвященъ приложенію добытыхъ въ предыдущемъ результатовъ къ двумъ уравненіямъ 2-го и 4-го порядковъ, содержащимся въ уравненіи (24).

Въ главѣ III раскрывается метода по отношенію къ уравненію:

$$P_0 \frac{d^2 u}{dz^2} + P_1 \frac{du}{dz} + P_2 u = 0, \tag{29}$$

гдѣ P_0, P_1 и P_2 суть произвольные полиномы соотвѣтственно степени n, $n-1$ и $n-1$. Уравненіе (29) получается изъ уравненія (23), если въ немъ положить $x=z$, $m=2$, а

$$P_n^{(0)} = P_0;\ P_{n-1}^{(1)} = P_1;\ P_{n-1}^{(2)} = P_2\,. \tag{30}$$

Путь изслѣдованія здѣсь тотъ же, что и въ предыдущей главѣ. Но здѣсь особенно ясно выступаетъ важное значеніе параметра ν, отъ котораго зависятъ функціи $\omega(\nu; xz)$ и $\omega_1(\nu; xz)$.

Болѣе подробное ознакомленіе съ содержаніемъ работы читатель можетъ заимствовать изъ прилагаемаго оглавленія.

Въ заключеніе, сдѣлаемъ одно замѣчаніе по поводу опредѣленія символа $\sqrt{x}$. Въ нашихъ изслѣдованіяхъ онъ имѣетъ всегда одно значеніе, а именно:

$$\sqrt{x} = \sqrt{\rho}\, e^{\frac{\varphi i}{2}}, \tag{31}$$

гдѣ

$$x = \rho e^{\varphi i}; \tag{32}$$

при чемъ подъ $\sqrt{\rho}$ разумѣемъ ариѳметическое значеніе этого выраженія.

Желая дать болѣе полный перечень трудовъ по вопросу объ асимптотическихъ рѣшеніяхъ дифференціальныхъ уравненій, укажемъ также слѣдующія работы:

H. Poincaré: Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. Comptes Rendus. CI. 939—941, 990—991.

А. М. Ляпуновъ: Общая задача объ устойчивости движенія. Харьковъ, 1892.

„ Изслѣдованіе одного изъ особенныхъ случаевъ задачи объ устойчивости движенія. Москва, 1893.

E. Picard: Sur certaines solutions asymptotiques des équations différentielles. C. R. CXV. 1030—1031.

„ Traité d'Analyse, t. III. pp. 185—197; 360—390.

Horn: Sur les intégrales irrégulières des équations différentielles linéaires. C .R. CXXVI, 205—208.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

§ 2. Случай уравненія (21), когда $m < n$ и корни полинома $P(z)$ простые. Выборъ путей интеграціи, удовлетворяющихъ условію (40).

§ 3. Объ интегралахъ ζ_{1kps} и ζ_{2kps} и ихъ продолженіяхъ. Функціи Z_{1kps} и Z_{2kps} и линейныя между ними соотношенія. О продолженіи этихъ функцій.

§ 4. Объ асимптотическомъ представленіи интеграла ζ_{1kps} (61) для весьма большихъ значеній $|x|$.

§ 5. Объ асимптотическомъ представленіи интеграла ζ_{2kps} (61) для весьма большихъ значеній $|x|$.

§ 6. Объ асимптотическихъ представленіяхъ функцій Z_{1kps} и Z_{2kps} и ихъ продолженій. Замѣчаніе о нуляхъ этихъ функцій. Объ одномъ свойствѣ остаточныхъ членовъ $\alpha^{(ps)}_{km}$ и $\bar{\beta}^{(ps)}_{km}$. О возможности дифференцировать по перемѣнному x асимптотическія представленія функцій Z_{1kps} и Z_{2kps} и ихъ продолженій.

§ 7 О функціяхъ $Z_{1k+np+ns+n}$ и $Z_{2k+np+ns+n}$ и ихъ асимптотическихъ представленіяхъ для весьма большихъ значеній $|x|$. Основная система линейно независимыхъ интеграловъ уравненія (43). Объ асимптотическомъ представленіи всякаго интеграла этого уравненія для весьма большихъ значеній $|x|$.

§ 8. Изслѣдованіе случая, когда въ уравненіи (43) между числами $A_1, A_2, \cdots, A_n$ есть цѣлыя или нули.

§ 9. Приложеніе предыдущихъ результатовъ къ уравненіямъ 2-го и 4-го порядковъ, содержащимся въ уравненіи (43).

Глава III.

Изысканіе асимптотическихъ представленій и изслѣдованіе интеграловъ одного класса дифференціальныхъ линейныхъ уравненій 2-го порядка при помощи функцій $\omega(\nu; xz)$ *и* $\omega_1(\nu; xz)$.

§ 1. Опредѣленіе класса дифференціальныхъ линейныхъ уравненій, къ которому принадлежитъ изслѣдуемое уравненіе 2-го порядка. Объ одномъ свойствѣ интеграловъ уравненій разсматриваемаго класса. Трансформа Фурье—Бесселя уравненія 2-го порядка и уравненіе, ей сопряженное. Связь интеграловъ уравненія 2 го порядка съ интегралами этого послѣдняго.

§ 2. Изысканіе функціи v. Особый выборъ параметра ν. Выборъ путей интеграціи и интеграловъ. Продолженіе опредѣленныхъ интеграловъ, представляющихъ рѣшенія уравненія (34).

§ 3. Объ асимптотическомъ представленіи интеграла u_1 (95) для весьма большихъ значеній $|z|$.

§ 4. Объ асимптотическомъ представленіи интеграла u_2 (96) для весьма большихъ значеній $|z|$.

§ 5. Объ асимптотическихъ представленіяхъ интеграловъ (100) для весьма большихъ значеній $|z|$. Функціи v_1 и v_2; ихъ асимптотическія представленія для весьма большихъ значеній $|z|$. Линейная независимость этихъ функцій. Объ асимптотическомъ представленіи всякаго интеграла уравненія (34) для весьма большихъ значеній $|z|$. О возможности дифференцировать по z асимптотическія представленія функцій v_1 и v_2, а также асимптотическое представленіе всякаго интеграла уравненія (34). Замѣчаніе о нуляхъ функцій v_1 и v_2 въ смежности съ точкой $z = \infty$.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Страница	*строка*	*написано*	*должно быть.*
8	10 сверху	(24)	(29)
17	4 сверху	$\nu+p-\frac{1}{2}$	$\nu+p+\frac{1}{2}$
22	3 снизу	$(111)'$	$(112)'$
23	8 снизу	$p=$	$p=0$
26	2 сверху	a^p	a_p
37	10 сверху	ν	ν'
47	12 сверху	стремится	стремятся
49	5 сверху	$\nu \cdots \nu+1$	$r_m \cdots \tau r_m$
60	7 снизу	$\theta(t)$	$\frac{1}{2}\theta(t)$
68	10 сверху	Z_{1kps}	Z_{kps}
78	4 сверху	$(\sqrt{x})^{A_k+p-q}$	$(2\sqrt{x})^{A_k+p-q}$
90	6 сверху	$b=0$	$q=0$
96	3 сверху	(181)	(180)
98	7 снизу	(181)	(191)
112	1 снизу	$\alpha'^{(ps)}_{km}$	$\bar{\alpha}^{(ps)}_{km}$
113	6 снизу	$e^{-2\pi A_k i}$	$e^{\pi A_k i}$
113	1 снизу	$e^{-2\pi A_k i}$	$e^{2\pi A_k i}$
126	8 и 9 сверху	$\|a_1\|, \|a_2\|, \cdots, \|a_n\|$	$a_1, a_2, \cdots, a_n$
126	10 сверху	различныя	различныя неравно-противоположныя
142	1 снизу	ν	ν'
144	9 сверху	g_{1km}	$\bar{g}_{1km}$
185	7 снизу	$\omega(\nu; xt^2)$	$\omega(\nu; zt^2)$
200	3 снизу	$\delta_1^{\nu'-\frac{1}{2}}$	$\delta_1^{\nu'+\frac{1}{2}}$