ИЗВѢСТІЯ

ВАРШАВСКАГО

ПОЛИТЕХНИЧЕСКАГО ИНСТИТУТА

ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II.

ВЫПУСКЪ I.—1902 г.

А.

ВЪ ТИПОГРАФІИ ВАРШАВСКАГО УЧЕБНАГО ОКРУГА.
Краковское-Предмѣстье № 3.

1902.

Печатано по опредѣленію Совѣта Варшавскаго Политехническаго Института Императора Николая II.

Директоръ *А. Лагоріо.*

СОДЕРЖАНІЕ.

Редакторъ *В. Ф. Эренфейхтъ.*

ОФФИЦІАЛЬНЫЙ ОТДѢЛЪ.

ОТЧЕТЪ
Варшавскаго Политехническаго Института ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II.

за 1900—1901 уч. годъ.

Обзоръ преподаванія на Механическомъ Отдѣленіи.

I. Распредѣленіе учебныхъ занятій.

Въ 1900—1901 уч. году лекціи, упражненія и практическія занятія на Отдѣленіи были выполнены по ниже прилагаемой схемѣ:

1. *Лекціи по обязательнымъ предметамъ, пріуроченнымъ къ курсу.*

I. курсъ.

№	ПРЕДМЕТЪ	ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	Число часовъ 1-е полуг.	Число часовъ 2-е полуг.	Примѣчаніе
1	Алгебраическій анализъ	Проф. В. А. Анисимовъ	1	1	совм. съ инж. I к.
2	Аналитическая геометрія	Проф. В. А. Анисимовъ	2	2	совм. съ инж. I к.
3	Диффер. и интегр. исчисленіе	Проф. Г. Ѳ. Вороной	3	3	совм. съ инж. I к.
4	Теоретическая механика	Проф. П. О. Сомовъ	2	2	совм. съ инж. I к.
5	Начертательная геометрія	Преп. Э. В. Гляссъ.	3	3	совм. съ инж. I к.
6	Низшая геодезія	Преп. В. Э. Эренфейхтъ	2	—	
7	Физика	Преп. В. А. Бернацкій	3	3	совм. съ инж. и хим. I к.
8	Химія	Проф. В. А. Солонина Проф. Д. А. Хардинъ	3 —	— 3	совм. съ инж. I к.

№	ПРЕДМЕТЪ	ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	Число часовъ 1-е полуг.	2-е полуг.	Числ. группъ	Примѣчаніе

II. курсъ.

№	ПРЕДМЕТЪ	ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	1-е полуг.	2-е полуг.	Числ. группъ	Примѣчаніе
1	Диффер. и интегр. исч. съ прилож.	Проф. Г. Θ. Вороной	4	4		совм. съ инж. II к.
2	Теоретическая механика	Проф. П О. Сомовъ	2	2		совм. съ инж. II к.
3	Прикладная механика	Проф. Н. Б. Делоне	2	2		
4	Сопротивленіе матеріаловъ	Проф. И. Θ. Юпатовъ	4	—		совм. съ инж. II к.
5	Детали машинъ	Проф. И. Θ. Юпатовъ	—	4		
6	Стр. искусство и архитектура	Проф. А. Н. Кугушевъ.	2	2		
7	Физика	Преп. В. А. Бернацкій	3	3		совм. съ инж. и хим. II к.

III. курсъ.

№	ПРЕДМЕТЪ	ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	1-е полуг.	2-е полуг.	Числ. группъ	Примѣчаніе
1	Общая механ. технологія	Преп. М. И. Лисянскій	5	5		
2	Термодинамика	Преп. А. Я. Касьминъ	3	3		
3	Паровые котлы и машины	Преп. А. Я. Касьминъ	3	3		
4	Гидравлич. двигатели и гидраблика	Преп. И. Θ. Чорба	3	3		
5	Подъемныя машины	Проф. И. Θ. Юпатовъ	2	—		
6	Графическая статика	Проф. С. А. Заборовскій	1	1		
7	Технологія волокн. веществъ	Преп. В. К. Задарновскій	—	4		
8	Электротехника	Проф. А. В. Вульфъ	3	3		

2. *Лекціи по предметамъ необязательнымъ или не пріуроченнымъ къ курсу.*

№	ПРЕДМЕТЪ	ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	1-е полуг.	2-е полуг.	Числ. группъ	Примѣчаніе
1	Проективная геометрія	Преп. И. Р. Брайцевъ	2	2		совм. съ инж.
2	Теорія вѣроятностей	Преп. В. Э. Эренфейхтъ	1	1		совм. съ инж.
3	Теорія упругости	Проф. П. О. Сомовъ	2	—		совм. съ инж.
4	Политическая экономія	Преп. П. И. Иванюковъ	2	2		совм. съ инж.
5	Статистика	Преп. И. И. Иванюковъ	1	1		совм. съ инж.
6	Французскій языкъ	Преп. К. А. Перу	3	3		совм. съ инж. и хим.
7	Нѣмецкій языкъ	Преп. О. Θ. Базинеръ	3	3		совм. съ инж. и хим.

3. *Упражненія и практическія занятія.*

I. курсъ.

№	ПРЕДМЕТЪ	ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	1-е полуг.	2-е полуг.	Числ. группъ	Примѣчаніе
1	Аналит. геом. и алгебр. ан.	Преп. И. Р. Брайцевъ	1	2	3	
2	Диффер. и интегр. исчисленіе	Преп. Д. Д. Мордухай-Болтовской	1	2	3	
3	Теоретическая механика	Преп. Д. А. Гонтаревъ	1	2	3	
4	Начертательная геометрія	Преп. Э. В. Гляссъ	1	1	3	
5	Геодезія	Преп. В. Э. Эренфейхтъ	—	2	—	

№	ПРЕДМЕТЪ	ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	Число часовъ 1-е полуг.	Число часовъ 2-е полуг.	Число группъ	Примѣчаніе.

II. курсъ.

№	ПРЕДМЕТЪ	ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	1-е полуг.	2-е полуг.	Число группъ	Примѣчаніе.
1	Диффер. и интегр. исчисленіе	Преп. Д. Д. Мордухай-Болтовской	1	1	3	
2	Теоретическая механика	Преп. Д. А. Гонтаревъ Преп. И. Ѳ. Чорба	1 —	— 1	3	
3	Сопротивленіе матеріаловъ	Проф. И. Ѳ. Юпатовъ	1	1	3	
4	Детали машинъ	Проф. И. Ѳ. Юпатовъ	—	1	3	
5	Физика	Преп. В. А. Бернацкій	3	3	3	
6	Прикладная механика (необязат.)	Проф. Н. Б. Делоне	—	—	—	
7	Химія (необязат.)	Проф. В. А. Солонина	—	—	—	

4. *Графическія работы.*

I. курсъ.

№	ПРЕДМЕТЪ	ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	1-е полуг.	2-е полуг.	Число группъ	Примѣчаніе.
1	Рисованіе	Преп. І. К. Маньковскій	3	3	3	
2	Технич. черченіе	Преп. С. А. Окольскій	$5^1/_2$	4	3	
3	Архитектурное черченіе	Преп. Л. С. Васильевъ	2	2	3	
4	Топографическ. черченіе	Преп. К. Е. Богдановъ	—	1	3	

II. курсъ.

№	ПРЕДМЕТЪ	ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	1-е полуг.	2-е полуг.	Число группъ	Примѣчаніе.
1	Техническ. черченіе	Преп. В. К. Рофе	4	4	3	

III. курсъ.

№	ПРЕДМЕТЪ	ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	1-е полуг.	2-е полуг.	Число группъ	Примѣчаніе.
1	Графическая статика	Проф. С. А. Заборовскій	2	2	2	

5. *Проекты.*

III. курсъ.

№	ПРЕДМЕТЪ	ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	1-е полуг.	2-е полуг.	Число группъ	Примѣчаніе.
1	Архитектура	Проф. Н. К. Толвинскій Преп. В. А. Феддерсъ	8	—	2	
2	Детали машинъ	Проф. И. Ѳ. Юпатовъ	4	—	2	
3	Паровые котлы	Преп. А. Я. Касьминъ	—	4	2	
4	Подъемныя машины	Проф. И. Ѳ. Юпатовъ	—	4	2	

II. Упражненія по теоретическимъ предметамъ.

1) Упражненія *по алгебрѣ и аналитической геометріи* на I курсѣ велъ преп. *И. Р. Брайцевъ*, подъ руководствомъ проф. В. А. Анисимова.

Всѣ 113 слушателей были раздѣлены на три группы (около 40 чел. въ каждой).

Въ 1-мъ полугодіи для каждой группы было предназначено на упражненія по еженедѣльному часу и занятія по геометріи и алгебрѣ чередовались черезъ недѣлю; во 2-мъ полугодіи на практическія занятія для каждой группы было прибавлено еще по еженедѣльному часу, такъ что каждую недѣлю одинъ часъ велись упражненія по геометріи, а другой по алгебрѣ.

Въ своихъ занятіяхъ преподаватель старался развить въ студентахъ навыкъ осмысленно прилагать средства, сообщенныя имъ профессоромъ на лекціяхъ, къ рѣшенію разныхъ задачъ аналитической геометріи и алгебры.

Самый способъ веденія дѣла состоялъ въ слѣдующемъ. Въ началѣ часа предпосылались краткія свѣдѣнія изъ того отдѣла, изъ котораго надлежало дѣлать задачи. Потомъ предлагалась задача. Выходившій отвѣчать дѣлалъ задачу медленно, такъ что прочіе студенты вполнѣ могли слѣдить за развитіемъ процесса. Попутно предлагались вопросы изъ курса, находившіеся въ тѣсной связи съ содержаніемъ задачи. Подъ конецъ часа диктовались двѣ или три наиболѣе типичныя задачи на домъ. Эти послѣднія, рѣшенныя и объясненныя дома, подавались преподавателю для просмотра.

Въ виду не вполнѣ самостоятельнаго отношенія нѣкоторыхъ изъ студентовъ къ домашнимъ задачамъ, во второмъ полугодіи пришлось нѣсколько измѣнить способъ веденія упражненій: спрашивались лишь тѣ только задачи, которыя предлагались на домъ. Результаты обнаружили, что такой способъ болѣе цѣлесообразенъ.

Изъ *геометріи* дѣлались задачи слѣдующихъ типовъ:

1) Нахожденіе координатъ точекъ и направленій при разныхъ условіяхъ; 2) преобразованія координатъ; 3) составленіе уравненій прямыхъ линій по заданнымъ условіямъ; 4) разстояніе отъ точки до прямой и параллельныхъ прямыхъ между собою; 5) было рѣшено нѣсколько задачъ на примѣненіе метода сокращенныхъ обозначеній къ прямымъ линіямъ, какъ то: о пересѣченіи въ одной точкѣ перпендикуляровъ, медіанъ и биссектрисъ угловъ треугольника и т. д.; 6) составленіе уравненій кривыхъ 2-го порядка по заданнымъ условіямъ; 7) асимптотическія направленія и асимптоты; 8) касательныя и нормали; 9) центры, взаимно сопряженные діаметры, оси и фокусы кривыхъ 2-го порядка; 10) геометрическія мѣста; 11) построеніе точекъ кривой 2-го порядка и касательныхъ къ ней при помощи теоремъ Паскаля и Бріаншона; 12) составленіе уравненій плоскостей и прямыхъ линій въ пространствѣ 3-хъ измѣреній при разныхъ условіяхъ; 13) нахожденіе разстоянія отъ данной точки до данной плоскости или прямой; 14) со-

ставленіе уравненій поверхностей 2-го порядка по заданнымъ условіямъ; 15) розысканіе центровъ, взаимно сопряженныхъ діаметровъ, главныхъ діаметральныхъ плоскостей и осей поверхностей 2-го порядка; 16) случаи вырожденія поверхностей 2-го порядка. Въ случаѣ поверхностей 2-го порядка, уравненія которыхъ представлены въ нормальной формѣ, обращено было особенное вниманіе на изысканіе круговыхъ сѣченій и ихъ линейчатыхъ образующихъ.

По *алгебрѣ* дѣлались задачи изъ слѣдующихъ отдѣловъ:

1) примѣненіе комплексныхъ чиселъ къ рѣшенію двучленныхъ уравненій; 2) уравненія 3-й и 4-й степени; 3) примѣненіе свойства непрерывности полиномовъ къ изысканію предѣловъ корней; 4) вычисленіе симметрическихъ функцій корней уравненія; 5) составленіе уравненій съ квадратами разностей корней; 6) примѣненіе симметрическихъ функцій къ исключенію; 7) нахожденіе высшихъ и низшихъ границъ дѣйствительныхъ, положительныхъ и отрицательныхъ корней; 8) особенное вниманіе было обращено на примѣненіе теоремъ Ролля, Декарта и Штурма; 9) изысканіе раціональныхъ корней и приближенное вычисленіе ирраціональныхъ дѣйствительныхъ корней алгебраическихъ и трансцендентныхъ уравненій. По теоріи опредѣлителей было обращено вниманіе на вычисленіе опредѣлителей и рѣшеніе системъ линейныхъ уравненій.

Въ 1-мъ полугодіи въ занятіяхъ принимали участіе 103 студента и 1 вольнослушатель. Во 2-мъ полугодіи съ особымъ интересомъ принимали участіе 30 студентовъ и 1 вольнослушатель. Вообще же принимали участіе въ практическихъ занятіяхъ 83 человѣка и въ томъ числѣ всѣ вольнослушатели.

2. Упражненія по *дифференціальному и интегральному исчисленіямъ* велись, подъ руководствомъ проф. Г. Θ. Вороного, преп. *Д. Д. Мордухай-Болтовскимъ* и на I к. и на II к. Отдѣленія.

Студенты каждаго курса дѣлились на 3 группы, причемъ на обоихъ курсахъ Механическаго Отдѣленія приходилось около 40 человѣкъ въ группѣ. Въ осеннемъ полугодіи на I и II курсѣ приходилось по 3 часа практическихъ занятій въ недѣлю, такъ что каждая группа имѣла по одному часу въ недѣлю. Въ весеннемъ полугодіи на I курсѣ число часовъ было увеличено до 6; на II курсѣ оно оставалось безъ измѣненія.

Практическія занятія велись слѣдующимъ образомъ:

Въ началѣ каждаго часа преподаватель давалъ студентамъ необходимыя разъясненія и рѣшалъ самъ одну или нѣсколько задачъ, относящихся къ изучаемому отдѣлу. Послѣ чего студенты выходили къ доскѣ и рѣшали подъ руководствомъ преподавателя другія задачи того же типа. Болѣе трудныя задачи предлагались преподавателемъ для рѣшенія на домъ, возвращались исправленными и часто служили темою для бесѣдъ со студентами. Въ первомъ полугодіи на I курсѣ, идя параллельно курсу, читаемому профессоромъ Г. Ѳ. Воронымъ, студенты занимались вычисленіемъ предѣловъ и дифференцированіемъ функцій, во второмъ полугодіи занимались интегрированіемъ функцій. На II курсѣ въ первомъ полугодіи занимались задачами, относящимися къ приложенію дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія къ геометріи (на плоскости) и къ интегрированію дифференціальныхъ уравненій; во второмъ полугодіи—задачами, относящимися къ приложенію обоихъ исчисленій къ геометріи (въ пространствѣ) и къ аналитическимъ приложеніямъ дифференціальнаго исчисленія.

Принимали участіе въ занятіяхъ на I курсѣ Отдѣленія 96%, на II курсѣ—85% соотвѣтственнаго числа студентовъ.

3. Упражненія по *теоретической механикѣ*, подъ общимъ руководствомъ проф. П. О. Сомова, вели: на I к. Отдѣленія въ оба полугодія преп. *Д. А. Гонтаревъ*, а на II к. въ первомъ полугодіи преп. *Д. А. Гонтаревъ*, а въ 2-мъ полугодіи преп. *И. Ѳ. Чорба*.

На I курсѣ изъ 116 чел. принимали участіе въ занятіяхъ около 89%. Весь курсъ дѣлился на 3 группы, причемъ каждая группа въ первомъ полугодіи имѣла 1 часъ практическихъ занятій въ недѣлю, и во второмъ полугодіи —2 часа въ недѣлю. Практическія занятія состояли въ рѣшеніи задачъ на равновѣсіе точки и твердаго тѣла, на геометрическую кинематику точки и плоской системы и на законъ связующій кинетическую энергію точки съ работой. При рѣшеніи задачъ преслѣдовались цѣли: 1) выясненіе курса и 2) умѣніе пользоваться курсомъ для рѣшенія задачъ.

На II курсѣ Отдѣленія задачи предлагались по нижеслѣдующимъ отдѣламъ аналитической механики: 1) формулы Эйлера для проекцій скоростей; 2) кинематическія задачи на движеніе твердаго тѣла около точки; 3) составленіе уравненій динамики для 1 точки; 4) законъ количества движенія и моментовъ количества движенія для 1 точки; 5) составленіе уравненій динамики для несвободной точки; 6) принципъ возможныхъ перемѣщеній; 7) принципъ d'Alembert'a; 8) законъ работъ; 9) законъ движенія центра массъ; 10) законъ количества движенія (соудареніе шаровъ); 11) законъ моментовъ количества движенія; 12) движеніе твердаго тѣла около неподвижной оси. Общее число задачъ было 46.

Для занятій всѣ студенты II к. были раздѣлены на 3 группы (около 40 человѣкъ въ каждой) и на каждую группу было назначено по одному еженедѣльному часу. Участіе въ практическихъ занятіяхъ принимали 89 человѣкъ, около 76% всего числа студентовъ; общее число отвѣтовъ было 227.

4. По *начертательной геометріи* на I курсѣ Механическаго Отдѣленія практическія занятія велись преп. *Э. В. Гляссомъ* со 110 студентами и 4 вольнослушателями, раздѣленными на 3 группы по 38 человѣкъ въ каждой, причемъ на группу полагалось по 1 часу въ недѣлю въ оба полугодія.

Практическія занятія состояли, вопервыхъ, въ рѣшеніи студентами задачъ на пересѣченіе плоскостей, нахожденіе точки встрѣчи прямой съ плоскостью, проведеніе перпендикуляровъ, приведеніе фигуръ къ найвыгоднѣйшему ихъ заданію опредѣленіе разстояній, угловъ и проекцій многогранниковъ. Вовторыхъ, съ 15 февраля студенты чертили эпюры на доскахъ, а именно 2 листа по 4 эпюра на каждомъ.

Для перваго эпюра предложены задачи на построеніе пирамиды по даннымъ условіямъ, опредѣленіе сѣченія ея плоскостью, развертку пирамиды съ преобразованнымъ сѣченіемъ и опредѣленіе пересѣченія пирамиды съ призмою, причемъ основанія данныхъ многогранниковъ были расположены въ произвольныхъ плоскостяхъ.

Для второго листа предложены задачи на параболическое сѣченіе конуса наклонною плоскостью и развертку конуса съ преобразованнымъ сѣченіемъ. на опредѣленіе плоскаго сѣченія эллипсоида вращенія и пересѣченіе двухъ цилиндрическихъ поверхностей.

Работы выполнены студентами тщательно и хорошо.

5. Занятіями по *сопротивленію матеріаловъ* на II курсѣ руководилъ проф. *И. Ѳ. Юпатовъ*.

Въ текущемъ учебномъ году всѣ студенты II курса были раздѣлены на 3 группы по 40 человѣкъ въ каждой. По росписанію на каждую группу полагался 1 недѣльный годовой часъ практическихъ занятій. Но занятія эти начались по существу въ началѣ 2-го полугодія, такъ какъ лекціи по сопротивленію матеріаловъ были начаты только во второй половинѣ октября и потому въ концѣ перваго полугодія не было достаточно теоретическаго матеріала для начала упражненій.

Во второмъ полугодіи на практическихъ занятіяхъ былъ рѣшенъ циклъ задачъ на слѣдующіе отдѣлы: растяженіе, сжатіе, сдвигъ, крученіе, опредѣленіе моментовъ инерціи, изгибъ, касательныя силы при изгибѣ, формулы С. Венана линія суммы силъ, упругая линія и опредѣленіе наибольшаго прогиба, тѣла равнаго сопротивленія и напряженія въ стержняхъ фермъ, статически опредѣлимыхъ по способу Риттера.

Задачи на каждый отдѣлъ рѣшались на всѣхъ группахъ одновременно въ теченіе недѣли или двухъ, при чемъ студенты предупреждались, какой отдѣлъ будетъ разобранъ въ задачахъ на слѣдующей недѣлѣ.

Самый ходъ практическихъ занятій производился слѣдующимъ образомъ: одному изъ студентовъ задавалась задача у доски, первые 10—15 минутъ ему предоставлялась возможность приступить къ самостоятельному рѣшенію задачи; остальные студенты рѣшали ее самостоятельно въ своихъ тетрадкахъ, при чемъ руководитель обходилъ аудиторію и давалъ соотвѣтственныя указанія.

Здѣсь представлялась возможность отличать лицъ, сознательно работающихъ, каковыя и отмѣчались, и выяснить тѣ сомнѣнія, которыя встрѣчаются.

Остальныя 30—25 минутъ употреблялись на рѣшеніе предложенной задачи у доски, на выясненіе встрѣтившихся затрудненій и на уясненіе теоретическаго курса даннаго отдѣла.

Такъ какъ въ скоромъ времени выдѣлилась группа студентовъ, которые работали не только въ своей группѣ, но и въ другихъ, то для нихъ задавалась на другой доскѣ задача болѣе трудная.

Что касается посѣщаемости практическихъ занятій, то число участвовавшихъ, начиная съ 10 въ группѣ, постоянно увеличивалось и доходило до 45 человѣкъ (въ среднемъ около 28 человѣкъ).

Изъ 118 студентовъ зачтено участіе въ практическихъ занятіяхъ 48 студентамъ. Оцѣнка производилась по числу отмѣтокъ сознательнаго отношенія къ практическимъ занятіямъ и самостоятельнаго рѣшенія задачъ.

6. Упражненія по *деталямъ машинъ* на II курсѣ происходили подъ руководствомъ проф. *И. Θ. Юпатова.* Всѣ студенты II курса были раздѣлены на 3 группы по 40 человѣкъ въ каждой. По росписанію на каждую группу полагался 1 недѣльный часъ въ теченіе 2-го полугодія.

На практическихъ занятіяхъ рѣшались задачи на слѣдующіе отдѣлы: болты, валы, шейки, цапфы, пяты, зубчатая передача, ременная передача и канатная передача пеньковыми и проволочными канатами.

Задачи на каждый отдѣлъ рѣшались одновременно во всѣхъ группахъ въ теченіи одной или двухъ недѣль, о чемъ всякій разъ студенты предупреждались.

Число участвовавшихъ въ занятіяхъ было въ каждой группѣ около 18 студентовъ, т. е. около половины.

Изъ всѣхъ 118 студентовъ практическія занятія по деталямъ машинъ зачтены 26 студентамъ. Оцѣнка производилась по числу отмѣтокъ сознательнаго отношенія къ практическимъ занятіямъ и самостоятельнаго рѣшенія задачъ.

III. Графическія работы.

1. Занятіями по *рисованію* на I курсѣ, при 3 часахъ въ недѣлю, съ 3 группами (по 41 человѣкъ въ каждой) руководилъ преп. *И. К. Маньковскій.*

Занятія состояли въ рисованіи съ натуры (гипсовыя модели), начиная съ геометрическихъ тѣлъ и простыхъ архитектурныхъ мотивовъ и кончая несложнымъ орнаментомъ.

Всего было выполнено 8 листовъ рисунковъ. Занятія посѣщались студентами весьма исправно.

2. По *техническому черченію* на I курсѣ занятія происходили при $5^1/_2$ еженедѣльныхъ часахъ въ первомъ полугодіи и 4 часахъ во второмъ полугодіи съ каждою группою. Всего было 3 группы студентовъ (въ каждой группѣ около 37 человѣкъ); работами руководилъ преп. *С. А. Окольскій.*

Занятія состояли въ обученіи черченію машинъ, какъ подготовительной ступени къ разсчету и проэктированію машинъ на слѣдующихъ курсахъ. Обученіе начиналось практическимъ ознакомленіемъ съ техникою черченія и началами ученія о параллельныхъ проекціяхъ и перспективѣ посредствомъ 3-хъ первыхъ работъ (I раб.—условныя обозначенія по вычерченнымъ преподавателемъ на доскѣ эскизамъ, II раб.—чертежъ на калькѣ, III раб.—составленіе чертежа по эскизу), въ выработкѣ умѣнія самостоятельно составлять эскизы и по нимъ сборные рабочіе чертежи машинныхъ частей 3-хъ степеней сложности въ слѣдующихъ за симъ 3-хъ работахъ (IV раб.—по модели 1-й степени сложности, V раб.—по модели 2-й степени сложности и VI раб.—по модели 3-й степени сложности. Одна изъ послѣднихъ 3-хъ работъ сопровождалась разсчетомъ теоретическаго вѣса и провѣркою полученнаго результата непосредственнымъ взвѣшиваніемъ. Двѣ работы, по собственному своему выбору, студенты вычерчивали лишь въ карандашѣ (одну въ 1-мъ и другую во 2-мъ полугодіи), безъ обводки тушью, на дешевыхъ сортахъ бумаги.

Практическія занятія посѣщались студентами исправно и результаты достигнутые въ общемъ хорошіе.

Занятіями по *техническому черченію* на II курсѣ руководилъ преп. *В. К. Рофе.* Въ работахъ принимали участіе 119 студентовъ; группъ было 3, въ каждой группѣ около 40 человѣкъ. При 4 часахъ занятій въ недѣлю съ каждой группой студентами были выполнены слѣдующія 5 работъ: 1) задвижки, краны и клапаны, 2) арматура паровыхъ котловъ (по эмпирическимъ формуламъ), 3) разсчетъ и вычерчиваніе болтовыхъ или клиновыхъ соединеній, 4) разсчетъ и вычерчиваніе цилиндрической зубчатой передачи и 5) деталировка по чертежу части машины въ собранномъ видѣ.

На занятія студенты являлись исправно.

3. *Архитектурнымъ черченіемъ* на I курсѣ руководилъ преп. *Л. С. Васильевъ.*

Студентовъ, принимавшихъ участіе въ занятіяхъ, было 121, вольнослушателей 3; группъ на курсѣ 3 и для каждой группы было назначено 2 еженедѣльныхъ годовыхъ часа.

Работы исполнялись въ туши на полулистѣ ватманской бумаги. Число работъ три, за первое полугодіе 2 работы и за второе—одна работа.

1) работа: обломы и массы, детали карнизовъ, оконъ и т. д.

2) работа: небольшое деревянное зданіе (фасадъ, разрѣзъ, планъ и детали конструкцій).

3) работа: каменное зданіе (фасадъ, разрѣзъ и планъ).

4. По *топографическому черченію,* преподаваемому Капитаномъ *К. Е. Богдановымъ* на I курсѣ, занятія велись только во второмъ полугодіи; въ нихъ принимало участіе 116 студентовъ и 3 вольнослушателя, раздѣленныхъ на 3 группы, въ каждой по 40 человѣкъ. Каждая группа занималась по одному часу въ недѣлю.

Согласно утвержденной программѣ, работы заключались: а) въ знакомствѣ съ условными знаками, употребляемыми на планахъ въ масштабѣ $^1/_{8400}$ и $^1/_{16800}$ и б) въ составленіи и иллюминовкѣ примѣрнаго плана. Пособіемъ для этихъ работъ служили литографированные примѣрные планы и образцовыя работы студентовъ предыдущаго года.

Занятія велись слѣдующимъ образомъ: примѣрный планъ перечерчивался на бумагу частью посредствомъ координатъ, частью на глазъ, вычерчивался тушью, подписывался соотвѣтствующими шрифтами и иллюминовался. Занятія посѣщались студентами исправно.

5. По *графической статикѣ* на III курсѣ занятіями руководилъ проф. *С. А. Заборовскій.*

Состояло на курсѣ: студентовъ 63, вольнослушателей 1. Принимало участіе въ занятіяхъ: студентовъ 56, вольнослушателей 1. Число группъ на курсѣ 2 съ 2 еженедѣльными годовыми часами занятій для каждой группы.

Студентами исполнено 2 работы:

1) графическое опредѣленіе моментовъ второго порядка употребительныхъ въ практикѣ прокатныхъ профилей (по способамъ Кульмана и Мора); построеніе вспомогательнаго круга и опредѣленіе главныхъ осей, графическое опредѣленіе *max.* и *min.* нормальнаго напряженія по заданной продольной силѣ;

2) опредѣленіе *max.* и *min.* поперочной силы и наибольшаго изгибающаго момента въ сѣченіяхъ прямой однопролетной балки, подверженной дѣйствію подвижной системы сосредоточенныхъ грузовъ. Студенты, въ общемъ, оказали хорошіе успѣхи.

IV. Практическія занятія въ кабинетахъ и лабораторіяхъ.

1. По *геодезіи* на I курсѣ практическія занятія производились въ геодезическомъ кабинетѣ преп. *В. Э. Эренфейхтомъ* по 2 часа въ недѣлю во второмъ полугодіи. Всѣ студенты были раздѣлены на 3 группы и каждая могла участвовать въ занятіяхъ 1 разъ въ 3 недѣли (4 раза въ полугодіе).

Цѣль практическихъ занятій состояла въ томъ, чтобы дать возможность студентамъ осмысленно изучать теорію инструментовъ на самихъ инструментахъ. Студенты рѣшали слѣдующія задачи: 1) полное изслѣдованіе компенсаціоннаго теодолита, 2) изслѣдованіе нѣкоторыхъ поправокъ астролябіи, нивеллировъ и кипрегелей, 3) измѣреніе горизонтальныхъ угловъ по 3 методамъ и 4) опредѣленіе постоянныхъ коэффиціентовъ планиметра и измѣреніе площадей на планѣ.

Вслѣдствіе тѣсноты помѣщенія далеко не всѣ желающіе студенты могли заниматься въ назначенное по росписанію время. Поэтому, по просьбѣ студентовъ, были назначены добавочные 2 вечернихъ часа, сначала по 2 раза въ недѣлю, а послѣ Пасхи по 5 разъ въ недѣлю.

2. Практическія занятія по *прикладной механикѣ* на II курсѣ подъ руководствомъ проф. *Н. Б. Делоне* происходили въ механическомъ кабинетѣ и были необязательными. Занятія обыкновенно велись по группамъ человѣкъ въ 15, но строгаго подраздѣленія на группы не было. Занятія происходили по пятницамъ отъ 6 до 10 часовъ вечера, а нѣкоторые студенты приходили для окончанія своихъ работъ и въ другое время по уговору съ профессоромъ. Цѣль занятій состояла въ изученіи студентами кинематическихъ свойствъ механизмовъ и въ ознакомленіи студентовъ съ динамометрическими измѣреніями. Нѣкоторые студенты работали на станкахъ: токарномъ, сверлильномъ и строгальномъ. Студенты строили по указанію профессора подвижные модели шарнирныхъ механизмовъ изъ картона или изъ никкелевыхъ пластинокъ, производили измѣренія помощью трансмиссіоннаго динамометра Морена. Студентъ Соколовскій приготовилъ изъ сыраго матеріала (латуни, стали и дерева) модель изобрѣтеннаго профессоромъ Делоне удвоителя настолько чисто, что модель эту можно занести въ инвентарь кабинета.

Студентамъ предоставлялась широкая свобода въ разсматриваніи и изученіи имѣющихся въ кабинетѣ моделей, вышедшихъ изъ извѣстныхъ мастерскихъ *Voigt'a*, *Schröder'a* и *Société Génévoise pour la construction des instruments*.

Занятія эти, не смотря на ихъ необязательность, посѣщались студентами охотно.

Для болѣе широкаго развитія этого дѣла, въ которомъ студенты столь охотно принимаютъ участіе, именно при переходѣ на второмъ курсѣ отъ изученія теоретическихъ предметовъ къ практическому ознакомленію съ машинами и для поднятія кабинета на уровень, по крайней мѣрѣ, механическихъ кабинетовъ нашихъ Университетовъ, желательно было бы пріобрѣтеніе большаго количества хорошо исполненныхъ моделей.

Кромѣ упомянутыхъ практическихъ занятій состоялись въ отчетномъ учебномъ году подъ руководствомъ профессора Делоне два семинарія, имѣющіе болѣе теоретическій характеръ.

а) На первомъ изъ этихъ семинаріевъ была рѣшена предложенная профессоромъ Делоне задача: *разсмотрѣніе условій, при которыхъ способомъ Шаля строятся эллипсъ, парабола или гипербола.* Аналитическое рѣшеніе этой задачи представлено и доложено было студентомъ Липецомъ III курса, а геометрическое (весьма изящное)—студентомъ Вѣрникомъ II курса.

б) На второмъ семинаріи студентъ Липецъ сдѣлалъ докладъ: *очеркъ теоріи эллиптическихъ функцій и приложеніе ихъ къ теоріи* шарнирнаго четырехсторонника по *Durége* и *Darboux*. Доклады сопровождались довольно оживленнымъ обмѣномъ мыслей по затронутымъ ими предметамъ.

3. Практическія занятія въ *физической лабораторіи* происходили подъ руководствомъ преп. *В. А. Бернацкаго.*

Въ лабораторіи занимались въ 1-мъ полугодіи со II курса 96 студентовъ, 1 вольнослушатель; кромѣ того 1 студентъ III курса и 1 студентъ I курса. Всѣ практиканты Отдѣленія составляли 3 группы, при чемъ каждая группа работала по 3 часа въ недѣлю. Впрочемъ было не мало лицъ, которыя далеко не ограничивались часами своей очереди, а работали, какъ только представлялась къ тому возможность, т. е. когда было свободное мѣсто въ лабораторіи. Этимъ и объясняется то обстоятельство, что многіе вышли далеко изъ средняго уровня по работѣ. Такъ всѣми 99 практикантами рѣшено 1214 задачъ, что дастъ въ среднемъ 12 задачъ на человѣка; между тѣмъ какъ есть лица, сдѣлавшія по 37, 26, 23, 21, 18, 17 и т. д. задачъ.

Нѣкоторымъ студентамъ, числомъ 21, изъ оставшихся на II курсѣ на повторительный курсъ и имѣвшимъ въ прошломъ году отмѣтку пять или четыре, зачтены ихъ прошлогоднія отмѣтки.

Критеріумомъ для выставленія отмѣтокъ служили:

а) число рѣшенныхъ задачъ; б) степень трудности выбранныхъ задачъ; в) вообще усердное, аккуратное и внимательное отношеніе къ занятіямъ.

Во 2-мъ полугодіи въ лабораторіи занимались 89 студентовъ II курса и 1 студентъ I курса. Всѣ практиканты Отдѣленія составляли 3 группы, при 3 часахъ недѣльной работы. Всѣми 90 практикантами рѣшено въ теченіе 2-го полугодія 944 задачи, что даетъ въ среднемъ по 10,5 задачъ на каждаго.

Въ 1-мъ полугодіи истекшаго академическаго года 98 практикантами Отдѣленія было рѣшено 1214 задачъ, всего въ теченіи года рѣшено 1758 задачъ—по 23 (почти) задачи на человѣка.

Въ истекшемъ академическомъ году циклъ задачъ, предлагаемыхъ г. г. практикантамъ лабораторіи, дошелъ до 61 задачи—по всѣмъ отдѣламъ физики, при чемъ для каждой изъ нихъ составлено подробное описаніе метода и прибора для данной задачи, каковое дается на руки практиканту на время занятій.

Подробныя описанія имѣются въ единственномъ экземплярѣ для каждой задачи (писанныя, въ переплетѣ) и на домъ студентамъ не выдаются. Перечень задачъ при семъ прилагается.

Общія измѣрительныя задачи.

1. Калибрированіе газомѣрной трубки.
2. Радіусъ канала капилярной трубки.
3. Ускореніе земного притяженія (съ катетометромъ и хроноскопомъ).
4. Провѣрка законовъ вѣсовъ на модели Вейнгольда.

Свойства твердыхъ и жидкихъ тѣлъ.

5. Плотность тѣлъ правильной формы по массѣ и объему.
6. Плотность твердыхъ тѣлъ на гидростатическихъ вѣсахъ.
7. Плотность твердыхъ тѣлъ ареометромъ Никольсона-Траллеса.
8. Плотность твердыхъ тѣлъ на вѣсахъ Жолли.
9. Плотность твердыхъ тѣлъ пикнометромъ.
10. Плотность твердыхъ тѣлъ волюмметромъ Пальцова.
11. Плотность жидкости на вѣсахъ Реймана и ареометромъ.
12. Плотность жидкости пикнометромъ.

13. Плотность жидкости по способу сообщающихся сосудовъ (съ катетометромъ).
14. Упругость гнутія. Модуль Юнга для стали.
15. Упругость крученія.
16. Модуль Юнга для стекла по скорости звука въ стеклѣ методомъ пыльныхъ фигуръ Кундта.
17. Поверхностное натяженіе жидкости.

Газы и пары.

18. Анализъ воздуха эвдіометромъ.
19. Влажность воздуха гигрометромъ Аллюара и психрометромъ Августа.
20. Абсолютная плотность воздуха.
21. Отношеніе удѣльныхъ теплотъ воздуха по Клеману и Дезорму.
22. Термическій коэффиціентъ расширенія воздуха воздушнымъ термометромъ.
23. Сравненіе плотностей газовъ по методу Бунзена.
24. Плотность пара по способу Дюма.
25. Плотность пара по способу Виктора Мейера.
26. Плотность пара по способу Гей-Люссака (Гоффмана).

Теплота.

27. Термическій коэффиціентъ длины твердыхъ тѣлъ приборомъ Лавуазье и Лапласа.
28. Термическій коэффиціентъ объема жидкости дилатометромъ.
29. Термическій коэффиціентъ объема стекла дилатометромъ.
30. Провѣрка постоянныхъ точекъ термометра.
31. Удѣльная теплота твердаго тѣла по способу смѣшенія.
32. Удѣльная теплота жидкости методомъ излученія.
33. Скрытая теплота парообразованія.
34. Скрытая теплота таянія льда.
35. Пониженіе точки замерзанія растворовъ.
36. Механическій эквивалентъ теплоты приборомъ Христіансена.
37. Термическій коэффиціентъ расширенія ртути приборомъ Бернацкаго (съ катетометромъ).

Свѣтъ.

38. Фокусныя разстоянія линзъ и зеркалъ на оптической скамьѣ,

39. Увеличеніе трубы способами Пулье, Вальденгофена и Рамсдена.
40. Увеличеніе микроскопа.
41. Радіусъ кривизны линзы офтальмометромъ Гельмгольтца (и сферометромъ).
42. Показатель преломленія стеклянной призмы спектрометромъ.
43. Длина свѣтовой волны диффракціонной рѣшеткой.
44. Показатель преломленія жидкости спектрометромъ.
45. Показатели преломленія твердыхъ и жидкихъ тѣлъ рефрактометромъ Пульфриха.
46. Спектральный анализъ.
47. Вращательная способность кварца приборомъ Лорана.
48. Вращательная способность жидкости поляристробометромъ Вильда.
49. Содержаніе сахара въ растворѣ сахариметромъ Солейль-Венцке.

Магнитизмъ и Электричество.

50. Горизонтальная составляющая напряженія земнаго магнитизма.
51. Магнитное наклоненіе.
52. Сопротивленіе катушекъ по методу подстановки.
53. Сопротивленіе катушекъ по методу дифференціальнаго гальванометра.
54. Удѣльное сопротивленіе металловъ Уитстоновскимъ мостикомъ.
55. Опредѣленіе очень малыхъ сопротивленій методомъ отвѣтвленія.
56. Термическій коэффиціентъ сопротивленія металловъ.
57. Коэффиціентъ приведенія тангенсъ буссоли съ Си-вольтаметромъ.
58. Сравненіе электродвижущихъ силъ элементовъ по методу Дю-Буа-Реймона и гальванометромъ Сименса и Гальске.
59. Механическій эквивалентъ теплоты по закону Джоуля-Ленца.
60. Электродвижущая сила термоэлемента съ гальванометромъ Депре-Дарсонваля.
61. Земной индукторъ. Баллистическій гальванометръ.

4. Занятіями въ *лабораторіи неорганической химіи* руководилъ проф. *В. А. Солонина*. Въ виду небольшаго числа мѣстъ во временномъ помѣщеніи химической лабораторіи, а также въ виду значительно

большей важности занятій въ химической лабораторіи для студентовъ химическаго отдѣленія передъ студентами другихъ отдѣленій, практическія занятія въ химической лабораторіи въ этомъ году для студентовъ механическаго отдѣленія были необязательны и мѣста въ химической лабораторіи были предоставлены лишь небольшому числу желающихъ. Въ этомъ академическомъ году въ химической лабораторіи работали 8 студентовъ. Занятія ихъ состояли въ качественномъ химическомъ анализѣ.

V. Лѣтняя практика.

1. Лѣтняя *геодезическая* практика происходила со студентами, перешедшими весною 1901 г. на II курсѣ, въ окрестностяхъ посада Гродискъ въ Іюнѣ мѣсяцѣ, и продолжалась 2 недѣли. Студенты, раздѣленные на группы, упражнялись въ полѣ въ съемкѣ мѣстности различными пріемами и въ нивеллировкѣ, съ составленіемъ плановъ и профилей.

2. Студенты старшихъ курсовъ отбывали практику *строительную и спеціальную.* Для послѣдней они были командированы Институтомъ на различныя желѣзныя дороги, заводы, фабрики; мѣста же для строительной практики въ большинствѣ случаевъ студенты подыскивали сами.

Przegląd wykład na Wydziale Inżynier-Bud.

Обзоръ преподаванія на Инженерно-строительномъ Отдѣленіи.

I. Вѣдомость числа часовъ лекцій въ 1900—1901 акад. году.

1. *Обязательные предметы.*

№	ПРЕДМЕТЪ	Курсъ	Число часовъ въ 1-мъ полуг.	Число часовъ въ II-мъ полуг.	ЛЕКТОРЪ	Примѣчаніе.
1	Алгебраическій анализъ	I	1	1	Проф. В. А. Анисимовъ.	Совм. съ мех. отд.
2	Аналитическая геометрія	I	2	2	Проф. В. А. Анисимовъ.	Совм. съ мех. отд.
3	Дифференціальное и интегральное исчисленіе.	I	3	3	Проф. Г. Ѳ. Вороной. .	Совм. съ мех. отд.
	Дифференціальное и интегральное исчисленіе.	II	4	4		
4	Начертательная геометрія	I	3	3	Прен. Э. В. Гляссъ. . .	Совм. съ мех. отд.
5	Механика теоретическая	I	2	2	Проф. П. О. Сомовъ . .	Совм. съ мех. отд.
	Механика теоретическая	II	2	2		
6	Механика практическая	II	2	2	Проф. Н. Б. Делоне . .	
7	Сопротивленіе матеріаловъ	II	4	—	Проф. И. Ѳ. Юпатовъ. .	Совм. съ мех. отд.
8	Механика строительная и графостатика	II	2	2	Проф. С. А. Заборовскій.	
	Механика строительная и графостатика	III	2	2		
9	Гидравлика	III	2	2	Прен. Н. О. Чорба . . .	
10	Физика.	I	3	3	Прен. В. А. Бернацкій .	Совм. съ мех. и хим. отд.
	"	II	3	3		
11	Химія	I	3	—	Проф. В. А. Солонина. .	Совм. съ мех. отд.
	"	I	—	3	Проф. Д. А. Хардинъ. .	
12	Геологія и минералог.	III	3	3	Проф. А. Е. Лагоріо .	
13	Геодезія	I	2	2	Прен. В. Э. Эренфейхтъ .	
	"	II	2	2		
14	Общія начала строительнаго искусства.	I	2	2	Проф. В. І. Дейчъ . . .	
	Общія начала строительнаго искусства.	II	2	2		
15	Механическая теорія тепла (паровыя машины)	III	3	3	Прен. А. Я. Касьминъ. .	
16	Исторія архитектуры	II	2	2	Проф. Н. К. Толвинскій .	
17	Части зданій . . .	II	2	2	Прен В. А. Феддерсъ. .	

№	ПРЕДМЕТЪ	Курсъ	Число часовъ въ I-мъ полуг.	Число часовъ въ II-мъ полуг.	ЛЕКТОРЪ	Примѣчаніе
18	Дороги	III	—	3	Преп. А. Л. Васютынскій.	
19	Мосты	III	—	4	Преп. П. П. Рышковъ. .	
20	Гидротехника . . .	III	3	3	Проф. В. I. Дейчъ . . .	
21	Политич. экономія. .	II	—	2	Преп. П. И. Иванюковъ .	Совм. съ мех. отд.
22	Статистика	II	—	1		

2. *Необязательные предметы.*

1	Теорія упругости. .	III	2	—	Проф. П. О. Сомовъ ,	Совм. съ мех. отд.
2	Теорія вѣроятностей	II	1	1	Преп. В. Э. Эренфейхтъ.	Совм. съ мех. отд.
3	Проективная геометр.	II	2	2	Преп. И. Р. Брайцевъ. .	Совм. съ мех. отд.
4	Нѣмецкій языкъ . .	I	3	3	Преп. О. Ѳ. Базинеръ .	Совм. съ мех. и хим. отд.
5	Французскій языкъ .	I	3	3	Преп. К. А. Неру . . .	

II. Упражненія по теоретическимъ предметамъ, практическія занятія въ чертежныхъ, лабораторіяхъ, кабинетахъ и проектированіе.

1. Упражненія по *математикѣ*,—по курсу алгебры и аналитической геометріи происходили на I курсѣ въ 1-омъ полугодіи въ числѣ одного часа въ недѣлю, во 2-мъ—въ числѣ двухъ часовъ въ недѣлю съ раздѣленіемъ студентовъ на 3 группы подъ руководствомъ преподавателя *И. Р. Брайцева.* По курсу I части дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія — въ 1-омъ полугодіи одинъ часъ въ недѣлю, во 2-омъ полугодіи—два часа въ недѣлю; по II части дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія—въ обоихъ полугодіяхъ въ числѣ одного часа въ недѣлю, съ раздѣленіемъ, въ обоихъ случаяхъ, студентовъ на 3 группы; руководство занятіями было поручено преподавателю *Д. Д. Мордухай - Болтовскому.* Упражненія по всѣмъ курсамъ математики состояли въ разъясненіи излагаемаго на лекціяхъ и въ рѣшеніи задачъ, относящихся къ курсамъ.

2. Упражненія по *начертательной геометріи* происходили подъ руководствомъ преподавателя *Э. В. Глясса* въ обоихъ полугодіяхъ I курса въ числѣ одного часа въ недѣлю при раздѣленіи студентовъ на 3 группы. Въ первомъ полугодіи студенты рѣшали задачи у классной доски, относящіяся до первой части курса (пересѣченія плоскостей между собой и съ прямыми линіями, опредѣленіе разстояній между прямыми и составленіе проекцій многогранниковъ); во второмъ полугодіи упражненія перенесены въ чертежныя, гдѣ студенты составляли эпюры по болѣе сложнымъ заданіямъ (опредѣленіе элементовъ мно-

ногранниковъ, плоскія сѣченія и пересѣченія ихъ—первый листъ и пересѣченія и развертка цилиндровъ и коническихъ поверхностей, а также задачи на построеніе поверхностей вращенія—второй листъ).

3. Упражненія по *теоретической механикѣ* состояли въ разъясненіи читаемаго курса и въ рѣшеніи задачъ, относящихся непосредственно къ курсу. На I курсѣ, въ 1-омъ полугодіи упражненія происходили въ числѣ одного часа въ недѣлю, а во 2-омъ полугодіи въ числѣ двухъ часовъ въ недѣлю, съ раздѣленіемъ студентовъ въ обоихъ случаяхъ на 3 группы; упражненія происходили подъ руководствомъ преподавателя *Д. А. Гонтарева.* На II курсѣ въ обоихъ полугодіяхъ упражненія происходили въ числѣ двухъ часовъ въ недѣлю съ раздѣленіемъ студентовъ на 3 группы, но во 2-омъ полугодіи руководилъ занятіями преподаватель *И. Ѳ. Чорба.*

4. Упражненія по *курсу сопротивленія матеріаловъ* происходили въ обоихъ полугодіяхъ при одномъ годовомъ часѣ съ 3-мя группами студентовъ II-го курса, подъ руководствомъ профессора *И. Ѳ. Юпатова* и состояли въ рѣшеніи задачъ и выясненіи прочитаннаго имъ на лекціяхъ курса.

5. Упражненія по *строительной механикѣ* на II курсѣ велись подъ руководствомъ преподавателя *Г. Я. Маркова* въ числѣ двухъ годовыхъ часовъ съ раздѣленіемъ студентовъ на 2 группы. Упражненія заключались въ рѣшеніи задачъ по прочитаннымъ на лекціяхъ частямъ курса. Каждый студентъ получалъ отдѣльное заданіе, дѣлалъ разсчеты и затѣмъ вычерчивалъ свою задачу. Всего было 5 задачъ.

6. Упражненія по *графической статикѣ* для студентовъ III курса происходили подъ руководствомъ профессора *С. А. Заборовскаго* при одномъ годовомъ часѣ, съ раздѣленіемъ студентовъ на 2 группы. Упражненія состояли въ графическихъ опредѣленіяхъ по способамъ Кульмана и Мора моментовъ второго порядка и въ изслѣдованіяхъ вліянія подвижной нагрузки на величины изгибающихъ моментовъ и поперечныхъ силъ въ сѣченіяхъ прямой балки.

7. Практическія занятія по *физикѣ* происходили подъ руководствомъ преподавателя *В. А. Бернацкаго* въ числѣ 3 годовыхъ часовъ съ раздѣленіемъ студентовъ на 2 группы и состояли въ рѣшеніи различныхъ задачъ въ физической лабораторіи. Подробный перечень предложенныхъ задачъ см. на стр. 13—15.

8. Практическія занятія по *геодезіи* происходили подъ руководствомъ преподавателя *В. Э. Эренфейхта* въ геодезическомъ кабинетѣ для студентовъ I курса во 2-омъ полугодіи въ числѣ двухъ часовъ въ недѣлю. Эти занятія состояли въ изученіи теоріи инструментовъ и рѣшеніи нѣкоторыхъ задачъ (изслѣдованіе компенсаціоннаго теодолита, изслѣдованіе погрѣшности астролябій и нивеллировъ, опредѣленіе горизонтальныхъ угловъ по тремъ методамъ, рѣшеніе задачи Потенота, измѣ-

реніе площадей на планѣ). Независимо отъ положенныхъ часовъ студенты занимались въ кабинетѣ во второй половинѣ 2-го полугодія ежедневно по вечерамъ.

Въ іюнѣ мѣсяцѣ, въ теченіе 3-хъ недѣль, студенты, выдержавшіе переходныя испытанія съ I на II курсъ, выполняли геодезическую практику въ окрестностяхъ посада Гродискъ подъ руководствомъ преподавателей В. Э. Эренфейхта и К. Е. Богданова; занятія состояли въ съемкѣ плана, нивеллировкѣ и разбивкѣ закругленій. Въ помощь руководителямъ были приглашены студенты старшихъ курсовъ.

9. Практическія занятія по *рисованію* происходили подъ руководствомъ преподавателя *Э. В. Невядомскаго* на I курсѣ въ числѣ трехъ годовыхъ часовъ съ раздѣленіемъ студентовъ на 3 группы, а на II курсѣ въ числѣ двухъ годовыхъ часовъ, съ раздѣленіемъ студентовъ на 2 группы; студенты исполняли на I курсѣ: рисунки съ моделей геометрическихъ тѣлъ въ возростающей степени трудности, частью въ контурахъ, частью съ прокладкою главныхъ и падающихъ тѣней; послѣдніе рисунки исполнялись съ гипсовыхъ моделей несложныхъ орнаментовъ классическаго и готическаго стилей; на II курсѣ студенты исполняли рисунки съ болѣе сложныхъ орнаментовъ, съ масокъ и бюстовъ. Для студентовъ III курса, въ 1-омъ полугодіи происходили необязательныя занятія по рисованію подъ руководствомъ преподавателя Э. В. Невядомскаго въ числѣ двухъ полугодовыхъ часовъ, а во 2-омъ полугодіи —занятія по акварельному рисованію въ числѣ двухъ полугодовыхъ часовъ подъ руководствомъ преподавателя I. К. Маньковскаго.

10. *Практическія занятія по архитектурному черченію* происходили подъ руководствомъ преподавателя *Л. С. Васильева* въ числѣ трехъ годовыхъ часовъ на I курсѣ, съ раздѣленіемъ студентовъ на 3 группы и въ числѣ двухъ годовыхъ часовъ на II курсѣ, съ раздѣленіемъ студентовъ на 2 группы. На I курсѣ студенты занимались перечерчиваніемъ въ измѣненномъ масштабѣ съ издаваемыхъ Институтомъ образцовъ архитектурныхъ ордеровъ; каждая работа на полулистѣ ватманской бумаги состояла въ исполненіи въ большомъ масштабѣ части ордера и въ меньшемъ масштабѣ всего ордера; всего исполнено каждымъ студентомъ 6 работъ, а именно: 1) Обломы и массы. 2) Тосканскій ордеръ. 3) Греко и Римско-дорич. орд. 4) Греко и Римско-іоническій ордеръ. 5) Римско-коринфскій ордеръ. 6) Комбинація ордеровъ. На II курсѣ работа студентовъ заключалась въ вычерчиваніи архитектурныхъ деталей (двери, окна) и фасадовъ, причемъ допускалась перекомпановка нѣкоторыхъ деталей; всего исполнено каждымъ студентомъ 2 работы на полулистѣ ватманской бумаги.

11. Практическія занятія по *конструктивному черченію* происходили подъ руководствомъ преподавателя *И. В. Короткевича-Ноче-*

внаго въ числѣ трехъ годовыхъ часовъ на I курсѣ, съ раздѣленіемъ студентовъ на 3 группы и въ числѣ двухъ годовыхъ часовъ на II курсѣ, съ раздѣленіемъ студентовъ на 2 группы. На I курсѣ каждый студентъ выполнилъ 4 работы на полулистѣ ватманской бумаги; работы состояли въ перечерчиваніи съ оригиналовъ плана и разрѣза каменнаго и деревяннаго зданій и деталей конструкцій разныхъ частей сооруженій. На II курсѣ занятія заключались въ проектированіи, по эскизамъ, деревянныхъ строительныхъ и мостовыхъ фермъ, а также въ составленіи разрѣзовъ и проектированіи конструктивныхъ деталей деревянныхъ и каменныхъ зданій; всего исполнено каждымъ студентомъ 3 листа чертежей.

12. Практическія занятія по *топографическому черченію* происходили подъ руководствомъ преподавателя *К. Е. Богданова* на I курсѣ въ числѣ одного годоваго часа, съ раздѣленіемъ студентовъ на 3 группы и въ 1-мъ полугодіи II курса въ числѣ одного полугодоваго часа съ раздѣленіемъ студентовъ на 2 группы.

Занятія состояли, въ 1-мъ полугодіи I курса, въ перечерчиваніи оригинала „Условные знаки", во 2-мъ полугодіи, въ рѣшеніи задачъ на планахъ въ горизонталяхъ и штрихахъ (двѣ работы); въ 1-мъ полугодіи II курса студенты упражнялись въ составленіи плана мѣстности въ горизонталяхъ по картоннымъ рельефамъ.

13. Проектированіе по *архитектурѣ* происходило на II и III курсахъ, подъ руководствомъ проф. *Н. К. Толвинскаго* и преп. *В. А. Феддерса,* при двухъ годовыхъ часахъ на II-мъ и трехъ годовыхъ часахъ на III курсахъ, съ раздѣленіемъ студентовъ въ обоихъ случаяхъ на 2 группы. Въ виду того что въ отчетномъ году занятія по архитектурному проектированію вводились впервые, студенты III курса должны были пройти эти занятія по сокращенной программѣ.

Каждый студентъ II курса составилъ слѣдующіе проекты:

1) Проектъ деревянныхъ перилъ для балкона, съ шаблономъ,
2) Проектъ деревянной сторожки,
3) Проектъ павильона съ пристанью.

Студенты III курса составили проекты:

1) Сельской школы,
2) Дома для земскихъ учрежденій,
3) Желѣзнодорожнаго вокзала II-го класса,
4) Часовни.

14. *Проектированіе мостовъ* происходило во 2-мъ полугодіи со студентами III курса при шести часахъ въ недѣлю подъ руководствомъ преподавателей *П. Н. Рышкова* (4 часа) и *К. А. Опенгейма* (2 часа). Занятія состояли въ разсчетѣ и проектированіи конструкцій проѣзжей части и фермъ деревянныхъ мостовъ простыхъ системъ

подъ обыкновенную дорогу, съ ѣздою по верху и проѣзжей части металлическихъ балочныхъ мостовъ съ фермами со сплошною стѣнкою подъ желѣзную дорогу, съ ѣздою по верху, по низу и по срединѣ. Каждый студентъ получалъ отдѣльную задачу на 1-й и 2-й проекты. Въ виду того, что занятія происходили только во 2-мъ полугодіи, многіе студенты не окончили 2-го проекта и имъ разрѣшено было закончить проектъ въ первомъ полугодіи 190¹/₂ уч. года.

Обзоръ преподаванія на химическомъ отдѣленіи.

Въ 1900—1901 уч. году различнаго рода занятія были выполняемы по нижеслѣдующей схемѣ.

I курсъ.

№	ПРЕДМЕТЪ	ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	Число часовъ 1 полуг.	Число часовъ 2 полуг.	Примѣчаніе.
1	Неорганическая химія	Проф. В. А. Солонина.	4	4	
2	Математика . .	Проф. В. А. Анисимовъ.	4	4	
	Практ. занятія по математикѣ . .	Преп. В. Э. Эренфейхтъ	4	4	По 2 ч. для одной группы.
3	Физика	Преп. В. А. Бернацкій.	3	3	Совм. съ мех. и инж.
	Прак. занятія по физикѣ. . . .	Преп. В. А. Бернацкій.	6	6	По 3 ч. для одной группы.
4	Начертательная геометрія. . .	Преп. Э. В. Гляссъ.	2	2	
	Практ. занятія по начертательной геометріи . . .	Преп. Э. В. Гляссъ.	2	2	
5	Кристаллографія	Проф. А. Е. Лагоріо.	1	1	
6	Ботаника . . .	Преп. В. И. Палладинъ	2	2	
	Практ. занятія по ботаникѣ . . .	Преп. В. И. Палладинъ.	4	4	По 2 ч. для одной группы.
7	Техническое черченіе	Преп. В. К. Рофе и В. К. Задарновскій.	4	4	По 2 ч. для одной группы
8	Архитектурное черченіе . . .	Преп. Л. С. Васильевъ.	4	4	По 2 ч. для одной группы.
9	Рисованіе . . .	Преп. Э. В. Невядомскій	3	3	По 1¹/₂ ч. для одной группы

№	ПРЕДМЕТЪ	ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	Число часовъ 1 полуг.	Число часовъ 2 полуг.	Примѣчаніе.
	II курсъ.				
1	Теоретическая механика	Проф. Н. Б. Делоне.	4	—	
2	Прикладная механика	Проф. Н. Б. Делоне.	—	4	
3	Строительное искусство	Проф. Н. А. Кугушевъ.	—	2	Совмѣст. съ III курсомъ.
4	Органич. химія.	Проф. Е. Е. Вагнеръ.	4	4	
5	Сопротивленіе матеріаловъ	Преп. С. А. Заборовскій.	2	2	
6	Физика	Преп. В. А. Бернацкій.	3	3	
7	Минералог. и геологія (съ практическ. занятіями).	Проф. А. Е. Лагоріо.	4	4	
8	Техническое черченіе	Преп. В. К. Рѳфе.	4	4	По 2 ч. для одной группы
	III. курсъ.				
1	Физика и электрохимія	Преп. Г. І. Ерчиковскій.	—	4	
2	Общ. химич. технологія	Преп. І. Г. Богускій.	5	5	
3	Механика прикладная	Проф. Н. Б. Делоне.	2	2	
4	Механическая технологія	Преп. В. К. Задарновскій	3	3	
5	Электротехника	Проф. А. В. Вульфъ.	2	2	
6	Политическая экономія	Преп. Н. Н. Иванюковъ.	2	2	
7	Статистика	Преп. Н. Н. Иванюковъ.	1	1	
8	Проектированіе по заводской архитектурѣ	Проф. Н. К. Толвинскій и преп. В. А. Феддерсъ.	—	6	По 3 ч. для одной группы

Въ 1900—1901 ак. году было открыто 3 курса. Занятія студентовъ на Химическомъ Отдѣленіи происходили во временномъ помѣщеніи Института и поэтому занятія въ лабораторіяхъ не могли итти вполнѣ нормально. Такъ: они велись только по аналитической химіи со студентами II к. и 2 семестра I к. Занятія же по органической химіи, которыя должны были бы происходить на III к., и занятія по физико химіи пришлось отложить до окончанія устройства соотвѣтствующихъ лабораторій въ новомъ помѣщеніи. Всѣ другія практическія занятія велись нормально и заключались въ нижеслѣдующемъ:

1. Занятія по *аналитической химіи* велись подъ руковод-

ствомъ проф. *В. Солонины* со студентами II к. и 2-го семестра I к. по качественному и количественному анализу. Кромѣ того такъ какъ аналитическая лабораторія не существовала въ 1-й годъ открытія Института, и потому студенты настоящаго III к. могли пользоваться ею вмѣсто 3 семестровъ лишь 1 годъ, то они принуждены были заканчивать свои занятія по количественному анализу въ теченіи 1900—1901 ак. года.

2. Занятія по *физикѣ* велись подъ руководствомъ преп. *В. Бернацкаго*. Задачи, предлагаемыя въ физической лабораторіи, состояли: въ измѣреніи длины (микрометрами, дѣлительной машиной, микроскопомъ, зеркальнымъ пріемомъ, катетометромъ, сферометромъ), въ опредѣленіи плотности твердыхъ и жидкихъ тѣлъ (пикнометромъ, гидростатическими вѣсами, ареометрами, вѣсами Жолли), въ опредѣленіи плотности газовъ и паровъ (по методамъ Мейера, Дюма, Гей-Люссака); въ опредѣленіи коэффиціентовъ упругости тѣлъ твердыхъ, поверхностнаго натяженія и коэффиціента внутренняго тренія жидкостей; въ повѣркѣ термометра; въ опредѣленіи температуръ плавленія и кипѣнія; въ опредѣленіи удѣльныхъ теплотъ тѣлъ твердыхъ и жидкихъ и отношенія удѣльныхъ теплотъ газовъ (по методамъ Клемана-Дезорома и Кундта); въ опредѣленіи механическаго эквивалента теплоты (по методу Джауля и Джауля-Ленца); въ опредѣленіи показателей преломленія тѣлъ твердыхъ и жидкихъ (спектрометромъ и рефрактометромъ); въ опредѣленіи фокусныхъ разстояній линзъ и зеркалъ и увеличенія зрительной трубы и микроскопа; въ опредѣленіи длины свѣтовой волны (по градуированной шкалѣ спектроскопа и помощью дифракціонной рѣшотки); въ опредѣленіи вращательной способности тѣлъ твердыхъ (кварца) и жидкихъ (скипидара, растворовъ сахара); въ опредѣленіи сопротивленія проводниковъ (методомъ замѣщенія, дифференціальнымъ гальванометромъ и мостикомъ Уитстона) и измѣненія сопротивленія металловъ съ температурой; въ опредѣленіи и сравненіи электродвижущихъ силъ (между прочимъ и термоэлемента); въ опредѣленіи горизонтальной составляющей земного магнитизма (Тангенсъ-Буссолью съ вольтаметромъ и по методу Гаусса) и магнитнаго наклоненія (буссолью наклоненія и земнымъ индукторомъ).

3. Занятія по *ботаникѣ* велись подъ наблюденіемъ преп. *В. Палладина* и состояли 1) въ микроскопическомъ изслѣдованіи строенія растительной клѣтки, ея включеній, тканей въ примѣненіи къ практикѣ, 2) микроскопическомъ анализѣ главнѣйшихъ веществъ, находящихся въ растеніяхъ и золы растеній, 3) въ знакомствѣ съ главнѣйшими представителями дрожжей, изслѣдованіи грибовъ и бактерій, 4) въ опредѣленіи весеннихъ растеній по „весенней флорѣ“ Маевскаго.

4. Занятія по *начертательной геометріи* велись подъ руковод-

ствомъ преп. *Э. Глясса* и состояли въ разборѣ болѣе трудныхъ отдѣловъ начертательной геометріи, касающихся точки, прямой и плоскости, въ рѣшеніи различныхъ задачъ согласно проходимому курсу и въ черченіи 2-хъ листовъ эпюръ въ среднемъ по 5-ти эпюръ на каждомъ листѣ.

5. Занятія по *математикѣ* велись подъ наблюденіемъ преп. *В. Эренфейхта* и состояли 1) въ повтореніи основъ плоской тригонометріи, 2) въ выводѣ основныхъ формулъ сферической тригонометріи, 3) въ рѣшеніи задачъ по аналитической геометріи и въ повѣркѣ общихъ теоремъ на частныхъ примѣрахъ, 4) въ упражненіяхъ по дифференцированію и интегрированію, 5) въ рѣшеніи задачъ на максимумы и минимумы, 6) въ рѣшеніи задачъ на истинное значеніе неопредѣленныхъ выраженій и на формулы Тейлора и Маклорена.

6. Занятія по *техническому черченію* въ первомъ семестрѣ на I и II к. велись преп. *В. Рофе*, а со второго семестра на I к. переданы преп. *В. Задарновскому*. На I к. работы состояли: 1) въ вычерчиваніи условныхъ обозначеній, 2) въ вычерчиваніи на калькѣ, 3) въ перечерчиваніи образца въ увеличенномъ масштабѣ и двухъ чертежей съ моделей (одинъ въ карандашѣ, другой въ туши). На II к. студенты чертили соединенія трубъ, задвижки и клапаны, арматуру паровыхъ котловъ, болтовыя или клиновыя соединенія (съ разсчетомъ) и цилиндрическую зубчатую передачу (съ разсчетомъ).

7. Занятія по *архитектурному черченію* велись на I к. подъ руководствомъ преп. *Л. Васильева* и состояли изъ слѣдующихъ работъ: 1) обломы и массы, детали карнизовъ и оконъ, 2) небольшое деревянное строеніе (фасадъ, разрѣзъ, планъ и детали конструкцій), 3) каменное зданіе (фасадъ, разрѣзъ и планъ).

8. Занятія по *рисованію* велись подъ руководствомъ преп. *Э. Невядомскаго* и состояли въ рисованіи контуровъ элементарныхъ моделей, представляющихъ собой сочетанія геометрическихъ формъ.

9. Проектированіе по *заводской архитектурѣ* велось подъ наблюденіемъ проф. *Н. Толвинскаго* и преп. *В. Феддерса* и состояло въ выполненіи 2-хъ проектовъ: 1) жилаго дома съ казармами для рабочихъ и 2) ремесленныхъ мастерскихъ.

Экскурсіи.

Въ 1900—1901 уч. году студентами подъ руководствомъ профессоровъ и преподавателей были совершены нижеслѣдующія экскурсіи:

1. Студентами III курса Инженерно-строительнаго Отдѣленія въ числѣ 30 человѣкъ подъ руководствомъ профессора С. А. Заборовскаго и преподавателей П. Н. Рышкова и Г. Я. Маркова на станцію Рѣчицу Полѣсскихъ желѣзныхъ дорогъ для присутствованія при передвижкѣ желѣзнодорожнаго моста на рѣкѣ Днѣпрѣ.

2. Студентами III курса Химическаго Отдѣленія подъ руководствомъ преподавателя І. Г. Богускаго на заводы: жидкой углекислоты Секлюцкаго и Влодаркевича, Дессаускаго газоваго Общества, сѣрной кислоты Кіевскаго и Шольце, Ловичскаго Химическаго Завода и станціи фильтровъ.

3. Студентами IV курса Инженерно-строительнаго Отдѣленія подъ руководствомъ преподавателя П. Н. Рышкова на мостостроительный заводъ Акціонернаго Общества „Рудзкій и К°".

4. Студентами IV курса Механическаго Отдѣленія подъ руководствомъ преп. В. К. Задарновскаго на бумажныя фабрики: Жирардовскую Шейблера, Куницера, Леонгардта и Вилькера.

5. Студентами IV курса Химическаго Отдѣленія подъ руководствомъ преподавателя В. И. Исаева на Люблинскій сахарный заводъ.

6. Студентами III курса Механическаго Отдѣленія подъ руководствомъ преподавателя М. И. Лисянскаго на металлургическій заводъ „Гута Банкова" и на каменноугольныя копи „Графъ Ренардъ".

Личный составъ Института.

Въ 1900—1901 учебномъ году въ личномъ составѣ Института произошли слѣдующія измѣненія:

Назначенъ на должность ординарнаго профессора архитектуры академикъ архитектуры Николай Константиновичъ Толвинскій.

Переведенъ адъюнктъ-профессоръ Ново-Александрійскаго Института Сельскаго Хозяйства и Лѣсоводства Александръ Николаевичъ Кугушевъ на должность экстраординарнаго профессора.

Исполняющій обязанности экстраординарнаго профессора Иванъ Ѳерапонтовичъ Юпатовъ утвержденъ въ занимаемой имъ должности.

Утверждены штатными преподавателями Института: А. Я. Касьминъ, М. И. Лисянскій, И. Ѳ. Чорба, В. К. Задарновскій и В. К. Рофе.

Приглашены преподавать по найму К. Е. Богдановъ, Г. Я. Марковъ, В. А. Феддерсъ, П. Н. Рышковъ, А. Л. Васютыцскій, І. Г. Богускій, Г. I. Ерчиковскій, К. А. Оппенгеймъ, Н. В. Морковинъ, В. А. Брандтъ, Ю. В. Ломоносовъ, В. И. Исаевъ.

Младшій лаборантъ при каѳедрѣ геологіи и минералогіи Д. Н. Соболевъ назначенъ старшимъ лаборантомъ при той же каѳедрѣ.

Вновь назначены на штатныя должности старшихъ лаборантовъ: В. И. Брыкнеръ, А. Н. Бѣляевъ; на штатныя должности младшихъ лаборантовъ: Н. А. Прилежаевъ, К. Л. Ганъ, Н. А. Линниченко, Е. Е. Вагнеръ и по вольному найму М. В. Пожарискій.

Назначенъ на третью должность помощника Инспектора студентовъ Г. А. Стратоновичъ.

Выбыли изъ Института: преподаватели П. И. Добровольскій и В. И. Палладинъ, руководитель практическими занятіями В. Стржембожъ, лаборантъ В. В. Чепинскій.

Въ концѣ отчетнаго года состояли на службѣ въ Институтѣ слѣдующія лица:

Директоръ Института.

1. Ординарный профессоръ минералогіи, докторъ минералогіи и геогнозіи, членъ-корреспондентъ Императорской Академіи Наукъ, дѣйствительный статскій совѣтникъ Александръ Евгеніевичъ Лагоріо.

Ординарные профессоры:

2. По каѳедрѣ теоретической механики—докторъ прикладной математики, заслуженный профессоръ Института, дѣйствительный статскій совѣтникъ Павелъ Осиповичъ Сомовъ.

3. По каѳедрѣ органической химіи—докторъ химіи, дѣйствительный статскій совѣтникъ Егоръ Егоровичъ Вагнеръ, онъ же деканъ химическаго отдѣленія.

4. По каѳедрѣ математики—докторъ чистой математики, статскій совѣтникъ Василій Аѳанасьевичъ Анисимовъ, онъ же деканъ механическаго отдѣленія.

5. По каѳедрѣ математики—докторъ чистой математики, статскій совѣтникъ Георгій Ѳеодосьевичъ Вороной.

6. По каѳедрѣ строительнаго искусства—гражданскій инженеръ, статскій совѣтникъ Викторъ Іосифовичъ Дейчъ, онъ же деканъ инженерно-строительнаго отдѣленія.

7. По каѳедрѣ прикладной механики, докторъ прикладной математики, статскій совѣтникъ Николай Борисовичъ Делоне.

8. По каѳедрѣ архитектуры—академикъ архитектуры, коллежскій совѣтникъ Николай Константиновичъ Толвинскій.

Экстраординарные профессоры:

9. По каѳедрѣ органической химіи—магистръ химіи, коллежскій совѣтникъ Василій Андреевичъ Солонина, онъ же секретарь Совѣта.

10. По каѳедрѣ строительнаго искусства—гражданскій инженеръ, коллежскій секретарь кн. Александръ Николаевичъ Кугушевъ, онъ же секретарь инженерно-строительнаго отдѣленія.

11. По каѳедрѣ практической механики (детали машинъ) кандидатъ математическихъ наукъ инженеръ-технологъ, адъюнктъ Института, надворный совѣтникъ Иванъ Ѳерапонтовичъ Юпатовъ, онъ же секретарь механическаго отдѣленія.

И. об. экстраординарнаго профессора:

12. По каѳедрѣ строительнаго искусства (по отдѣлу строительной механики и графической статики)—военный инженеръ, надворный совѣтникъ Сергѣй Александровичъ Заборовскій.

13. По каѳедрѣ электротехники, кандидатъ физико-математическихъ наукъ, статскій совѣтникъ Александръ Викторовичъ Вульфъ.

14. По каѳедрѣ химической технологіи—технологъ, титулярный совѣтникъ Дмитрій Андреевичъ Хардинъ, онъ же секретарь химическаго отдѣленія.

Штатные преподаватели:

15. По техническому черченію—инженеръ-технологъ, надворный совѣтникъ Станиславъ Антоновичъ Окольскій.

16. Рисованія—классный художникъ I степени, надворный совѣтникъ Элигіушъ Викентіевичъ Невядомскій.

17. Политической экономіи и статистики докторъ политической экономіи, статскій совѣтникъ Иванъ Ивановичъ Иванюковъ.

18. Начертательной геометріи—кандидатъ физико-математическихъ наукъ, статскій совѣтникъ Эдуардъ Владимировичъ Гляссъ.

19. Теоретической механики (руководитель практическими занятіями по теоретической механикѣ)—выдержавшій испытаніе на степень магистра механики, надворный совѣтникъ Дмитрій Андреевичъ Гонтаревъ.

20. Архитектурнаго черченія—гражданскій инженеръ Левъ Степановичъ Васильевъ, онъ же допущенъ временно къ чтенію курса технологіи строительныхъ матеріаловъ.

21. По математикѣ (руководитель практическими занятіями по математикѣ), выдержавшій испытаніе на степень магистра чистой математики, надворный совѣтникъ Дмитрій Дмитріевичъ Мордухай-Болтовской.

22. Рисованія—классный художникъ Іосифъ Константиновичъ Маньковскій.

23. Геодезіи—выдержавшій испытаніе на степень магистра астрономіи и геодезіи, надворный совѣтникъ Викторъ Эмильевичъ Эренфейхтъ.

24. По каѳедрѣ физики—кандидатъ физико-математическихъ наукъ, надворный совѣтникъ Викторъ Адольфовичъ Бернацкій.

25. По математикѣ (руководитель практическими занятіями по математикѣ), выдержавшій испытаніе на степень магистра чистой математики, надворный совѣтникъ Иванъ Романовичъ Брайцевъ.

26. По каѳедрѣ прикладной механики (по курсу паровыхъ котловъ и машинъ), инженеръ-технологъ Александръ Яковлевичъ Касьминъ.

27. Техническаго черченія—инженеръ-механикъ Владиміръ Константиновичъ Рофе, онъ же временно допущенъ къ чтенію курсовъ „мукомольныя мельницы“ и „сельско-хозяйственныя машины и орудія“.

28. По курсу механической технологіи—инженеръ-технологъ Михаилъ Ивановичъ Лисянскій.

29. По курсу гидравлики и гидравлическихъ двигателей кандидатъ физико-математическихъ наукъ Иванъ Ѳеодосьевичъ Чорба.

30. По курсу технологіи волокнистыхъ веществъ, инженеръ-технологъ Вячеславъ Карловичъ Задарновскій.

Временные преподаватели:

31. По нѣмецкому языку—магистръ классической филологіи, ординарный профессоръ Императорскаго Варшавскаго Университета Оскаръ Ѳедоровичъ Базинеръ.

32. По французскому языку—баккалавръ филологическихъ наукъ, надворный совѣтникъ Карлъ Андреевичъ Неру.

33. По конструктивному черченію—военный инженеръ Николай Владиміровичъ Коротkевичъ Ночевной, онъ же допущенъ временно по найму къ чтенію лекцій по строительному искусству и архитектурѣ.

34. По сопротивленію матеріаловъ—технологъ, коллежскій секретарь Валентинъ Ивановичъ Мейеръ.

35. По топографическому черченію—военный топографъ Константинъ Евграфовичъ Богдановъ.

36. По строительной механикѣ (руководитель практическими занятіями по строительной механикѣ), инженеръ путей сообщенія Григорій Яковлевичъ Марковъ.

37. По архитектурѣ (руководитель практическими занятіями по составленію архитектурныхъ проектовъ), классный художникъ первой степени Вальдемаръ Александровичъ Феддерсъ.

38. По отдѣлу мостовъ—инженеръ путей сообщенія Павелъ Никифоровичъ Рышковъ.

39. По отдѣлу дорогъ—инженеръ путей сообщенія, адъюнктъ Института Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I, Александръ Леонардовичъ Васютынскій.

40. По курсу химической технологіи—кандидатъ физико-математическихъ наукъ Іосифъ Генриховичъ Богускій.

41. По физико-химіи и электро-химіи—кандидатъ естественныхъ наукъ Георгій Іосифовичъ Ерчиковскій.

42. Руководитель практическими занятіями по проектированію мостовъ, инженеръ путей сообщенія Константинъ Александровичъ Оппенгеймъ.

43. По ботаникѣ—магистръ ботаники, титулярный совѣтникъ Николай Васильевичъ Морковинъ.

44. Руководитель проектированіемъ по архитектурѣ—гражданскій инженеръ Владиміръ Александровичъ Брандтъ.

45. По курсу паровозовъ—инженеръ-путей сообщенія Юрій Владиміровичъ Ломоносовъ.

46. По курсу дрожжей и технологіи углеводовъ—кандидатъ естественныхъ наукъ Владиміръ Ивановичъ Исаевъ.

Штатные лаборанты старшіе:

47. При каѳедрѣ органической химіи—магистръ фармаціи, коллежскій ассесоръ Казиміръ Станиславовичъ Славинскій.

48. При каѳедрѣ неорганической химіи, окончившій курсъ наукъ по естественному отдѣленію физико-математическаго факультета Императорскаго С.-Петербургскаго университета, коллежскій ассесоръ Николай Николаевичъ Нагорновъ.

49. При каѳедрѣ неорганической химіи—кандидатъ физико-математическихъ наукъ, коллежскій ассесоръ Ѳаддей Игнатьевичъ Милобендзкій.

50. При каѳедрѣ физики—кандидатъ физико-математическихъ наукъ, коллежскій ассесоръ Александръ Петровичъ Поспѣловъ.

51. При ботаническомъ кабинетѣ, выдержавшій испытаніе на степень магистра ботаники, коллежскій ассесоръ Александръ Ѳедоровичъ Флеровъ.

52. При каѳедрѣ геологіи и минералогіи—кандидатъ физико-математическихъ наукъ, коллежскій ассесоръ Дмитрій Николаевичъ Соболевъ.

53. При каѳедрѣ органической химіи—провизоръ Вацлавъ Никодемъ (2-хъ именъ) Іосифовичъ Брикнеръ.

54. При каѳедрѣ общей химической технологіи окончившій курсъ наукъ въ Императорскомъ С.-Петербургскомъ университетѣ съ дипломомъ первой степени Александръ Никандровичъ Бѣляевъ.

Штатные лаборанты младшіе:

55. При каѳедрѣ органической химіи—кандидатъ физико-математическихъ наукъ Николай Александровичъ Прилежаевъ.

56. При каѳедрѣ химической технологіи (красильныя вещества)—инженеръ-технологъ Карлъ Людвиговичъ Ганъ.

57. При каѳедрѣ физики—кандидатъ физико-математическихъ наукъ Николай Антоновичъ Линниченко.

58. При каѳедрѣ органической химіи, окончившій по первому разряду естественное отдѣленіе физико-математическаго факультета Императорскаго Казанскаго университета Егоръ Егоровичъ Вагнеръ.

Временные лаборанты:

59. При каѳедрѣ электротехники—инженеръ-технологъ Мечиславъ Владиславовичъ Пожарискій.

60. Стипендіатъ Института, технологъ, Василій Пафнутьевичъ Круссеръ, командированный въ Россію и за границу для подготовленія къ преподавательской дѣятельности по каѳедрѣ металлургіи.

Инспекція.

61. Инспекторъ студентовъ, окончившій курсъ наукъ по юридическому факультету Императорскаго Варшавскаго университета, статскій совѣтникъ Константинъ Николаевичъ Капустинъ.

62. Помощникъ инспектора, окончившій курсъ наукъ по юридическому факультету Императорскаго Московскаго университета, коллежскій ассесоръ Иванъ Андреевичъ Максименко.

63. Помощникъ инспектора, надворный совѣтникъ Василій Ивановичъ Голоскевичъ.

64. Помощникъ инспектора, окончившій курсъ наукъ по физико-математическому факультету Императорскаго Варшавскаго университета коллежскій ассесоръ Григорій Александровичъ Стратоновичъ.

Библіотека.

65. Библіотекарь, титулярный совѣтникъ Евгеній Наркисовичъ Добржинскій.

66. Помощникъ Библіотекаря, коллежскій ассесоръ Георгій Өеодосьевичъ Чайковскій.

Канцелярія.

67. Дѣлопроизводитель, окончившій юридическій факультетъ Императорскаго университета Св. Владиміра въ Кіевѣ, коллежскій ассесоръ Василій Осиповичъ Конашинскій.

68. Бухгалтеръ Людовикъ Яковлевичъ Радзивановскій.

69. Помощникъ Бухгалтера, коллежскій секретарь Александръ Андреевичъ Терещенко.

70. и. д. Помощника Дѣлопроизводителя Өома Елеазаровичъ Малицкій.

Хозяйственная часть.

71. Смотритель зданій, губернскій секретарь Леонидъ Михайловичъ Киткинъ.

Пріемный покой.

72. Врачъ Института—лекарь Богданъ Конрадовичъ Корыбутъ-Дашкевичъ.

73. Фельдшеръ Сигизмундъ Карловичъ Зярекъ.

Такимъ образомъ число лицъ, состоявшихъ на службѣ въ Институтѣ въ концѣ 1900—1901 уч. года, было слѣдующее:

Директоръ	1
Ординарныхъ профессоровъ	7
Экстраординарныхъ профессоровъ	3
Штатныхъ преподавателей	19
Временныхъ преподавателей	16
Лаборантовъ старшихъ	8
Лаборантовъ младшихъ	4
Временныхъ лаборантовъ	2
Инспекторъ	1
Его помощниковъ	3
Библіотекарь	1
Его помощникъ	1
Дѣлопроизводитель	1
Его помощникъ	1
Бухгалтеръ	1
Его помощникъ	1
Смотритель зданій	1
Врачъ	1
Фельдшеръ	1
Всего . . .	73

Совѣтъ Института.

Предсѣдатель—Директоръ Института, члены—ординарные и экстраординарные профессоры. Секретарь Совѣта—профессоръ В. А. Солонина.

Засѣданій Совѣта въ отчетномъ году было 14.

Въ составъ собранія соединенныхъ Отдѣленій, засѣданій коего было за отчетное время 3, входятъ всѣ профессоры соотвѣтствующихъ отдѣленій подъ предсѣдательствомъ Директора Института. Протоколы засѣданій ведутся по очереди секретаремъ Совѣта и секретарями отдѣленій.

Правленіе Института.

Правленіе, имѣя въ своемъ завѣдываніи главнымъ образомъ имущество и хозяйственныя дѣла Института, а также студенческія дѣла, состоитъ подъ предсѣдательствомъ Директора А. Е. Лагоріо изъ Декановъ

Отдѣленій: 1) химическаго—Е. Е. Вагнера, 2) механическаго—В. А. Анисимова, 3) инженерно-строительнаго—В. І. Дейчъ и инспектора студентовъ К. Н. Капустина. Въ составъ Правленія при разсмотрѣніи вопросовъ, указанныхъ въ § 77 Устава Института, приглашаются три члена, извѣстныхъ своею дѣятельностью на поприщѣ промышленности въ губерніяхъ Царства Польскаго, назначенныхъ Варшавскимъ Генералъ-Губернаторомъ: Баронъ Леопольдъ Леопольдовичъ Кроненбергъ, Графъ Феликсъ Викторовичъ Чацкій и Мануфактуръ Совѣтникъ Юлій Яковлевичъ Куницеръ. Секретаремъ Правленія состоитъ Дѣлопроизводитель Института В. О. Копашинскій. Засѣданій Правленія въ отчетномъ году было 39.

Командировки.

Въ теченіе отчетнаго времени были командированы съ научной цѣлью какъ въ Россію, такъ и за границу слѣдующія лица:

1. Старшій лаборантъ К. С. Славинскій—за границу съ научной цѣлью, съ 20 Марта по 1 Сентября 1901 г.

2. Преподаватель В. К. Рофе—за границу для ознакомленія съ постановкою преподаванія техническаго черченія въ высшихъ техническихъ учебныхъ заведеніяхъ Германіи и Швейцаріи, а также съ постановкою преподаванія земледѣльческихъ машинъ и орудій и мукомольныхъ мельницъ, съ 10 Мая по 20 Августа 1901 г.

3. Преподаватель М. И. Лисянскій—на русскіе заводы съ научной цѣлью, съ 5 Іюня по 20 Августа 1901 г.

4. Преподаватель В. К. Задарновскій—на русскія фабрики съ научной цѣлью, съ 5 Іюня по 20 Августа 1901 г.

5. Преподаватель Л. С. Васильевъ во внутрь Россіи съ научной цѣлью, съ 10 Мая по 20 Августа 1901 г.

6. Профессоръ Н. Б. Делоне—за границу съ научной цѣлью, съ 5 Іюня по 20 Августа 1901 г.

7. Старшій лаборантъ К. П. Поспѣловъ за границу съ научною цѣлью съ 20 Мая по 20 Августа 1901 г.

8. Библіотекарь Института Е. Н. Добржинскій—за границу съ цѣлью ознакомленія съ устройствомъ библіотекъ въ высшихъ техническихъ учебныхъ заведеніяхъ Германіи и Швейцаріи, съ 1 Іюня по 20 Августа 1901 г.

9. Профессоръ В. І. Дейчъ—во внутрь Россіи преимущественно въ Оренбургскій край для изслѣдованія степей въ ирригаціонномъ отношеніи, съ 10 Іюня по 20 Іюля 1901 г.

10. Младшій лаборантъ К. Л. Ганъ—за границу съ научной цѣлью, съ 1 Іюня по 20 Августа 1901 г.

11. Преподаватель I. Г. Богускій—на выставку въ Глазго, съ 1 Іюня по 20 Августа 1901 г.

12. Профессоръ А. В. Вульфъ—на русскіе электротехническіе заводы, съ 1 Іюня по 20 Августа 1901 г.

13. Преподаватель И. Ѳ. Чорба—въ губерніи Привислинскаго края для ознакомленія съ заводскою промышленностью, съ 1 Іюня по 20 Августа 1901 г.

Научные труды лицъ преподавательскаго персонала.

Проф. *П. О. Сомовъ.* „О нѣкоторыхъ приложеніяхъ кинематики измѣняемыхъ тѣлъ къ шарнирнымъ механизмамъ“ Варш. Унив. Изв. 1900 VII и Zeitschrift f. Math. u. Phys. B. 46, Lief. 1 u. 2.

Проф. *Е. Е. Вагнеръ* сообща съ *В. I. Брыкнеромъ.* „Bornylen, ein neues Terpen“ Berichte der Deutschen Chem. Gesellschaft.

Проф. *Н. Б. Делоне.* 1) „О кинематическомъ вычислителѣ эллиптическихъ функцій“. Труд. Физ. Отд. Общ. Любит. Ест. т. XI. 2) „Графическое построеніе эллиптическихъ и нѣкоторыхъ ультраэллиптическихъ функцій“. Мат. Сборн. т. XXIII.

Проф. *Кн. А. П. Кугушевъ.* „Водопроводъ и водостоки Ново-Александрійскаго Института“. Записки того же Института.

Проф. *А. В. Вульфъ.* „Къ теоріи уравнительныхъ проводовъ“. Изв. Варш. Пол. Инст. 1901. II.

Проф. *Д. А. Хардинъ.* Нѣсколько статей по циклическимъ соединеніямъ въ энциклопедическомъ словарѣ.

Преп. *В. К. Рофе.* „Значеніе интенсивной обработки почвы и другихъ пріемовъ земледѣльческой техники“. Изв. Варш. Пол. Инст. 1901. I.

Преп. *В. Э. Эренфейхтъ.* „Oppositions-Ephemeride d. Pl. Hermentaria. 1901“. Veröffentlichungen d. K. astron. Recheninstitut zu Berlin № 15.

Преп. *О. Ѳ. Базинеръ.* 1) „Ludi saeculares. Древнеримскія секулярныя игры. Историко-филологическое изслѣдованіе. Варшава, 1901. 2) „Новыя пріобрѣтенія кабинета гипсовыхъ фигуръ, состоящаго при Варшавскомъ Университетѣ“. Варш. Дневникъ 1901.

Преп. *В. И. Исаевъ.* „Kleine Mittheilung über Enzyme“ Zeitschrift für gesammte Brauwesen. 1900.

Преп. *К. А. Оппенгеймъ.* Опредѣленіе прогибовъ въ прямолинейныхъ брусьяхъ при помощи втораго веревочнаго многоугольника“. Изв. Варш. Пол. Инст. 1901. II.

Лабор. *А. П. Постѣловъ.* 1) „Жидкій воздухъ" 2) „Цвѣтная фотографія по способу Липмана".

Лабор. *Д. Н. Соболевъ.* „Фауна древнѣйшихъ средне-девонскихъ отложеній Ц. Польскаго". Прот. Варш. Общ. Естеств.

Учащіеся въ Институтѣ.

Результаты конкурсныхъ испытаній.

Съ 1 Іюля 1900 года начался пріемъ прошеній отъ лицъ, желающихъ поступить въ Институтъ; предѣльный срокъ подачи прошеній былъ назначенъ 1-го Августа того же года. Къ этому времени поступило 646 прошеній въ томъ числѣ отъ 24 лицъ, имѣющихъ право быть принятыми въ число студентовъ безъ конкурса, какъ окончившихъ полный курсъ другихъ высшихъ учебныхъ заведеній, или выдержавшихъ успѣшно полукурсовыя испытанія въ университетахъ. Изъ числа такихъ лицъ зачислено Правленіемъ на старшіе курсы 14 человѣкъ, а именно: на Механическое отдѣленіе—6 человѣкъ, Инженерно-строительное отдѣленіе—3 человѣка и Химическое отдѣленіе 5 человѣкъ.

Изъ числа подавшихъ прошенія приступило къ экзаменамъ только 454 человѣка, изъ нихъ евреевъ 127.

Экзаменовалось до конца всѣхъ экзаменовъ 422 человѣка (въ томъ числѣ евреевъ 114 человѣкъ); удовлетворило условіямъ конкурса 277 человѣкъ, изъ нихъ зачислено въ студенты Института на I курсъ: Механическаго отдѣленія—104 человѣка, Инженерно-строительнаго отдѣленія—83 и Химическаго отдѣленія 52, всего 239 человѣкъ. Кромѣ того по ходатайству Правленія предъ Г. Министромъ Финансовъ было разрѣшено принять сверхъ комплекта еще 40 человѣкъ, находящихся въ равныхъ условіяхъ по результатамъ конкурса съ принятыми, но изъ числа этихъ лицъ не всѣ были зачислены по недостатку мѣста въ Институтѣ.

Распредѣленіе учащихся по отдѣленіямъ, курсамъ, вѣроисповѣданіямъ, сословіямъ и пр.

	Отдѣленія: Механическое I	II	III	Инженерно-строит. I	II	III	Химическ. I	II	III	Итого I	II	III	Всего
Состояло на лицо къ 1-му января 1900 г.	102	92	—	108	49	—	62	48	—	272	189	—	461
Въ теченіе 1900 года . . .													
выбыло.	45	30	2	60	32	1	23	16	3	128	78	6	212
поступило . . .	111	61	3	106	22	—	63	22	—	280	105	3	388
Въ томъ числѣ оставшихся на 2-ой годъ на курсѣ . . .	28	30	—	32	15	—	12	12	—	72	57	—	129
Переведено на старшіе курсы.	—	57	62	—	48	30	—	39	35	—	144	127	271
Состояло на лицо къ 1-му января 1901 года	111	118	63	106	57	29	63	58	32	280	233	124	637
Распредѣленіе учащихся:													
А) по вѣроисповѣданію:													
православныхъ	6	5	3	19	7	6	9	10	3	34	22	12	68
римско-католиковъ. . .	99	81	36	56	38	23	40	33	25	195	152	84	431
лютеранъ	5	9	3	6	4	—	3	1	—	14	14	3	31
единовѣрцевъ	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
армяно-григоріанъ. . .	—	—	—	2	—	—	—	—	—	2	—	—	2
іудеевъ	—	22	21	23	7	—	10	14	4	33	43	25	101
англиканск.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
реформатск.	1	1	—	—	1	—	1	—	—	2	2	—	4
караимовъ	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Итого. . .	111	118	63	106	57	29	63	58	32	280	233	124	637
Б) по сословіямъ:													
Дворянъ и сыновей чиновниковъ	78	64	28	53	39	22	36	31	23	167	134	73	374
Почетн. гражд. и купцовъ 1-й гильдіи.	—	2	1	2	—	—	1	3	1	3	5	2	10
Духовнаго званія.	1	—	1	1	—	1	2	—	—	4	—	2	6
Военнаго сословія	—	1	—	2	—	—	—	1	—	2	2	—	4
Мѣщанъ, купцовъ 2-й гильдіи и ремесленниковъ. . . .	27	46	31	48	15	5	21	22	7	96	83	43	222
Крестьянъ . . .	4	4	2	—	2	1	2	1	1	6	7	4	17
Иностранцевъ . .	1	1	—	—	1	—	1	—	—	2	2	—	4
Казаковъ. . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Итого. . .	111	118	63	106	57	29	63	58	32	280	233	124	637

	Отдѣленія. Механическое I	Механическое II	Механическое III	Инженерно-строит. I	Инженерно-строит. II	Инженерно-строит. III	Химическое I	Химическое II	Химическое III	Итого I	Итого II	Итого III	Всего
В. По образованію, полученному ими до поступленія въ Институтъ													
Окончившихъ полный курсъ въ университетахъ и другихъ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ: (въ томъ числѣ выдержавшихъ полное полукурсовое испытаніе на физико-математическомъ факультетѣ университетовъ)	2	10	3	3	4	4	3	7	5	8	21	12	41
Въ гимназіяхъ	69	62	31	34	28	14	33	24	16	136	114	61	311
„ реальныхъ училищахъ съ дополнительнымъ классомъ	33	43	26	62	21	10	19	21	9	114	85	45	244
„ коммерческ. училищахъ	1	—	—	—	—	—	1	2	—	2	2	—	4
„ военно-учеб. заведеніяхъ	1	—	—	—	3	1	—	—	—	1	3	1	5
„ проч. средн. учеб. завед.	4	3	2	5	1	—	6	4	2	15	8	4	27
Выдержавшихъ испытаніе на аттестатъ зрѣлости													
При гимназіяхъ	1	—	1	—	—	—	1	—	—	2	—	1	3
„ реальныхъ училищахъ съ дополнит. класс.	—	—	—	2	—	—	—	—	—	2	—	—	2
Итого	111	118	63	106	57	29	63	58	32	280	233	124	637
Было освобождено отъ платы за слушаніе лекцій:													
въ 1-й половинѣ 1900 года: полностью	9	25	—	7	15	—	7	15	—	23	57	—	80
въ 1-й половинѣ 1900 года: отъ половины	4	14	—	5	5	—	5	8	—	14	27	—	41
во 2-й половинѣ 1900 года: полностью	—	17	29	—	5	15	—	10	22	—	32	66	98
во 2-й половинѣ 1900 года: отъ половины	—	19	12	—	11	3	—	8	—	—	38	15	53

Стипендіи въ Институтѣ въ 1900 году.

Наименованіе стипендій	Сумма назначенная по смѣтѣ Руб.	к.	Число учрежденныхъ стипендій	Размѣръ стипендій въ годъ Руб.	к.	Число стипендіатовъ которые пользовались ими: Въ I полугодіи	Во II полугодіи	ВСЕГО	Примѣчанія
а) Казенныя стипендіи.									
Не было.	—	—	—	—	—	—	—	—	
б) Стипендіи на капиталы, завѣщанные и пожертвованные Институту, составляющіе стипендіальныя средства Института:									
1) имени Дѣйств. Тайнаго Совѣтн. Кербедзя . .	256	50	1	256	50	1	1	1	
2) имени Маріи Янковской	288	80	5	117	80	—	5	5	
в) Капиталы, составляющіе тѣ же специальныя средства Института, но имѣющіе назначеніемъ выдачу пособій.									
Не было.	—	—	—	—	—	—	—	—	
г) Стипендіи отъ разныхъ вѣдомствъ, учрежд. и лицъ:									
1) Отъ Варш. Учебнаго Окр. по записи Кс. Убыша	47	—	1	47	—	1	1	1	
2) Отъ Варш. Учеб. Окр. по записи Сѣраковской. .	450	—	3	150	—	3	3	3	
3) Отъ Варш. Учебнаго Окр. по записи Орденги .	150	—	2	100	—	1	2	2	
4) Отъ Варш. Учеб. Окр. по записи Каминскаго . .	180	—	4	90	—	4	—		
Его-же.	450	—	9	100	—	2	7	14	
Его-же	60	—	2	60	—	—	2		
Его-же	100	—	1	200	—	—	1		
5) Отъ Варш. Уч. Округа по записи Мишкеля . .	60	—	1	120	—	—	1	1	
6) Отъ Варш. Уч. Округа по записи Епископа Карнковскаго	45	—	1	90	—	—	1	1	
7) Отъ Гатчинскаго Сиротскаго Института Императора Николая I. . . .	240	—	2	180	—	1	2	2	
8) Отъ Гос. Контр. стип. им. Статсъ-Секр. Сольскаго	358	06	1	358	06	1	1	1	
9) Отъ Управл. акцизными сборами Варш. и Сѣдл. губ. стипендія имени Дѣйств. Статс. Совѣтн. барона Н. В. Штейнгейля . . .	228	—	1	228	—	1	1	1	
Итого . . .	2913	36							

Денежные обороты Института въ 1900 году.

№№ по порядку	Приходъ денежныхъ средствъ	Изъ поступленій: до отчетнаго года (Рубли)	(копѣйки)	Изъ поступленій: отчетнаго года (Рубли)	(копѣйки)	ИТОГО (Рубли)	(копѣйки)	
	Изъ суммъ Государственнаго Казнач.							
1	На содержаніе Института	—	—	196015	—	196015	—	
2	На усиленіе средствъ Института	—	—	10526	90	10526	90	Въ Извѣстіяхъ 1900 г. I вып. напеч. вмѣсто 10526 руб. 90 к. 10527 р. 90 к.
3	На подготовленіе стипендіатовъ къ профессорскому званію	—	—	18000	—	18000	—	
4	На путевое пособіе и воспитаніе дѣтей . . .	—	—	3490	13	3490	13	
5	Третное жалованье . .	—	—	133	33	133	33	
6	Содержаніе 5-й Повѣрочной Палатки . . .	—	—	5528	—	5528	—	
	Итого изъ суммъ Госуд. Казначейства	—	—	233693	36	233693	36	
7	Поступило отъ студентовъ и вольнослуш. платы за слушаніе лекцій . .	100	—	45275	—	45375	—	
8	а) стипенд. капиталы .	6042	57	15534	20	21576	77	Въ Извѣстіяхъ за 1900 г. I вып. указана сумма 6040 р. 57 к. вмѣсто 6042 руб. 57 к.
	б) получено %% отъ стипенд. капиталовъ . .	—	—	545	30	545	30	
9	Прислано отъ разныхъ лицъ и мѣстъ на выдачу пособій и стипендій студентамъ Института . .	610	91	4945	70	5556	61	
	Стипен. въ пользу студ. Инст., состоящія въ расп. другихъ лицъ и вѣдомствъ.							
10	имени Дѣйств. Статск. Сов. Штейнгейля . . .	6000	—	—	—	6000	—	
	Итого за 1900 годъ . .	12753	48	299993	56	312747	04	

Денежные обороты Института въ 1900 году.

Расходъ денежныхъ средствъ	Сумма расхода		Осталось	
	Рубли и копѣйки			
Изъ суммъ Государственнаго Казначейства.				
На содержаніе личнаго состава профессоровъ, преподавателей и служащихъ	104763	40	—	—
На пособія студентамъ и служащимъ, изъ суммъ Института	7490	—	—	—
На учебно-вспомогательныя учрежденія, учебныя пособія, командировки, лѣтнія занятія и экскурсіи	46814	40	—	—
На пополненіе библіотеки	6500	—	—	—
На отопленіе, освѣщеніе, чистоту, обзаведеніе мебелью и другими принадлежностями общихъ Учрежденій Института и прочіе хоз. расходы . .	33221	90	—	—
На канцелярскіе расходы, содержаніе писцовъ, бланки, печатныя работы, содержаніе прислуги и проч.	7252	20	—	—
На содержаніе пріемнаго покоя.	500	—	—	—
На подготовленіе стипендіатовъ къ профессорскому званію	18000	—	—	—
На путевое пособіе и воспитаніе дѣтей . . .	3490	13	—	—
Въ третное жалованіе	133	33	—	—
На содержаніе 5-й Повѣрочной Палатки. . .	5528	—	—	—
	233693	36	—	—
Внесено въ доходъ Государственнаго Казначейства платы за слушаніе лекцій	45375	—	—	—
а) стипендіальные капиталы	—	—	21576	77
б) выдано стипендій	382	77	162	53
Выдано пособій и стипендій студентамъ Института изъ суммъ присланныхъ разными лицами и мѣстами	3925	97	1630	64
Стипендія выдается непосредственно Варшавско-Сѣдлецкимъ акцизнымъ Управленіемъ стипендіату студенту Института	—	—	6000	—
	283377	10	29369	94

Имущество Института въ началѣ 1901 года.

ПО ИНВЕНТАРЮ:	Къ 1 Января 1901 г. состояло:			
	№№	Предметовъ	На сумму	
			Руб.	к.
Физическаго кабинета	852	1274	23211	02
Минералогическаго кабинета	336	7291	14964	20
Лабораторіи органической химіи	111	412	2902	92
Геодезическаго кабинета	211	265	7452	97
Технической чертежной	722	3163	12699	26
Рисовальной	174	862	2415	33
Кабинета теоретической механики	138	212	2813	18
Музея строительнаго искусства	147	468	1760	30
Ботаническаго кабинета	130	367	3975	63
Смотрителя зданій	226	2356	14902	97
Библіотеки	76	155	1139	99
Канцеляріи	113	198	2886	58
Пріемнаго покоя	34	52	515	85
Лабораторіи неорганической химіи	368	2251	11952	26
Кабинета практической механики	93	514	6414	12
Кабинета гидравлики	7	10	28	56
Всего	3738	19850	110035	14

Кромѣ того въ библіотекѣ Института къ 1 Января 1901 г. состояло на лицо:

	Названій	Томовъ	На сумму	
			Руб.	к.
Книгъ	1717	2337	9990	18
Брошюръ	611	640	309	47
Періодическихъ изданій	207	1684	6428	70
Атласовъ	196	227	1432	74
Справочныхъ книгъ	12	81	334	93
Дублетовъ	28	56	64	85
Итого	2771	5025	18560	87

УЧЕНЫЙ И УЧЕБНЫЙ ОТДѢЛЫ.

О шарнирныхъ сочлененіяхъ съ измѣняемыми элементами.

П. О. Сомова.

Глава I. Присоединеніе подобно-измѣняемой или однородно-измѣняемой системы къ плоскому сочлененному четырехстороннику.

1. Предметъ изслѣдованія. Движеніе *плоской подобно-измѣняемой системы* опредѣляется, какъ извѣстно, движеніемъ *двухъ* ея точекъ, причемъ движеніе каждой изъ нихъ можетъ быть задано произвольно. Поэтому, если присоединить подобно измѣняемую систему какими либо двумя ея точками, M' и M'', къ двумъ различнымъ членамъ шарнирнаго четырехсторонника $A_1\, A_2\, A_3\, A_4$, одинъ членъ котораго, A_4, удерживается неподвижнымъ, то всякая точка M подобно-измѣняемой системы получаетъ опредѣленное движеніе, свойства котораго зависятъ какъ отъ свойствъ даннаго четырехсторонника такъ и отъ способа присоединенія къ нему подобно-измѣняемой системы и положенія точки M относительно точекъ M' и M''. Подобное-же можно сказать и относительно плоской однородно-измѣняемой системы, движеніе которой опредѣляется, какъ извѣстно, движеніемъ *трехъ* ея точекъ, не лежащихъ на одной прямой. Если эту систему тремя ея точками, M', M'', M''', присоединить къ четырехсторонпику такъ, чтобы не всѣ эти точки принадлежали одному и тому-же члену послѣдняго, то всякая четвертая точка M системы будетъ имѣть движеніе, свойства котораго тѣсно связаны со свойствами даннаго четырехсторонника и кромѣ того зависятъ отъ способа, которымъ къ нему присоединена однородно-измѣняемая система.

Для краткости будемъ подобно-измѣняемую систему называть *системою* P, а однородно-измѣняемую систему — *системою* Q; точки M', M'' или M' M'', M''', той или другой системы условимся называть *основными точками* ея.

Извѣстно, что всякая точка M_0 члена A_2, средняго изъ подвижныхъ членовъ четырехсторонника, описываетъ алгебраическую линію σ_0 шестого порядка. Вввду линейной зависимости координатъ точки M системы P или Q отъ координатъ основныхъ ея точекъ, уже напередъ можно ожидать, что линія σ, описываемая точкою M, тоже 6-го порядка и обладаетъ вообще подобными-же свойствами какъ линія σ_0, являясь въ то-же время обобщеніемъ послѣдней. Ниже (§ 6) мы увидимъ точнѣе, что алгебраическій составъ уравненій, опредѣляющихъ линіи σ, при всякихъ способахъ присоединенія системы P или Q къ четырехсторонику, дѣйствительно одинаковъ съ составомъ уравненія линіи σ_0, указаннаго въ общемъ видѣ *Cayley* [1]) и *Roberts*'омъ [2]). Но отличіе состоитъ теперь въ томъ, что присоединеніе системы P или Q позволяетъ ввести въ разсмотрѣніе большее число параметровъ и такимъ образомъ съ большею свободою видоизмѣнять линіи σ, сообразно съ тѣми или другими заранѣе поставленными требованіями. Въ случаѣ обыкновеннаго напередъ заданнаго четырехсторонника все разнообразіе линій σ_0 обусловливается *двумя* параметрами—координатами, опредѣляющими положеніе точки M въ членѣ A_2; при введеніи-же системы P мы можемъ располагать уже *шестью* параметрами: четырьмя координатами, опредѣляющими положенія точекъ M' и M'' въ соотвѣтствующихъ имъ членахъ четырехсторонника, и двумя параметрами, опредѣляющими положенія точки M относительно M' и M''. При введеніи системы Q мы располагаемъ *восемью* параметрами, изъ которыхъ шесть опредѣляютъ положенія основныхъ точекъ M', M'', M''' въ соотвѣтственныхъ членахъ четырехсторонника, а два другіе—положеніе точки M въ самой системѣ Q.

---

[1]) Proceedings of the London Math. Soc. 1872.

[2]) Proceedings of the London Math. Soc. 1875.

Эти соображенія и побуждаютъ обратить вниманіе на соединеніе сочлененнаго четырехсторонника съ подобно-измѣняемою или однородно-измѣняемою системами, предполагая, что эти послѣднія механически осуществлены тоже въ видѣ шарнирныхъ сочлененій. Такія сочлененія подробно разсмотрѣны въ моей статьѣ „О нѣкоторыхъ приложеніяхъ кинематики измѣняемыхъ тѣлъ къ шарнирнымъ механизмамъ“ [1]) и не будутъ поэтому здѣсь снова описываться.

Достиженіе результатовъ, имѣющихъ какое-либо практическое значеніе, здѣсь не будетъ стоять на первомъ планѣ, хотя нѣкоторые результаты такого рода и будутъ указаны (§§ 11, 17, 23, 24); главный-же интересъ представляется въ томъ, что освѣщаются съ новой стороны нѣкоторыя свойства какъ четырехсторонника такъ и указанныхъ выше двухъ измѣняемыхъ системъ.

Примѣчаніе. Присоединеніе къ четырехсторонннку вѣтви, состоящей изъ двухъ *твердыхъ* членовъ, соединенныхъ между собою и съ двумя членами четырехсторонника шарнирами, тоже позволило-бы ввести въ разсмотрѣніе шесть параметровъ вмѣсто двухъ, и притомъ дало-бы механизмъ шестичленный, въ то время какъ присоединеніе системы P даетъ восьмичленный, а системы Q—16-членный и даже 18-членный механизмы. Но линіи, описываемыя точками введенной вѣтви, уже имѣютъ существенныя отличія отъ линій σ_0, и изученіе ихъ приводитъ къ вопросамъ другого рода, которыхъ мы не будемъ разсматривать. Притомъ-же эти линіи уже неоднократно изучались ввиду ихъ значенія для механическаго черченія линій заданнаго вида.

2. Различные виды присоединенія системъ P и Q къ четырехсторонннку. Способы присоединенія этихъ системъ къ четырехсторонннку, при соблюденіи условія, чтобы у всей сочлененной системы оставалась одна степень свободы, могутъ быть различны. Условимся въ слѣдующихъ обозначеніяхъ: основныя точки системы P или Q будемъ обозначать буквой M съ такимъ значкомъ, который указывалъ-бы, въ которомъ изъ членовъ A_1, A_2, A_3, A_4 эта точка находится. Тогда для подобно-измѣняемой системы мы будемъ имѣть слѣдующіе существенно различные случаи:

1) (M_4, M_1), 2) (M_4, M_2), 3) (M_1, M_3), 4) (M_1, M_2);

---

[1]) Варш. Унив. Изв. 1900 г.

а для однородно-измѣняемой системы:

5) (M_4, M_4', M_1), 6) (M_4, M_4', M_2), 7) (M_4, M_1, M_3), 8) (M_4, M_1, M_2), 9) $(M_4, M_1, M_1',)$, 10) (M_4, M_2, M_2'), 11) (M_1, M_2, M_3), 12) (M_1, M_1, M_3), 13) (M_1, M_1', M_2), 14) (M_1, M_2, M_2').

Мы не будемъ впрочемъ разсматривать этихъ всѣхъ случаевъ. Извѣстно, что если въ подобно-измѣняемой системѣ одна точка (M_4) остается неподвижною, то остальныя точки описываютъ линіи между собою подобныя съ пропорціональными скоростями; поэтому въ случаѣ 1-мъ, гдѣ точка M_1 принадлежитъ вращающемуся члену A_1 четырехсторонника, получается круговое движеніе подобно-измѣняемой системы; въ случаѣ 2-мъ всѣ точки этой системы описываютъ линіи, которыя подобны траекторіи точки M_2, принадлежащей среднему изъ подвижныхъ членовъ четырехсторонника.

Въ случаѣ 5-мъ и 6-мъ однородно-измѣняемая система совершаетъ движеніе *сдвига* и траекторіи всѣхъ ея точекъ тоже между собою подобны. Случаи, 9, 10, 12, 13 и 14, въ которыхъ разстояніе между двумя изъ основныхъ точекъ однородно-измѣняемой системы остается постояннымъ, тоже могутъ быть оставлены безъ разсмотрѣнія. Итакъ мы обратимъ вниманіе только на 5 случаевъ а именно:

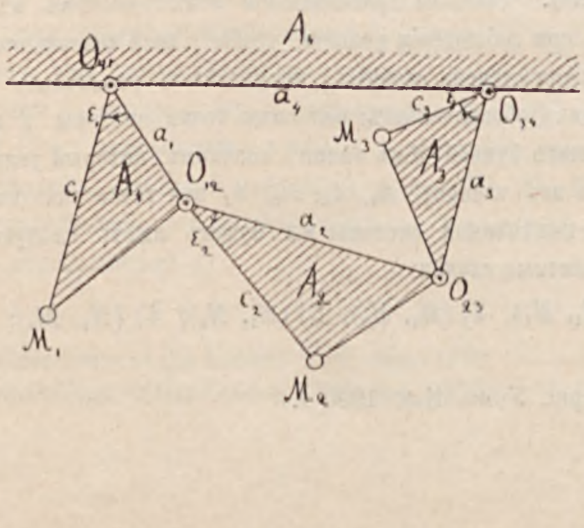
для подобно-измѣняемой системы:

$$\text{I } (M_1, M_3), \quad \text{II } (M_1, M_2)$$

и для однородно-измѣняемой системы:

$$\text{III } (M_4, M_1, M_3), \quad \text{IV } (M_4, M_1, M_2), \quad \text{V } (M_1, M_2, M_3).$$

фиг. 1.



Положеніе каждой основной точки въ соотвѣтственномъ членѣ четырехсторонника будетъ опредѣляться полярными координатами слѣдующимъ образомъ. За координаты точки M_1, принадлежащей члену A_1, возьмемъ

$$c_1 = O_{41}M_1\,, \quad \varepsilon_1 = \angle\, O_{12}O_{41}M_1\,, \tag{1}$$

принимая O_{41} за полюсъ и $O_{41}O_{12}$ за ось полярныхъ координатъ и отсчитывая уголъ ε_1 по часовой стрѣлкѣ отъ прямой $O_{41}O_{12}$.

Для точки M_2 подобнымъ-же образомъ возьмемъ:

$$c_2 = O_{12}M_2\,, \quad \varepsilon_2 = \angle\, O_{23}O_{12}M_2\,, \tag{2}$$

и для точки M_3:

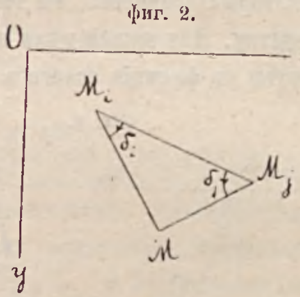
$$c = O_{34}M_3\,, \quad \varepsilon = \angle\, O_{23}O_{34}M_3\,. \tag{3}$$

Кромѣ того, на неподвижной плоскости шарниръ O_4 будетъ приниматься за начало прямоугольныхъ координатныхъ осей а прямая $O_{41}\,O_{34}$ за ось (x), и положеніе точки M_4 будетъ опредѣляться координатами x_4, y_4.

3. **Координаты точекъ системы P или Q въ зависимости отъ основныхъ.** Въ подобно-измѣняемой системѣ P положеніе какой-либо точки $M\,(x, y)$ по отношенію къ двумъ основнымъ точкамъ M_i $(x_i\ y_i)$ и M_j $(x_j\ y_j)$ будемъ опредѣлять углами (фиг. 2).

$$\delta_i = \angle\,(M_j\,M_i\,M) \text{ и } \delta_j = \angle\,(M_i\,M_j\,M). \tag{4}$$

фиг. 2.



Полагая

$$tg\,\delta_i = k_i\,,\ tg\,\delta_j = k_j\,, \tag{5}$$

по условію подобія найдемъ:

$$x = \frac{k_i\,x_i + k_j\,x_j + k_i\,k_j\,(y_i - y_j)}{k_i + k_j}$$

$$y = \frac{k_i\,y_i + k_j\,y_j - k_i\,k_j\,(x_i - x_j)}{k_i + k_j} \tag{6}$$ [1]

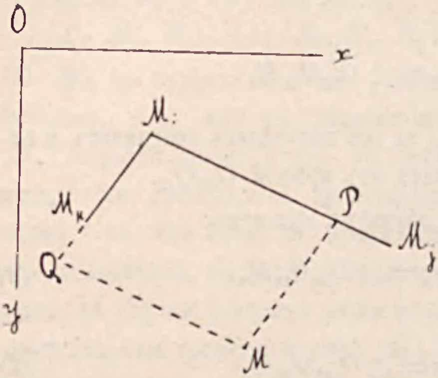
Въ однородно-измѣняемой системѣ положеніе какой-нибудь точки

---

[1]) Эти формулы отличаются перемѣною знака у $k_1\ k_2$ отъ формулъ (1) приведенной выше моей статьи: „О нѣк. прилож. кинем.....“ вслѣдствіе иного отсчитыванія угловъ δ_i и δ_j.

M по отношенію къ тремъ основнымъ M_i, M_j и M_k будемъ опредѣлять отношеніями (фиг. 3):

фиг. 3.



$$m_j = \frac{M_i P}{M_i M_j}, \quad m_k = \frac{M_i Q}{M_i M_k},$$

гдѣ P и Q суть точки пересѣченія прямыхъ, проведенныхъ изъ M параллельно $M_i M_k$ и $M_i M_j$, съ прямыми $M_i M_j$ и $M_i M_k$. Тогда

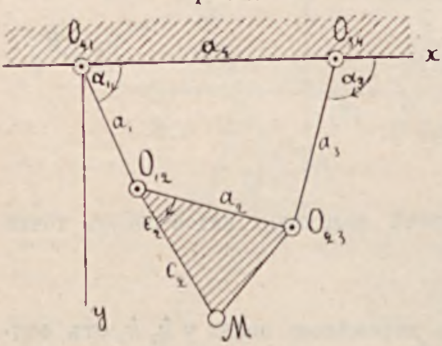
$$\begin{aligned} x &= m_i x_i + m_j x_j + m_k x_k, \\ y &= m_i y_i + m_j y_j + m_k y_k, \end{aligned} \tag{7}$$

при условіи

$$m_i + m_j + m_k = 1. \text{ [1]}. \tag{8}$$

4. Параметры, опредѣляющіе движеніе всей сочлененной системы. Изученіе линій, описываемыхъ различными точками системы P или Q, присоединенной съ четырехсторопнику, непосредственно по уравненіямъ, связывающимъ координаты этихъ точекъ, представляетъ такія-же неудобства, какъ и непосредственное изученіе линій шестого порядка (Koppelkurven), описываемыхъ точками средняго подвижнаго члена самаго четырехсторонника. Имѣя въ виду сдѣлать лишь нѣкоторыя сравненія, мы тѣмъ болѣе можемъ не прибѣгать къ этому средству. Для нашей цѣли нѣтъ даже надобности выражать обѣ координаты въ функціи одного и того-же независимаго параметра, а будетъ проще и удобнѣе выражать эти координаты въ функціи двухъ параметровъ, угловъ α_1 и α_3, образуемыхъ вращающимися членами четырехсторонника съ прямою, соединяющею ихъ центры вращенія, и въ случаѣ надобности принимать во вниманіе существующую между этими углами зависимость.

фиг. 4.



[1]) Подробнѣе, § 8 вышеуказанной статьи.

Означая через a_1, a_2, a_3 a_4, длины членовъ A_1, A_2, A_3, A_4 четырехсторонника, имѣемъ:

$$2\,a_1\,a_4\cos\alpha_1-2\,a_3\,a_4\cos\alpha_3+2\,a_1\,a_3\cos(\alpha_1-\alpha_3)=a_1^2+a_3^2+a_4^2-a_2^2.$$

или

$$g_3\cos\alpha_1-g_1\cos\alpha_3+\cos(\alpha_1-\alpha_3)=n, \tag{9}$$

гдѣ

$$g_1=\frac{a_4}{a_1},\;\; g_3=\frac{a_4}{a_3},\;\; n=\frac{a_1^2+a_3^2+a_4^2-a_2^2}{2\,a_1\,a_3}. \tag{10}$$

5. **Линіи σ_0 и линіи σ.** Въ случаѣ, если точка M принадлежитъ члену A_2 четырехсторонника и ея положеніе въ этомъ членѣ задано координатами c_2, ε_2 (§ 2), то ея Декартовы координаты на неподвижной плоскости относительно осей, имѣющихъ указанное въ § 2 положеніе, выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} x_1&=A\cos\alpha_1+B\sin\alpha_1+C\cos\alpha_3+D\sin\alpha_3+E,\\ y_1&=-B\cos\alpha_1+A\sin\alpha_1-D\cos\alpha_3+C\sin\alpha_3+E', \end{aligned} \tag{11}$$

гдѣ

$$\begin{aligned} A&=\frac{a_1}{a_2}(a_2-c_2\cos\varepsilon_2), & B&=\frac{a_1}{a_2}c_2\sin\varepsilon_2,\\ C&=\frac{a_3}{a_2}c_2\cos\varepsilon_2, & D&=-\frac{a_3}{a_2}c_2\sin\varepsilon_2,\\ E&=\frac{a_4}{a_2}c_2\cos\varepsilon_2, & E'&=\frac{a_4}{a_2}c_2\sin\varepsilon_2. \end{aligned} \tag{12}$$

Если принять во вниманіе, что координаты всѣхъ точекъ всѣхъ трехъ подвижныхъ членовъ четырехсторонника выражаются линейнымъ образомъ черезъ синусы и косинусы угловъ α_1 и α_3, и что координаты (x, y) всякой точки M подобно-измѣняемой или однородно-измѣняемой системы, присоединенной къ четырехсторовнику, выражаются линейнымъ образомъ черезъ координаты основныхъ точекъ, какъ это видно изъ формулъ (6) и (7), то станетъ очевиднымъ, что координаты точки M выражаются тоже линейнымъ образомъ черезъ синусы и косинусы угловъ α_1 и α_3. Если сдѣлать всѣ требуемыя подстановки, то оказывается, что *уравненія* (11) *въ связи съ уравненіемъ* (9) *опредѣляютъ траекторіи всѣхъ точекъ подвижной системы во всѣхъ случаяхъ, будетъ-ли эта система состоять изъ простого четырехсторонника или изъ подобно-измѣняемой или однородно-измѣняемой системы, какимъ-либо образомъ присоединенной къ четырехсторонинку.*

Разница будетъ состоять только въ различномъ значеніи коэффиціентовъ A, B, C, D, E и E'.

Такъ какъ уравненіе траекторіи во всѣхъ случаяхъ получается исключеніемъ угловъ α_1 и α_3 изъ трехъ уравненій (11) и (9), то *линіи* σ *обладаютъ всѣми свойствами линій* σ_0, *являясь притомъ обобщеніями послѣднихъ, такъ какъ ихъ уравненія, при данномъ четырехсторонникѣ, содержатъ большее число параметровъ: 6 или 8 вмѣсто 2,* какъ это уже выяснено въ § 1.

6. Общій видъ уравненія линіи σ. Roberts показалъ [1]), что уравненіе линіи σ_0, т. е. линіи, описываемой точкою, принадлежащею среднему подвижному члену четырехсторонника, имѣемъ видъ

$$M^2 + N^2 = R^2, \tag{13}$$

гдѣ M, N и R цѣлыя функціи третьей степени отъ координатъ, содержащія притомъ многочлены такого вида, что они, будучи приравнены нулю, даютъ уравненія круга. Уравненія линій σ, согласно съ сказаннымъ въ § 5, должны приводится къ подобному же виду. Они легко могутъ быть получены, нѣсколько инымъ путемъ чѣмъ это сдѣлано Робертсомъ, а именно непосредственно изъ формулъ (11) и (9). Положимъ

$$x - E = \xi, \quad y - E' = \eta, \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} A &= \rho_1 \cos\lambda_1, \quad B = \rho_1 \sin\lambda_1, \\ C &= \rho_3 \cos\lambda_3, \quad D = \rho_3 \sin\lambda_3; \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

такъ что

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \rho_1 \cos(\alpha_1 - \lambda_1) + \rho_3 \cos(\alpha_3 - \lambda_3), \\ \eta &= \rho_1 \sin(\alpha_1 - \lambda_1) + \rho_3 \sin(\alpha_3 - \lambda_3), \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

---

[1]) Proceedings of the London Mathem. Soc. 1875.

Отсюда выводимъ:

$$\begin{aligned} \xi \cos(\alpha_1-\lambda_1)+\eta \sin(\alpha_1-\lambda_1) &= \rho_1+\rho_3 \cos[(\alpha_1-\alpha_3)-(\lambda_1-\lambda_3)], \\ \xi \sin(\alpha_1-\lambda_1)-\eta \cos(\alpha_1-\lambda_1) &= \rho_3 \sin[(\alpha_1-\alpha_3)-(\lambda_1-\lambda_3)], \end{aligned} \tag{17}$$

поэтому

$$\xi^2+\eta^2-2\rho_1 \xi \cos(\alpha_1-\lambda_1)-2\rho_1 \eta \sin(\alpha_1-\lambda_1)+\rho_1^2 = \rho_3^2. \tag{18}$$

Изъ тѣхъ-же уравненій (19)

$$\xi \cos(\alpha_1-\lambda_3)+\eta \sin(\alpha_1-\lambda_3) = \rho_1 \cos(\lambda_1-\lambda_3)+\rho_3 \cos(\alpha_1-\alpha_3);$$

а пользуясь зависимостью (9), можно написать:

$$\begin{aligned} \xi \cos(\alpha_1-\lambda_3)+\eta \sin(\alpha_1-\lambda_3) = \rho_1 \cos(\lambda_1-\lambda_3)+n\rho_3-g_3\rho_3 \cos\alpha_1+ \\ +g_1\rho_3 \cos\alpha_3. \end{aligned} \tag{19}$$

Но, по формуламъ (16):

$$\xi \cos\lambda_3-\eta \sin\lambda_3 = \rho_1 \cos[\alpha_1-(\lambda_1-\lambda_3)]+\rho_3 \cos\alpha_3.$$

Умножая это равенство на g_1 и вычитая почленно изъ равенства (19), находимъ:

$$\begin{aligned} \xi \cos(\alpha_1-\lambda_3)+\eta \sin(\alpha_1-\lambda_3)+g_3\rho_3 \cos\alpha_1+g_1\rho_1 \cos[\alpha_1-(\lambda_1-\lambda_3)] \\ = g_1 \xi \cos\lambda_3-g_1 \eta \sin\lambda_3+n\rho_3+\rho_1 \cos(\lambda_1-\lambda_3). \end{aligned} \tag{20}$$

Уравненія (18) и (20) могутъ быть написаны въ видѣ:

$$\begin{aligned} p \cos\alpha_1+q \sin\alpha_1 &= s, \\ p' \cos\alpha_1+q' \sin\alpha_1 &= s', \end{aligned} \tag{21}$$

гдѣ

$$\begin{aligned} p &= 2\rho_1 (\xi \cos\lambda_1-\eta \sin\lambda_1), \\ q &= 2\rho_1 (\sin\lambda_1+\eta \cos\lambda_1), \\ s &= \xi^2+\eta^2+\rho_1^2-\rho_3^2, \\ p' &= \xi \cos\lambda_3-\eta \sin\lambda_3+g_1\rho_1 \cos(\lambda_1-\lambda_3)+g_3\rho_3, \\ q' &= \xi \sin\lambda_3+\eta \cos\lambda_3+g_1\rho_1 \sin(\lambda_1-\lambda_3), \\ s' &= g_1(\xi \cos\lambda_3-\eta \sin\lambda_3)+\rho_1 \cos(\lambda_1-\lambda_3)+n\rho_3. \end{aligned} \tag{22}$$

Исключая изъ уравненій (21) уголъ α_1, находимъ:

$$(p's-ps')^2+(q's-qs')^2 = (qp'-pq')^2. \tag{23}$$

Это уравненіе можно было-бы еще болѣе приблизить къ формѣ Робертса и для случая линіи σ_0 въ точности получить его форму; но на этомъ останавливаться не стоитъ.

7. Пріемъ для отысканія условій, при которыхъ точка системы P или Q описываетъ линію даннаго вида. Дана линія

$$f(x, y) = 0; \tag{24}$$

для того, чтобы какая-либо точка M системы P или системы Q, присоединенной къ четырехсторопнику, описывала эту линію, необходимо, чтобы выраженія (11), подставленныя въ уравненія (24), давали зависимость

$$F(\alpha_1, \alpha_3, A, B, C, D, E, E') = 0, \tag{25}$$

тождественную съ зависимостью (9). Возможность выполненія этого требованія зависитъ отъ того, можно-ли параметры A, B, C, D, E и E', подобрать соотвѣтственнымъ образомъ. При этомъ мы можемъ распоряжаться: 1) длиною членовъ четырехсторонника, 2) положеніемъ въ немъ основныхъ точекъ системы P или Q, 3) положеніемъ точки M относительно основныхъ точекъ. Въ случаѣ невозможности точнаго выполненія вышеуказанныхъ требованій, является задача о возможно маломъ отклоненіи, въ данныхъ предѣлахъ, зависимости (25) отъ зависимости (11). Нужно замѣтить, что указанный пріемъ одинаковымъ образомъ приложимъ и ко всѣмъ вопросамъ о черченіи кривыхъ помощью *простого* четырехсторонника, т. е. безъ присоединенія къ нему системы P или Q.

Не вдаваясь въ настоящей статьѣ въ аналитическое изслѣдованіе указанной выше задачи, мы ограничимся нѣсколькими простѣйшими случаями, въ которыхъ оказывается возможнымъ точное отожествленіе зависимости (25) съ зависимостью (9), имѣя цѣлью сдѣлать лишь нѣсколько сравненій между четырехсторонникомъ въ соединеніи съ системою P или Q и простымъ четырехсторонникомъ.

8. Выраженія для коэффиціентовъ въ формулахъ (11) для пяти перечисленныхъ въ § 2 случаевъ. Вспоминая обозначенія §§ 2, 3 и 4, находимъ:

для случая I:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= c_1 \cos(\alpha_1+\varepsilon_1), & y_1 &= c_1 \sin(\alpha_1+\varepsilon_1), \\ x_3 &= a_4 + c_3 \cos(\alpha_3+\varepsilon_3), & y_3 &= c_3 \sin(\alpha_3+\varepsilon_3), \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{k_1 c_1}{k_1+k_3}(\cos\varepsilon_1 + k_3 \sin\varepsilon_1) = \frac{\sin\delta_1 \cos(\varepsilon_1-\delta_3)}{\sin(\delta_1+\delta_3)} c_1, \\ B &= -\frac{k_1 c_1}{k_1+k_3}(\sin\varepsilon_1 - k_3 \cos\varepsilon_1) = -\frac{\sin\delta_1 \sin(\varepsilon_1-\delta_3)}{\sin(\delta_1+\delta_3)} c_1, \\ C &= \frac{k_3 c_3}{k_1+k_3}(\cos\varepsilon_3 - k_1 \sin\varepsilon_3) = \frac{\sin\delta_3 \cos(\varepsilon_3+\delta_1)}{\sin(\delta_1+\delta_3)} c_3, \\ D &= -\frac{k_3 c_3}{k_1+k_3}(\sin\varepsilon_3 + k_1 \cos\varepsilon_3) = -\frac{\sin\delta_3 \sin(\varepsilon_3+\delta_1)}{\sin(\delta_1+\delta_3)} c_3, \\ E &= \frac{k_3 a_4}{k_1+k_3} = \frac{\cos\delta_1 \sin\delta_3}{\sin(\delta_1+\delta_3)} a_4, \\ E' &= \frac{k_1 k_3 a_4}{k_1+k_3} = \frac{\sin\delta_1 \sin\delta_3}{\sin(\delta_1+\delta_3)} a_4, \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

для случая II:

$$\left.\begin{aligned} & x_1 = c_1 \cos(\alpha_1+\varepsilon_1), \quad y_1 = c_1 \sin(\alpha_1+\varepsilon_1), \\ & x_2 = \frac{a_4}{a_2} c_2 \cos\varepsilon_2 + a_1 \cos\alpha_1 - \frac{a_1}{a_2} c_2 \cos(\alpha_1+\varepsilon_2) + \frac{a_3}{a_2} c_2 \cos(\alpha_3+\varepsilon_2), \\ & y_2 = \frac{a_4}{a_2} c_2 \sin\varepsilon_2 + a_1 \sin\alpha_1 - \frac{a_1}{a_2} c_2 \sin(\alpha_1+\varepsilon_2) + \frac{a_3}{a_2} c_2 \sin(\alpha_3+\varepsilon_2), \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{k_1 c_1 a_2 (\cos\varepsilon_1 + k_2 \sin\varepsilon_1) - k_2 c_2 a_1 (\cos\varepsilon_2 - k_1 \sin\varepsilon_2) + k_2 c_1 a_2}{(k_1+k_2)\, a_2}, \\ B &= \frac{-k_1 c_1 a_2 (\sin\varepsilon_1 - k_2 \cos\varepsilon_1) + k_2 c_2 a_1 (\sin\varepsilon_2 + k_1 \cos\varepsilon_2) - k_1 k_2 a_1 a_2}{(k_1+k_2)\, a_2}; \\ C &= \frac{k_2}{k_1+k_2} \frac{a_3 c_2}{a_2} (\cos\varepsilon_2 - k_1 \sin\varepsilon_2) = \frac{a_3 c_2}{a_2} \frac{\sin\delta_2 \cos(\varepsilon_2+\delta_1)}{\sin(\delta_1+\delta_2)}, \\ D &= -\frac{k_2}{k_1+k_2} \frac{a_3 c_3}{a_2} (\sin\varepsilon_2 + k_1 \cos\varepsilon_2) = -\frac{a_3 c_2}{a_2} \frac{\sin\delta_2 \sin(\varepsilon_2+\delta_1)}{\sin(\delta_1+\delta_2)}, \\ E &= \frac{k_2}{k_1+k_2} \frac{a_4 c_2}{a_2} (\cos\varepsilon_2 - k_1 \sin\varepsilon_2) = \frac{a_4 c_2}{a_2} \frac{\sin\delta_2 \cos(\varepsilon_2+\delta_1)}{\sin(\delta_1+\delta_2)}, \\ E' &= \frac{k_2}{k_1+k_2} \frac{a_4 c_2}{a_2} (\sin\varepsilon_2 + k_1 \cos\varepsilon_2) = \frac{a_4 c_2}{a_2} \frac{\sin\delta_2 \sin_2(\varepsilon_2+\delta_1)}{\sin(\delta_1+\delta_2)}; \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

для случая III:

$x_4\ y_4$ постоянны, x_1, y_1, x_3, y_3 по формуламъ (26),

$$\left.\begin{aligned}
&A = m_1\, c_1 \cos \varepsilon_1, \quad B = -m_1\, c_1 \sin \varepsilon_1,\\
&C = m_3\, c_3 \cos \varepsilon_3, \quad D = -m_3\, c_3 \sin \varepsilon_3,\\
&E = m_4\, x_4 + m_3\, a_4, \quad E' = m_4\, y_4,\\
&m_1 + m_3 + m_4 = 1;
\end{aligned}\right\}\ (30)$$

для случая IV:

x_4, y_4 постоянны, x_1, y_1, x_2, y_2 по формуламъ (28),

$$\left.\begin{aligned}
&A = m_1\, c_1 \cos \varepsilon_1 + m_2 \frac{a_1}{a_2} (a_2 - c_2 \cos \varepsilon_2),\\
&B = -m_1\, c_1 \sin \varepsilon_1 + m_2 \frac{a_1}{a_2}\, c_1 \sin \varepsilon_2,\\
&C = m_2 \frac{a_3}{a_2} c_2 \cos \varepsilon_2, \quad D = -m_2 \frac{a_3}{a^2} c_2 \sin \varepsilon_2,\\
&E = m_2 \frac{a_4}{a_2} c_2 \cos \varepsilon_2 + m_4\, x_4,\\
&E' = m_2 \frac{a_4}{a_2} c_2 \sin \varepsilon_2 + m_4\, y_4,\\
&m_1 + m_2 + m_4 = 1;
\end{aligned}\right\}\ (31)$$

для случая V:

$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ по формуламъ (26) и (28),

$$\left.\begin{aligned}
&A = m_1\, c_1 \cos \varepsilon_1 + m_2 \frac{a_1}{a_2} (a_2 - c_2 \cos \varepsilon_2),\\
&B = m_1\, c_1 \sin \varepsilon_1 + m_2 \frac{a_1}{a_2} c_2 \sin \varepsilon_2,\\
&C = m_2 \frac{a_2}{a_2} c_2 \cos \varepsilon_2 + m_3\, c_3 \cos \varepsilon_3,\\
&D = -m_2 \frac{a_3}{a_2} c_2 \sin \varepsilon_2 - m_3\, c_3 \sin \varepsilon_3,\\
&E = m_2 \frac{a_4}{a_2} c_2 \cos \varepsilon_2 + m_3\, a_4,\\
&E' = m_2 \frac{a_4}{a_2} c_2 \sin \varepsilon_2,\\
&m_1 + m_2 + m_3 = 1.
\end{aligned}\right\}\ (32)$$

9. Изслѣдованіе случаевъ, когда одна изъ точекъ системы P или Q, присоединенной къ четырехсторошнику, остается неподвижною. Формулы (11) показываютъ, что для неподвижности точки M должны быть выполнены условія:

$$\begin{aligned} A\cos\alpha_1+B\sin\alpha_1+C\cos\alpha_3+D\sin\alpha_3&=x-E=const. \\ -B\cos\alpha_1+A\sin\alpha_1-D\cos\alpha_3+C\sin\alpha_3&=y-E'=const. \end{aligned} \tag{33}$$

при всѣхъ значеніяхъ угловъ α_1 и α_3, удовлетворяющихъ зависимости (9).

Если уголъ α_1 не остается постоянно равнымъ углу α_3, то это приводитъ къ требованію:

$$A=0,\ B=0,\ C=0,\ D=0, \tag{34}$$

причемъ мы находимъ для неподвижной точки:

$$x=E,\ y=E'. \tag{35}$$

Если же постоянно

$$\alpha_1=\alpha_3,$$

т. е. четырехсторонникъ представляетъ собою сочлененный параллелограммъ и не обращается во время движенія въ антипараллелограммъ, то достаточно выполненія условій:

$$A+C=0,\ B+D=0. \tag{36}$$

Для обыкновеннаго четырехсторонника требованія (34) или (36) не выполнимы безъ того, чтобы длина одного изъ его членовъ не сдѣлалась равною нулю; но тогда четырехсторонникъ обращается въ неподвижный треугольникъ.

Для случая I, если δ_1 и δ_3 не считать равными нулю, условія (34) приводятъ къ требованіямъ:

$$c_1=0,\quad c_3=0, \tag{37}$$

т. е. къ тому, чтобы точки M_1 и M_3 совпадали съ неподвижными центрами вращенія членовъ A_1 и A_3; но тогда вся подобно-измѣняемая система дѣлается неподвижною. Предположенія

$$\delta_1=0,\quad \delta_3=0 \tag{38}$$

приводятъ къ такимъ-же заключеніямъ; онѣ означаютъ, что точка M лежитъ на прямой $M_1 M_3$. Пусть будетъ,

$$\frac{M_1 M}{M_3 M} = \frac{\mu_1}{\mu_3};$$

тогда вмѣсто формулы (6) имѣемъ:

$$x = \frac{\mu_3 x_1 + \mu_1 x_3}{\mu_1 + \mu_3}, \quad y = \frac{\mu_3 y_1 + \mu_1 y_3}{\mu_1 + \mu_3};$$

а вводя сюда выраженія (26), находимъ:

$$A = \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_3} c_1 \cos \varepsilon_1, \quad B = -\frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_3} c_1 \sin \varepsilon_1,$$

$$C = \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_3} c_3 \cos \varepsilon_3, \quad D = -\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_3} c_3 \sin \varepsilon_3;$$

т. е. требованіе (34) выполняется только при условіи (37).

Отбрасывая предположеніе (38), разсмотримъ теперь условія (36), соотвѣтствующія сочлененному параллелограмму. Они могутъ быть выполнены при сохраненіи подвижности системы P, какъ это и напередъ можно было ожидать по извѣстному свойству „однообразнаго" движенія подобно-измѣняемой системы [1]). Для положенія неподвижной точки въ системѣ P мы находимъ координаты:

$$k_1 = \frac{c_3 \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)}{c_3 \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) - c_1} a_4, \quad k_3 = \frac{c_1 \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)}{c_1 \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) - c_3} a_4,$$

а мѣсто ея на неподвижной плоскости, согласно формуламъ (35), опредѣляется координатами:

$$x = \frac{c_1^2 - c_1 c_3 \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)}{c_1^2 + c_3^2 - 2 c_1 c_3 \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)}, \quad y = \frac{c_1 c_3 \sin(\varepsilon^1 - \varepsilon_3)}{c_1^2 + c_3^2 - 2 c_1 c_3 \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)}.$$

---

[1]) Если двѣ точки плоской подобно-измѣняемой системы двигаются по двумъ подобнымъ линіямъ, занимая на нихъ постоянно соотвѣтственныя положенія, то движеніе системы становится „однообразнымъ" („einförmig" Burmester), т. е. существуетъ неподвижный центръ подобія.

Положенія основныхъ точекъ M_1 и M_3 въ членахъ A_1 и A_3 четырехсторонника могутъ быть при этомъ выбираемы произвольно.

Для случая II получаются подобныя-же заключенія, и мы на нихъ подробнѣе останавливаться не будемъ.

Въ случаѣ III, кромѣ неподвижной основной точки M_4 системы C, тоже другихъ неподвижныхъ точекъ быть не можетъ, если α_1 не равно α_3. Если-же $\alpha_1 = \alpha_3$, то получается неподвижная точка при условіяхъ:

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1, \quad m_1 c_1 + m_3 c_3 = 0$$

или

$$\varepsilon_3 = \pi + \varepsilon_1, \quad m_1 c_1 - m_3 c_3 = 0.$$

Условіе

$$m_1 c_1 \pm m_3 c_3 = 0 \tag{39}$$

показываетъ, что неподвижныхъ точекъ будетъ безчисленное множество: онѣ образуютъ прямую, проходящую черезъ неподвижную основную точку M_4. Очевидно, что въ послѣднемъ случаѣ движеніе однородно-измѣняемой системы состоитъ въ сдвигѣ, основною прямою котораго и служитъ прямая (39).

Случай IV даетъ подобный-же результатъ.

Наибольшаго вниманія заслуживаетъ *случай V. Это единственный случай, когда при всякой формѣ четырехсторонника система Q можетъ быть такъ къ нему присоединена, что одна точка ея, не совпадая ни съ однимъ изъ неподвижныхъ центровъ вращенія, остается неподвижною.* Для этого должны быть выполнены условія:

$$\left.\begin{aligned} m_2 a_1 a_2 + m_1 a_2 c_1 \cos \varepsilon_1 - m_2 a_1 c_2 \cos \varepsilon_2 &= 0,\\ m_1 a_2 c_1 \sin \varepsilon_1 + m_2 a_1 c_2 \sin \varepsilon_2 &= 0,\\ m_2 a_3 c_2 \cos \varepsilon_2 + m_3 a_2 c_3 \cos \varepsilon_3 &= 0,\\ m_2 a_3 c_2 \sin \varepsilon_2 + m_3 a_2 c_3 \sin \varepsilon_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Послѣднія два уравненія требуютъ, чтобы было или

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_2, \quad m_2 a_3 c_2 + m_3 a_2 c_3 = 0$$

или

$$\varepsilon_3 = \pi + \varepsilon_2, \quad m_2 a_3 c_2 - m_3 a_2 c_3 = 0.$$

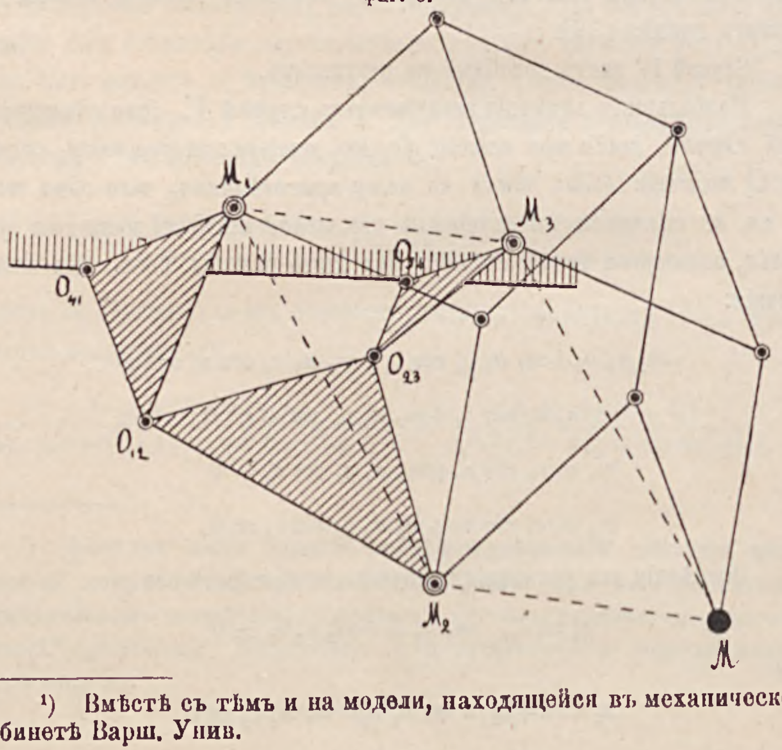
Одна пара этихъ уравненій, первыя два изъ уравненій (40) и зависимость

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1$$

могутъ послужить для опредѣленія пяти изъ числа 9 элементовъ $m_1, m_2, m_3, c_1, \varepsilon_1, c_2, \varepsilon_2, c_3, \varepsilon_3$; такъ-что остается еще широкій просторъ въ расположеніи трехъ основныхъ точекъ системы Q, а въ связи съ этимъ и въ положеніи неподвижной точки M. Замѣчательно, что всѣ эти уравненія не зависятъ отъ a_4, т. е. отъ разстоянія между неподвижными шарнирами четырехсторонника. Положеніе точки M на неподвижной плоскости конечно отъ этого зависитъ; оно опредѣляется выраженіями для E и E' по формуламъ (32).

На чертежѣ [1]) (фиг. 5) взяты: $a_1 : a_2 : a_3 : a_4 = 2 : 3 : 1 : 4$, такъ-что $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$, и слѣдовательно существуетъ точка развѣтвленія въ движеніи четырехсторонника; далѣе $m_1 = -1$, $m_2 = 1$, $m_3 = 1$; такъ-что точки M_1, M_2, M_3 и M суть вершины параллелограмма; наконецъ $\varepsilon_1 = -\pi/2$, $\varepsilon_2 = \pi/4$, $\varepsilon_3 = 5\pi/4$, $c_1 = a_1$, $c_2 = a_2\sqrt{2}$, $c_3 = a_3\sqrt{2}$.

фиг. 5.



[1]) Вмѣстѣ съ тѣмъ и на модели, находящейся въ механическомъ кабинетѣ Варш. Унив.

10. Другая точка зрѣнія на послѣдній результатъ. Плоская однородно-измѣняемая система обладаетъ, какъ извѣстно, шестью степенями свободы; поэтому, если одну точку этой системы сдѣлать неподвижною, то у нея остаются четыре степени свободы, которыми можно распоряжаться различнымъ образомъ, желая сохранить одну степень свободы, и между прочимъ можно или задать траекторіи еще двухъ точекъ и отношеніе между ихъ скоростями или задать траекторіи трехъ точекъ, но тогда уже отношеніе между ихъ скоростями опредѣляется само собою.

Разсмотрѣнное выше движеніе системы Q и соотвѣтствуетъ этому послѣднему случаю: точка M неподвижна, движеніе точекъ M_1 и M_3 задано по опредѣленнымъ кругамъ, а точки M_2 по линіи σ_0 (Koppelkurve). Вообще говоря эти линіи могутъ быть выбраны какъ угодно и могутъ и не быть траекторіями точекъ одного и того-же четырехсторонника; замѣчательно однако-же, что если за эти линіи принять траекторіи нѣкоторыхъ трехъ точекъ, принадлежащихъ тремъ подвижнымъ членамъ одного и того-же сочлененнаго четырехсторонника, то при движеніи однородно-измѣняемой системы устанавливаются между скоростями этихъ точекъ именно такія отношенія, какія существуютъ у этихъ точекъ при движеніи четырехсторонника.

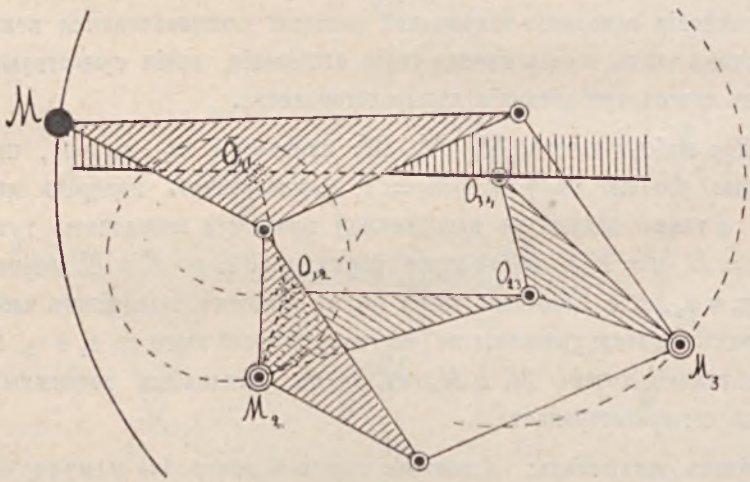
При выборѣ точекъ M_1, M_2, M_3 параметры m_1, m_2, m_3, подчиненные условію $m_1+m_2+m_3=1$, можно считать напередъ данными, а также задать на неподвижной плоскости координаты точки $M\,(x=E,\ y=E')$; послѣ этого формулы (32) по E и E' опредѣлятъ c_2 и ε_2, т. е. положеніе точки M_2 въ среднемъ подвижномъ членѣ четырехсторонника; уравненія-же (40) дадутъ послѣ этого c_1, ε_1 и c_3, ε_3, т. е. положенія точекъ M_1 и M_3 въ двухъ остальныхъ подвижныхъ членахъ четырехсторонника.

Итакъ заключаемъ: *Движеніе плоской однородно-измѣняемой системы можно задать такимъ образомъ, чтобы одна произвольно взятая точка ея была неподвижна а три другія, тоже произвольно выбранныя ея точки принадлежали тремъ подвижнымъ членамъ произвольно заданнаго сочлененнаго четырехсторонника.*

11. Практическое приложеніе вопроса, разсмотрѣннаго въ § 9. Въ этомъ параграфѣ было между прочимъ показано, что можно только въ томъ случаѣ къ сочлененному четырехстороннику, одинъ членъ котораго неподвиженъ, присоединить систему P такимъ образомъ, чтобы одна точка M послѣдней при всякомъ положеніи четырехсторонника оставалась неподвижною, если сочлененный четырехсторонникъ представляетъ собою параллелограммъ, т. е. если постоянно $\alpha_1 = \alpha_3$. Существуютъ положенія параллелограмма, въ которыхъ онъ можетъ обратиться въ антипараллелограммъ, причемъ уже равенство $\alpha_1 = \alpha_3$ нарушается, а слѣдовательно точка M выходитъ изъ состоянія покоя [1]). Принимая во вниманіе, что все сочлененіе, состоящее изъ четырехсторонника и системы P, обладаетъ одною степенью свободы, мы заключаемъ, что *если точку М механическими средствами удерживать неподвижною, то обращеніе параллелограмма въ антипараллелограммъ сдѣлается невозможнымъ* (фиг. 6).

Система P осуществляется практически сочлененіемъ, состоящимъ изъ четырехъ твердыхъ членовъ [2]). Такимъ образомъ вышеуказанная цѣль достигается помощью системы P съ такою-же степенью про-

фиг. 6.



стоты какъ и извѣстнымъ „трехоснымъ спарникомъ", содержащимъ, сверхъ основного параллелограмма, тоже четыре члена, но можетъ

1) Въ § 16 будетъ показано, что эта точка описываетъ тогда кругъ.

2) Варш. Унив. Изв. 1900.

представлять и нѣкоторыя преимущества передъ послѣднимъ механизмомъ, въ которомъ, при цѣлыхъ оборотахъ параллелограмма, и третья ось должна совершать цѣлые обороты, между тѣмъ какъ точка M въ системѣ P можетъ быть такъ выбрана, чтобы вращающійся около нея членъ этой системы совершалъ только колебательное движеніе, амплитуда котораго можетъ не выходить изъ заранѣе заданныхъ предѣловъ.

12. Къ вопросу о прямолинейномъ движеніи точки M. Пусть будетъ

$$ax+by+c=0$$

уравненіе предполагаемой прямой линіи σ. Указаннымъ въ § 7 способомъ находимъ для нея условія:

$$(a\,A-b\,B)\cos\alpha_1+(a\,B+b\,A)\sin\alpha_1+(a\,C-b\,D)\cos\alpha_3$$
$$+(a\,D+b\,C)\sin\alpha_3+a\,E+b\,E'+c=0,$$

которое не содержитъ $\cos(\alpha_1-\alpha_3)$; откуда уже непосредственно можно заключить, что согласованіе его съ зависимостью (9), а слѣдовательно и прямолинейный видъ линіи σ, невозможны ни для одного изъ случаевъ присоединенія системы P или Q къ четырехстороннику.

Сказанное здѣсь относится и къ линіямъ σ_0 и представляетъ такимъ образомъ простое доказательство невозможности черченія *точной* прямой линіи помощью простого сочлененнаго четырехсторонника.

На приближенномъ черченіи прямой линіи помощью соединенія четырехсторонника съ системою P или Q останавливаться не стоитъ уже потому, что это соединеніе содержитъ по меньшей мѣрѣ 7 подвижныхъ членовъ, а точное прямолинейное движеніе можетъ быть, какъ извѣстно, получено уже сочлененіемъ, состоящимъ изъ 5 подвижныхъ членовъ.

13. Опредѣленіе условій, чтобы точка системы P или Q описывала кругъ. Въ движеніи обыкновеннаго четырехсторонника круговыя траекторіи играютъ исключительную роль: у средняго подвижнаго члена только оба подвижныхъ шарнира описываютъ круговыя линіи. Другихъ-же такихъ точекъ у него не можетъ быть, если четырехсторонникъ не представляетъ собою параллелограмма или также ромбоида съ совпавшими равными членами; въ двухъ послѣднихъ случаяхъ круговая линія является вѣтвью линіи σ_0, другая вѣтвь которой есть линія четвертаго порядка, описываемая тою-же точкою, когда параллелограммъ обращается въ антипараллелограммъ или когда второе вышеназванное сочлененіе принимаетъ форму дѣйствительнаго ромбоида.

Присоединеніе къ четырехсторовнику системы P или Q приводитъ, какъ мы увидимъ, къ инымъ результатамъ: оказывается, что *линія σ можетъ выдѣлить круговую вѣтвь при всякой формѣ четырехсторонника*, если только надлежащимъ образомъ выбрать имѣющіеся въ нашемъ распоряженіи 6 или 8 параметровъ (§ 1).

Полагая

$$x-E=\xi,\quad y-E'=\eta, \tag{41}$$

предположимъ, что начало координатъ перенесено въ точку (E, E'), положеніе которой будетъ впрочемъ опредѣляться, по формуламъ § 8, самимъ изслѣдованіемъ. Пусть будетъ

$$\xi^2+\eta^2-2a\xi-2b\eta+a^2+b^2-r^2=0 \tag{42}$$

уравненіе предполагаемаго круга. Слѣдуя пріему, указанному въ § 7, напишемъ:

$$\begin{gathered}2(AC+BD)\cos(\alpha_1-\alpha_3)+2(BC-AD)\sin(\alpha_1-\alpha_3)\\ -2(aA-bB)\cos\alpha_1-2(aB+bA)\sin\alpha_1-2(aC-bD)\cos\alpha_3-2(aD+bC)\sin\alpha_3\\ +A^2+B^2+C^2+D^2+a^2+b^2-r^2=0\end{gathered} \tag{43}$$

и будемъ устанавливать тождество этой зависимости съ зависимостью (9). Первая часть этой послѣдней зависимости представляетъ собою функцію, которая отъ одновременной перемѣны знаковъ у α_1 и α_3 не мѣняется. Чтобы зависимость (43) обладала этимъ-же свойствомъ, необходимо, чтобы сумма членовъ, мѣняющихъ свой знакъ отъ перемѣны знаковъ у α_1 и α_3 одновременно, отдѣльно равнялась нулю. Итакъ условіе (43) распадается на два:

$$(BC-AD)\sin(\alpha_1-\alpha_3)-(aB+bA)\sin\alpha_1-(aD+bC)\sin\alpha_3=0, \tag{44}$$

$$\begin{gathered}2(AC+BD)\cos(\alpha_1-\alpha_3)-2(aA-bB)\cos\alpha_1-2(aC-bD)\cos\alpha_3\\ +A^2+B^2+C^2+D^2+a^2+b^2-r^2=0,\end{gathered} \tag{45}$$

изъ которыхъ первое должно удовлетворяться при всякихъ значеніяхъ угловъ α_1 и α_3, удовлетворяющихъ условію (9), а второе должно быть тождественно съ этимъ послѣднимъ условіемъ.

Условіе (44) можетъ быть совмѣстно съ зависимостью (9) только въ томъ случаѣ, если

$$BC-AD=0, \tag{46}$$

$$aB+bA=0, \tag{47}$$

$$aD+bC=0. \tag{48}$$

Чтобы въ этомъ убѣдиться, достаточно разсмотрѣть нѣсколько частныхъ положеній четырехсторонника, такихъ, при которыхъ два члена располагаются по одной прямой. При этомъ слѣдовало бы разсмотрѣть отдѣльно три главныхъ вида этого механизма: 1) когда оба вращающіеся члена совершаютъ полные обороты, 2) когда это возможно только для одного изъ нихъ и 3) когда оба эти члена могутъ только колебаться; но, ходъ разсужденій во всѣхъ случаяхъ одинаковъ, поэтому ограничимся разборомъ послѣдняго изъ нихъ.

Если члены A_1 и A_3 могутъ совмѣщаться съ A_4 [1]), то можно взять послѣдовательно: a) $\alpha_1=0$, b) $\alpha_3=\pi$; поэтому:

$$(BC-AD)+(aD+bC)=0, \tag{49}$$

$$(BC-AD)+(aB+bA)=0. \tag{50}$$

Кромѣ того A_2 и A_3 или A_1 и A_2 могутъ упасть на одну прямую; тогда или

$$\frac{\sin(\alpha_3-\alpha_1)}{a_4}=\frac{\sin\alpha_1}{a_2+a_3}=\frac{\sin\alpha_3}{a_1}$$

или

$$\frac{\sin(\alpha_3-\alpha_1)}{a_4}=\frac{\sin\alpha_1}{a_3}=\frac{\sin\alpha_3}{a_1+a_2}.$$

Сообразно съ этимъ зависимость (44) даетъ:

$$a_4(BC-AD)+(a_2+a_3)(aB+bA)+a_1(aD+bC)=0$$

или

$$a_4(BC-AD)+a_3(aB+bA)+(a_1+a_2)(aD+bC)=0;$$

откуда, принимая во вниманіе условія (49) и (50), находимъ:

$$a_4(BC-AD)+(a_1+a_2+a_3)\,a\,D+b\,C)=0.$$

[1]) Здѣсь предполагается, что эти члены изображаются прямыми, соединяющими шарниры.

Такъ какъ не можетъ быть $a_4 = a_1 + a_2 + a_3$, то эта зависимость вмѣстѣ съ (49) и (50) и даетъ условія (46), (47) и (48), изъ которыхъ впрочемъ только два различны.

Къ подобнымъ-же заключеніямъ мы придемъ, если прямыя A_1 и A_3 не могутъ совмѣщаться съ прямою A_4, но зато могутъ двоякимъ образомъ совпадать съ прямою A_2.

Сравненіе зависимостей (45) и (9) приводитъ къ слѣдующимъ требованіямъ:

$$\frac{aA-bB}{g_3}=\frac{aC-bD}{-g_1}=\frac{A^2+B^2+C^2+D^2+a^2+b^2-r^2}{2n}=-(AC+BD). \tag{51}$$

Мы имѣемъ такимъ образомъ 5 условій, для удовлетворенія которыхъ располагаемъ семью параметрами: A, B, C, D, a, b и r.

Если предполагать, что ни одинъ изъ коэффиціентовъ A, B, C, D не равенъ нулю, то, полагая

$$\frac{D}{C}=\frac{B}{A}=k \tag{52}$$

и оставляя k пока произвольнымъ, находимъ:

$$ak+b=0,$$

послѣ чего уравненія (51) даютъ:

$$a=g_1 A=-g_3 C, \tag{53}$$

$$r^2=(1+k^2)\left(1+g_1{}^2+\frac{g_1{}^2}{g_3{}^2}-2n\frac{g_1}{g_3}\right). \tag{54}$$

Принимая во вниманіе выраженія (10), окончательно находимъ:

$$B=kA,\quad C=-\frac{g_1}{g_3}A=-\frac{a_3}{a_1}A,\quad D=-\frac{g_1}{g_3}kA=-\frac{a_3}{a_1}kA, \tag{55}$$

$$a=g_1A=\frac{a_4}{a_1}A,\quad b=-kg_1A=-\frac{a_4}{a_1}kA,\quad r=\pm\frac{a_2}{a_1}A\sqrt{1+k^2}, \tag{56}$$

причемъ k и A остаются произвольными.

Если одинъ изъ коэффиціентовъ A, B, C, D, напр. A равенъ нулю, то формула (46) требуетъ, чтобы еще B или C было равно нулю. Если

$$A=0,\quad C=0,$$

то условія (47), (48) и (51) даютъ

$$D = -\frac{a_3}{a_1} B, \tag{57}$$

$$a = 0, \quad b = -g_1 B = -\frac{a_4}{a_1} B, \quad r = \pm \frac{a^2}{a_1} B, \tag{58}$$

причемъ B остается произвольнымъ. Если-же

$$A = 0, \quad B = 0,$$

то уравненія (11) непосредственно даютъ уравненіе круга

$$\xi^2 + \eta^2 = C^2 + D^2$$

при всякихъ значеніяхъ C и D, съ центромъ въ точкѣ $(E_1 E')$. Итакъ, имѣемъ 3 случая, которые помѣщены въ слѣдующей таблицѣ:

	A	B	C	D	a	b	r
*	произв.	kA	$-\frac{a_3}{a_1}A$	$-\frac{a_3}{a_1}kA$	$\frac{a_4}{a_1}A$	$-\frac{a_4}{a_1}kA$	$\pm\frac{a_2}{a_1}A\sqrt{1+k_2}$
**	0	произв.	0	$-\frac{a_3}{a_1}B$	0	$-\frac{a_4}{a_1}B$	$\pm\frac{a_2}{a_1}B$
***	0	0	произв.	произв.	E	E'	$\sqrt{C^2+D^2}$

14. Угловая скорость ω этого кругового движенія. Пусть будутъ ω_1 и ω_3 угловыя скорости вращающихся членовъ четырехсторонника; по условію (9) онѣ связаны между собою зависимостью:

$$\omega_3 = \frac{g_3 \sin \alpha_1 + \sin(\alpha_1 - \alpha_3)}{g_1 \sin \alpha_3 + \sin(\alpha_1 - \alpha_3)} \omega_1.$$

Пользуясь этимъ и подставляя выраженія (55) въ формулы (11), находимъ:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_3)}{g_1 \sin \alpha_3 + \sin(\alpha_1 - \alpha_3)} (y + kg_1 A)\, \omega_1,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\sin \alpha_1 - \alpha_3)}{g_1 \sin \alpha_3 + \sin(\alpha_1 - \alpha_3)} (x - g_1 A)\, \omega_1,$$

и, принимая во вниманіе формулы (56), получаемъ для угловой скорости ω:

$$\omega = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_3)}{g_1 \sin \alpha_3 + \sin(\alpha_1 - \alpha_3)} \omega_1. \tag{59}$$

Мы видимъ, что эта угловая скорость не зависитъ отъ способа присоединенія системы P или Q къ данному четырехстороннику и отъ положенія точки, описывающей кругъ, въ одной изъ этихъ системъ.

Та-же формула (59) получается и въ томъ случаѣ, если $A = 0$, $C = 0$.

Если $A = 0$, $B = 0$, то мы находимъ

$$\omega = \omega_3.$$

15. Разборъ возможныхъ случаевъ круговыхъ траекторій. Посмотримъ теперь, насколько могутъ удовлетворить условіямъ (*), (**) или (***) перечисленные въ § 2 пять механизмовъ. Прежде всего замѣтимъ, что для простого четырехсторонника, какъ показываютъ формулы (12), никакія изъ этихъ условій не выполнимы для какихъ либо точекъ члена A_2 кромѣ двухъ подвижныхъ шарнировъ.

Механизмъ I. *Въ случаѣ* (*) условія (55) требуютъ:

$$k = -tg(\varepsilon_1 - \delta_3) = -tg(\varepsilon_3 + \delta_1), \tag{60}$$

$$c_3\, a_1 \sin \delta_3 \cos(\varepsilon_3 + \delta_1) + c_1\, a_3 \sin \delta_1 \cos(\varepsilon_1 - \delta_3) = 0, \tag{61}$$

$$c_3\, a_1 \sin \delta_3 \sin(\varepsilon_3 + \delta_1) + c_1\, a_3 \sin \delta_1 \sin(\varepsilon_1 - \delta_3) = 0;$$

поэтому

$$c_3^2\, a_1^2 \sin^2 \delta_3 = c_1^2\, a_3^2 \sin^2 \delta_1. \tag{62}$$

Требованіямъ (60) и (62) можно удовлетворить различнымъ образомъ. Если c_1, ε_1, c_3, ε_3, т. е. положенія точекъ M_1 и M_3 въ членахъ A_1 и A_3, заданы заранѣе, то имѣемъ два уравненія для опредѣленія δ_1 и δ_3, т. е. положенія точки M, описывающей кругъ, относительно основныхъ точекъ M_1 и M_3.

Въ случаѣ (**) условія (60) замѣняются слѣдующими:

$$\cos(\varepsilon_1 - \delta_3) = 0, \quad \cos(\varepsilon_3 + \delta_1) = 0, \tag{63}$$

условіе-же (62) сохраняется. Этимъ требованіямъ можно удовлетворить, задавая напр. c_1, ε_1 и ε_3 и опредѣляя изъ (63) δ_1 и δ_3 и изъ (62) c_3.

Такимъ образомъ для произвольно заданнаго четырехсторонника положенія основныхъ точекъ не могутъ быть теперь выбраны совершенно произвольно; если-же, напротивъ, это сдѣлано, то для самаго четырехсторонника a_1 и a_3 должны быть взяты согласно условію (62).

Въ случаѣ (* * *), если принять во вниманіе, что $k_1 = tg\, \delta_1$, $k_3 = tg\, \delta_3$ могутъ только одновременно равняться нулю (§ 3), выполненіе условій $A = 0$, $B = 0$ (или, всеравно, $C = 0$, $D = 0$) невозможно безъ того, чтобы одна изъ основныхъ точекъ не совпадала съ однимъ изъ неподвижныхъ шарнировъ. Если-же это совпаденіе существуетъ, напр. $c_1 = 0$, то вторая основная точка, въ членѣ A_3, можетъ быть взята произвольно, и тогда всѣ точки системы P описываютъ круги, что впрочемъ понятно само-собою, такъ какъ получается „однообразное" круговое движеніе подобно-измѣняемой системы, причемъ собственно четырехсторонникъ уже никакой роли не играетъ. Поэтому можно сказать, что условія (* * *) въ томъ смыслѣ, какъ они понимались въ § 13, для механизма I не выполнимы.

Результаты, соотвѣтствующіе случаямъ (*) и (* *), можно разсматривать еще съ другой точки зрѣнія. Такъ какъ плоская подобно-измѣняемая система имѣетъ четыре степени свободы, то движеніе ея дѣлается геометрически опредѣленнымъ, если будутъ заданы траекторіи трехъ произвольно взятыхъ ея точекъ, причемъ отношенія между скоростями этихъ точекъ этимъ уже сами собою опредѣляются. Въ частности, траекторіи могутъ быть заданы въ видѣ трехъ круговъ; и мы видимъ теперь возможность выбрать центры и радіусы этихъ круговъ такимъ образомъ, чтобы отношенія между угловыми скоростями двухъ изъ круговыхъ движеній были такими-же, какъ у двухъ вращающихся членовъ сочлененнаго четырехсторонника. Другими словами, можно въ разсмотрѣнномъ выше механизмѣ, заставивъ точку M помощью добавочнаго кривошипа описывать соотвѣтствующую ей круговую линію, отнять взамѣнъ этого средній подвижный членъ A_2 четырехсторонника и такимъ образомъ помощью подобно-измѣняемой системы получить такое-же преобразованіе вращеній, какое достигается обыкновеннымъ четырехсторонникомъ.

Механизмъ II. Легко видѣть, что всѣ три случая: (*), (* *), (* * *) возможны при всякомъ видѣ четырехсторонника. Не разбирая ихъ всѣ подробно, остановимся только на послѣднемъ, въ которомъ центръ круга совпадаетъ съ точкою $(E_1\ E')$. Задавъ положенія точекъ M_1 и M_2 въ четырехсторонникѣ произвольно, можно найти положеніе точки M, описывающей кругъ, согласно условіямъ $A=0$, $B=0$, по формуламъ (29), которыя опредѣлятъ k_1 и k_2:

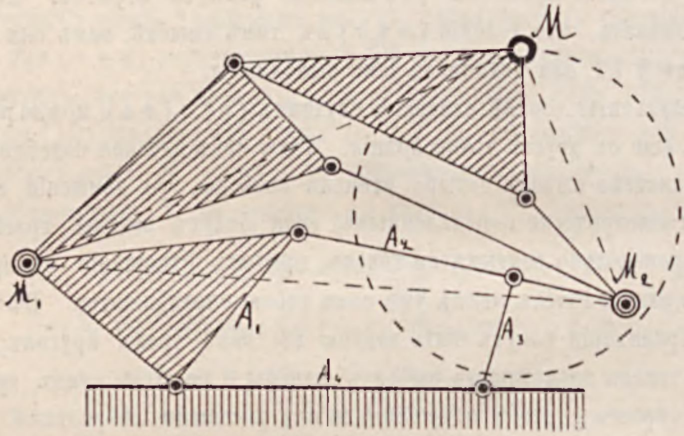
$$k_1\,k_2\,(a_2\,c_1\,\sin\varepsilon_1+a_1\,c_2\,\sin\varepsilon_2)+k_1\,a_2\,c_1\,\cos\varepsilon_1+k_2\,a_1\,(a_2-c_2\,\cos\varepsilon_2)=0,$$

$$k_1\,k_2\,[a_3\,c_1\,\sin\varepsilon_1-a_1\,(a_2-c_2\,\cos\varepsilon_2)]-k_1\,a_2\,c_1\,\sin\varepsilon_1+k_2\,a_1\,c_2\,\sin\varepsilon_2=0.$$

Мы видимъ, что положеніе точки M относительно M_1 и M_2 не зависитъ отъ a_3 и a_4; формулы-же (29) для C, D, E, E' показываютъ, что положеніе центра круга не зависитъ отъ a_1 и a_3 а радіусъ круга, $r=\sqrt{C^2+D^2}$, не зависитъ отъ a_1 и a_4.

На чертежѣ (фиг. 7) [1]) четырехсторонникъ взятъ произвольный;

фиг. 7.



далѣе:

$$c_1=a_1,\quad \varepsilon_1=\tfrac{3}{2}\pi,\quad c_2=\tfrac{3}{2}k_1,\quad \varepsilon_2=0;$$

поэтому

$$k_1=-\tfrac{1}{2},\quad k_2=-2,\quad a=\tfrac{6}{5}a_4,\quad b=-\tfrac{3}{5}a_4,\quad r=\frac{3}{\sqrt{5}}a_3.$$

[1]) и на модели, находящейся въ механическомъ кабинетѣ Варш. Унив.

Механизмъ III. Для удовлетворенія *условіямъ* (*) по формуламъ (34) требуется:

$$A = m_1\, c_1 \cos \varepsilon_1\,, \quad k = -\,tg\, \varepsilon_1 = -\,tg\, \varepsilon_3, \tag{64}$$

$$a_1\, m_3\, c_3 \pm a_3\, m_1\, c_1 = 0. \tag{65}$$

Такимъ образомъ, если основныя точки, т. е. элементы $c_1\, \varepsilon_1$, c_3, ε_3, x_4, y_4 выбраны заранѣе, причемъ ε_1 и ε_3 согласно условію (64), то для m_1 и m_3 остается одно линейное уравненіе, т. е. существуетъ цѣлая прямая линія точекъ, описывающихъ круги. Это впрочемъ вытекаетъ непосредственно изъ того, что если одна точка однородно-измѣняемой системы неподвижна, то всѣ точки, расположенныя на проходящей черезъ нее прямой, описываютъ подобныя между собою линіи съ общимъ центромъ подобія въ неподвижной точкѣ.

Итакъ мы нашли, что возможно такое движеніе однородно-измѣняемой системы, при которомъ одна точка неподвижна, точки, лежащія на проходящей черезъ нее прямой двигаются по кругамъ, и еще двѣ точки системы принадлежатъ двумъ вращающимся членамъ четырехсторонника. Такъ какъ плоская однородно-измѣняемая система имѣетъ шесть степеней свободы, то движеніе ея всегда можетъ быть задано такимъ образомъ, чтобы одна ея точка была неподвижна и три другія двигались по тремъ даннымъ линіямъ, а въ частности и по кругамъ; но тогда отношенія между скоростями этихъ трехъ точекъ уже сами собою опредѣляются. Настоящій случай показываетъ, что при извѣстнымъ выборѣ основныхъ точекъ отношеніе между угловыми скоростями кругового движенія двухъ изъ этихъ точекъ можетъ быть такое, какъ у двухъ вращающихся членовъ четырехсторонника.

Условія (**) даютъ:

$$\cos \varepsilon_1 = 0, \quad \cos \varepsilon_3 = 0, \quad a_1\, m_3\, c_3 \pm a_3\, m_1\, c_1 = 0 \tag{66}$$

и тоже могутъ быть выполнены.

Условія (***) выполняются, если взять $m_1 = 0$ и слѣдовательно

$$m_3 + m_4 = 1. \tag{67}$$

Этотъ случай не представляетъ интереса, потому-что условіе (67) опредѣляетъ точки прямой $M_3\, M_4$; но при круговомъ движеніи точки

M_3 и такъ очевидно, по свойству однородно-измѣняемой системы, что всѣ точки этой прямой двигаются по кругамъ.

Механизмъ **IV** можетъ быть изслѣдованъ подобно предыдущему и даетъ подобные-же результаты: круговое движеніе точки M оказывается возможнымъ.

Механизмъ **V** и подавно допускаетъ круговое движеніе точки M. Если пять изъ величинъ c_1, ε_1, c_2, ε_2, c_3, ε_3 задать произвольно, то условія (55) опредѣлятъ шестую и параметры m_1, m_2, m_3.

16. Соотношенія между сочлененными параллелограммомъ и антипараллелограммомъ. Въ § 9 было указано движеніе системы P, присоединенной къ сочлененному параллелограмму ($\alpha_3 = \alpha_1$), причемъ одна точка ея, M, могла оставаться неподвижною, а въ § 11 было указано практическое приложеніе этого результата, достигаемое механическимъ закрѣпленіемъ точки M. Если эту точку оставить свободною, то параллелограммъ можетъ обратиться въ антипараллелограммъ, и тогда точка M приходитъ въ движеніе. Легко показать, что она будетъ при этомъ описывать кругъ.

При условіи (36):

$$A + C = 0, \quad B + D = 0, \tag{68}$$

формулы (11) даютъ:

$$\begin{aligned} x &= A\,(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_3) + B\,(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_3) + E, \\ y &= -B\,(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_3) + A\,(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_3) + E', \end{aligned} \tag{69}$$

$$(x-E)^2 + (y-E')^2 = 2\,(A^2+B^2)\,[1 - \cos(\alpha_1 - \alpha_3)]. \tag{70}$$

Въ случаѣ параллелограмма или антипараллелограмма зависимость (9), гдѣ теперь

$$g_1 = g_3 = \frac{a_2}{a_1}, \quad n = 1,$$

даетъ:

$$1 - \cos(\alpha_1 - \alpha_3) = \frac{a_2}{a_1}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_3).$$

Но изъ уравненія (69) выводимъ:

$$(A^2+B^2)\,(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_3) = A\,(x-E) - B\,(y-E'),$$

вслѣдствіе чего уравненіе (70) принимаетъ видъ:

$$(x-E)^2+(y-E')^2-2\frac{a_2}{a_1}A\,(x-E)+2\frac{a_2}{a_1}B\,(y-E')=0.$$

Этотъ кругъ описываетъ та точка M подобно-измѣняемой системы, координаты которой въ этой системѣ, k_1, k_3, удовлетворяютъ условіямъ (68), согласно которымъ онѣ по формуламъ § 9 случая I и выражены, т. е. которая раньше была неподвижною (фиг. 6). Итакъ мы нашли: *Если сочлененный параллелограммъ обращается въ антипараллелограммъ, то та точка присоединенной къ нему подобно-измѣняемой системы, которая оставалась неподвижною, описываетъ кругъ.*

17. Другія приложенія системъ P и Q.

I. *Изображеніе движенія центра массы плоской сочлененной системы.*

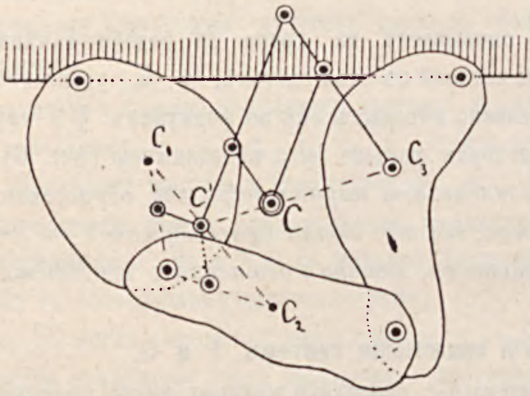
Такъ какъ общій центръ массы C' двухъ тѣлъ дѣлитъ въ постоянномъ отношеніи разстоянія между ихъ центрами массы, C_1 и C_2, то точки C_1 C_2 и C' принадлежатъ одной и той-же однородно-измѣняемой системѣ. Общій центръ массы C первыхъ двухъ тѣлъ съ третьимъ тѣломъ дѣлитъ въ постоянномъ отношеніи разстоянія между C' и C_3, центромъ массы третьяго тѣла; отсюда заключаемъ, что точка C принадлежитъ однородно-измѣняемой системѣ, движеніе которой опредѣляется тремя основными точками C_1, C_2, C_3.

Прилагая эти разсужденія къ сочлененному четырехстороннику, одинъ членъ котораго неподвиженъ, мы получаемъ возможность присоединеніемъ къ нему сочлененія Q, изображающаго однородно-измѣняемую систему, воспроизвести движеніе его центра массы. Такое присоединеніе должно быть сдѣлано очевидно по способу механизма V.

Въ данномъ случаѣ можно впрочемъ вмѣсто системы Q общаго вида (§ 1) взять болѣе простое сочлененіе, состоящее изъ двухъ пантографовъ и содержащее только 6 членовъ, благодаря тому, что двумя членами одного изъ этихъ пантографовъ могутъ служить члены самаго четырехсторонника, какъ показано на фигурѣ 8. Конечно, масса присоединенныхъ членовъ при этомъ въ расчетъ не принимается.

Въ недавнее время O. Фишеромъ было указано другое сочлененіе, изображающее движеніе центра массы сочлененнаго четырехсторонника, Оно основано на понятіи о „главныхъ точкахъ“ (Hauptpunkte) механизма и содержитъ тоже шесть членовъ [1]).

фиг. 8.



Чтобы изобразить движеніе центра массы болѣе сложной плоской сочлененной системы, можно воспользоваться нѣсколькими однородно-измѣняемыми системами. Принявъ во вниманіе, что движеніе плоской однородно-измѣняемой системы опредѣляется движеніемъ трехъ ея точекъ, легко видѣть, что если число членовъ сочлененія $n > 3$, то потребуется $n/2$ или $(n-1)/2$ такихъ системъ, смотря по тому, будетъ-ли n четное или нечетное.

II. *Изображеніе одного случая конформнаго преобразованія на плоскости.*

Самое общее конформное преобразованіе на плоскости, при которомъ круги преобразовываются въ круги, слагается изъ преобразованія помощью взаимныхъ радіусовъ-векторовъ и преобразованія подобія (теорема Ліувилля). Такое преобразованіе можетъ быть поэтому изображено сочлененіемъ, состоящимъ изъ соединенія инверзора съ системою P.

Нужно впрочемъ замѣтить, что всѣ указанныя конформныя преобразованія зависятъ отъ 6 параметровъ, а въ каждомъ отдѣльномъ изображающемъ ихъ сочлененіи мы можемъ распоряжаться только четырьмя параметрами; потому-что изъ четырехъ параметровъ преобразованія подобія — координатъ полюса, коэффиціента удлинненія и угла пово-

[1]) Z f. Math. u. Phys. B. 47. H. 3/4, стр. 435.

рота—мы можемъ мѣнять только два: координаты полюса. Но во всякомъ случаѣ указаннымъ сочлененіемъ, при надлежащемъ выборѣ его параметровъ, можетъ быть воспроизведено всякое напередъ заданное конформное преобразованіе вышеназваннаго рода.

Глава II. Кинематическія цѣпи, составленныя изъ подобно-измѣняемыхъ или однородно-измѣняемыхъ членовъ.

18. О степеняхъ свободы такой цѣпи. Пусть будетъ S кинематическая цѣпь, составленная изъ послѣдовательно соединенныхъ n измѣняемыхъ тѣлъ A_1, A_2, ... A_n, изъ которыхъ каждое, будучи взято отдѣльно, можетъ имѣть въ данномъ пространствѣ μ степеней свободы; будемъ сначала предполагать, что всѣ члены цѣпи соединены между собою опредѣленными кинематическими парами, т. е. что каждый изъ нихъ по отношенію къ смежнымъ членамъ имѣетъ по одной степени свободы. Если $n \geqq \mu$ и у этой цѣпи нѣтъ внѣшнихъ связей, то она имѣетъ n степеней свободы. Если же у одного изъ членовъ этой цѣпи будутъ отняты $k \leqq \mu$ степеней свободы, то и вся цѣпь потеряетъ столько-же степеней свободы Въ частности, если $n = \mu + 1$ и одинъ изъ членовъ закрѣпленъ неподвижно, то этимъ отнимается у цѣпи μ степеней свободы и у нея остается одна степень свободы, т. е. цѣпь сохраняетъ опредѣленное движеніе или, какъ говорятъ, обращается въ *механизмъ*.

Приложимъ эти разсужденія къ системѣ тѣлъ двухъ измѣреній, которыя лежатъ въ одной плоскости и изъ которыхъ каждое представляетъ собою подобно-измѣняемую систему. Тогда $\mu = 4$ и цѣпь такихъ тѣлъ обращается въ механизмъ, если $n = 5$, причемъ одинъ ея членъ предполагается неподвижнымъ. Такимъ образомъ получается *механизмъ, составленный изъ четырехъ подвижныхъ подобно-измѣняемыхъ системъ*.

Такое-же разсужденіе, приложенное къ плоской однородно-измѣняемой системѣ, которая, какъ извѣстно, имѣетъ на плоскости 6 степеней свободы, приводитъ къ заключенію, что *цѣпь*, составленная изъ 7 членовъ, изъ которыхъ одинъ закрѣпленъ неподвижно, т. е. *состоя-*

щая изъ шести подвижныхъ однородно-измѣняемыхъ членовъ, можетъ представлять собою механизмъ.

Если одна или нѣсколько кинематическихъ паръ, соединяющихъ смежные члены кинематической цѣпи, перестаютъ быть опредѣленными, т. е. если смежные члены имѣютъ одинъ относительно другого болѣе одной степени свободы, то число степеней свободы всей цѣпи соотвѣтственнымъ образомъ увеличивается; поэтому, чтобы такая цѣпь могла быть механизмомъ, число ея членовъ должно быть соотвѣтственнымъ-же образомъ уменьшено. Это даетъ цѣпи съ 2 или 3 подвижными подобно-измѣняемыми членами и цѣпи съ 2, 3, 4 или 5 подвижными однородно-измѣняемыми членами. Зависимость между числомъ относительныхъ степеней свободы смежныхъ членовъ и числомъ членовъ механизма можетъ быть выражена слѣдующею формулою. Если два смежныхъ члена имѣютъ одинъ относительно другого $1+k$ степеней свободы, что k мы будемъ называть *избыткомъ степеней свободы*, и тогда число членовъ цѣпи, могущей обращаться, закрѣпленіемъ одною изъ нихъ, въ механизмъ:

$$n=\mu+1-\Sigma k, \tag{71}$$

гдѣ сумма распространяется на всѣ существующіе въ цѣпи избытки [1]).

19. Основаніе для классификаціи этихъ цѣпей. Эти указанія приводятъ къ естественной классификаціи (Reuleaux) кинематическихъ цѣпей въ пространствѣ съ даннымъ числомъ степеней свободы. Основаніемъ для нея, независимо отъ вида кинематическихъ паръ, служитъ число избытковъ, а дальнѣйшее подраздѣленіе основывается на томъ, какъ эти избытки размѣщены въ цѣпи.

Прилагая сказанное къ цѣпямъ, состоящимъ изъ подобно-измѣняемыхъ или однородно-измѣняемыхъ членовъ (системъ P или системъ Q, § 1), мы и приходимъ къ цѣлому ряду новыхъ механизмовъ, которые за нѣкоторыми исключеніями, можетъ быть, и не представляютъ практическаго интереса—ввиду сложности, съ которою эти механизмы осу-

---

[1]) Подробнѣе, а также въ приложеніи къ сложнымъ кинематическимъ цѣпямъ см. статью П. Сомова: „О степеняхъ свободы кинематической цѣпи“. Журн. Русск. Физ.-Хим. Общ. 1887 г.

ществляются помощью соединенныхъ между собою шарнирами *твердыхъ* тѣлъ,—но систематическое изученіе ихъ приводитъ къ различнымъ вопросамъ о преобразованіи движеній, постановка которыхъ не могла-бы явиться, если-бы при изученіи шарнирныхъ сочлененій мы ограничивались предположеніемъ, что всѣ члены цѣпи *неизмѣняемые*. Притомъ-же всѣ цѣпи, которыя съ указанной выше точки зрѣнія являются *простыми*, т. е. состоящими изъ членовъ (системъ P или Q), соединенныхъ между собою только послѣдовательно, будутъ представляться *сложными*, если ихъ разсматривать состоящими изъ неизмѣняемыхъ тѣлъ, которыя служатъ для образованія тѣхъ-же измѣняемыхъ членовъ, и тогда изученіе ихъ представлялось-бы значительно сложнѣе.

20. Выполненіе классификаціи. Въ нижеслѣдующихъ таблицахъ кинематическія пары обозначены двумя буквами $A_i\, A_{i+1}$, по названію членовъ, которыми эти пары соединяются; членъ съ наивысшимъ значкомъ предполагается неподвижнымъ; арабскія цифры указываютъ число избытковъ въ каждой кинематической парѣ, римскими цифрами обозначены *существенно различные* между собою механизмы.

Цѣпи съ подобно-измѣняемыми членами.

a) *Два избытка—три члена.*

	A_3	A_1	A_2	A_3
I	0	0	2	
II	0	1	1	
III	0	2	0	
IV	1	0	1	

b) *Одинъ избытокъ—четыре члена.*

	A_4	A_1	A_2	A_3	A_4
V	0	0	0	1	
VI	0	0	1	0	

c) *Полная цѣпь—пять членовъ.*

	A_5	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
VII	0	0	0	0	0	

Остальные случаи распредѣленія избытковъ степеней свободы даютъ цѣпи, симметричныя относительно предыдущихъ и слѣдовательно отъ нихъ существенно не отличающіяся.

Цѣпи съ однородно-измѣняемыми членами. Подобнымъ же образомъ можно насчитать слѣдующее число существенно различныхъ между собою случаевъ, въ которыхъ мы не будемъ уже подробно выписывать распредѣленіе избытковъ степеней свободы:

a) *четыре избытка—три члена*—9 случаевъ.

b) *три избытка—четыре члена*—10 случаевъ.

c) *два избытка—пять членовъ*—9 случаевъ.

d) *одинъ избытокъ—шесть членовъ* – три случая.

e) *полная цѣпь—семь членовъ*—одинъ случай. Итого 32 существенно различныхъ вида кинематическихъ цѣпей съ однородно-измѣняемыми членами.

Къ этимъ механизмамъ можно было-бы присоединить еще такіе, которые содержатъ одновременно системы P и Q, основываясь при этомъ на общихъ соображеніяхъ о неоднородныхъ кинематическихъ цѣпяхъ, т. е. такихъ, члены которыхъ обладаютъ *различнымъ* числомъ степеней свободы. [1]). Всѣ такія цѣпи тоже легко было-бы привести въ систему и выдѣлить существенно различныя между ними; но мы этимъ уже заниматься не будемъ. Изъ перечисленныхъ-же здѣсь механизмовъ мы ограничимся болѣе подробнымъ разборомъ лишь первыхъ четырехъ, какъ наиболѣе простыхъ, чтобы показать, какимъ образомъ подобные механизмы могутъ быть вообще практически осуществляемы.

21. О кинематическихъ парахъ разсматриваемыхъ цѣпей. Чтобы перейти къ практическому осуществленію кинематическихъ цѣпей съ подобно-измѣняемыми членами, можно принять за послѣдніе сочлененіе, названное нами системою P, а для цѣпей съ однородно-измѣняемыми членами—сочлененіе, названное системою Q (§ 1). При этомъ является вопросъ: какимъ образомъ установить кинематическія пары, соединяющія такія системы между собою, т. е. какъ понизить число степеней свободы одного такого члена относительно другого, смежнаго съ нимъ? Практически это можетъ быть достигаемо тремя способами: а) принужденіемъ точки системы описывать опредѣленную линію, причемъ отнимается одна степень свободы, b) укрѣпленіемъ точки неподвижно, чѣмъ отнимаются двѣ степени свободы и c) установленіемъ для

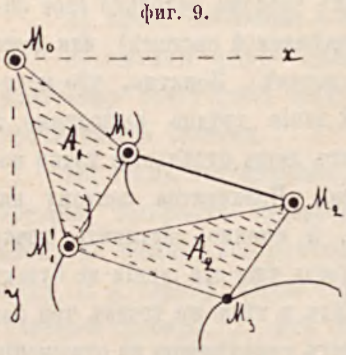
1) П. Сомовъ. „О степеняхъ свободы кинематической цѣпи“. Журн. Русскаго Физ.-Хим. Общ. 1887 г.

каждаго положенія системы опредѣленнаго отношенія между скоростями двухъ ея точекъ, описывающихъ опредѣленныя линіи, причемъ теряется одна степень свободы. Если членъ цѣпи примыкаетъ къ неподвижному члену, то требованіе, чтобы одна изъ точекъ перваго изъ нихъ двигалась по опредѣленной линіи, принадлежащей второму, имѣетъ опредѣленный смыслъ и можетъ быть осуществлено какимъ-либо добавочнымъ механизмомъ. Но если оба члена подвижны, то линія, проведенная въ одномъ изъ нихъ, мѣняетъ вмѣстѣ съ этимъ членомъ нетолько свое положеніе но и свои размѣры (въ подобно-измѣняемой системѣ) или даже и свою форму (въ однородно-измѣняемой системѣ). Понятно, что механическое осуществленіе движенія по такой линіи трудно выполнимо, а помощью шарнирныхъ сочлененій, дающихъ лишь отдѣльныя точки измѣняемыхъ системъ, и совсѣмъ невозможно. Приходится поэтому видоизмѣнить разсматриваемое ограниченіе, а именно заставить точку двигаться по неизмѣняющейся линіи; но тогда уже эта линія не будетъ линіею, составленною постоянно изъ однихъ и тѣхъ-же точекъ той или другой измѣняемой системы, т. е. она будетъ перемѣнною по отношенію къ измѣняемому члену, которому она предполагается принадлежащею. Во всякомъ случаѣ и этимъ способомъ мы отнимаемъ у всей системы одну степень свободы. При дальнѣйшемъ разборѣ мы будемъ за такую линію брать исключительно кругъ, вводя въ цѣпь стержень, имѣющій центръ вращенія въ одной изъ точекъ той или другой измѣняемой системы.

22. Механизмъ I. Членъ A_1 долженъ имѣть одну степень свободы относительно неподвижнаго члена A_3; это можетъ быть достигнуто простѣйшимъ образомъ тѣмъ, что одна точка, M_0, члена A_1 будетъ сдѣлана неподвижною а другая его точка, M_1, будетъ принуждена описывать заданную линію. Относительно члена A_2, имѣющаго одну степень свободы относительно A_1, будемъ предполагать, что онъ имѣетъ съ A_1 общую точку M_1' и что другая точка M_2 члена A_2 имѣетъ опредѣленное движеніе по отношенію къ подобно-измѣняемой системѣ A_1. Принимая во вниманіе сказанное въ § 21, замѣнимъ это условіе другимъ, а именно соединимъ M_2 съ M_1 неизмѣняемымъ стержнемъ. Наконецъ, чтобы членъ A_2 имѣлъ относительно A_3 три степени свободы (2 избытка), нужно у него отнять одну степень свободы, а для этого можно заставить нѣкоторую точку M_3 члена A_2 описывать опредѣленную линію въ неподвижномъ членѣ. Такимъ образомъ получается механизмъ, изображенный на фигурѣ 9, гдѣ, какъ и на слѣдующихъ чертежахъ, сочлененія, изображающія подобно-измѣняемыя системы, замѣнены для простоты заштрихованными треугольниками.

Весь интересъ сводится здѣсь къ опредѣленію траекторіи точки M_2 въ зависимости отъ траекторіи точекъ M_1 и M_3. Для этой цѣли имѣемъ слѣдующія уравненія:

фиг. 9.



траекторіи точки M_1:

$$f_1(x_1, y_1) = 0, \tag{72}$$

зависимости между координатами точекъ M_1 и M_1':

$$\begin{aligned} x_1' &= n(x_1 \cos\lambda - y_1 \sin\lambda), \\ y_1' &= n(x_1 \sin\lambda + y_1 \cos\lambda), \end{aligned} \tag{73}$$

гдѣ

$$n = \frac{M_1'M_0}{M_1 M_0} = \text{пост.}, \quad \gamma = \angle(M_1 M_0 M_1') = \text{пост.},$$

уравненія траекторіи точки M_3:

$$f_3(x_3, y_3) = 0; \tag{74}$$

далѣе, по условію подобія координаты этой точки по координатамъ точекъ M_1' и M_2 опредѣляются по формуламъ (6) слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{k_1' x_1' + k_2 x_2 + k_1' k_2 (y_1 - y_2)}{k_1' + k_2}, \\ y_3 &= \frac{k_1' y_1' + k_2 y_2 - k_1' k_2 (x_1' - x_2)}{k_1' + k_2}; \end{aligned} \tag{75}$$

наконецъ, такъ какъ точки M_1 и M_2 связаны неизмѣняемымъ стержнемъ данной длины l, то

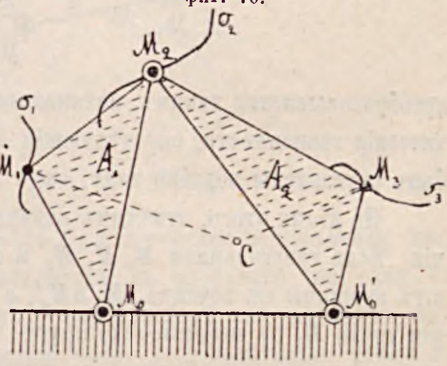
$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0. \tag{76}$$

Уравненіе траекторіи точки M_2 получается послѣ этого исключеніемъ шести координатъ: x_1, y_1, x_1', y_1', x_3, y_3 изъ семи уравненій (72), (73), (74), (75) и (76).

Какъ частный результатъ отмѣтимъ: если точки M_1 и M_3 описываютъ прямыя линіи, то точка M_2 описываетъ эллипсъ.

23. Механизмъ II. Простѣйшій видъ такого механизма будетъ слѣдующій. Пусть A_1 имѣетъ въ неподвижномъ членѣ A_3 неподвижную точку M_0, а другая точка M_1 члена A_1 принуждена описывать данную линію σ_1; третія точка M_2 этого члена описываетъ тогда линію σ_2, подобную σ_1, съ центромъ подобія въ точкѣ M_0. Пусть M_1 принадлежитъ и члену A_2, который такимъ образомъ сохраняетъ относительно члена A_1 двѣ степени свободы. Далѣе, пусть нѣкоторая точка M_0' члена A_3 неподвижна, что согласно съ предположеніемъ, что A_2 имѣетъ двѣ степени свободы относительно A_3. Третія точка, M_3, члена A_2 будетъ тогда описыватъ линію σ_3, подобную σ_2, а слѣдовательно и линіи σ_1; но центръ подобія линій σ_2 и σ_3, точка M_0', иной, чѣмъ у линій σ_1 и σ_2.

фиг. 10.



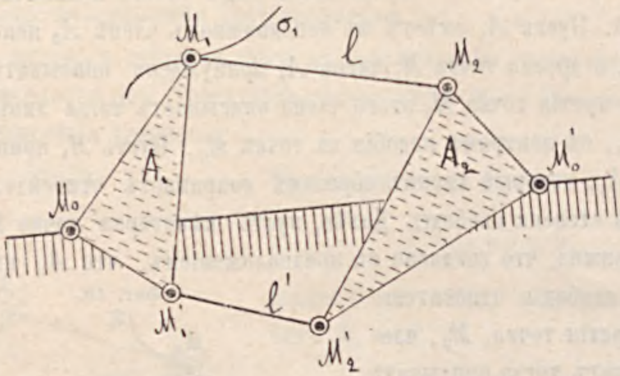
Тѣмъ не менѣе σ_1 и σ_3 тоже имѣютъ общій центръ подобія C, который опредѣляется извѣстнымъ способомъ какъ точка пересѣченія двухъ круговъ.

Настоящій механизмъ, не представляя какого-либо теоретическаго интереса въ смыслѣ преобразованія движеній, можетъ имѣть однакоже слѣдующее *практическое приложеніе*: преобразовывать движеніе точки по данной линіи въ движеніе другой точки по линіи, ей подобной, *безъ матеріальнаго центра подобія*. Это можетъ быть полезно въ тѣхъ случаяхъ, когда центръ подобія находится на далекомъ разстояніи, т. е. когда линейное отношеніе между размѣрами двухъ линій близко къ единицѣ и эти линіи одна относительно другой оріентированы параллельно или близко къ этому, и слѣдовательно когда и скорости обѣихъ точекъ удовлетворяютъ подобнымъ-же требованіямъ.

Другая форма механизма II представлена на фигурѣ 11. Членъ A_1 имѣетъ неподвижную точку M_0, M_1 описываетъ заданную линію σ_1; A_2 имѣетъ неподвижную точку M_0 и имѣетъ относительно A_1 двѣ степени свободы благодаря тому, что соединеніемъ двухъ его точекъ M_2 и M_2

съ двумя точками M_1 и M_1' члена A_1 неизмѣнными стержнями l и l' у него отняты двѣ степени свободы относительно A_1. Движеніе точки M_1

фиг. 11.

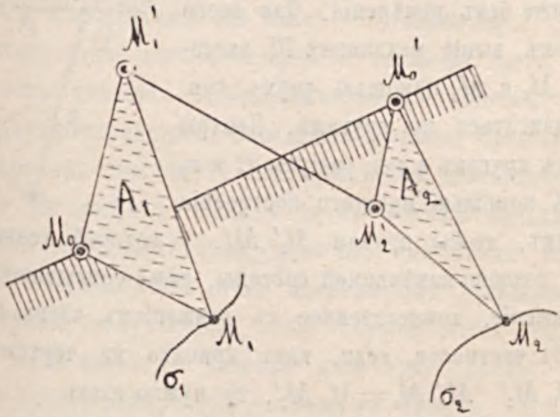


преобразовывается такимъ механизмомъ въ движеніе точки M_2. Аналитическія зависимости, опредѣляющія это преобразованіе, легко могутъ быть составлены подобно тому, какъ это сдѣлано въ § 22.

Не дѣлая этого, отмѣтимъ слѣдующіе частные случаи преобразованія. Если треугольники $M_0\ M_1\ M_1'$ и $M_0'\ M_2\ M_2'$ равнобедренные и имѣютъ вершины въ точкахъ M_0 и M_0', а кромѣ того $l = l'$, то при движеніи точки M_1 по небольшому кругу точка M_2 описываетъ замкнутую линію 4-го порядка, близкую къ кругу, двигаясь при этомъ въ обратномъ направленіи. Если M_1 двигается по прямой $M_0\ M_1$, а слѣдовательно M_1' по прямой $M_0\ M_1'$, то точки M_2 и M_2' двигаются тоже по прямымъ $M_0'\ M_2$ и $M_0\ M_2'$; при этомъ, если точки M_1 и M_1' приближаются къ M_0, то точки M_2 и M_2' удаляются отъ M_0' и наоборотъ.

24. Механизмъ III. У него оба избытка степеней свободы сосредоточены въ кинематической парѣ $(A_1\ A_2)$, т. е. A_2 относительно A_1 и обратно имѣетъ три степени свободы, тогда какъ остальныя двѣ пары, $(A_0\ A_1)$ и $(A_2\ A_0)$, опредѣленныя. Ограничимся опять простѣйшимъ случаемъ такого механизма. Пусть точка M_0 члена A_1 неподвижна, а точка M_1 этого же члена описываетъ на неподвижной плоскости заданную линію σ_1; пусть также точка M_0 члена A_2 неподвижна, а точка M_2 того-же члена описываетъ данную линію σ_2. Точки M_1' и M_2' членовъ A_1 и A_2 соединены между собою стержнемъ неизмѣнной длины, чѣмъ и достигается то, что въ кинематической парѣ $(A_1\ A_2)$ остаются два избытка степеней свободы; дѣйствительно, если бы членъ A_1 былъ неподвиженъ, то членъ A_2 имѣлъ бы, благодаря этому соединенію, три степени свободы, такъ какъ ограниченіе его движенія состояло-бы лишь въ томъ, что одна его точка была бы принуждена описывать данную линію (кругъ) въ членѣ A_1.

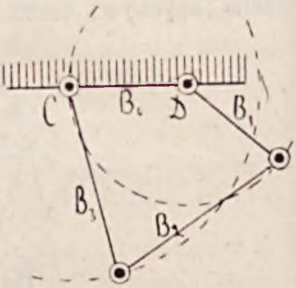
фиг. 12.



Такой механизмъ можетъ имѣть *практическое примѣненіе*, когда при построеніи шарнирнаго механизма на плоскости, по одну ея сторону (напр. на чертежной доскѣ), неподвижныя оси мѣшаютъ ему совершать полные обороты вслѣдствіе того, что нѣкоторые члены не могутъ проходить надъ этими осями (шарнирами), случай, который часто встрѣчается при движеніи даже простого шарнирнаго четырехсторонника. Разсматриваемый механизмъ позволяетъ *расчленить* данную шарнирную систему, и въ частности четырехсторонникъ, на отдѣльные члены, сохраняя безъ измѣненія движеніе каждаго изъ нихъ относительно остальныхъ и давая имъ вмѣстѣ съ тѣмъ возможность совершать полные обороты.

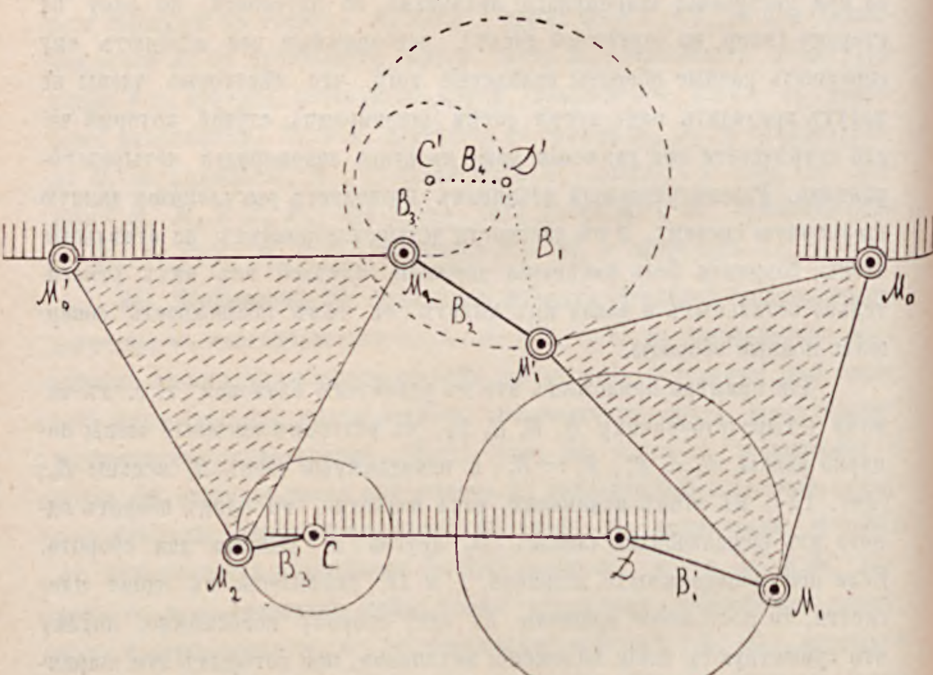
Для примѣра приложимъ это къ удвоителю Галловея, т. е. къ такому четырехсторонику $B_1\ B_2\ B_3\ B_4$, въ которомъ смежные члены попарно равны, $B_1 = B_4$, $B_2 = B_3$, и неподвижный членъ B_4 меньше B_3; (фиг. 13). Въ этомъ механизмѣ, какъ извѣстно, на одинъ оборотъ одного изъ вращающихся членовъ (B_3) другой (B_1) дѣлаетъ два оборота. Если оба неподвижныхъ шарнира, C и D, укрѣплены въ одной плоскости, то постоянное вращеніе въ одну сторону невозможно, потому что существуютъ такія положенія механизма, при которыхъ эти шарниры препятствуютъ движенію членовъ B_1 и B_3. Разсматриваемая теперь кинематическая цѣпь съ двумя подобно измѣняемыми системами позволяетъ расчленить механизмъ Галловея такимъ образомъ, что члены B_1 и B_3 будутъ вращаться отдѣльно отъ члена B_2, движеніе котораго и вообще относительное движеніе всѣхъ трехъ членовъ сохранится однакоже безъ измѣненія. Для этого въ описанномъ выше механизмѣ III заставимъ точки M_1 и M_2 помощью двухъ кривошиповъ двигаться по кругамъ. Центры C и D этихъ круговъ и ихъ радіусы r_1 и r_2 могутъ быть помощью простого построенія выбраны такъ, чтобы прямая $M_1' M_2'$, у которой точки M_1' и M_2', по свойству подобно-измѣняемой системы, тоже описываютъ круги, совершала движеніе, тождественное съ движеніемъ члена B_2 удвоителя Галловея. Въ частности, если, какъ принято на чертежѣ (фиг. 14), $M_0 M_1 = M_0 M_1'$, $M_0' M_2 = M_0 M_2'$, то нужно взять

фиг. 13.



$$r_1 = B_1, \quad r_2 = B_2.$$

фиг. 14.

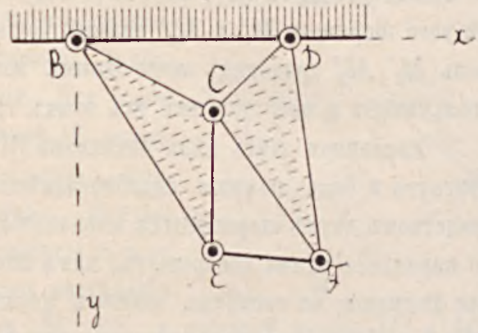


Понятно, что подобно-измѣняемые треугольники должны быть взяты достаточно великими, чтобы ни одинъ изъ неподвижныхъ шарнировъ не мѣшалъ точкамъ M_1, M_2, M_1', M_2', дѣлать полные обороты. Кромѣ того шарниры M_1' и M_2' должны быть такъ устроены, чтобы стержень M_1' M_2' проходилъ *надъ* однимъ изъ подобно-измѣняемыхъ треугольниковъ и *подъ* другимъ изъ этихъ треугольниковъ.

Указанная здѣсь цѣль механизма III могла-бы быть, правда, достигнута и безъ помощи подобно-измѣняемыхъ системъ, а именно посредствомъ двухъ шарнирныхъ параллелограммовъ. Средній членъ такого параллелограмма совершаетъ, какъ извѣстно, поступательное круговое движеніе; на среднихъ членахъ двухъ такихъ параллелограммовъ можно выбрать точки достаточно удаленныя отъ всѣхъ неподвижныхъ шарнировъ и, соединивъ эти точки неизмѣннымъ стержнемъ помощью двухъ шарнировъ, получить для этого стержня такое движеніе, какъ если-бы онъ былъ среднимъ членомъ нѣкотораго даннаго четырехсторонника. Но приведенная выше система не имѣетъ того недостатка, какой является у параллелограмма, который въ извѣстныхъ положеніяхъ можетъ обращаться въ антипараллелограммъ, и кромѣ того обладаетъ слѣдующимъ преимуществомъ. Если-бы мы хотѣли измѣнять отношенія между длинами членовъ четырехсторонника, то пришлось бы измѣнять положенія четырехъ неподвижныхъ шарнировъ и длины четырехъ кривошиповъ у двухъ параллелограммовъ; между тѣмъ у механизма съ двумя подобно-измѣняемыми системами достаточно дѣлать эти измѣненія у двухъ ведущихъ эти системы кривошиповъ.

25. Механизмъ IV. Онъ имѣетъ по одному избытку степеней свободы въ парахъ $(A_3\ A_1)$ и $(A_2\ A_3)$. Простѣйшій видъ этого механизма получится, если у членовъ A_1 и A_2 сдѣлать по одной точкѣ неподвижною на плоскости, а опредѣленную пару $(A_1\ A_2)$ устроить такъ, какъ это сдѣлано въ механизмѣ I. Такой механизмъ (фиг. 15) можно разсматривать какъ шарнирный четырехсторонникъ $BEFDB$, у котораго два вращающихся члена замѣнены подобно-измѣняемыми системами, а для уничтоженія являющагося вслѣдствіе этого излишка двухъ степеней свободы эти подобно-измѣняемые члены еще добавочно соединены между собою шарниромъ C. Впрочемъ легко видѣть, что точка C всегда описываетъ кругъ. А именно, координаты точекъ E и F, по свойству подобно-измѣняемой системы, связаны линейнымъ образомъ съ координатами точки C; поэтому, выражая постоянство разстоянія EF и подставляя сюда координаты точки C, мы получимъ для нихъ уравненіе второго порядка, которое, какъ легко убѣдиться, опредѣляетъ кругъ. Такъ какъ точки E и F описываютъ линіи, подобныя траекторіи точки C, съ полюсами подобія соотвѣтственно въ точкахъ B и D и съ соотвѣтственно пропорціональными скоростями, то E и F тоже двигаются по кругамъ, причемъ угловыя скорости всѣхъ круговыхъ движеній равны. Радіусы r_1 и r_2 круговъ, описываемыхъ точками E и F, въ отношеніи BE/BC и DF/DC разъ больше радіуса r круга, описываемаго точкою C. Принимая во вниманіе, что r_1 и r_2 вообще говоря не равны, съ другой же стороны разстояніе EF постоянно, то мы должны заключить, что центры обоихъ круговъ совпадаютъ, т. е. прямая EF просто вращается около неподвижнаго центра.

Фиг. 15.

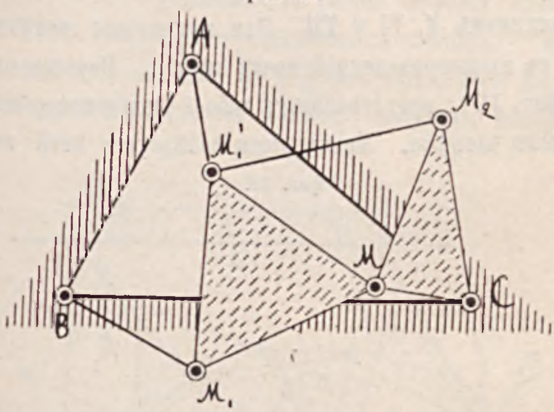


Настоящій механизмъ не даетъ такимъ образомъ какого-либо интереснаго преобразованія движенія, но зато демонстрируетъ слѣдующее свойство движенія подобно-измѣняемыхъ системъ. Если двѣ подобно-измѣняемыя системы имѣютъ по одной неподвижной точкѣ на плоскости и имѣютъ кромѣ того одну общую точку, то при движеніи этой послѣдней по кругу нѣкоторая точка одной системы сохраняетъ свое разстояніе отъ нѣкоторой точки другой системы.

26. Видоизмѣненія механизмовъ I, II, III и IV. Во всѣхъ описанныхъ въ этой главѣ механизмахъ кинематическія пары съ *однимъ* избыткомъ степеней свободы тѣхъ членовъ цѣпи, которые примыкаютъ къ неподвижному, осуществлялись помощью неподвижныхъ шарнировъ. Это ограниченіе можетъ быть замѣнено другимъ: условіемъ, чтобы двѣ точки такого члена описывали данныя линіи на неподвижной плоскости. Предполагая эти линіи кругами, мы получимъ кинематическую пару съ однимъ избыткомъ степеней свободы, если двѣ точки подобно-измѣняемой системы соединимъ съ двумя вращающимися на неподвижной плоскости около различныхъ центровъ стержнями. Такія видоизмѣненія механизмовъ можно разсматривать какъ цѣпи, содержащія въ своемъ составѣ нѣсколько шарнирныхъ четырехсторонниковъ, нѣкоторые члены которыхъ однако-же измѣняемы.

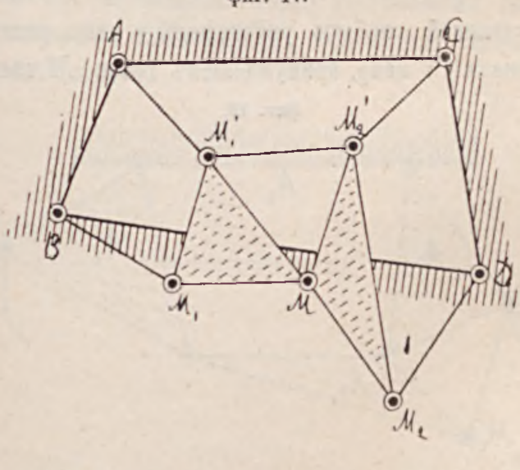
Чтобы это пояснить, разсмотримъ получаемыя указаннымъ образомъ видоизмѣненія механизма IV. Можно представить себѣ два механизма съ такими измѣненіями: 1) механизмъ, въ которомъ одна изъ

фиг. 16.



паръ $(A_3\ A_1)$ и $(A_2\ A_3)$ замѣнена указаннымъ образомъ, и 2) гдѣ это сдѣлано у обѣихъ паръ. Это даетъ механизмы, здѣсь изображенные

фиг. 17.



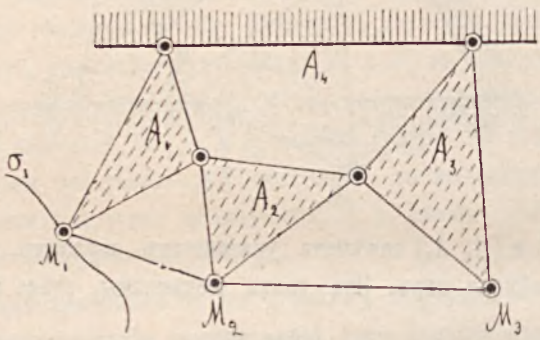
(фиг. 16 и фиг. 17). Въ первый изъ нихъ входятъ напримѣръ четырехсторонники:

BM_1MCB — съ двумя измѣняемыми членами,
$AM_1'MCA$ — „ „ „ „
$AM_1'M_2C$ — съ однимъ измѣняемымъ членомъ,
$AM_1'M_1B$ — „ „ „ „

Второй механизмъ можетъ быть между прочимъ разсматриваемъ какъ система трехъ четырехсторонниковъ, изъ которыхъ два, $AM_1'M_1B$ и $CM_2'M_2D$, имѣютъ средніе члены измѣняемые а одинъ четырехсторонникъ, $AM_1'M_2'C$, обыкновенный.

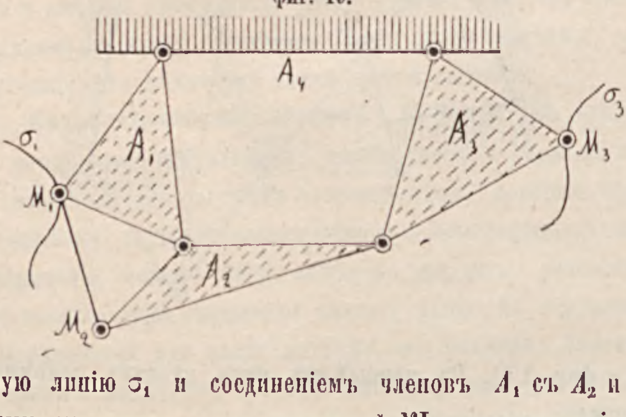
27. Механизмъ V, VI и VII. Эти механизмы могутъ быть разсматриваемы съ вышеприведенной точки зрѣнія. Первые два изъ нихъ (фиг. 18 и фиг. 19), представляютъ собою четырехсторонники съ тремя измѣняемыми членами. Являющіеся вслѣдствіе этой измѣняемости

фиг. 18.



три избытка степеней свободы уничтожены у нихъ различнымъ образомъ: въ механизмѣ V напр. принужденіемъ точки M члена A_1 описывать

фиг. 19.



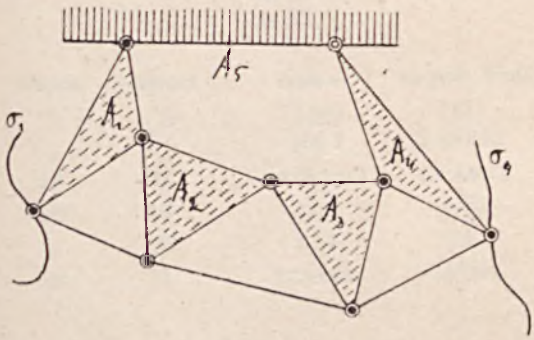
вать данную линію σ_1 и соединеніемъ членовъ A_1 съ A_2 и A_2 съ A_3 неизмѣнными стержнями, а въ механизмѣ VI — принужденіемъ точекъ

M_1 и M_3 членовъ A_1 и A_3 описывать данныя линіи σ_1 и σ_3 и соединеніемъ членовъ A_1 и A_2 неизмѣннымъ стержнемъ.

Можно было-бы отнять лишнія три степени свободы, заставивъ три точки членовъ A_1, A_2 и A_3 описывать данныя линіи на неподвижной плоскости, но это ввело бы соединеніе средняго подвижнаго члена A_2 съ неподвижнымъ A_4, и кинематическая цѣпь перестала бы быть *простою* (§ 19).

Механизмъ VII представляетъ собою полную кинематическую цѣпь, составленную изъ подобно-измѣняемыхъ членовъ. Такая цѣпь въ простѣйшемъ видѣ представлена на чертежѣ (фиг. 20). Все разнообразіе ея обусловливается различною формою четырехъ подобно-измѣняе-

фиг. 20.



мыхъ треугольниковъ, разстояніемъ между постоянными центрами вращенія, длинами стержней, соединяющихъ подвижные члены между собою, и видомъ линій σ_1 и σ_2.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Стран.	*строка*	*стоитъ:*	*должно быть:*
9	6	(19)	(17)
„	21	$sin\ \lambda_1$	$\xi\ \mathrm{sin}\ \lambda_1$
14	21	нха ниъ	на нихъ
16	16	$\pi/,2$	$\pi/2,$
„	16	$\pi/,4$	$\pi/4,$
19	11	условія	условіе

О функціяхъ Фурье-Бесселя и ихъ приложеніи къ изысканію асимптотическихъ представленій интеграловъ дифференціальныхъ линейныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами.

И. Р. Брайцева.

ГЛАВА I.

Функціи $\omega(\nu; xz)$ и $\omega_1(\nu; xz)$ и нѣкоторыя ихъ свойства.

§ 1.

Частныя рѣшенія нормальной системы въ формѣ опредѣленныхъ интеграловъ.

Будемъ исходить изъ системы уравненій.

$$\delta_x y = zy \text{ [1]};$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{x}{z}\frac{dy}{dx}, \tag{1}$$

гдѣ

$$\delta_x = x\frac{d^2}{dx^2} + (1+\nu)\frac{d}{dx}; \tag{2}$$

при чемъ ν произвольное число.

Систему уравненій (1) условимся называть нормальной. Первое изъ ея уравненій представляетъ обобщеніе извѣстнаго уравненія Фурье [2]).

Оставивъ пока въ сторонѣ второе изъ уравненій (1), займемся предварительно интегрированіемъ перваго изъ нихъ. Это послѣднее представляетъ частный видъ одного обширнаго класса уравненій, которыя будутъ объизслѣдованы нами въ послѣдующихъ главахъ нашей ра-

---

[1]) Первое уравненіе обыкновенное, а второе съ частными производными.

[2]) Théorie de la chaleur, Paris, 1822, p. 372.

боты. Особенность этихъ уравненій та, что асимптотическія представленія ихъ рѣшеній для весьма большихъ значеній модуля независимаго перемѣннаго имѣютъ форму анормальную (по терминологіи H. Poincaré [1]). Мы будемъ искать рѣшенія трактуемаго уравненія въ формѣ опредѣленныхъ интеграловъ. Для этой цѣли введемъ въ уравненіе новое независимое перемѣнное t, связанное съ x при помощи подстановки:

(3) $$t = \sqrt{xz}.$$

Прежде всего имѣемъ:

(4) $$\frac{dy}{dx} = \frac{z}{2t}\frac{dy}{dt},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{z^2}{4t^3}\left[t\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right].$$

Пользуясь формулами (4), уравненіе

(1′) $$\delta_x y = zy$$

представимъ такъ:

(5) $$t\frac{d^2y}{dt^2} + (2\nu+1)\frac{dy}{dt} = 4ty.$$

Уравненіе (5) интегрируемъ по способу Лапласа, а именно: ищемъ его рѣшеніе въ формѣ опредѣленнаго интеграла:

(6) $$y = \int_L e^{tu} v\,du,$$

гдѣ v есть функція одного u, а подъ L мы разумѣемъ пока путь, позволяющій дифференцированіе выраженія (6) по t замѣнить дифференцированіемъ по тому же перемѣнному функціи e^{tu} подъ знакомъ интеграла.

Внеся въ уравненіе (5) на мѣсто y его выраженіе (6), по выполненіи дифференцированія будемъ имѣть:

(7) $$t\int_L e^{tu}(u^2-4)\,v\,du + (2\nu+1)\int_L e^{tu} u\,v\,du = o.$$

---

[1]) „Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires". Acta Mathematica, 8:1, Berlin, Stockholm, Paris, 1886.

Произведя однократную интеграцію по частямъ въ первомъ интегралѣ лѣвой части соотношенія (7), послѣ надлежащихъ упрощеній найдемъ:

$$\Big|_{L} e^{tu}(u^2-4)\,v - \int_L e^{tu}\left[(u^2-4)\frac{dv}{du} - (2\nu-1)\,uv\right]du = o, \tag{8}$$

гдѣ членъ, свободный отъ знака интеграла, представляетъ разность значеній функціи $e^{tu}(u^2-4)v$ въ концѣ и началѣ пути интеграціи L. Выберемъ теперь функцію v и путь L подъ условіемъ, чтобы имѣли мѣсто соотношенія:

$$(u^2-4)\frac{dv}{du} - (2\nu-1)\,uv = o; \tag{9}$$

$$\Big|_{L} e^{tu}(u^2-4)\,v = o. \tag{10}$$

Интегрируя уравненія (9), найдемъ:

$$v = (u^2-4)^{\nu-\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

А посему искомое рѣшеніе уравненія (5) напишется слѣдующимъ образомъ:

$$y = \int_L e^{ut}(u^2-4)^{\nu-\frac{1}{2}}\,du. \tag{12}$$

Условіе же (10) представится въ формѣ:

$$\Big|_{L} e^{tu}(u^2-4)^{\nu+\frac{1}{2}} = o. \tag{13}$$

Уравненіе (1′) имѣетъ своимъ интеграломъ выраженіе:

$$y = \int_L e^{u\sqrt{xz}}(u^2-4)^{\nu-\frac{1}{2}}du; \tag{14}$$

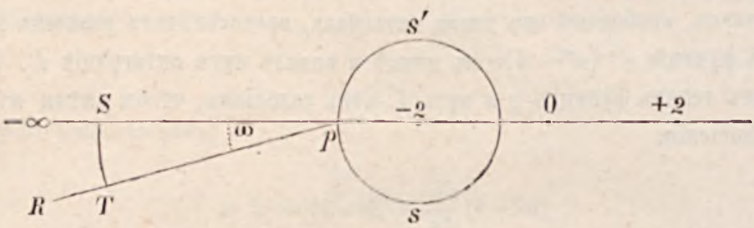
при чемъ

$$\Big|_{L} e^{u\sqrt{xz}}(u^2-4)^{\nu+\frac{1}{2}} = o. \tag{15}$$

Мы не будемъ налагать на ν какія-либо ограниченія,—пусть оно будетъ совершенно произвольнымъ числомъ.

Займемся изысканіемъ путей интеграціи, удовлетворяющихъ условію (15). Вообразимъ петлю безконечной длины, состоящую изъ слѣдующихъ частей: отрѣзка $-\infty p$ дѣйствительной оси плоскости перемѣннаго u, окружности $pss'p$ радіуса, длина котораго меньше разстоянія точки -2 отъ точки $+2$, и, наконецъ, отрѣзка $p-\infty$ дѣйствительной оси. Полагая, что въ началѣ $-\infty$ этой петли аргументы перемѣнныхъ u, $u-2$ и $u+2$ удовлетворяютъ условію:

Чер. 1.



$$arg\,u = arg\,(u-2) = arg\,(u+2) = \pi, \tag{16}$$

выберемъ ее за путь L, считая на немъ то направленіе положительнымъ, въ которомъ мы отсчитывали его части.

Если далѣе примемъ, что

$$-\pi \angle\, arg\,(xz) \angle +\pi, \tag{17}$$

то требованіе (15) выборомъ пути L будетъ выполнено, ибо въ началѣ и концѣ его функція

$$\alpha(u) = e^{u\sqrt{xz}}(u^2-4)^{\nu-\frac{1}{2}} \tag{18}$$

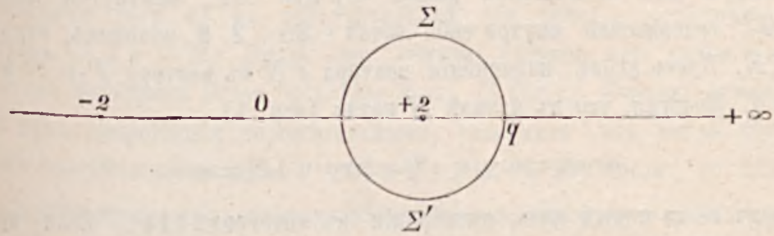
обращается въ нуль. Интегралъ отъ $\alpha(u)\,du$, взятый по построенному пути въ положительномъ направленіи, назовемъ такъ:

$$y_1 = \int_{-\infty}^{(-2)} \alpha(u)\,du. \tag{19}$$

Выраженіе (19) представляетъ частное рѣшеніе уравненія (1′).

Для нахожденія второго частнаго рѣшенія этого уравненія, поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Строимъ безконечнаго размѣра петлю, состоящую изъ слѣдующихъ частей: отрѣзка $+\infty q$ дѣйствительной оси, окружности $q\Sigma\Sigma' q$ радіуса, длина котораго меньше разстоянія

Чер. 2.



точки $+2$ отъ точки -2, и, наконецъ, отрѣзка $q+\infty$. Пусть направленіе, въ которомъ отсчитывались части петли, будетъ положительнымъ. Полагая, что въ началѣ $+\infty$ петли

$$arg\, u = arg\,(u-2) = arg\,(u+2) = o \tag{20}$$

примемъ петлю за путь интеграціи въ интегралѣ (14). Условіе (15) будетъ удовлетворено, если

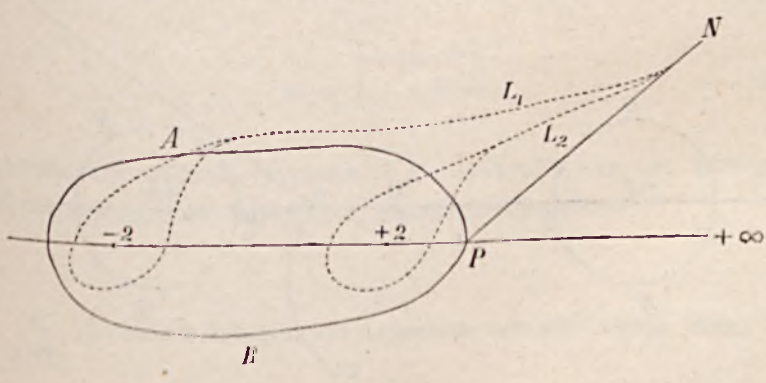
$$+\pi \angle arg\,(xz) \angle +3\pi. \tag{21}$$

Интегралъ отъ $\alpha\,(u)\,du$, взятый при этихъ условіяхъ по построенному пути въ положительномъ направленіи, обозначимъ такъ:

$$y_2 = \int_{+\infty}^{(+2)} \alpha\,(u)\,du. \tag{22}$$

Это будетъ вторымъ частнымъ рѣшеніемъ уравненія (1′).

Чер. 3.



Въ интегралахъ (19) и (22) пути интеграціи представляютъ простыя петли, т. е., содержащія внутри себя по одной изъ особыхъ конечныхъ точекъ функціи $\alpha(u)$. Но вообразимъ теперь сложную петлю, состоящую изъ безконечной длины отрѣзка NP, замкнутой линіи $PABP$, содержащей внутри себя точки $-2u+2$, и, наконецъ, отрѣзка PN. Пусть уголъ наклоненія вектора PN къ вектору $P+\infty$ будетъ α. Полагая, что въ началѣ N петли (чер. 3)

$$arg\, u = arg\,(u-2) = arg\,(u+2) = \alpha, \tag{23}$$

примемъ ее за новый путь интеграціи въ интегралѣ (14). Если при этомъ

$$+\pi-2\alpha < arg\,(xz) < +3\pi-2\alpha, \tag{24}$$

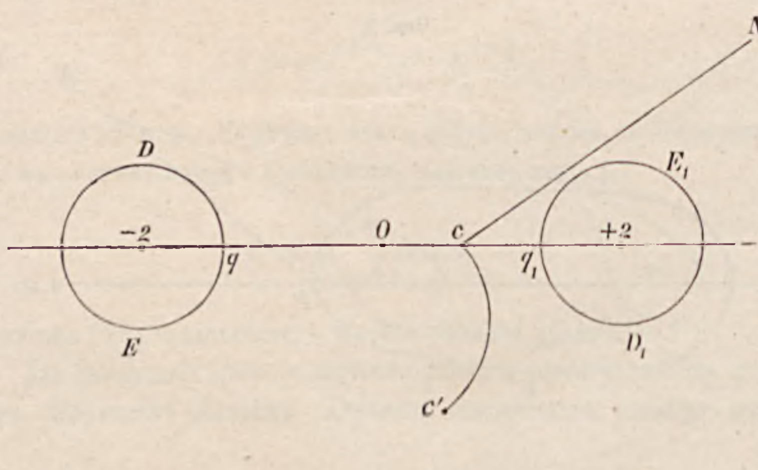
то построенный путь удовлетворяетъ условію (15) и, слѣдовательно, интегралъ отъ $\alpha(u)\,du$, взятый по пути $NPABPN$ при означенныхъ условіяхъ, который мы назовемъ такъ:

$$y_3 = \int_N^{(-2+2)} \alpha(u)\,du, \tag{25}$$

представляетъ рѣшеніе уравненія (1′).

Изысканные пути интеграціи обладаютъ однимъ общимъ свойствомъ, — начало и конецъ каждаго изъ нихъ совпадаетъ съ точкой $u=\infty$. Но можно изъ петель конечнаго размѣра составить такой путь, который будетъ удовлетворять условію (15), а интегралъ отъ $\alpha(u)\,du$,

Чер. 4.



взятый по такому пути, будетъ отличенъ отъ нуля. Такой путь, придерживаясь терминологіи Л. Погхаммера [1]), назовемъ путемъ съ двойнымъ обходомъ. Для построенія его поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Отмѣтимъ (чер. 4) на дѣйствительной оси точку c, отличную отъ точекъ -2 и $+2$. Пусть она лежитъ направо отъ точки $u=o$. Потомъ построимъ петли $cqDEqc$ и $cq_1D_1E_1q_1c$. Считая указанныя на нихъ направленія положительными, условимся эти петли обозначать соотвѣтственно такъ: (-2) и $(+2)$. Тѣ же петли, но взятыя въ противоположныхъ направленіяхъ, будемъ обозначать такъ: $(\overline{-2})$, $(\overline{+2})$. Изъ этихъ петель составимъ слѣдующую комбинацію:

$$\Lambda=(-2)+(+2)+(\overline{-2})+(\overline{+2}). \tag{26}$$

Эту сложную линію условимся короче обозначать такимъ образомъ:

$$\Lambda=(-2+2-\overline{2}+\overline{2}). \tag{27}$$

Пусть далѣе:

$$\begin{aligned} arg c &= arg\,(c+2)=o; \\ arg\,(c-2) &= \pi. \end{aligned} \tag{28}$$

При этихъ условіяхъ, функція $\alpha(u)$ въ началѣ и концѣ пути Λ принимаетъ одно и то же значеніе; а потому условіе (15) выполняется. Вслѣдствіе этого интегралъ отъ $\alpha(u)\,du$, взятый по пути Λ, который мы условимся обозначать такъ:

$$y_4=\int_c^{(-2+2-\overline{2}+\overline{2})} \alpha(u)\,du, \tag{29}$$

представляетъ рѣшеніе уравненія (1'). Замѣтимъ, что въ интегралѣ (29) на $arg\,(xz)$ не полагается никакихъ ограниченій.

---

[1]) „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf". Math. Ann., Bd. 35, 1890.

Обнаружимъ теперь, что, при постоянномъ xz, интегралъ y_4 (29) сохранитъ свое значеніе, если начало c его пути перемѣстится въ какую-либо конечную точку плоскости перемѣннаго u, отличную отъ точекъ -2 и $+2$. Въ самомъ дѣлѣ, пусть c' (чер. 4) будетъ таковой точкой. Соединимъ точку c' съ c при помощи отрѣзка $c'c=l$. Полагаемъ, что $arg c'$, $arg\,(c'+2)$ и $arg\,(c'-2)$ таковы, что они получаются соотвѣтственно изъ $arg c$, $arg\,(c+2)$ и $arg\,(c-2)$ черезъ перемѣщеніе точки c по отрѣзку cc' отъ первоначальнаго ея положенія до совпаденія съ точкой c'. Ясно, что путь $(-2+2-\overline{2}+\overline{2})$ въ интегралѣ (24) можно замѣнить слѣдующей комбинаціей: $l(-2)\,l^{-1}$ $l(+2)l^{-1}l(-\overline{2})\,l^{-1}l(+\overline{2})\,l^{-1}$, гдѣ черезъ l^{-1} обозначенъ отрѣзокъ cc'. Если теперь введемъ обозначенія:

$$
(30)\qquad
\begin{aligned}
l(-2)\,l^{-1} &= s\,;\\
l(+2)\,l^{-1} &= s_1\,,
\end{aligned}
$$

то, выражая возможность замѣны знакомъ $=$, можемъ написать:

$$(31)\qquad (-2+2-\overline{2}+\overline{2}) = (s\,s_1\,\overline{s}\,\overline{s}_1).$$

А посему имѣемъ

$$(32)\qquad \int_{c'}^{(ss_1\,\overline{s}\,\overline{s}_1)} \alpha(u)\,du = \int_{c}^{(-2+2-\overline{2}+\overline{2})} \alpha(u)\,du.$$

Такимъ образомъ требуемое доказано.

Изъ хода доказательства этого положенія ясно слѣдуетъ, что точку c можно удалить также и въ безконечность при условіи, что въ безконечности

$$(33)\qquad +\pi-2\,arg c \angle arg(xz) \angle +3\pi-2\,arg c.$$

Каждый изъ интеграловъ y_1, y_2, y_3 и y_4 удовлетворяетъ также и второму уравненію (1). Въ этомъ можно убѣдиться по способу повѣрки.

§ 2.

Продолженіе интеграловъ предыдущаго параграфа. Ихъ линейная зависимость.

Остановимся предварительно на интегралѣ y_1 (19). Этотъ интегралъ имѣетъ смыслъ, пока $arg\ (xz)$ содержится въ промежуткѣ (17) или вообще въ промежуткѣ:

$$(4k-1)\pi < arg\,(xz) < (4k+1)\pi, \tag{34}$$

гдѣ k любое положительное или отрицательное цѣлое число. Но, измѣняя положеніе прямолинейныхъ частей пути интеграціи, можно продолжить разсматриваемый интегралъ.

Мы будемъ говорить лишь о промежуткѣ (17). Вообразимъ, что отрѣзокъ $-\infty p$ повернулся около точки p противъ движенія часовой стрѣлки на уголъ $\omega < \frac{\pi}{2}$ (чер. 1) и занялъ положеніе вектора Rp. Путь $-\infty p s s' p - \infty$ перейдетъ въ $Rpss'pR$; при чемъ въ началѣ R послѣдняго

$$arg\,u = arg\,(u-2) = arg\,(u+2) = \pi + \omega. \tag{35}$$

Интегралъ отъ $\alpha\ (u)\ du$, взятый по пути $Rpss'pR$, обозначимъ такъ:

$$y_1' = \int_R^{(-2)} \alpha\,(u)\,du; \tag{36}$$

при чемъ

$$-\pi - 2\omega < arg\,(xz) < +\pi - 2\omega. \tag{37}$$

Такъ какъ $2\omega < \pi$, то неравенства (17) и (37) имѣютъ общія рѣшенія, или, какъ иногда впредь будемъ говорить, областямъ (17) и (37) измѣненія перемѣннаго $arg\,(xz)$ принадлежитъ общая область. Назовемъ эту послѣднюю Σ. Обнаружимъ теперь, что въ области Σ имѣетъ мѣсто равенство:

$$y_1' = y_1. \tag{38}$$

Для доказательства справедливости этого поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Имѣемъ прежде всего:

$$(39)\qquad \begin{aligned} y_1 &= \left(1+e^{2\pi\nu i}\right)\int_{-\infty}^{p} \alpha(u)\,du + \int_{(-2)} \alpha(u)\,du; \\ y_1' &= \left(1+e^{2\pi\nu i}\right)\int_{R}^{p} \alpha(u)\,du + \int_{(-2)} \alpha(u)\,du, \end{aligned}$$

гдѣ черезъ $\int_{(-2)} \alpha(u)\,du$ обозначенъ интегралъ отъ $\alpha(u)\,du$, взятый по окружности $pss'p$.

Изъ соотношеній (39) находимъ:

$$(40)\qquad y_1' = y_1 + \left(1+e^{2\pi\nu i}\right)\left[\int_{R}^{p} \alpha(u)\,du - \int_{-\infty}^{p} \alpha(u)\,du\right].$$

Чтобы убѣдиться, что выраженіе въ скобкахъ [ ] въ правой части соотношенія (40) есть нуль, прибѣгаемъ къ слѣдующему пріему. Изъ точки o, какъ центра, опишемъ окружность радіусомъ, длина котораго больше разстоянія точки o отъ p (чер. 1). Обозначимъ черезъ ST дугу этой окружности, заключенную внутри угла $-\infty\, p\, R$. По извѣстной теоремѣ Коши имѣемъ:

$$(41)\qquad \int_{p}^{S} \alpha(u)\,du + \int_{S}^{T} \alpha(u)\,du + \int_{T}^{p} \alpha(u)\,du = o.$$

Станемъ теперь радіусъ окружности увеличивать до безконечности. Такъ какъ $|\alpha(u)|$ въ области Σ, начиная съ нѣкотораго значенія $|u| = r$, убываетъ быстрѣе, чѣмъ $\frac{1}{u^{\sigma_1}}$, гдѣ σ_1 представляетъ положительное число, большее единицы, то соотношеніе (41) сохранитъ силу и въ предѣлѣ. А посему:

$$(42)\qquad \lim \int_{p}^{S} \alpha(u)\,du + \lim \int_{S}^{T} \alpha(u)\,du + \lim \int^{p} \alpha(u)\,du = o.$$

Но

$$\lim \int_{P}^{S} \alpha(u)\,du = \int_{P}^{-\infty} \alpha(u)\,du;$$

$$\lim \int_{T}^{P} \alpha(u\,du = \int_{R}^{P} \alpha(u)\,du. \tag{43}$$

Разсмотримъ теперь положеніе окружности въ тотъ моментъ, когда $|u| > r$. Тогда имѣемъ:

$$|\alpha(u)| < \frac{1}{|u|^{\sigma_1}}. \tag{44}$$

Поэтому для разсматриваемаго положенія окружности можемъ написать:

$$\left| \int_{S}^{T} \alpha(u)\,du \right| < \int_{S}^{T} \left| \frac{du}{u^{\sigma_1}} \right|. \tag{45}$$

Пусть положеніе точекъ на окружности опредѣляется такъ:

$$u = Re^{\Phi i}, \tag{46}$$

гдѣ R длина радіуса окружности.

Тогда неравенству (45) можно дать форму:

$$\left| \int_{S}^{T} \alpha(u)\,du \right| < \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{R^{\sigma_1 - 1}}, \tag{47}$$

гдѣ Φ_2 и Φ_1 представляютъ соотвѣтственно аргументы точекъ T и S; при чемъ $\Phi_2 - \Phi_1 = \omega$.

Принимая во вниманіе неравенство (47), въ правѣ заключить, что

$$\lim \int_{S}^{T} \alpha(u)\,du = o. \tag{48}$$

Въ силу результатовъ (43) и (48), соотношеніе (42) представимъ въ слѣдующей формѣ:

$$\int^{-\infty} \alpha(u)\,du + \int_{R}^{P} \alpha(u)\,du = o, \tag{49}$$

или:

$$(50)\qquad \int_R \alpha(u)\,du - \int_{-\infty}^{p} \alpha(u)\,du = o.$$

Имѣя въ виду формулу (50), изъ соотношенія (40) заключаемъ о справедливости равенства (38).

Такимъ образомъ убѣждаемся, что функціи y_1 и y_1' въ области Σ совпадаютъ. А посему внѣ этой области каждая изъ нихъ представляетъ продолженіе другой. Повернемъ далѣе векторъ Rp въ томъ же направленіи около точки p на уголъ $\omega' < \frac{\pi}{2}$ и въ новомъ положеніи обозначимъ его черезъ $R'p$. Тогда интегралъ y_1' обратится въ слѣдующій:

$$(51)\qquad y_1'' = \int_{R'}^{(-2)} \alpha(u)\,du;$$

при чемъ

$$(52)\qquad -\pi - 2\omega - 2\omega' < arg(xz) < +\pi - 2\omega - 2\omega'.$$

Такъ какъ области (37) и (52) имѣютъ общую область измѣняемости перемѣннаго $arg\,(xz)$, то по вышеизложенному способу можно доказать, что въ этой послѣдней функціи y_1' и y_1'' совпадаютъ. На основаніи этого заключаемъ, что y_1' и y_1'' представляютъ внѣ этой области продолженіе другъ друга. А такъ какъ y_1' есть продолженіе функціи y_1, то и y_1'' есть продолженіе y_1.

Продолжая поворачивать векторъ Rp около p въ одномъ и томъ же направленіи, мы будемъ получать все новыя и новыя продолженія интеграла y_1, пока векторъ Rp не достигнетъ положенія вектора $p + \infty$. Изъ неравенствъ (17), (37), (52) и имъ подобныхъ ясно, что $arg\,(xz)$ во время вращенія вектора все время убываетъ, не выходя изъ границъ:

$$(53)\qquad -3\pi + \varepsilon < arg\,(xz) < +\pi,$$

гдѣ ε весьма малое положительное число, отличное отъ нуля.
Вращая векторъ $-\infty p$ около точки p по стрѣлкѣ часовъ, мы будемъ получать новыя продолженія функціи y_1, пока векторъ не придетъ въ совпаденіе съ векторомъ $p + \infty$. При такомъ вращеніи вектора, $arg\,(xz)$ все время возрастаетъ, не выходя изъ предѣловъ:

$$(54)\qquad -\pi < arg(xz) < 3\pi - \varepsilon.$$

Области (53) и (54) измѣняемости $arg\,(xz)$ будемъ называть областями продолженія интеграла y_1. Полную область продолженія этого интеграла можемъ опредѣлить такъ:

$$-3\pi+\varepsilon < arg\,(xz) < +3\pi-\varepsilon. \tag{55}$$

Обратимся теперь къ интегралу y_2 (22). Онъ имѣетъ смыслъ, пока $arg\,(xz)$ содержится въ промежуткѣ (21) или вообще въ промежуткѣ:

$$(4\,k+1)\,\pi < arg\,(xz) < (4\,k+3)\,\pi, \tag{56}$$

гдѣ k любое положительное или отрицательное цѣлое число. Мы будемъ предполагать, что $arg\,(xz)$ содержится въ границахъ (21).

Интегралъ y_2 можетъ быть продолженъ по пріему, выясненному по отношенію къ интегралу y_1. При этомъ полная область его продолженія опредѣляется неравенствами:

$$-\pi+\varepsilon < arg\,(xz) < +5\,\pi-\varepsilon. \tag{57}$$

По тому же пріему можетъ быть продолженъ и интегралъ y_3 (25).

Функцію y_3 мы можемъ представить слѣдующимъ образомъ:

$$y_3 = \\ = \int_{L_1} \alpha(u)\,du - e^{2\pi\nu i} \int_{L_2} \alpha(u)\,du, \tag{58}$$

гдѣ L_1 и L_2 (чер. 3) суть простыя петли съ началомъ въ точкѣ N, изъ которыхъ первая огибаетъ точку -2, а другая точку $+2$.

Но можно написать:

$$\int_{L_1} \alpha(u)\,du = \int_N^{(-2)} \alpha(u)\,du;$$
$$\int_{L_2} \alpha(u)\,du = \int_N^{(+2)} \alpha(u)\,du. \tag{59}$$

А посему имѣемъ:

$$y_3 = \\ = \int_N^{(-2)} \alpha(u)\,du - e^{2\pi\nu i} \int_N^{(+2)} \alpha(u)\,du. \tag{60}$$

Проведемъ далѣе изъ точки c (чер. 4) въ направленіи къ точкѣ N векторъ и обозначимъ безконечной длины отрѣзокъ Nc черезъ s. Тотъ же самый отрѣзокъ, отсчитываемый только отъ c къ N, назовемъ s^{-1}. Тогда въ интегралѣ y_4 (29) путь $(-2+2-2+2)$ можно будетъ замѣнить черезъ $(\lambda\ \mu\ \bar{\lambda}\ \bar{\mu})$, гдѣ

(61)
$$\lambda = s(-2)\,s^{-1};$$
$$\mu = s(+2)\,s^{-1}.$$

А потому для всѣхъ значеній $arg\,(xz)$, содержащихся въ промежуткѣ (24), можно написать:

(62)
$$y_4 = \int_N^{(\lambda\,\mu\,\bar{\lambda}\,\bar{\mu})} \alpha(u)\,du.$$

Но

$$\int_N^{(\lambda\,\mu\,\bar{\lambda}\,\bar{\mu})} \alpha(u)\,du =$$

(63)
$$= \left(1+e^{2\pi\nu i}\right) \int_N^{(-2)} \alpha(u)\,du - \left(1+e^{2\pi\nu i}\right) \int_N^{(+2)} \alpha(u)\,du.$$

А посему имѣемъ:

$$y_4 =$$

(64)
$$= \left(1+e^{2\pi\nu i}\right) \int_N^{(-2)} \alpha(u)\,du - \left(1+e^{2\pi\nu i}\right) \int_N^{(+2)} \alpha(u)\,du.$$

Сопоставляя между собою соотношенія (60) и (64), находимъ:

(65)
$$\int_N^{(-2)} \alpha(u)\,du = \frac{\left(1+e^{2\pi\nu i}\right) y_3 - e^{2\pi\nu i}\, y_4}{1-e^{4\pi\nu i}};$$

$$\int_N^{(+2)} \alpha(u)\,du = \frac{\left(1+e^{2\pi\nu i}\right) y_3 - y_4}{1-e^{4\pi\nu i}}.$$

§ 3.

Разложеніе интеграловъ y_3 и y_4 по цѣлымъ положительнымъ степенямъ xz.

Разсмотримъ предварительно интегралъ y_4. Имѣемъ:

$$y_4 = e^{2\sqrt{xz}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(\sqrt{xz})^k}{1\,.\,2\ldots k}, \tag{66}$$

гдѣ

$$S_k = \int_c^{(-2+2-\bar{2}+\bar{2})} (u-2)^{\nu+k-\frac{1}{2}} (u+2)^{\nu-\frac{1}{2}}\, du. \tag{67}$$

Займемся вычисленіемъ интеграла S_k. Полагаемъ въ немъ:

$$u = -2+4t. \tag{68}$$

Будемъ имѣть:

$$S_k = 4^{2\nu+k} \int_{c_1}^{(0\,1\,\bar{0}\,\bar{1})} t^{\nu-\frac{1}{2}} (t-1)^{\nu+k-\frac{1}{2}}\, dt, \tag{69}$$

гдѣ

$$c_1 = \frac{c+2}{4}. \tag{69'}$$

Введемъ далѣе обозначеніе:

$$\bar{B}(a,b) =$$

$$= e^{-\pi(a-1)i} \int_{c_1}^{(1\,0\,\bar{1}\,\bar{0})} t^{a-1} (t-1)^{b-1}\, dt, \tag{70}$$

гдѣ a и b постоянныя числа.

Такъ какъ

$$\int_{c_1}^{(1\,0\,\bar{1}\,\bar{0})} t^{a-1} (t-1)^{b-1}\, dt = -\int_{c_1}^{(0\,1\,\bar{0}\,\bar{1})} t^{a-1} (t-1)^{b-1}\, dt, \tag{71}$$

то

$$(72)\qquad S_k = -4^{2\nu+k} e^{\pi(\nu-\frac{1}{2})i} \bar{B}(\nu+\tfrac{1}{2}, \nu+k+\tfrac{1}{2}).$$

А посему y_4 можно написать въ слѣдующей формѣ:

$$(73)\qquad y_4 = -4^{2\nu} e^{\pi(\nu-\frac{1}{2})i+2\sqrt{xz}} \sum_{k=o}^{\infty} \frac{4^k \bar{B}(\nu+\frac{1}{2}, \nu+k+\frac{1}{2})}{1.2\ldots k} \sqrt{(xz)}^k.$$

Принимая во вниманіе, что

$$(74)\qquad e^{2\sqrt{xz}} = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{(2\sqrt{xz})^k}{1.2\ldots k},$$

функціи y_4 дадимъ слѣдующій видъ:

$$(75)\qquad y_4 = -4^{2\nu} e^{\pi(\nu-\frac{1}{2})i} \sum_{k=o}^{\infty} A_k (\sqrt{xz})^k,$$

гдѣ

$$(76)\qquad A_k = \sum_{p=o}^{k} \frac{2^{2k-p} \bar{B}(\nu+\frac{1}{2}, \nu+k-p+\frac{1}{2})}{1.2\ldots p.1.2.3\ldots(k-p)}.$$

Вычислимъ теперь A_k. Послѣ замѣны $\bar{B}$ $(\nu+\frac{1}{2}, \nu+k-p+\frac{1}{2})$ его интегральнымъ выраженіемъ по формулѣ (70), найдемъ:

$$(77)\qquad A_k = \frac{2^k e^{-\pi(\nu-\frac{1}{2})i}}{1.2\ldots k} \int_{c_1}^{(1 0 \bar{1} \bar{0})} t^{\nu-\frac{1}{2}} (t-1)^{\nu-\frac{1}{2}} (2t-1)^k \, dt.$$

Примѣняя къ интегралу (77) p—кратную интеграцію по частямъ, гдѣ $2p \leqq k$, въ виду особенности пути интеграціи $(1 0 \bar{1} \bar{0})$ будемъ имѣть:

$$(78)\qquad A_k = \frac{2^{k+2p} e^{-\pi(\nu-\frac{1}{2})i} (-1)^p (k-1)(k-3)\ldots(k-2p+1)}{k!\,(2\nu+1)(2\nu+3)\ldots(2\nu+2p-1)} \int_{c_1}^{(1 0 \bar{1} \bar{0})} t^{\nu+p-\frac{1}{2}} (t-1)^{\nu+p-\frac{1}{2}} (2t-1)^{k-2p} dt.$$

Будемъ различать здѣсь два случая: 1) $k=2p$ и 2) $k=2p+1$.

Въ первомъ случаѣ находимъ:

$$A_{2p}=$$
$$=\frac{2^{4p}\,1.3.5\ldots(2p-1)}{2p!\,(2\nu+1)\ldots(2\nu+2p-1)}\,B(\nu+p+\tfrac{1}{2},\,\nu+p-\tfrac{1}{2}). \qquad (79)$$

Для дальнѣйшихъ цѣлей выведемъ одну формулу.

Увеличимъ въ соотношеніи (70) число a на 1. Будемъ имѣть:

$$B(a+1,b)=e^{-\pi ai}\int_{c_1}^{(1\,0\,1\,0)} t^a(t-1)^{b-1}\,dt. \qquad (80)$$

При помощи интеграціи по частямъ въ интегралѣ правой части соотношенія (80), въ виду обозначенія (70), это соотношеніе приводимъ къ виду:

$$B(a+1,b)=-\frac{a}{b}\,B(a+1,b)-\frac{a}{b}\,B(a,b). \qquad (81)$$

Отсюда находимъ:

$$B(a+1,b)=-\frac{a}{a+b}\,B(a,b). \qquad (82)$$

Пользуясь формулой (82), находимъ рядъ равенствъ:

$$\begin{aligned}
B(a+2,b)&=-\frac{a+1}{a+b+1}\,B(a+1,b);\\
B(a+3,b)&=-\frac{a+2}{a+b+2}\,B(a+2,b);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
B(a+m,b)&=-\frac{a+m-1}{a+b+m-1}\,B(a+m-1,b).
\end{aligned} \qquad (83)$$

Послѣ перемноженія равенствъ (82) и (83) получимъ:

$$B(a+m,b)=$$
$$=(-1)^m\,\frac{a(a+1)\ldots(a+m-1)}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+m-1)}\,B(a,b). \qquad (84)$$

Аналогичнымъ образомъ находимъ:

$$B(a, b+q)=$$

(85) $$=(-1)^q \frac{b(b+1)\ldots(b+q-1)}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+q-1)} B(a,b),$$

гдѣ q цѣлое положительное число.

На основаніи формулъ (84) и (85) находимъ:

$$B(a+m, b+q)=$$

(86) $$=(-1)^{m+q} \frac{a(a+1)\ldots(a+m-1)b(b+1)\ldots(b+q-1)}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+q+m-1)} B(a,b).$$

Полагая въ этомъ послѣднемъ соотношеніи: $a=b=\nu+\frac{1}{2}$, $m=q=p$, будемъ имѣть слѣдующій результатъ:

$$B(\nu+p+\tfrac{1}{2}, \nu+p+\tfrac{1}{2})=$$

(87) $$=\frac{(2\nu+1)(2\nu+3)\ldots(2\nu+2p-1)}{2^{3p}(1+\nu)(2+\nu)\ldots(p+\nu)} B(\nu+\tfrac{1}{2}, \nu+\tfrac{1}{2}).$$

Въ виду формулы (87), соотношеніе (79) приведется къ слѣдующему виду:

(88) $$A_{2p}=\frac{B(\nu+\frac{1}{2}, \nu+\frac{1}{2})}{p!\,(1+\nu)(2+\nu)\ldots(p+\nu)}.$$

Разсмотримъ теперь случай, когда $k=2p+1$. Замѣнивъ въ выраженіи (78) для A_k число k его значеніемъ $2p+1$, будемъ имѣть по выполненіи интеграціи:

(89) $$A_{2p+1}=0.$$

Въ силу результатовъ (88) и (89), функцію y_4 (75) можно изобразить въ формѣ:

(90) $$y_4=-4^{2\nu} e^{\pi(\nu-\frac{1}{2})i} B(\nu+\tfrac{1}{2}, \nu+\tfrac{1}{2})\, F(\nu; xz),$$

гдѣ

(91) $$F(\nu; xz)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xz)^k}{k!\,(1+\nu)(2+\nu)\ldots(k+\nu)}.$$

Перейдемъ теперь къ интегралу y_3 (25). Полагаемъ въ немъ:

$$u = -2 + t. \tag{92}$$

Будемъ имѣть:

$$y_3 = e^{-2\sqrt{xz}} \int_N^{(0,4)} e^{t\sqrt{xz}}\, t^{2\nu-1} \left(1 - \frac{4}{t}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} dt. \tag{93}$$

Пусть замкнутая линія (чер. 3), огибающая точки -2 и $+2$, такова, что для всѣхъ ея точекъ $|u+2|$, или, что то же самое, $|t| > 4$. Тогда для всѣхъ точекъ пути интеграціи въ интегралѣ (93) имѣетъ мѣсто:

$$\left(1 - \frac{4}{t}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)^k\, [\nu-\frac{1}{2}]_k}{t^k}, \tag{94}$$

гдѣ

$$[\nu-\tfrac{1}{2}]_k = \frac{(\nu-\frac{1}{2})\,(\nu-\frac{3}{2}) \ldots (\nu-k+\frac{1}{2})}{1 . 2 \ldots k}. \tag{95}$$

Въ виду разложенія (94), соотношеніе (93) можно представить въ формѣ:

$$y_3 = e^{-2\sqrt{xz}} \sum_{k=0}^{\infty} (-4)^k\, [\nu-\tfrac{1}{2}]_k\, J_k, \tag{96}$$

гдѣ

$$J_k = \int_N^{(0)} e^{t\sqrt{xz}}\, t^{2\nu-k-1}\, dt. \tag{97}$$

Вычислимъ интегралъ (97). Полагаемъ въ немъ:

$$t\sqrt{xz} = \zeta. \tag{98}$$

Найдемъ:

$$J_k = (\sqrt{xz})^{k-2\nu} \int_{+\infty\tau}^{(0)} e^{\zeta}\, \zeta^{2\nu-k-1}\, d\zeta, \tag{99}$$

гдѣ

(100) $$\tau=e^{\left(\alpha+\frac{\varphi}{2}\right)i};$$

при чемъ $\varphi = arg\,(xz)$.

Такъ какъ φ содержится въ промежуткѣ (24), то можемъ написать:

(101) $$\varphi=2\pi-2\alpha+\beta,$$

гдѣ

(102) $$-\pi<\beta<+\pi.$$

А посему имѣемъ:

(103) $$J_k=(\sqrt{xz})^{k-2\nu}\int_{-\infty\tau'}^{(o)} e^{\zeta}\zeta^{2\nu-k-1}\,d\zeta,$$

гдѣ

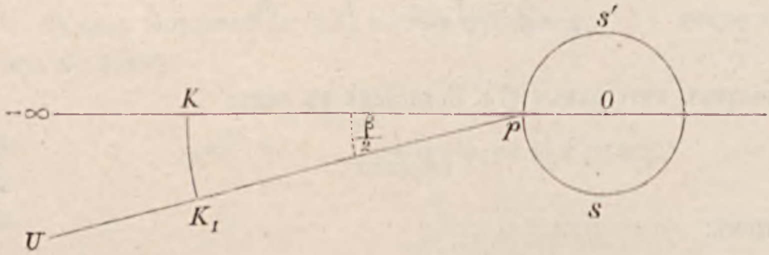
(104) $$\tau'=e^{\frac{\beta i}{2}}.$$

Обнаружимъ теперь, что

(105) $$\int_{-\infty\tau'}^{(o)} e^{\zeta}\zeta^{2\nu-k-1}\,d\zeta=\int_{-\infty}^{(o)} e^{\zeta}\zeta^{2\nu-k-1}\,d\zeta.$$

Путь интеграціи въ интегралѣ правой части соотношенія (105) можно считать состоящимъ изъ слѣдующихъ частей: отрѣзка $-\infty\, p$

Чер. 5.



дѣйствительной оси, окружности $pss'p$ съ центромъ въ точкѣ о и, наконецъ, отрѣзка $p-\infty$. Что же касается до пути интеграціи въ интегралѣ лѣвой части равенства (105), то его можно считать составленнымъ изъ отрѣзка Up, наклоненнаго къ $-\infty p$ подъ угломъ $\frac{\beta}{2}$, окружности $pss'p$ и отрѣзка $p\ U$.

Опишемъ теперь изъ точки o, какъ центра, окружность, радіусъ которой по длинѣ больше разстоянія точки o до p. Пусть эта окружность встрѣчаетъ отрѣзки $-\infty p$ и Up соотвѣтственно въ точкахъ K и K_1. Тогда можемъ написать:

$$\int_p^K e^{\zeta}\zeta^{2\nu-k-1}\,d\zeta+\int_K^{K_1} e^{\zeta}\zeta^{2\nu-k-1}\,d\zeta+\int_{K_1}^p e^{\zeta}\zeta^{2\nu-k-1}\,d\zeta=0. \tag{106}$$

Въ силу тѣхъ же основаній, которыя позволили намъ перейти отъ соотношенія (41) къ равенству (42), можемъ написать:

$$lim.\int_p^K e^{\zeta}\zeta^{2\nu-k-1}\,d\zeta+lim.\int_K^{K_1} e^{\zeta}\zeta^{2\nu-k-1}\,d\zeta+lim.\int_{K_1}^p e^{\zeta}\zeta^{2\nu-k-1}\,d\zeta=0, \tag{107}$$

гдѣ съ $lim.$ связанъ тотъ же смыслъ, какъ и въ соотношеніи (42).

Но

$$lim.\int_p^K e^{\zeta}\zeta^{2\nu-k-1}\,d\zeta=\int_p^{-\infty} e^{\zeta}\zeta^{2\nu-k-1}\,d\zeta;$$

$$lim.\int_{K_1}^p e^{\zeta}\zeta^{2\nu-k-1}\,d\zeta=\int_U^p e^{\zeta}\zeta^{2\nu-k-1}\,d\zeta; \tag{108}$$

$$lim.\int_K^{K_1} e^{\zeta}\zeta^{2\nu-k-1}\,d\zeta=0.$$

Въ виду формулъ (108), соотношеніе (107) обратится въ слѣдующее:

$$\int_p^{-\infty} e^{\zeta}\zeta^{2\nu-k-1}\,d\zeta+\int_U^p e^{\zeta}\zeta^{2\nu-k-1}\,d\zeta=0, \tag{109}$$

или:

$$\int_U^p e^{\zeta}\zeta^{2\nu-k-1}\,d\zeta=\int_{-\infty}^p e^{\zeta}\zeta^{2\nu-l-1}\,d\zeta. \tag{109'}$$

Принимая теперь во вниманіе формулы:

$$\int_{-\infty T'}^{(o)} e^{\zeta} \zeta^{2\nu-k-1} d\zeta =$$

$$= \left(1 - e^{4\pi\nu i}\right) \int_{-\infty T'}^{p} e^{\zeta} \zeta^{2\nu-k-1} d\zeta + \int_{(o)} e^{\zeta} \zeta^{2\nu-k-1} d\zeta;$$

(110) $$\int_{-\infty}^{(o)} e^{\zeta} \zeta^{2\nu-k-1} d\zeta =$$

$$= \left(1 - e^{4\pi\nu i}\right) \int_{-\infty}^{p} e^{\zeta} \zeta^{2\nu-k-1} d\zeta + \int_{(o)} e^{\zeta} \zeta^{2\nu-k-1} d\zeta,$$

гдѣ $\int_{(o)} e^{\zeta} \zeta^{2\nu-k-1} d\zeta$ представляетъ интегралъ отъ $e^{\zeta} \zeta^{2\nu-k-1} d\zeta$, взятый по окружности $pss'p$, а также соотношеніе (109'), заключаемъ о справедливости равенства (105).

Итакъ, имѣемъ:

(111) $$J_k = (\sqrt{xz})^{k-2\nu} \int_{-\infty}^{(o)} e^{\zeta} \zeta^{2\nu-k-1} d\zeta.$$

Введемъ далѣе, согласно Л. Погхаммеру [1]), обозначеніе:

(112) $$\overline{\Gamma}(2\nu-k) = \int_{-\infty}^{(o)} e^{\zeta} \zeta^{2\nu-k-1} d\zeta.$$

Тогда

(112') $$J_k = \overline{\Gamma}(2\nu-k) (\sqrt{xz})^{k-2\nu}.$$

Въ силу результата (111'), функцію y_3 (96) изобразимъ въ слѣдующей формѣ:

(113) $$y_3 = e^{-2\sqrt{xz}} (xz)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-4)^k \left[\nu - \tfrac{1}{2}\right]_k \overline{\Gamma}(2\nu-k) (\sqrt{xz})^k.$$

---

[1]) „Zur Theorie der Euler'schen Integrale“. Math. Ann., Bd. 35, 1890.

Такъ какъ

$$e^{-2\sqrt{xz}} = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{(-2\sqrt{xz})^k}{k!}, \tag{114}$$

то

$$y_3 = (xz)^{-\nu} \sum_{k=o}^{\infty} B_k (\sqrt{xz})^k, \tag{115}$$

гдѣ

$$B_k = (-2)^k \sum_{p=o}^{k} \frac{2^{k-p} [\nu - \frac{1}{2}]_{k-p} \Gamma(2\nu - k + p)}{1 \,.\, 2 \ldots p}. \tag{116}$$

Замѣнивъ $\Gamma(2\nu - k + p)$ ея интегральнымъ выраженіемъ согласно обозначенію (112), B_k можемъ привести къ слѣдующему виду:

$$B_k = $$

$$= (-2)^k \int_{-\infty}^{(0)} e^{\frac{\zeta}{2}} \zeta^{2\nu-1} d\zeta \sum_{p=o}^{k} \frac{2^{k-p} [\nu - \frac{1}{2}]_{k-p}}{p!\, \zeta^{k-p}}. \tag{117}$$

Но

$$k! \sum_{p=}^{k} \frac{2^{k-p} [\nu - \frac{1}{2}]_{k-p}}{p!\, \zeta^{k-p}} = e^{-\frac{\zeta}{2}} \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{-\nu+\frac{1}{2}} \frac{d^k \left[e^{\frac{\zeta}{2}} \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \right]}{d\left(\frac{\zeta}{2}\right)^k}. \tag{118}$$

А посему имѣемъ:

$$B_k = \frac{(-1)^k 2^{k+\nu-\frac{1}{2}}}{k!} \int_{-\infty}^{(0)} e^{\frac{\zeta}{2}} \zeta^{\nu-\frac{1}{2}} \frac{d^k e^{\left[\frac{\zeta}{2}\right.} \left.\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\right]}{d\left(\frac{\zeta}{2}\right)^k} d\zeta. \tag{119}$$

Полагая, что

$$\zeta = 2\eta, \tag{120}$$

будемъ имѣть:

$$B_k = $$

$$= \frac{(-1)^k 2^{2\nu+k}}{k!} \int_{-\infty}^{(0)} e^{\eta} \eta^{\nu-\frac{1}{2}} \frac{d^k \left[e^{\eta} \eta^{\nu-\frac{1}{2}} \right]}{d\eta^k} d\eta. \tag{121}$$

Если $k=2p+1$, то

$$B_{2p+1}=-\frac{2^{2\nu+2p+1}}{(2p+1)!}C_{2p+1}, \tag{122}$$

гдѣ

$$C_{2p+1}=\int_{-\infty}^{(0)} e^{\eta}\,\eta^{\nu-\frac{1}{2}}\,\frac{d^{2p+1}\left[e^{\eta}\,\eta^{\nu-\frac{1}{2}}\right]}{d\eta^{2p+1}}\,d\eta\,. \tag{123}$$

Послѣ $2p+1$ — кратной интеграціи по частямъ въ интегралѣ (123), убѣждаемся въ справедливости равенства:

$$C_{2p+1}=-C_{2p+1}. \tag{124}$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$C_{2p+1}=0. \tag{124'}$$

Изъ соотношенія (122) заключаемъ:

$$B_{2p+1}=0. \tag{125}$$

Въ силу послѣдняго результата, y_3 (115) представимъ въ такомъ видѣ:

$$y_3=(xz)^{-\nu}\sum_{p=0}^{\infty}B_{2p}\,(xz)^p, \tag{126}$$

гдѣ

$$B_{2p}=\frac{2^{2\nu+2p}}{2p!}\int_{-\infty}^{(0)} e^{\eta}\,\eta^{\nu-\frac{1}{2}}\,\frac{d^{2p}\left[e^{\eta}\,\eta^{\nu-\frac{1}{2}}\right]}{d\eta^{2p}}\,d\eta; \tag{127}$$

при этомъ

$$B_0=\Gamma(2\nu). \tag{128}$$

Для нахожденія B_{2p} надо было бы вычислить интегралъ (127). Но можно знать B_{2p}, не прибѣгая къ этому процессу. Для этой цѣли поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Такъ какъ точка $xz=o$ для интеграловъ уравненія (1′) правильная въ смыслѣ Л. Фукса, то ищемъ интегралъ его въ формѣ:

$$y=(xz)^{\sigma}\,P(x), \tag{129}$$

гдѣ

$$P(x) = \sum_{p=o}^{\infty} a_p x^p; \tag{130}$$

при чемъ a_p есть функція z.

Согласно результатамъ Л. Фукса[1]), σ представляетъ одинъ изъ корней уравненія:

$$\sigma(\sigma-1)+(1+\nu)\sigma=0. \tag{131}$$

Отсюда находимъ:

$$\sigma_1 = -\nu, \; \sigma_2 = 0. \tag{132}$$

Итакъ, мы имѣемъ единственное рѣшеніе уравненія $(1')$, принадлежащее къ показателю $-\nu$:

$$y = (xz)^{-\nu} \sum_{p=o}^{\infty} a_p x^p. \tag{133}$$

Для опредѣленія a_p находимъ формулу:

$$(p+1)(p+1-\nu)\, a_{p+1} = a_p z. \tag{134}$$

Давая въ ней p значенія: $0, 1, 2, \ldots, p-1$, будемъ имѣть:

$$\begin{gathered} 1\,(1-\nu)\, a_1 = a_0 z; \\ 2\,(2-\nu)\, a_2 = a_1 z; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p\,(p-\nu)\, a_p = a_{p-1} z. \end{gathered} \tag{135}$$

Послѣ перемноженія этихъ равенствъ найдемъ:

$$p!\,(1-\nu)(2-\nu)\ldots(p-\nu)\, a_p = a_0 z^p. \tag{136}$$

[1]) Crelle's J., Bd. 66, 1866, стр. 147.

Отсюда находимъ:

(137) $$a^p = \frac{a_0 z^p}{p!(1-\nu)(2-\nu)\ldots(p-\nu)}.$$

Въ силу формулы (137), y представимъ такъ:

(138) $$y = a_0 (xz)^{-\nu} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(xz)^p}{p!(1-\nu)(2-\nu)\ldots(p-\nu)}.$$

Отожествляя функціи y_3 и y, находимъ:

(139) $$B_{2p} = \frac{a_0}{p!(1-\nu)(2-\nu)\ldots(p-\nu)}.$$

Но изъ соотношенія:

(140) $$\lim_{xz=o} (xz)^{\nu} y = \lim_{xz=o} (xz)^{\nu} y_3$$

слѣдуетъ, что

(141) $$a_0 = \overline{\Gamma}(2\nu).$$

Итакъ:

(142) $$B_{2p} = \frac{\Gamma(2\nu)}{p!(1-\nu)(2-\nu)\ldots(p-\nu)};$$

(143) $$y_3 = \overline{\Gamma}(2\nu)\ (xz)^{-\nu}\ F(-\nu; xz).$$

§ 4.

Опредѣленіе функцій $\omega(\nu; xz)$ и $\omega_1(\nu; xz)$. Преобразованіе ихъ интегральныхъ выраженій къ особымъ формамъ.

Замѣнимъ въ правыхъ частяхъ соотношеній (65) функціи y_3 и y_4 ихъ выраженіями (143) и (90). Тогда получимъ:

$$\int_N^{(-2)} \alpha(u)\,du =$$

$$= \frac{(1+e^{2\pi\nu i})\overline{\Gamma}(2\nu)\,(xz)^{-\nu}\,F(-\nu;xz) - i\,4^{2\nu}e^{3\pi\nu i}\,\overline{B}(\nu+\tfrac{1}{2};\nu+\tfrac{1}{2})\,F(\nu;xz)}{1-e^{4\pi\nu i}};$$

$$(144)$$

$$\int_N^{(+2)} \alpha(u)\,du =$$

$$= \frac{(1+e^{2\pi\nu i})\,\overline{\Gamma}(2\nu)\,(xz)^{-\nu}\,F(-\nu;xz) - i\,4^{2\nu}e^{\pi\nu i}\,\overline{B}(\nu+\tfrac{1}{2},\nu+\tfrac{1}{2})\,F(\nu;xz)}{1-e^{4\pi\nu i}}.$$

Постараемся теперь упростить правыя части равенствъ (144). Для этой цѣли обнаружимъ справедливость тождества:

$$S =$$

$$= e^{-\pi\nu i}\frac{\overline{\Gamma}(2\nu)}{\overline{\Gamma}(\nu)} + \frac{i\,4^{2\nu}\,\overline{B}(\nu+\frac{1}{2},\nu+\frac{1}{2})}{\overline{\Gamma}(-\nu)\,(1+e^{2\pi\nu i})} = 0. \qquad (145)$$

При доказательствѣ мы будемъ пользоваться слѣдующими формулами, которыя мы беремъ изъ вышеупомянутой работы Л. Погхаммера: „Zur Theorie der Euler'schen Integrale“:

$$\overline{B}(a,b) = \frac{\overline{\Gamma}(a)\,\overline{\Gamma}(b)}{\overline{\Gamma}(a+b)}.$$

$$\overline{\Gamma}(a)\,\overline{\Gamma}(-a) = -\frac{4\pi\sin\pi a}{a}; \qquad (146)$$

$$\overline{\Gamma}(a) = \frac{2\pi i}{\Gamma(1-a)}.$$

Пользуясь первой изъ формулъ (146), находимъ:

$$\overline{B}(\nu+\tfrac{1}{2},\nu+\tfrac{1}{2}) = \frac{[\overline{\Gamma}(\nu+\frac{1}{2})]^2}{\overline{\Gamma}(2\nu+1)}. \qquad (147)$$

Въ силу послѣдней формулы, имѣемъ:

$$S =$$

$$= e^{-\pi\nu i}\frac{\overline{\Gamma}(2\nu)}{\overline{\Gamma}(\nu)} + \frac{i\,4^{\nu}\,[\overline{\Gamma}(\nu+\frac{1}{2})]^2}{\overline{\Gamma}(-\nu)\,\overline{\Gamma}(2\nu+1)\,(1+e^{2\pi\nu i})}. \qquad (148)$$

Благодаря второй формулѣ (146), S дадимъ слѣдующій видъ:

$$S=$$

(149) $$=\frac{e^{-\pi\nu i}}{\Gamma(\nu)}\left[\Gamma(2\nu)-\frac{i\,4^{2\nu}\left[\Gamma(\nu)\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\right]^2}{8\pi\sin 2\pi\nu\,\Gamma(2\nu)}\right].$$

На основаніи третьей формулы (146) находимъ:

(150) $$\Gamma(\nu)\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})=\frac{(2\pi i)^2}{\Gamma(1-\nu)\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)}.$$

Далѣе, по извѣстной формулѣ въ теоріи функціи $\Gamma(a)$ находимъ:

(151) $$\Gamma(1-\nu)\Gamma(\tfrac{1}{2}-\nu)=-\nu\sqrt{2\pi}\,2^{2\nu+\frac{1}{2}}\,\Gamma(-2\nu).$$

Въ виду формулы (151), соотношеніе (150) напишемъ такъ:

(152) $$\Gamma(\nu)\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})=\frac{4\pi i\,\Gamma(2\nu)}{2^{2\nu+1}\sqrt{\pi}}.$$

Принимая во вниманіе послѣднюю формулу, S представимъ слѣдующимъ образомъ:

$$S=$$

(153) $$=\frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu)}e^{-\pi\nu i}\left[1+\frac{i\,\Gamma(2\nu)}{2\sin 2\pi\nu\,\Gamma(2\nu)}\right].$$

Но легко видѣть, что выраженіе въ скобкахъ [ ] равно нулю. Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

(154) $$\Gamma(2\nu)=\frac{2\pi i}{\Gamma(1-2\nu)}.$$

А посему

(155) $$1+\frac{i\,\Gamma(2\nu)}{2\sin 2\pi\nu\,\Gamma(2\nu)}=1-\frac{\pi}{\Gamma(2\nu)\Gamma(1-2\nu)\sin 2\pi\nu}.$$

Вторая часть этого равенства есть нуль по извѣстной формулѣ, относящейся къ функціи $\Gamma(a)$.

Исключивъ теперь изъ выраженій (144) $B(\nu+\frac{1}{2}, \nu+\frac{1}{2})$ при помощи соотношенія (145), будемъ имѣть:

$$\int_N^{(-2)} \alpha(u)\,du =$$
$$= \frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu)} \left[\frac{\Gamma(\nu)(xz)^{-\nu} F(-\nu; xz) + e^{2\pi\nu i}\,\Gamma(-\nu)\,F(\nu; xz)}{1-e^{2\pi\nu i}} \right];$$

$$\int_N^{(+2)} \alpha(u)\,du = \tag{156}$$
$$= \frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu)} \left[\frac{\Gamma(\nu)(xz)^{-\nu} F(-\nu; xz) + \Gamma(-\nu)\,F(\nu; xz)}{1-e^{2\pi\nu i}} \right].$$

Введемъ далѣе обозначенія:

$$\omega(\nu; xz) =$$
$$= \frac{\Gamma(\nu)(xz)^{-\nu} F(-\nu; xz) + e^{2\pi\nu i}\,\Gamma(-\nu)\,F(\nu; xz)}{1-e^{2\pi\nu i}};$$

$$\omega_1(\nu; xz) = \tag{157}$$
$$= \frac{\Gamma(\nu)(xz)^{-\nu} F(-\nu; xz) + \Gamma(-\nu)\,F(\nu; xz)}{1-e^{2\pi\nu i}}.$$

Тогда соотношенія (156) можемъ написать въ формѣ:

$$\omega(\nu; xz) = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(2\nu)} \int_N^{(-2)} \alpha(u)\,du;$$

$$\tag{158}$$

$$\omega_1(\nu; xz) = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(2\nu)} \int_N^{(+2)} \alpha(u)\,du.$$

Каждый изъ интеграловъ правыхъ частей соотношеній (158) можно замѣнить его продолженіями, о которыхъ шла рѣчь въ § 2. Въ частности имѣемъ:

$$\omega(\nu; xz) = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(2\nu)} \int_{-\infty}^{(-2)} \alpha(u)\,du;$$

(159)

$$\omega_1(\nu; xz) = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(2\nu)} \int_{+\infty}^{(+2)} \alpha(u)\,du.$$

Выраженія (158) для функцій $\omega(\nu; xz)$ и $\omega_1(\nu; xz)$ можно привести къ такимъ видамъ, изъ которыхъ легко можно будетъ сдѣлать заключеніе о характерѣ этихъ функцій для весьма большихъ значеній $|xz|$. Займемся сперва преобразованіемъ перваго изъ интеграловъ (158). Полагаемъ въ немъ:

(160) $$u = -2 + t.$$

Будемъ имѣть:

$$\omega(\nu; xz) =$$

(161) $$= \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(2\nu)} e^{-2\sqrt{xz}} \int_N^{(0)} e^{t\sqrt{xz}}\, t^{\nu-\frac{1}{2}} (t-4)^{\nu-\frac{1}{2}}\, dt,$$

гдѣ прямолинейныя части пути интеграціи состоятъ изъ отрѣзковъ: $N(p+2)$ и $(p+2)N$.

Пусть будетъ далѣе:

(162) $$t\sqrt{xz} = \tau.$$

Соотношеніе (161) представимъ тогда въ формѣ:

$$\omega(\nu; xz) =$$

(163) $$= A(\sqrt{xz})^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{-2\sqrt{xz}} \int_{N'}^{(0)} e^{\tau}\, \tau^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\tau}{4\sqrt{xz}}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} d\tau,$$

гдѣ

(164) $$A = \frac{4^{\nu-\frac{1}{2}}\, e^{\pi(\nu-\frac{1}{2})i}\, \Gamma(\nu)}{\Gamma(2\nu)};$$

(164') $$N' = +\infty\, e^{(\alpha+\frac{\psi}{2})i};$$

при чемъ $\varphi = arg\,(xz)$.

Замѣнимъ φ его значеніемъ (101). Будемъ имѣть:

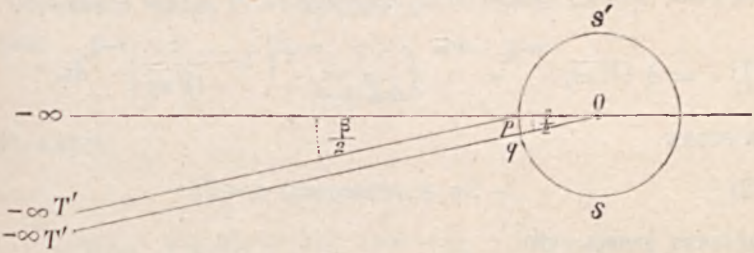
$$\omega\,(\nu;\,xz) =$$
$$= A\,(\sqrt{xz})^{-\nu-\frac{1}{2}}\, e^{-2\sqrt{xz}} \int_{-\infty T'}^{(o)} e^{\tau}\, \tau^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\tau}{4\sqrt{xz}}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} d\tau, \qquad (165)$$

гдѣ T' опредѣляется формулой (104).

Будемъ различать здѣсь два случая: 1) β число положительное и 2) оно есть число отрицательное.

Въ первомъ случаѣ путь интеграціи въ интегралѣ (165) имѣетъ такое расположеніе: $-\infty\,T'qss'q-\infty\,T'$.

Чер. 6.



Построимъ путь $-\infty\,pss'\,p-\infty$ и изслѣдуемъ, при какихъ значеніяхъ α функція $1 - \frac{\tau}{4\sqrt{xz}}$ не обращается въ нуль внутри угла $-\infty\,T'o-\infty$. Для точекъ этого угла имѣемъ:

$$\tau = r\,e^{(\pi+\frac{\beta}{2}-\varepsilon')i}, \qquad (166)$$

гдѣ

$$o \leqq \varepsilon' \leqq \frac{\beta}{2}. \qquad (167)$$

Далѣе:

$$zx = \rho\,e^{(2\pi-2\alpha+\beta)i}. \qquad (168)$$

А посему

$$1 - \frac{\tau}{4\sqrt{zx}} = 1 - \frac{r e^{(\alpha-\varepsilon')i}}{4\sqrt{\rho}} \qquad (169)$$

для всѣхъ точекъ разсматриваемаго угла. Значитъ, выраженіе (169) не можетъ обратиться въ нуль, если

$$\frac{\pi}{2} \leq \alpha < 2\pi. \tag{170}$$

Итакъ, пусть α удовлетворяетъ условію (170). Вообразимъ теперь, что изъ точки p (чер. 6) проведенъ векторъ $p - \infty T''$, параллельный отрѣзку $q - \infty T'$. Такъ какъ петли $-\infty T' qss'q - \infty T''$ и $-\infty T'' pss'p - \infty T'$ имѣютъ общую точку $-\infty T''$, то интегралъ (165) останется безъ перемѣны, если въ немъ путь интеграціи замѣнимъ путемъ $-\infty T'' pss'p - \infty T''$. Пользуясь потомъ тѣми же соображеніями, которыя позволили намъ установить равенство (105), приходимъ къ такому результату:

$$\omega(\nu; xz) =$$

$$= A\left(\sqrt{xz}\right)^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{-2\sqrt{xz}} \int_{-\infty}^{(o)} e^{\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\tau}{4\sqrt{xz}}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} d\tau. \tag{171}$$

При этомъ

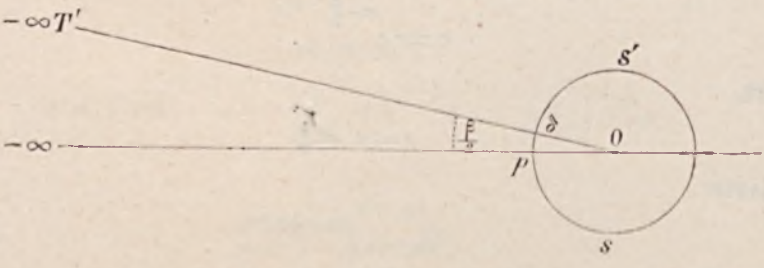
$$-3\pi + \varepsilon < arg(xz) < +2\pi. \tag{172}$$

Допустимъ теперь, что

$$-\pi < \beta \leq o. \tag{173}$$

Тогда путь интеграціи въ интегралѣ (165) займетъ расположеніе пути $-\infty T'' \delta ss'\delta - \infty T''$ (чер. 7).

Чер. 7.



Если ε' есть число, удовлетворяющее условію:

$$\frac{\beta}{2} \leq \varepsilon' \leq o, \tag{174}$$

то для точекъ, лежащихъ внутри угла $-\infty o - \infty T'$, справедливо равенство (169). При чемъ выраженіе правой его части всегда отлично отъ нуля, если

$$o < \alpha \leq \frac{3\pi}{2}. \tag{175}$$

При такихъ значеніяхъ α, имѣетъ силу соотношеніе (171). При этомъ

$$-2\pi < arg\,(xz) < +3\pi - \varepsilon. \tag{176}$$

Соединяя вмѣстѣ неравенства (172) и (176), приходимъ къ заключенію, что соотношеніе (171) сохраняетъ силу для всѣхъ значеній $arg\,(xz)$, содержащихся въ промежуткѣ (55).

Обратимся теперь ко второму изъ интеграловъ (158). Полагаемъ въ немъ:

$$u = 2 + t. \tag{177}$$

Будемъ имѣть:

$$\omega_1(\nu; xz) =$$

$$= \frac{\overline{\Gamma}(\nu)}{\overline{\Gamma}(2\nu)} 4^{\nu-\frac{1}{2}} e^{+2\sqrt{xz}} \int_N^{(o)} e^{t\sqrt{xz}} t^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{t}{4\sqrt{xz}}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} dt. \tag{178}$$

Пользуясь далѣе подстановкой (162), соотношеніе (178) представимъ такъ:

$$\omega_1(\nu; xz) =$$

$$= B\,(\sqrt{xz})^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{+2\sqrt{xz}} \int_{-\infty T'}^{(o)} e^{\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\tau}{4\sqrt{xz}}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} d\tau, \tag{179}$$

гдѣ

$$B = 4^{\nu-\frac{1}{2}} \frac{\overline{\Gamma}(\nu)}{\overline{\Gamma}(2\nu)}. \tag{180}$$

Пусть прежде всего β удовлетворяетъ условію:

$$o \leq \beta < \pi. \tag{181}$$

Тогда для всѣхъ точекъ, лежащихъ внутри угла $-\infty T' o - \infty$ (чер. 6), имѣемъ:

$$1+\frac{\tau}{4\sqrt{xz}}=1+\frac{re^{(\alpha-\varepsilon')i}}{4\sqrt{\rho}}, \tag{182}$$

гдѣ ε' содержится въ границахъ (167).

Отсюда ясно, что $1+\frac{\tau}{4\sqrt{xz}}$ не можетъ быть нулемъ, если

$$o \leqq \alpha < \pi. \tag{183}$$

При такихъ значеніяхъ α, имѣемъ:

$$\omega_1(\nu; xz) = \tag{184}$$
$$= B(\sqrt{xz})^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{+2\sqrt{xz}} \int_{-\infty}^{(o)} e^{\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{\tau}{4\sqrt{xz}}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} d\tau.$$

При этомъ

$$-\pi+\varepsilon < arg\,(xz) < +3\pi. \tag{185}$$

Положимъ теперь, что β содержится въ промежуткѣ (173).

Тогда, разумѣя подъ ε' число, заключенное въ границахъ (174), будемъ имѣть для всѣхъ точекъ угла $-\infty T' o - \infty$ (чер. 7) соотношеніе (182). Такъ какъ здѣсь ε' отрицательно и удовлетворяетъ условію (174), то выраженіе (182) отлично отъ нуля, если

$$-\pi < \alpha \leqq o. \tag{186}$$

Для значеній α, содержащихся въ промежуткѣ (186), справедливо соотношеніе (184). При чемъ

$$+\pi < arg\,(xz) < 5\pi-\varepsilon. \tag{187}$$

Значитъ, соотношеніе (184) имѣетъ мѣсто, если $arg\,(xz)$ содержится въ границахъ (57).

§ 5.

Объ асимптотическихъ представленіяхъ функцій $\omega(\nu; xz)$ и $\omega_1(\nu; xz)$ для весьма большихъ значеній $|xz|$. Замѣчаніе о нуляхъ этихъ функцій въ смежности съ точкой $xz=\infty$. О возмож-

ности дифференцировать асимптотическія представленія функцій $\omega(\nu;\, xz)$ *и* $\omega_1(\nu;\, xz)$.

Интегральныя выраженія (171) и (184) функцій $\omega(\nu;\, xz)$ и $\omega_1(\nu;\, xz)$ весьма пригодны для изысканія асимптотическихъ представленій этихъ функцій въ областяхъ годности этихъ выраженій для весьма большихъ значеній $|xz|$. Остановимся предварительно на выраженіи (171). Полагая, что

$$\frac{\omega(\nu;\, xz)\left(\sqrt{xz}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} e^{+2\sqrt{xz}}}{A} = f(xz), \tag{188}$$

соотношеніе (171) напишемъ такъ:

$$f(xz) = \int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau}\, \tau^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\tau}{4\sqrt{xz}}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} d\tau. \tag{189}$$

Функцію $\left(1 - \frac{\tau}{4\sqrt{xz}}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}$ разлагаемъ въ строку Тэйлора по степенямъ перемѣннаго $\frac{\tau}{\sqrt{xz}}$. Будемъ имѣть:

$$\left(1 - \frac{\tau}{4\sqrt{xz}}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{m} \frac{A_k \tau^k}{\left(\sqrt{xz}\right)^k} + r_m, \tag{190}$$

гдѣ

$$A_k = \frac{(-1)^k\, [\nu-\frac{1}{2}]_k}{4^k}, \tag{191}$$

а r_m остаточный членъ разложенія. Внеся въ интегралъ (189) на мѣсто функціи $\left(1 - \frac{\tau}{4\sqrt{xz}}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}$ ея разложеніе (190), въ виду обозначенія (112) будемъ имѣть:

$$f(xz) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{A_k \overline{\Gamma}(\nu+k+\frac{1}{2})}{\left(\sqrt{xz}\right)^k} + J_m, \tag{192}$$

гдѣ

$$J_m = \int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau}\, \tau^{\nu-\frac{1}{2}}\, r_m\, d\tau. \tag{193}$$

Будемъ подъ p и q разумѣть два цѣлыхъ положительныхъ взаимно простыхъ числа, отношеніе $\frac{p}{q}$ которыхъ меньше $\frac{1}{2}$. Допустимъ, что $|xz|=\rho$ удовлетворяетъ условію:

$$\rho^{\frac{p}{q}-\frac{1}{2}}<4-\Delta, \tag{194}$$

гдѣ Δ какой-угодно малости положительное число, отличное отъ нуля. Если теперь положимъ:

$$\rho^{\frac{p}{q}}=S, \tag{195}$$

то интегралъ J_m можемъ представить въ формѣ:

$$J_m= = (1+e^{2\pi\nu i})\,J'_m+J''_m, \tag{196}$$

гдѣ

$$J'_m=\int_{-\infty}^{-S} e^{\tau}\,\tau^{\nu-\frac{1}{2}}\,r_m\,d\tau;$$

(197)

$$J''_m=\int_{-S}^{(o)} e^{\tau}\,\tau^{\nu-\frac{1}{2}}\,r_m\,d\tau.$$

Остановимся предварительно на вычисленіи интеграла J'_m. Полагая въ немъ:

$$\tau=-\tau'-S, \tag{198}$$

будемъ имѣть:

$$J'_m=e^{\pi(\nu+\frac{1}{2})i-S}\int_{+\infty}^{o} e^{-\tau'}(\tau'+S)^{\nu-\frac{1}{2}}\,\bar{r}_m\,d\tau', \tag{199}$$

гдѣ

$$\bar{r}_m=\left(1+\frac{\tau'+S}{4\sqrt{xz}}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}-\sum_{k=o}^{m}\frac{(-1)^k A_k(\tau'+S)^k}{(\sqrt{xz})^k}. \tag{199'}$$

Обозначимъ черезъ R такое положительное число, что для $\tau' \geqq R$ имѣетъ мѣсто:

$$\left| e^{-\tau'}\left(1+\frac{\tau'}{S}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \bar{r}_m \right| < \frac{1}{\tau'^{\sigma}}, \tag{200}$$

гдѣ σ положительное число, большее единицы. Тогда можемъ написать:

$$J'_m = -e^{\pi\left(\nu+\frac{1}{2}\right)i-S} S^{\nu-\frac{1}{2}} \left[\int_o^R e^{-\tau'}\left(1+\frac{\tau'}{S}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \bar{r}_m d\tau' + \right.$$

$$\left. + \int_R^{+\infty} e^{-\tau'}\left(1+\frac{\tau'}{S}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \bar{r}_m d\tau' \right]. \tag{201}$$

Изъ соотношенія (201) находимъ:

$$|J'_m|$$

$$< e^{-\pi\nu''-S} S^{\nu'-\frac{1}{2}} \left[\int_o^R e^{-\tau'}\left(1+\frac{\tau'}{S}\right)^{\nu'-\frac{1}{2}} |\bar{r}_m| d\tau' + \right.$$

$$\left. + \int_R^{+\infty} e^{-\tau'}\left(1+\frac{\tau'}{S}\right)^{\nu'-\frac{1}{2}} |\bar{r}_m| d\tau' \right]; \tag{202}$$

при чемъ

$$\nu = \nu' + i\,\nu''. \tag{202'}$$

Обозначимъ далѣе черезъ μ_m наибольшее значеніе функціи $|\bar{r}_m|$ для значеній τ' отъ o до R включительно и значеній xz, аргументы которыхъ содержатся въ границахъ (55), а модули удовлетворяютъ условію (194). Принимая тогда во вниманіе неравенство (200), можемъ написать:

$$|J'_m|$$

$$< e^{-\pi\nu''-S} S^{\nu'-\frac{1}{2}} \left[\mu_m \int_o^R e^{-\tau'}\left(1+\frac{\tau'}{S}\right)^{\nu'-\frac{1}{2}} d\tau' + \frac{1}{(\sigma-1)R^{\sigma-1}} \right]. \tag{203}$$

Отсюда заключаемъ, что

$$|J_m'| < \mu'_m S^{\nu'-\frac{1}{2}} e^{-S}, \tag{204}$$

гдѣ μ'_m представляетъ наибольшее значеніе множителя при $e^{-S} S^{\nu'-\frac{1}{2}}$ въ правой части неравенства (203) для всѣхъ значеній ρ, удовлетворяющихъ условію (194). На основаніи неравенства (204) можемъ написать:

(205) $$J'_m = \lambda_m \mu'_m S^{\nu' - \frac{1}{2}} e^{-S},$$

гдѣ λ_m, функція xz, подчинена условію:

(206) $$o < |\lambda_m| < 1.$$

Займемся теперь вычисленіемъ интеграла J''_m. Полагая въ немъ:

(207) $$\tau = -\tau',$$

получимъ:

(208) $$J''_m = e^{\pi(\nu+\frac{1}{2})i} \int_S^{(o)} e^{-\tau'} \tau'^{\nu-\frac{1}{2}} r_{1m}\, d\tau',$$

гдѣ

(209) $$r_{1m} = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^k A_k \tau'^k}{(\sqrt{xz})^k}.$$

Пусть будетъ далѣе δ положительное постоянное число, меньшее каждаго изъ разсматриваемыхъ значеній перемѣннаго числа S. Тогда интегралъ J''_m можно будетъ представить въ слѣдующей формѣ:

(210) $$J''_m = e^{\pi(\nu+\frac{1}{2})i} \left\{ -\left(1 + e^{2\pi\nu i}\right) \int_\delta^S e^{-\tau'} \tau'^{\nu-\frac{1}{2}} r_{1m}\, d\tau' + \int_{\delta(o)} e^{-\tau'} \tau'^{\nu-\frac{1}{2}} r_{1m}\, d\tau' \right\},$$

гдѣ путь интеграціи во второмъ интегралѣ состоитъ изъ окружности, описанной изъ точки o, какъ центра, радіусомъ, длина котораго равна δ; при чемъ начало пути интеграціи совпадаетъ съ точкой δ. Полагая въ этомъ послѣднемъ интегралѣ

(211) $$\tau' = \delta\, e^{\vartheta i},$$

дадимъ J''_m такую форму:

(212) $$J''_m = e^{\pi(\nu+\frac{1}{2})i} \left\{ -\left(1 + e^{2\pi\nu i}\right) \int_\delta^S e^{-\tau'} \tau'^{\nu-\frac{1}{2}} r_{1m}\, d\tau' + i\,\delta^{\nu+\frac{1}{2}} \int_o^{2\pi} e^{-\delta e^{\vartheta i} + (\nu+\frac{1}{2})\vartheta i} r_{1m}\, d\vartheta \right\}.$$

Отсюда находимъ:

$$|J''_m|$$
$$< e^{-\pi\nu''}\left\{\left(1+e^{-2\pi\nu''}\right)\int_{\delta}^{S} e^{-\tau'}\tau'^{\nu'-\frac{1}{2}}|r_{1m}|d\tau' + \right.$$
$$\left. + \delta^{\nu'+\frac{1}{2}}\int_{o}^{2\pi} e^{-\delta\cos\vartheta-\nu''\vartheta}|r_{1m}|d\vartheta\right\}. \tag{213}$$

Но имѣемъ

$$|r_{1m}| < \sum_{k=m+1}^{\infty}|A_k|\left(\frac{|\tau'|}{\sqrt{\rho}}\right)^k$$
$$< M\sum_{k=m+1}^{\infty}\left|\frac{\tau'}{(4-\Delta)\sqrt{\rho}}\right|^k, \tag{214}$$

гдѣ M есть наибольшее значеніе функціи $\left|\left(1-\frac{u}{4}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\right|$ на окружности, описанной изъ точки $u=o$ радіусомъ, равнымъ $4-\Delta$. Такъ какъ внутри означенной окружности $\left|\frac{\tau'}{(4-\Delta)\sqrt{\rho}}\right| < 1$, то можемъ написать:

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}\left|\frac{\tau'}{(4-\Delta)\sqrt{xz}}\right|^k < \frac{\left(\frac{|\tau'|}{(4-\Delta)\sqrt{\rho}}\right)^{m+1}}{1-\frac{\rho^{\frac{p}{q}-\frac{1}{2}}}{4-\Delta}}. \tag{215}$$

Принимая во вниманіе результатъ (215), на основаніи неравенствъ (214) заключаемъ:

$$|r_{1m}| < \frac{M\,|\tau'|^{m+1}}{\left[(4-\Delta)\sqrt{\rho}\right]^{m+1}\left(1-\frac{\rho^{\frac{p}{q}-\frac{1}{2}}}{4-\Delta}\right)}. \tag{216}$$

Замѣняя въ правой части неравенства (213) функцію $|r_{1m}|$ ея верхней границей, опредѣляемой неравенствомъ (216), будемъ имѣть:

$$|J''_m|$$

$$(217)\quad < \frac{e^{-\pi\nu''} M}{\left[(4-\Delta)\sqrt{\rho}\right]^{m+1}\left(1-\frac{\rho^{\frac{p}{q}-\frac{1}{2}}}{4-\Delta}\right)}\left\{\left(1+e^{-2\pi\nu''}\right)\int_\delta^S e^{-\tau'}\tau'^{\,\nu'+m+\frac{1}{2}}\,d\tau'+\right.$$

$$\left.+\,\delta^{\nu'+m+\frac{3}{2}}\int_o^{2\pi} e^{-\delta\cos\vartheta-\nu''\vartheta}\,d\vartheta\right\}.$$

Будемъ подъ M_m разумѣть наибольшее значеніе множителя при $\frac{1}{(\sqrt{\rho})^{m+1}}$ въ правой части неравенства (217) для всѣхъ значеній ρ, удовлетворяющихъ условію (194). Тогда будемъ имѣть:

$$(218)\qquad |J''_m| < \frac{M_m}{(\sqrt{\rho})^{m+1}}.$$

Отсюда заключаемъ, что

$$(219)\qquad J''_m = \frac{\nu_m\, M_m}{(\sqrt{xz})^{m+1}},$$

гдѣ ν_m, функція xz, подчинена условію:

$$(220)\qquad o < |\nu_m| < 1.$$

Въ виду формулъ (205) и (219), интегралъ J_m (196) представимъ такъ:

$$J_m =$$

$$(221)\qquad \left(1+e^{2\pi\nu i}\right)\mu'_m\,\lambda_m\,S^{\nu'-\frac{1}{2}}\,e^{-S}+\frac{M_m\,\nu_m}{(\sqrt{xz})^{m+1}}.$$

Полагая, что

$$(222)\qquad \left(1+e^{2\pi\nu i}\right)\mu'_m\,\lambda_m\,S^{\nu'-\frac{1}{2}}\,e^{-S}+\frac{M_m\,\nu_m}{(\sqrt{xz})^{m+1}}=\frac{\alpha_m}{(\sqrt{xz})^m},$$

будемъ имѣть:

$$(223)\qquad J_m = \frac{\alpha_m}{(\sqrt{xz})^m}.$$

Изъ соотношенія (222) находимъ для α_m выраженіе:

$$\alpha_m =$$
$$= \left(1+e^{2\pi\nu i}\right)\mu'_m \lambda_m S^{\nu'-\frac{1}{2}} (\sqrt{xz})^m e^{-s} + \frac{M_m \nu_m}{\sqrt{xz}}. \qquad (224)$$

Отсюда находимъ:

$$|\alpha_m|$$
$$< \left(1+e^{-2\pi\nu''}\right)\mu'_m \rho^{\frac{p}{q}(\nu'-\frac{1}{2})+\frac{m}{2}} e^{-s} + \frac{M_m}{\sqrt{\rho}}. \qquad (225)$$

Пусть будетъ $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt[n]{\rho}}$, гдѣ $n > 2$. Тогда всегда можно подобрать положительное число R такъ, что для $\rho \geqq R$ будутъ имѣть силу неравенства:

$$\left(1+e^{-2\pi\nu''}\right)\mu'_m \rho^{\frac{p}{q}(\nu'-\frac{1}{2})+\frac{m}{2}} e^{-s} < \frac{\varepsilon_1}{2};$$
$$\frac{M_m}{\sqrt{\rho}} < \frac{\varepsilon_1}{2}. \qquad (226)$$

На основаніи неравенства (225) тогда заключаемъ:

$$|\alpha_m| < \varepsilon_1. \qquad (227)$$

Оказывается такимъ образомъ, что α_m съ возрастаніемъ $|xz|$ равномѣрно стремится къ нулю.

Внеся въ соотношеніе (192) на мѣсто J_m выраженіе (223) этого интеграла, получимъ:

$$f(xz) =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{A_k \Gamma(\nu+k+\frac{1}{2})}{(\sqrt{xz})^m} + \frac{\alpha_m}{(\sqrt{xz})^m}. \qquad (228)$$

Въ виду формулы (228), изъ соотношенія (188) находимъ:

$$\omega(\nu; xz) =$$
$$= A(\sqrt{xz})^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{-2\sqrt{xz}} \left[\sum_{k=0}^{m} \frac{A_k\Gamma(\nu+k+\frac{1}{2})}{(\sqrt{xz})^k} + \frac{\alpha_m}{(\sqrt{xz})^m}\right]. \qquad (229)$$

Увеличивая m до безконечности, придемъ къ такому асимптотическому равенству:

$$\omega\,(\nu;\,xz) \backsim$$

$$(230)\qquad \backsim A\left(\sqrt{xz}\right)^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{-2\sqrt{xz}} \sum_{k=o}^{\infty} \frac{A_k\,\Gamma\left(\nu+k+\frac{1}{2}\right)}{\left(\sqrt{xz}\right)^k}\,[1],$$

годному для всѣхъ значеній $arg\,(xz)$, содержащихся въ промежуткѣ (55).

Изъ представленія (229) функціи $\omega\,(\nu;\,xz)$ легко можно сдѣлать заключеніе, что въ области (55) измѣняемости $arg\,(xz)$ въ смежности съ точкой $xz = \infty$ эта функція не имѣетъ нулей. Въ самомъ дѣлѣ, полагая въ соотношеніи (229) $m = o$, получимъ:

$$(231)\qquad \omega\,(\nu;\,xz) = A\,\left(\sqrt{xz}\right)^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{-2\sqrt{xz}} \left[\Gamma\left(\nu+\tfrac{1}{2}\right) + \alpha_o\right].$$

Выберемъ положительное число R_1 такъ, чтобы для $|xz| \geqq R_1$ имѣло мѣсто неравенство:

$$(232)\qquad |\alpha_o| < 1.$$

Тогда можно написать:

$$(233)\qquad |1+\alpha_o| > 1 - |\alpha_o| > 0.$$

Съ другой стороны функція $\left(\sqrt{xz}\right)^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{-2\sqrt{xz}}$ для указанныхъ значеній xz, кромѣ $xz = \infty\, e^{arg\,(xz)}$, обратиться въ нуль не можетъ. Значитъ, положеніе справедливо.

Обратимся теперь къ интегралу (184). Полагая:

$$(234)\qquad \left(1+\frac{\tau}{4\sqrt{xz}}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} = \sum_{k=o}^{m} \frac{(-1)^k A_k \tau^k}{\left(\sqrt{xz}\right)^k} + \rho_m,$$

---

[1]) Такое обозначеніе асимптотическаго равенства заимствовано нами у Горна. См., напр., его статью: „Ueber eine Classe linearer Differentialgleichungen". Math. Ann., Bd. 50, Leipzig, 1898, S. 531.

гдѣ ρ_m остаточный членъ разложенія, этотъ интегралъ представимъ слѣдующимъ образомъ:

$$\omega_1(\nu; xz) =$$

$$= B(\sqrt{xz})^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{+2\sqrt{xz}} \left[\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k A_k \Gamma(\nu+k+\frac{1}{2})}{(\sqrt{xz})^k} + \frac{\beta_m}{(\sqrt{xz})^m} \right], \quad (235)$$

гдѣ

$$\beta_m = (\sqrt{xz})^m \int_{-\infty}^{(o)} e^{\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}} \rho_m \, d\tau. \quad (236)$$

Для вычисленія β_m поступаемъ такъ же, какъ это мы дѣлали съ интеграломъ J_m (193). Имѣемъ прежде всего:

$$\beta_m = (\sqrt{xz})^m \left[\left(1 + e^{2\pi\nu i} \right) j'_m + j''_m \right], \quad (237)$$

гдѣ

$$j'_m = \int_{-\infty}^{-S} e^{\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}} \rho_m \, d\tau;$$

$$j''_m = \int_{-S}^{(o)} e^{\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}} \rho_m \, d\tau. \quad (238)$$

Интегралы j'_m и j''_m отличаются соотвѣтственно отъ интеграловъ J'_m и J''_m только тѣмъ, что вмѣсто r_m стоитъ функція ρ_m, формально получающаяся изъ r_m послѣ замѣны въ этой послѣдней τ черезъ $-\tau$. Къ нимъ дословно примѣнимъ анализъ, при помощи котораго нами вычислены J'_m и J''_m. Пусть будетъ положительное число R выбрано такъ, что для $\tau' \geqslant R$ имѣетъ мѣсто:

$$\left| e^{-\tau'} \left(1 + \frac{\tau'}{S} \right)^{\nu-\frac{1}{2}} \bar{\rho}_m \right| < \frac{1}{\tau'^{\sigma_1}}, \quad (239)$$

гдѣ $\bar{\rho}_m$ есть ρ_m послѣ замѣны въ этой послѣдней функціи τ черезъ $-S-\tau'$, а подъ σ_1 разумѣемъ положительное число, большее единицы. Тогда будемъ имѣть неравенство, аналогичное неравенству (203):

$$(240) \quad |j'_m| < e^{-\pi\nu''-s} S^{\nu'-\frac{1}{2}} \left[\bar{\mu}_m \int_o^R e^{-\tau'} \left(1+\frac{\tau'}{S}\right)^{\nu'-\frac{1}{2}} d\tau' + \frac{1}{(\sigma_1-1) R^{\sigma_1-1}} \right],$$

гдѣ $\bar{\mu}_m$ представляетъ наибольшее значеніе функціи $|\bar{\rho}_m|$ для значеній τ' отъ o до R включительно, а также всѣхъ значеній xz, аргументы которыхъ не выходятъ изъ границъ (57), а модули удовлетворяютъ условію (194). Обозначая черезъ $\bar{\mu}'_m$ наибольшее значеніе множителя при $e^{-s} S^{\nu'-\frac{1}{2}}$ въ правой части неравенства (240) для разсматриваемыхъ значеній S, будемъ имѣть:

$$(241) \quad |j'_m| < \bar{\mu}'_m e^{-s} S^{\nu'-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда находимъ:

$$(242) \quad j'_m = \bar{\lambda}_m \bar{\mu}'_m e^{-s} S^{\nu'-\frac{1}{2}},$$

гдѣ $\bar{\lambda}_m$, функція xz, удовлетворяетъ условію:

$$(243) \quad 0 < |\bar{\lambda}_m| < 1.$$

Обозначая далѣе черезъ $\overline{M}$ наибольшее значеніе функціи $\left|\left(1+\frac{\tau}{4\sqrt{xz}}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\right|$ на окружности, описанной изъ точки о радіусомъ, равнымъ $4-\Delta$, а черезъ $\overline{M}_m$:

$$(244) \quad \overline{M}_m = \frac{\overline{M} M_m}{M},$$

можемъ написать:

$$(245) \quad |j''_m| < \frac{\overline{M}_m}{(\sqrt{\rho})^{m+1}}.$$

Отсюда заключаемъ:

$$(246) \quad j'' = \frac{\bar{\nu}_m \overline{M}_m}{(\sqrt{xz})^{m+1}},$$

гдѣ $\bar{\nu}_m$, функція xz, удовлетворяетъ условію:

$$(247) \quad 0 < |\bar{\nu}_m| < 1.$$

Внеся въ соотношеніе (237) на мѣсто j'_m и j''_m ихъ выраженія (242) и (246), получимъ:

$$\beta_m =$$

$$= (1+e^{2\pi\nu i})\, \bar{\mu}'_m\, \bar{\lambda}_m\, (\sqrt{xz})^m\, S^{\nu' - \frac{1}{2}}\, e^{-S} + \frac{\bar{\nu}_m\, M_m}{\sqrt{xz}}. \qquad (248)$$

Изъ равенства (248) находимъ:

$$|\beta_m|$$

$$< (1+e^{-2\pi\nu''})\, \bar{\mu}'_m\, \rho^{\frac{p}{q}(\nu' - \frac{1}{2}) + \frac{m}{2}}\, e^{-S} + \frac{\bar{M}_m}{\sqrt{\rho}}. \qquad (249)$$

Пусть будетъ $\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt[n]{\rho}}$, гдѣ $n > 2$. Тогда можно подобрать такое положительное число R_1, что для $\rho \geqq R_1$ будетъ имѣть мѣсто:

$$(1+e^{-2\pi\nu''})\, \bar{\mu}'_m\, \rho^{\frac{p}{q}(\nu' - \frac{1}{2}) + \frac{m}{2}}\, e^{-S} < \frac{\varepsilon_2}{2};$$

$$(250)$$

$$\frac{\bar{M}_m}{\sqrt{\rho}} < \frac{\varepsilon_2}{2}.$$

Но тогда

$$|\beta_m| < \varepsilon_2. \qquad (251)$$

Значитъ, функція $\omega_1(\nu; xz)$, при всякомъ конечномъ m, можетъ быть представлена въ формѣ (235), если $arg\,(xz)$ содержится въ промежуткѣ (57); при этомъ функція β_m съ безграничнымъ возрастаніемъ $|xz|$, начиная съ нѣкотораго его значенія, равномѣрно стремится къ нулю. А посему функція $\omega_1(\nu; xz)$ въ области (57) измѣняемости $arg\,(xz)$ можетъ быть представлена асимптотически такъ:

$$\omega_1(\nu; xz) \backsim$$

$$\backsim B(\sqrt{xz})^{-\nu-\frac{1}{2}}\, e^{+2\sqrt{xz}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A_k\, \Gamma(\nu+k+\frac{1}{2})}{(\sqrt{xz})^k}. \qquad (252)$$

Пользуясь соотношеніемъ (235) при $m = o$, а именно:

$$\omega_1(\nu; xz) =$$

$$= B(\sqrt{xz})^{-\nu-\frac{1}{2}}\, e^{+2\sqrt{xz}}\, [\,\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2}) + \beta_0\,], \qquad (253)$$

можно обнаружить, что въ области (57) измѣняемости $arg\,(xz)$ въ смежности съ точкой $xz = \infty$ функція $\omega_1\,(\nu;\,xz)$ не имѣетъ нулей. Въ самомъ дѣлѣ, пусть выбрано положительное число $\overline{R}$ такъ, что для $\rho \geqq \overline{R}$ имѣетъ мѣсто:

(254) $$|\beta_0| < 1.$$

Тогда для вышеуказанныхъ значеній xz можемъ написать:

(255) $$|1+\beta_0| > 1-|\beta_0| > 0.$$

Съ другой стороны множитель $(\sqrt{xz})^{-\nu-\frac{1}{2}}\,e^{+2\sqrt{xz}}$ не можетъ обратиться въ нуль для разсматриваемыхъ значеній xz, кромѣ $xz = +\infty\,e^{arg\,(xz)}$. Такимъ образомъ справедливость положенія доказана.

Обнаружимъ далѣе, что между функціями $\omega\,(\nu;\,xz)$ и $\omega_1\,(\nu;\,xz)$ не можетъ быть зависимости:

(256) $$C_1\,\omega\,(\nu;\,xz) + C_2\,\omega_1\,(\nu;\,xz) = o,$$

гдѣ C_1 и C_2 суть постоянныя числа, отличныя отъ нуля. Въ самомъ дѣлѣ, замѣнивъ $\omega\,(\nu;\,xz)$ и $\omega_1\,(\nu;\,xz)$ ихъ представленіями (231 и (253), будемъ имѣть послѣ умноженія результата на $(\sqrt{xz})^{\nu+\frac{1}{2}}$:

(257) $$C_1\,A\left[\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})+\alpha_o\right]e^{-2\sqrt{xz}} + C_2\,B\left[\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})+\beta_o\right]e^{+2\sqrt{xz}} = o.$$

Умноживъ это соотношеніе на $e^{-2\sqrt{xz}}$, приведемъ его къ виду:

(257′) $$C_1\,A\left[\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})+\alpha_o\right]e^{-4\sqrt{xz}} + C_2\,B\left[\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})+\beta_o\right] = o.$$

Пусть будетъ $xz = +\infty$. Будемъ имѣть: $C_2\,B = o$, или $C_2 = o$. Но тогда, въ силу соотношенія (256), и $C_1 = o$. Такимъ образомъ доказано, что между $\omega\,(\nu;\,xz)$ и $\omega_1\,(\nu;\,xz)$ не можетъ существовать зависимости вида (256). Обозначая черезъ S_1 и S_2 соотвѣтственно правыя части равенствъ (230) и (252), всякій интегралъ уравненій (1) въ области, общей областямъ (55) и (57), можемъ асимптотически представить такъ:

(258) $$y \sim c_1\,S_1 + c_2\,S_2,$$

гдѣ c_1 и c_2 означаютъ надлежащимъ образомъ подобранныя постоянныя числа. Въ частности, имѣя въ виду соотношенія (157), находимъ:

$$\begin{aligned} -\bar{\Gamma}(-\nu)\, F(\nu;\, xz) &\backsim S_1 - S_2; \\ \bar{\Gamma}(\nu)\,(xz)^{-\nu} F(-\nu;\, xz) &\backsim S_1 - e^{2\pi\nu i} S_2. \end{aligned} \tag{259}$$

Въ заключеніе настоящаго параграфа обнаружимъ, что *результаты произвольнаго числа дифференцированій по перемѣнному xz асимптотическихъ равенствъ (230), (252), (258) и (259) суть также асимптотическія равенства.* Для этой цѣли предварительно обнаружимъ слѣдующее положеніе: *Функціи* $(xz)^n \dfrac{d^n \alpha_m}{d(xz)^n}$ и $(xz)^n \dfrac{d^n \beta_m}{d(xz)^n}$, *гдѣ n любое положительное цѣлое число, съ возрастаніемъ $|xz|$, начиная съ нѣкотораго значенія этого модуля, равномѣрно стремится къ нулю.* Докажемъ это положеніе. Изъ соотношеній (223) и (193) находимъ:

$$\alpha_m = (\sqrt{xz})^m \int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau}\, \tau^{\nu-\frac{1}{2}}\, r_m\, d\tau. \tag{260}$$

Послѣ однократнаго дифференцированія обѣихъ частей этого соотношенія и умноженія результата на xz получимъ:

$$xz\frac{d\alpha_m}{d(xz)} = \frac{m}{2}\alpha_m + (\sqrt{xz})^m \int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau}\,\tau^{\nu-\frac{1}{2}}\, xz \frac{dr_m}{d(xz)}\, d\tau. \tag{261}$$

Но

$$\frac{dr_m}{d(xz)} = -\frac{\tau}{2xz}\frac{dr_m}{d\tau}. \tag{262}$$

Въ виду формулы (262), соотношенію (261) дадимъ видъ:

$$xz\frac{d\alpha_m}{d(xz)} = \frac{m}{2}\alpha_m - \frac{(\sqrt{xz})^m}{2}\int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau}\,\tau^{\nu+\frac{1}{2}}\frac{dr_m}{d\tau}\, d\tau. \tag{263}$$

Послѣ интеграціи по частямъ находимъ:

$$\int_{-\infty}^{(0)} e^{\tau}\,\tau^{\nu+\frac{1}{2}}\frac{dr_m}{d\tau}\cdot d\tau = -\frac{(\nu+\frac{1}{2})}{(\sqrt{xz})^m}\alpha_m - \frac{J_{1m}}{(\sqrt{xz})^m}, \tag{264}$$

гдѣ

$$J_{1m} = (\sqrt{xz})^m \int_{-\infty}^{(0)} e^\tau \tau^{\nu+\frac{1}{2}} r_m \, d\tau. \tag{265}$$

При помощи формулы (264) соотношенію (263) дадимъ видъ:

$$xz \frac{d\alpha_m}{d(xz)} = \frac{m+\nu+\frac{1}{2}}{2} \alpha_m + \frac{J_{1m}}{2}. \tag{266}$$

Интегралъ J_{1m} (265) отличается отъ интеграла α_m (260) только тѣмъ, что вмѣсто ν послѣдняго поставлено въ первомъ $\nu+1$. Къ этому интегралу дословно примѣнимъ анализъ, при помощи котораго мы вычислили α_m; при чемъ результатъ получается одинаковый: интегралъ J_{1m} съ возрастаніемъ $|xz|$, начиная съ нѣкотораго его значенія, равномѣрно стремится къ нулю. На основаніи соотношенія (266) тогда заключаемъ, что $xz \dfrac{d\alpha_m}{d(xz)}$ также равномѣрно стремится къ нулю съ возрастаніемъ $|xz|$, начиная съ нѣкотораго значенія этого модуля. Взявъ теперь отъ обѣихъ частей соотношенія (266) производную по xz и умноживъ результатъ на xz, будемъ имѣть:

$$(xz)^2 \frac{d^2\alpha_m}{d(xz)^2} = \frac{m+\nu-\frac{3}{2}}{2} xz \frac{d\alpha_m}{d(xz)} + \frac{xz}{2} \frac{dJ_{1m}}{d(xz)}. \tag{267}$$

Но

$$\frac{xz}{2} \frac{dJ_{1m}}{d(xz)} =$$

$$= \frac{mJ_{1m}}{4} + \frac{(\sqrt{xz})^m}{2} \int_{-\infty}^{(0)} e^\tau \tau^{\nu+\frac{1}{2}} xz \frac{dr_m}{d(xz)} d\tau. \tag{268}$$

Далѣе

$$(\sqrt{xz})^m \int_{-\infty}^{(0)} e^\tau \tau^{\nu+\frac{1}{2}} xz \frac{dr_m}{d(xz)} d\tau = -\frac{(\sqrt{xz})^m}{2} \int_{-\infty}^{(0)} e^\tau \tau^{\nu+\frac{3}{2}} \frac{dr_m}{d\tau} d\tau = \tag{269}$$

$$= \frac{\nu+\frac{3}{2}}{2} J_{1m} + \frac{J_{2m}}{2},$$

гдѣ

$$J_{2m} = (\sqrt{xz})^m \int_{-\infty}^{(0)} e^\tau \tau^{\nu+\frac{3}{2}} r_m \, d\tau. \tag{270}$$

Принимая во вниманіе формулы (268) и (269), соотношеніе (267) представимъ слѣдующимъ образомъ:

$$(xz)^2 \frac{d^2 \alpha_m}{d(xz)^2} = \frac{m+\nu-\frac{3}{2}}{2} xz \frac{d\alpha_m}{d(xz)} + \frac{m+\nu+\frac{3}{2}}{4} J_{1m} + \frac{J_{2m}}{4} \cdot \quad (271)$$

Интегралъ J_{2m} получается изъ J_{1m} послѣ замѣны въ этомъ послѣднемъ ν черезъ $\nu+1$. Поэтому и J_{2m} съ возрастаніемъ $|xz|$, начиная съ нѣкотораго его значенія, равномѣрно стремится къ нулю. Изъ равенства (271) тогда заключаемъ, что тѣмъ же свойствомъ обладаетъ и функція $(xz)^2 \frac{d^2 \alpha_m}{d(xz)^2}$. Оперируя надъ соотношеніемъ (271) такъ же, какъ это мы продѣлали съ равенствомъ (266), придемъ къ выводу, что $(xz)^3 \frac{d^3 \alpha_m}{d(xz)^3}$ съ возрастаніемъ $|xz|$, начиная съ нѣкотораго его значенія, равномѣрно стремится къ нулю. Продолжая разсуждать въ томъ же направленіи, придемъ къ заключенію, что вообще $(xz)^n \frac{d^n \alpha_m}{d(xz)^n}$ обладаетъ тѣмъ же свойствомъ. Разсуждая дословно такъ же надъ интеграломъ (236), обнаружимъ, что этимъ же свойствомъ обладаетъ и функція $(xz)^n \frac{d^n \beta_m}{d(xz)^n}$. Послѣ всего этого мы можемъ приступить къ доказательству возможности дифференцировать по xz вышеупомянутыя асимптотическія равенства. Возьмемъ отъ обѣихъ частей равенства (229) производную n-го порядка по xz. Будемъ имѣть:

$$\omega^{(n)}(\nu; xz) =$$

$$= A\left(\sqrt{xz}\right)^{-\nu-\frac{1}{2}-2n} e^{-2\sqrt{xz}} \sum_{s=0}^{n} [n]_s (xz)^{s+1} \sum_{t=0}^{n-s} [n-s]_t \left(-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}\right)_{n-s-t} \vartheta_t \quad (272)$$

$$\left[\sum_{k=1}^{m} \frac{A_k\left(-\frac{k}{2}\right)_s}{\left(\sqrt{xz}\right)^{k+2s}} \overline{\Gamma}(\nu+k+\tfrac{1}{2}) + \sum_{p=0}^{s} \frac{[s]_p \left(-\frac{m}{2}\right)_p (xz)^{s-p}}{\left(\sqrt{xz}\right)^{m+2s}} \frac{d^{s-p} \alpha_m}{d(xz)^{s-p}}\right],$$

где
$$\vartheta_t =$$

$$(273) = \begin{vmatrix} 0 & t-\frac{3}{2} & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & xz & t-\frac{5}{2} & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & \cdot & \cdot & xz & t-i-\frac{3}{2} & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{\sqrt{xz}} & 0 & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & xz & \frac{3}{2} \\ 1+\frac{1}{2\sqrt{xz}} & 0 & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & xz \end{vmatrix}$$

Такъ какъ по вышедоказанному функція $(xz)^{s-p} \dfrac{d^{s-p}\alpha_m}{d(xz)^{s-p}}$ съ возрастаніемъ $|xz|$, начиная съ нѣкотораго его значенія, равномѣрно стремится къ нулю, то можемъ написать на основаніи равенства (272):

$$\omega^{(n)}(\nu;\, xz) \backsim$$

$$\backsim A\left(\sqrt{xz}\right)^{-\nu-\frac{1}{2}-2n} e^{-2\sqrt{xz}} \sum_{s=0}^{n} [n]_s\, (xz)^{s+1} \sum_{t=0}^{n-s} [n-s]_t \left(-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}\right)_{n-s-t} \vartheta_t$$

$$(274) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k \left(-\frac{k}{2}\right)_s \Gamma(\nu+k+\frac{1}{2})}{\left(\sqrt{xz}\right)^{k+2s}}.$$

Такимъ же образомъ, исходя изъ соотношенія (235), придемъ къ слѣдующему результату:

$$\omega_1^{(n)}(\nu;\, xz) \backsim$$

$$\backsim B\left(\sqrt{xz}\right)^{-\nu-\frac{1}{2}-2n} e^{+2\sqrt{xz}} \sum_{s=0}^{n} [n]_s\, (xz)^{s+1} \sum_{t=0}^{n-s} [n-s]_t \left(-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}\right)_{n-s-t} \vartheta'_t$$

$$(275) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k A_k \left(-\frac{k}{2}\right)_s \Gamma(\nu+k+\frac{1}{2})}{\left(\sqrt{xz}\right)^{k+2s}},$$

гдѣ ϑ'_t есть ϑ_t послѣ замѣны въ выраженіи (273) этой послѣдней функціи $\sqrt{xz}$ черезъ $-\sqrt{xz}$.

ГЛАВА II.

Изысканіе асимптотическихъ представленій и изслѣдованіе интеграловъ трансформы Фурье-Бесселя линейнаго уравненія перваго порядка съ раціональными коэффиціентами.

§ 1.

Опредѣленіе трансформы Фурье-Бесселя. Связь ея интеграловъ съ интеграломъ уравненія перваго порядка, выраженная при помощи функцій $\omega(\nu;\ xz)$ и $\omega_1(\nu;\ xz)$.

Математикамъ хорошо знакома зависимость уравненія Эйлера--Лапласа:

$$\sum_{s=o}^{m}(a_s+b_s\ x)\frac{d^s\ v}{dx^s}=0, \tag{1}$$

гдѣ a_s и b_s суть постоянныя числа, отъ уравненія вида:

$$\varphi_z(u)=P(z)\frac{du}{dz}+Q(z)\,u=0, \tag{2}$$

гдѣ $P(z)$ и $Q(z)$ суть нѣкоторыя цѣлыя алгебраическія функціи перемѣннаго z. Связь уравненій (1) и (2) состоитъ въ томъ, что первое изъ нихъ можетъ быть получено изъ второго, если лѣвую часть послѣдняго подвергнуть нѣкоторому преобразованію при помощи функціи, опредѣляемой системой уравненій съ частными производными:

$$\begin{aligned}\frac{d\eta}{dx}&=z\eta;\\ \frac{d\eta}{dz}&=x\eta,\end{aligned} \tag{3}$$

которая имѣетъ аналогію съ нормальной системой (1) предыдущей главы. Самое преобразованіе выполняется слѣдующимъ образомъ. Внесемъ въ выраженіе $\varphi_z(u)$ на мѣсто u функцію η. Принимая во вниманіе второе изъ уравненій (3), будемъ имѣть:

$$\varphi_z(\eta) = xP(z)\eta + Q(z)\eta. \tag{4}$$

Въ силу перваго изъ уравненій (3), послѣднее соотношеніе можемъ написать въ формѣ:

$$\varphi_z(\eta) = xP\left(\frac{d}{dx}\right)\eta + Q\left(\frac{d}{dx}\right)\eta. \tag{5}$$

Уравненіе:

$$xP\left(\frac{d}{dx}\right)v + Q\left(\frac{d}{dx}\right)v = o \tag{6}$$

имѣетъ составъ уравненія (1) и съ нимъ можетъ быть отождествлено. Какъ извѣстно [1]), уравненіе, сопряженное уравненію (6), а именно:

$$P\left(-\frac{d}{dx}\right)xv + Q\left(-\frac{d}{dx}\right)v = o \tag{7}$$

называется трансформой [2]) Лапласа уравненія (2).

Къ уравненію, похожему на уравненіе (6), мы придемъ, если уравненіе (2) подвергнемъ аналогичному преобразованію при помощи функцій $\omega(\gamma; xz)$ и $\omega_1(\gamma; xz)$ или вообще функціи y, удовлетворяющей нормальной системѣ (1) главы I. Разумѣя подъ y любую изъ функцій $\omega(\gamma; xz)$ и $\omega_1(\gamma; xz)$, замѣнимъ въ выраженіи $\varphi_z(u)$ функцію u че-

---

[1]) *Poincaré.* „Sur les intégrales etc.", p. 306.

Schlesinger. „Ueber die Integration linearer homogenen Differentialgleichungen durch Quadraturen". Crelle's Journal, Bd. 116, 1896, S. 100.

Horn. „Ueber eine Classe linearer Differentialgleichungen". Math. Ann., Bd 50, 1898, S. 525.

[2]) Такъ мы передаемъ французское слово la transformée, не находя въ русской рѣчи одного слова, которое бы выражало означенное понятіе французскаго языка.

резъ y. Тогда, принимая во вниманіе второе изъ уравненій нормальной системы (1) главы I, получимъ:

$$\varphi_z(y) = \frac{x}{z} P(z) \frac{dy}{dx} + Q(z)\, y, \tag{8}$$

или:

$$z\,\varphi_z(y) = x \frac{d}{dx} P(z)\, y + zQ(z)\, y. \tag{9}$$

Въ виду перваго изъ уравненій означенной нормальной системы, соотношеніе (9) представимъ въ формѣ:

$$z\,\varphi_z(y) = \psi_x(y), \tag{10}$$

гдѣ

$$\psi_x(y) = x \frac{d}{dx} P(\delta_x)\, y + \delta_x\, Q(\delta_x)\, y. \tag{11}$$

Уравненіе:

$$\psi_x(w) = o \tag{12}$$

мы будемъ называть *трансформой Фурье-Бесселя* уравненія (2).

Положимъ, что полиномы $P(z)$ и $Q(z)$ имѣютъ составъ:

$$\left.\begin{aligned} P(z) &= \sum_{k=o}^{n} A_k z^k; \\ Q(z) &= \sum_{k=o}^{m} B_k z^k, \end{aligned}\right. \tag{13}$$

гдѣ A_k и B_k суть постоянныя числа, и постараемся уравненіе (12) представить въ раскрытой формѣ. Для этой цѣли надо предварительно найти выраженіе символа $\delta_x^n w$. Вычисленіемъ убѣждаемся въ справедливости формулъ:

$$\delta_x^2 w =$$

$$= x^2 \frac{d^4 w}{dx^4} + 2\,(2+\nu)\, x \frac{d^3 w}{dx^3} + (1+\nu)\,(2+\nu) \frac{d^2 w}{dx^2};$$

(14)
$$\delta_x^3 w =$$

$$= x^3 \frac{d^6 w}{dx^6} + 3\,(3+\nu)\, x^2 \frac{d^5 w}{dx^5} + 3\,(2+\nu)\,(3+\nu)\, x \frac{d^4 w}{dx^3} +$$

$$+ (1+\nu)\,(2+\nu)\,(3+\nu) \frac{d^3 w}{dx^3}.$$

Эти двѣ формулы получаются изъ соотношенія:

$$\delta_x^n w =$$

(15)
$$= \sum_{p=o}^{n} [n]_p\, (n+\nu)_p\, x^{n-p} \frac{d^{2n-p} w}{dx^{2n-p}},$$

если въ немъ положить: $n = 2$ и $n = 3$; при чемъ

$$[n]_p = \frac{n\,(n-1)\,\cdots\,(n-p+1)}{1.\,2\,\cdots\,p},$$

(16)

$$(n+\nu)_p = (n+\nu)\,(n+\nu-1)\,\cdots\,(n+\nu-p+1).$$

Но можно доказать, что по этой формулѣ (15) и долженъ выражаться символъ $\delta_x^n w$. Для этого стоитъ лишь обнаружить, что, если въ правой части равенства (15) n замѣнимъ черезъ $n+1$, то получимъ выраженіе символа $\delta_x^{n+1} w$. Такъ какъ

(17)
$$\delta_x = \frac{d}{dx}\left(x \frac{d}{dx} + \nu \right),$$

то найдемъ прежде всего выраженіе для $\left(x \frac{d}{dx} + \nu \right) \delta_x^n w$. Имѣемъ:

$$\left(x\frac{d}{dx}+\nu\right)\delta_x^n w=$$

$$=\sum_{p=o}^{n}[n]_p\,(n+\nu)_p\,x^{n-p}\left[x\,\frac{d^{2n+1-p}w}{dx^{2n+1-p}}+(n-p+\nu)\,\frac{d^{2n-p}w}{dx^{2n-p}}\right]=$$

$$=\sum_{p=o}^{n+1}[n+1]_p\,(n+\nu)_p\,x^{n+1-p}\,\frac{d^{2n+1-p}w}{dx^{2n+1-p}}. \tag{18}$$

Взявъ теперь отъ обѣихъ частей соотношенія (18) производную по x, будемъ имѣть:

$$\delta_x^{n+1}w=$$

$$=\sum_{p=o}^{n+1}[n+1]_p\,(n+\nu)_p\,x^{n-p}\left[x\,\frac{d^{2n+2-p}w}{dx^{2n+2-p}}+(n-p+1)\,\frac{d^{2n+1-p}w}{dx^{2n+1-p}}\right]=$$

$$=\sum_{p=o}^{n+1}[n+1]_p\,(n+1+\nu)_p\,x^{n+1-p}\,\frac{d^{2(n+1)-p}w}{dx^{2(n+1)-p}}. \tag{19}$$

Послѣднее же соотношеніе представляетъ результатъ замѣны въ равенствѣ (15) n черезъ $n+1$. Итакъ, доказано, что, разъ формула (15) вѣрна, то она будетъ вѣрна, если на мѣсто n поставить $n+1$. Но первое изъ соотношеній (1) главы I и формулы (14) убѣждаютъ насъ въ справедливости ея для $n=1$, 2 и 3. А потому она вѣрна для $n=4, 5, 6,..$; однимъ словомъ, она вѣрна для всякаго положительнаго цѣлаго n. Принимая во вниманіе составъ (13) полиномовъ $P(z)$ и $Q(z)$, на основаніи формулы (15) уравненію (12) дадимъ слѣдующій видъ:

$$\sum_{k=0}^{n}A_k\sum_{p=o}^{k}[k]_p\,(k+1+\nu)_p\,x^{k+1-p}\,\frac{d^{2k+1-p}w}{dx^{2k+1-p}}+$$

$$+\sum_{k=0}^{m}B_k\sum_{p=o}^{k+1}[k+1]_p\,(k+1+\nu)_p\,x^{k+1-p}\,\frac{d^{2(k+1)-p}w}{dx^{2(k+1)-p}}=0. \tag{20}$$

Обозначая черезъ $E(a)$ цѣлую часть положительнаго числа a, уравненіе (20) можемъ написать въ формѣ:

$$(21)\quad \sum_{s=o}^{2n} P_s\, x^{n-s+1} \frac{d^{2n+1-s} w}{dx^{2n+1-s}} + \sum_{s=o}^{2m+1} Q_s\, x^{m+1-s} \frac{d^{2(m+1)-s} w}{dx^{2(m+1)-s}} = 0,$$

гдѣ

$$P_s = \sum_{k=o}^{E\left(\frac{s}{2}\right)} A_{n-k}\, [n-k]_{s-2k}\, (n+1+\nu-k)_{s-2k}\, x^k\ ;$$

(21')

$$Q_s = \sum_{k=o}^{E\left(\frac{s}{2}\right)} B_{m-k}\, [m+1-k]_{s-2k} (m+1+\nu-k)_{s-2k}\, x^k .$$

Пользуясь функціями $\omega\,(\nu;\, xz)$ и $\omega_1\,(\nu;\, xz)$, можно найти рѣшенія уравненія (21) въ формѣ опредѣленныхъ интеграловъ. Полагаемъ для этой цѣли:

$$(22)\qquad \varphi'_z\,(v) = -\frac{d}{dz}\,[z\,P(z)\,v] + z\,Q\,(z)\,v.$$

Далѣе, составляемъ тождество:

$$(23)\qquad v\,z\,\varphi_z\,(u) - u\,\varphi'_z\,(v) = \frac{d}{dz}\,[z\,P\,(z)\,u\,v]\,.$$

Разумѣя подъ y либо $\omega\,(\nu;\, xz)$, либо $\omega_1\,(\nu;\, xz)$, замѣнимъ въ послѣднемъ соотношеніи u черезъ y. Тогда, принимая во вниманіе тождество (10), равенство (23) представимъ слѣдующимъ образомъ:

$$(24)\qquad v\,\psi_x\,(y) = y\varphi'_z\,(v) + \frac{d}{dz}\,[z\,P(z)\,y\,v]\,.$$

Пусть v будетъ функціею только отъ z. Въ такомъ случаѣ v можно подвести подъ знакъ операціи ψ_x и мы будемъ имѣть:

$$(25)\qquad \psi_x\,(vy) = y\,\varphi'_z\,(v) + \frac{d}{dz}\,[z\,P\,(z)\,y\,v].$$

Умноживъ теперь обѣ части соотношенія (25) на dz и взявъ отъ полученнаго результата интегралъ по нѣкоторому пути L, найдемъ:

$$\psi_x \int_L vy\,dz = \int_L y\,\varphi'_z(v)\,dz + \int_L \frac{d}{dz}\,[zP(z)vy]dz. \tag{26}$$

Выберемъ теперь функцію v и путь интеграціи L подъ условіемъ, чтобы имѣло мѣсто:

$$\varphi'_z(v) = o;$$

$$\int_L \frac{d}{dz}\,[z\,P(z)\,vy]\,dz = o. \tag{27}$$

Тогда выраженіе

$$w = \int_L vy\,dz \tag{28}$$

представитъ рѣшеніе уравненія (21). Пусть теперь будетъ:

$$P(z) = (z-\alpha_1)^{l_1}(z-\alpha_2)^{l_2}\cdots(z-\alpha_k)^{l_k}, \tag{29}$$

гдѣ

$$\sum_{p=1}^{k} l_p = n. \tag{30}$$

Интегрируя тогда уравненія $\varphi'_z(v) = o$, или:

$$zP(z)\frac{dv}{dz} + \left[P(z) + z\frac{dP(z)}{dz} - z\,Q(z)\right]v = o, \tag{31}$$

найдемъ:

$$v = z^{-1}(z-\alpha_1)^{-l_1}(z-\alpha_2)^{-l_2}\cdots(z-\alpha_k)^{-l_k}e^{\int\frac{Q(z)}{P(z)}dz}. \tag{32}$$

Полагаемъ далѣе:

$$\frac{Q(z)}{P(z)} =$$

$$= \beta_0 z^q + \beta_1 z^{q-1} + \cdots + \beta_q + \sum_{p=1}^{l_1}\frac{A_p}{(z-\alpha_1)^p} + \sum_{p=1}^{l_2}\frac{B_p}{(z-\alpha_2)^p} + \cdots$$

$$+ \sum_{p=1}^{l_k}\frac{K_p}{(z-\alpha_k)^p}, \tag{33}$$

гдѣ $q=m-n$, а $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_q, A_p, B_p, \ldots, K_p$ суть постоянныя числа, опредѣляемыя по извѣстному въ анализѣ пріему. Внеся въ выраженіе (32) на мѣсто функціи $\frac{Q(z)}{P(z)}$ ея значеніе (33) и выполняя тамъ интеграцію, будемъ имѣть:

$$v=e^{Z} z^{-1} (z-\alpha_1)^{A_1-l_1} (z-\alpha_2)^{B_1-l_2} \cdots (z-\alpha_k)^{K_1-l_k}, \tag{34}$$

гдѣ

$$Z=$$

$$=\frac{\beta_0 z^{q+1}}{q+1}+\frac{\beta_1 z^q}{q}+\cdots+\beta_q z-$$

$$-\sum_{p=2}^{l_1} \frac{A_p}{(p-1)(z-\alpha_1)^{p-1}}-\sum_{p=2}^{l_1} \frac{B_p}{(p-1)(z-\alpha_2)^{p-1}}-\ldots \tag{35}$$

$$-\sum_{p=2}^{l_k} \frac{K_p}{(p-1)(z-\alpha_k)^{p-1}}.$$

Искомыя рѣшенія уравненія (21) содержатся въ слѣдующемъ выраженіи:

$$w=\int_L e^{Z} y z^{-1} (z-\alpha_1)^{A_1-l_1} (z-\alpha_2)^{B_1-l_1} \cdots (z-\alpha_k)^{K_1-l_k} dz. \tag{36}$$

При этомъ путь интеграціи L долженъ удовлетворять условію:

$$\int_L \frac{d}{dz}\left[P(z)\, y e^{Z} (z-\alpha_1)^{A_1-l_1} \cdots (z-\alpha_k)^{K_1-l_k}\right] dz=0. \tag{37}$$

Полагая, что

$$z=t^2, \tag{38}$$

выраженіе (36) и условіе (37) представимъ слѣдующимъ образомъ:

$$w=2\int_M e^{Z_1} \bar{y}\, t^{-1} (t^2-\alpha_1)^{A_1-l_1} \cdots (t^2-\alpha_k)^{K_1-l_k} dt; \tag{39}$$

$$\int_M \frac{d}{dt}\left[P(t^2)\,\bar{y}\,e^{Z_1}(t^2-\alpha_1)^{A_1-l_1}\cdots(t^2-\alpha_k)^{K_1-l_k}\right]dt = o, \tag{40}$$

гдѣ Z_1 и $\bar{y}$ суть соотвѣтственно Z и y послѣ замѣны въ этихъ послѣднихъ функціяхъ перемѣннаго z черезъ t^2, а M есть путь, представляющій на плоскости перемѣннаго t отображеніе пути L при помощи соотношенія (38). Впредь насъ будетъ интересовать только выраженіе (39) при условіи (40).

§ 2.

***Случай уравненія* (21), *когда* $m < n$ *и корни полинома* $P(z)$ *простые. Выборъ путей интеграціи, удовлетворяющихъ условію* (40).**

Предположимъ, что въ уравненіи (21) $m < n$ и полиномъ $P(z)$ такого состава:

$$P(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n), \tag{41}$$

гдѣ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ суть различныя постоянныя числа; при чемъ

$$\alpha_s = r_s e^{\varphi_s i}, \quad s = 1, 2, \cdots, n \tag{42}$$

гдѣ

$$o \leqq \varphi_s < 2\pi. \tag{42'}$$

Обозначимъ уравненіе (21) при этихъ условіяхъ такъ:

$$\Phi(w) = o. \tag{43}$$

Выраженіе (39) и условіе (40) напишутся въ разсматриваемомъ случаѣ слѣдующимъ образомъ:

$$w = 2\int_M \bar{y}\,t^{-1}(t^2-\alpha_1)^{A_1-1}\cdots(t^2-\alpha_n)^{A_n-1}\,dt; \tag{44}$$

$$\int_M \frac{d}{dt}\left[\,P(t^2)\,\bar{y}\,(t^2-\alpha_1)^{A_1-1}\cdots(t^2-\alpha_n)^{A_n-1}\right]dt=o, \tag{45}$$

гдѣ

$$A_i=\frac{Q(\alpha_i)}{P'(\alpha_i)}\;; \tag{46}$$

при чемъ

$$P'(\alpha_i)=\frac{d\,P(z)}{dz}\Bigg|_{z=\alpha_i}. \tag{46'}$$

Ради простоты обозначенiй, положимъ:

$$\begin{aligned}+\sqrt{\alpha_i}&=a_i\;;\\ -\sqrt{\alpha_i}&=a_{n+i}\,,\end{aligned} \tag{47}$$

гдѣ $i=1, 2, \cdots, n$. Въ виду условiй (42) и (42'), точки $a_1, a_2, \cdots, a_n$ расположены въ верхней полуплоскости плоскости перемѣннаго t; точки же $a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots, a_{2n}$ лежатъ въ нижней ея полуплоскости; при чемъ точки a_i и a_{n+i} находятся на одной прямой съ точкой $t=o$ и въ равномъ отъ нея разстоянiи. Будемъ на первыхъ порахъ также предполагать, что между числами $A_1, A_2, \cdots, A_n$ нѣтъ цѣлыхъ или нулей. Займемся предварительно изысканiемъ путей M, удовлетворяющихъ требованiю (45), или:

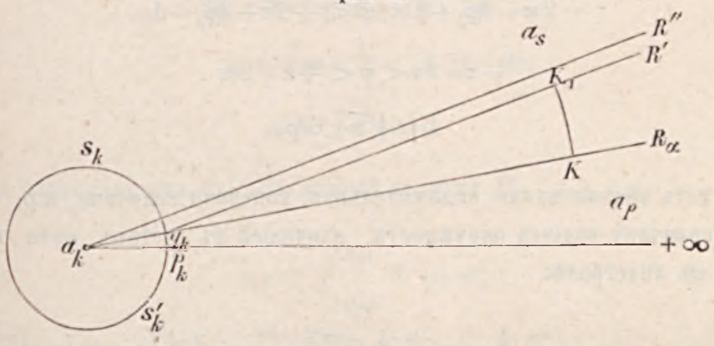
$$|_M\,\theta\,(t)=o, \tag{48}$$

гдѣ знакъ $|_M$, поставленный предъ функцiей:

$$\theta\,(t)=P(t^2)\,\bar{y}\,(t^2-\alpha_1)^{A_1-1}\cdots\,(t^2-\alpha_n)^{A_n-1}, \tag{49}$$

показываетъ, что берется разность значенiй функцiи $\theta\,(t)$ въ концѣ и началѣ пути M. Таковые пути двухъ родовъ, — во-первыхъ тѣ, въ началѣ и концѣ которыхъ функцiя $\theta\,(t)$ принимаетъ одно и то же значенiе, отличное отъ нуля, и во-вторыхъ тѣ, для которыхъ это значенiе нуль. Пути перваго рода суть тѣ, которые Л. Погхаммеръ въ одной изъ своихъ работъ назвалъ путями съ двойными обходами. Ими пользовались въ своихъ изслѣдованіяхъ многіе математики, какъ напр.: Риманъ, К. Жорданъ, П. А. Некрасовъ, Графъ, Шлезингеръ, Пинкерль, Меллинъ и Горнъ [1]). Въ настоящей работѣ насъ будутъ занимать только пути второго рода. Они представляютъ петли, имѣющія своимъ началомъ и концомъ точку $t=\infty$ и огибающія одну или нѣсколько изъ точекъ: $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$. Но изъ нихъ мы будемъ разсматривать только элементарныя петли, или петли, содержащія внутри себя лишь по одной изъ вышеозначенныхъ точекъ. Для построенія такой петли, удовлетворяющей условію (48), поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Вообразимъ въ плоскости перемѣннаго t точку a_k, гдѣ k представляетъ одно изъ чиселъ: $1, 2, \cdots, 2n$ (чер. 8).

фиг. 8.



Изъ этой точки ведемъ безконечной длины векторъ $a_k R_\alpha$, не встрѣчающій на всемъ своемъ протяженіи, кромѣ a_k, ни одной изъ особыхъ конечныхъ точекъ функціи $\theta(t)$. Пусть величина угла наклоненія этого вектора къ вектору $a_k+\infty$ будетъ α. При этомъ α не должно выходить изъ границъ:

$$-\pi+\varphi_k<\alpha<\varphi_k+\pi, \tag{50}$$

гдѣ φ_k означаетъ величину угла, образованнаго векторами $a_k+\infty$ и $o\,a_k$. Изъ точки a_k, какъ центра, опишемъ окружность радіусомъ, дли-

[1]) Таковыя работы этихъ ученыхъ, кромѣ Горна, разсмотрѣны нами во введеніи къ нашей работѣ: „О нѣкоторыхъ дифференціальныхъ и разностныхъ линейныхъ уравненіяхъ, интегрируемыхъ посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ". Извѣстія Вар. Пол. Института за 1900—1901 годы.

на котораго r'_k меньше разстоянія до нея отъ наиближайшей къ ней изъ особыхъ точекъ функціи $\theta(t)$. Его мы предполагаемъ весьма малымъ сравнительно съ разстояніемъ точки a_k отъ точки $t=o$. Точку встрѣчи вектора $a_k R_\alpha$ съ окружностью назовемъ q_k, а самую окружность $q_k s_k s'_k q_k$; при чемъ означенный порядокъ буквъ пусть указываетъ на положительное на ней направленіе. Полагаемъ, что въ точкѣ R_α, началѣ петли $R_\alpha q_k s_k s'_k q_k R_\alpha$, или $R_\alpha(a_k)$ аргументы перемѣнныхъ t, $t-a_1, \cdots, t-a_{2n}$ таковы:

$$\text{(51)} \qquad arg t = arg(t-a_1) = \cdots = arg(t-a_k) = \cdots = arg(t-a_{2n}) = \alpha.$$

Далѣе, налагаемъ на $|x|$ и $\varphi = arg x$ слѣдующія условія:

$$\text{(52)} \qquad \begin{gathered} -2\pi - 2\varphi_k + \Delta < \varphi < +2\pi - 2\varphi_k - \Delta; \\ -\pi - 2\alpha < \varphi < +\pi - 2\alpha; \end{gathered}$$

$$\text{(53)} \qquad 4\,|t\sqrt{x}| > \rho_0,$$

гдѣ Δ есть весьма малая положительная конечная величина, а ρ_0 означаетъ величину радіуса окружности, входящей въ составъ пути интеграціи въ интегралѣ:

$$\text{(54)} \qquad \omega(\nu; xt^2) = A\, t^{-\nu-\frac{1}{2}} (\sqrt{x})^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{-2t\sqrt{x}} \int_{-\infty}^{(o)} e^{\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\tau}{4t\sqrt{x}}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} d\tau.$$

Тогда интегралъ отъ $\theta_1(t)\,dt$, гдѣ $\theta_1(t)$ представляетъ $\dfrac{t^{-1}\theta(t)}{P(t^2)}$ послѣ замѣны въ этой послѣдней функціи y черезъ $\omega(\nu; xt^2)$, взятый по пути $R_\alpha(a_k)$, или:

$$\text{(55)} \qquad \eta_{1k} = \int_{+\infty\sigma}^{(a_k)} \theta_1(t)\,dt,$$

гдѣ

$$\text{(56)} \qquad \sigma = e^{\alpha i},$$

имѣетъ смыслъ при значеніяхъ x, аргументы и модули которыхъ подчинены ограниченіямъ (52) и (53), если r'_k достаточно мало и надлежащимъ образомъ подобрано Δ, и представляетъ частное рѣшеніе уравненія (43). Замѣтимъ, что интегралъ (55) не теряетъ смысла, если въ немъ φ, опредѣляемое условіями (52), увеличимъ на $4s\pi$, гдѣ s любое цѣлое положительное или отрицательное число.

Обозначимъ далѣе черезъ $\theta_2(t)$ результатъ замѣны въ $\frac{t^{-1}\theta(t)}{P(t^2)}$ функціи y черезъ $\omega_1(\nu; xt^2)$:

$$\omega_1(\nu; xt^2) = Bt^{-\nu-\frac{1}{2}} (\sqrt{x})^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{+2t\sqrt{x}} \int_{-\infty}^{(o)} e^{\tau} \tau^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{\tau}{4t\sqrt{x}}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} d\tau. \quad (57)$$

Положимъ, что для точки R_α, начала пути R_α (a_k), выполняются условія (51), а x удовлетворяетъ требованіямъ:

$$\begin{aligned} -2\varphi_k+\Delta < \varphi < +4\pi-2\varphi_k-\Delta; \\ +\pi-2\alpha < \varphi < +3\pi-2\alpha; \end{aligned} \quad (58)$$

$$4|t\sqrt{x}| > \rho_0. \quad (59)$$

Тогда интегралъ отъ $\theta_2(t)dt$, взятый по пути R_α (a_k), или:

$$\eta_{2k} = \int_{+\infty}^{(a_k)} \theta_2(t)\, dt, \quad (60)$$

сохраняетъ смыслъ для всѣхъ значеній перемѣннаго x, аргументы и модули которыхъ удовлетворяютъ условіямъ (58) и (59), если r'_k достаточно мало и надлежащимъ образомъ подобрано весьма малое положительное число Δ, и представляетъ новое частное рѣшеніе уравненія (43). Интегралъ (60) не потеряетъ смысла, если въ немъ $\arg x$ увеличить на $4s\pi$, гдѣ s произвольное цѣлое положительное или отрицательное число.

§ 3.

Объ интегралахъ ζ_{1kps} и ζ_{2kps} и ихъ продолженіяхъ. Функціи Z_{1kps} и Z_{2kps} и линейныя между ними соотношенія. О продолженіи этихъ функцій.

Остановимся предварительно на изысканіи продолженій интеграловъ (55) и (60). Допустимъ, что векторъ $a_k R_\alpha$ (чер. 8), при своемъ вращеніи около точки a_k противъ движенія часовой стрѣлки, изъ особыхъ конечныхъ точекъ функціи $\theta(t)$ встрѣчаетъ прежде всего точку a_s, а, при вращеніи около той же точки въ противоположномъ направленіи, точку a_p; при чемъ s и p берутся изъ ряда: 0, 1, 2, $\cdots$, $2n$ ($a_0 = o$). Не исключаемъ изъ разсмотрѣнія также и случая, когда на отрѣзкахъ $a_k\, a_s$ и $a_k\, a_p$ и ихъ продолженіяхъ въ сторону точекъ a_s и a_p лежатъ и другія изъ этихъ точекъ. Интегралы (55) и (60) теперь мы обозначимъ соотвѣтственно черезъ ζ_{1kps} и ζ_{2kps}, отмѣчая значками p и s положеніе вектора $a_k\, R_\alpha$ внутри угла $a_s\, a_k\, a_p$. Итакъ, имѣемъ:

$$\zeta_{1kps} = \int_{+\infty}^{(a_k)} \theta_1(t)\, dt;$$

(61)

$$\zeta_{2kps} = \int_{+\infty}^{(a_k)} \theta_2(t)\, dt.$$

Интегралы (61) можно продолжить по способу, выясненному въ § 2 главы I. Перемѣнимъ предварительно обозначеніе величины угла $R_\alpha\, a_k + \infty$: назовемъ ее ω_{kps}. Тогда условія (52) и (58) перепишутся слѣдующимъ образомъ:

$$-2\pi - 2\varphi_k + \Delta < \varphi < +2\pi - 2\varphi_k - \Delta;$$

(62)

$$-\pi - 2\omega_{kps} < \varphi < +\pi - 2\omega_{kps}.$$

$$-2\varphi_k + \Delta < \varphi < +4\pi - 2\varphi_k - \Delta;$$

(63)

$$+\pi - 2\omega_{kps} < \varphi < +3\pi - 2\omega_{kps}.$$

Вообразимъ, что векторъ $q_k\, R_\alpha$ повернулся вокругъ точки q_k противъ движенія часовой стрѣлки на уголъ, величина ω'_{kps} котораго меньше $\frac{\pi}{2}$ и также величины угла $R_\alpha\, a_k\, a_s$. Тогда интегралъ ζ_{1kps} (61) перейдетъ въ слѣдующій:

(64) $$\zeta'_{1kps} = \int_{K'}^{(a_k)} \theta_1(t)\, dt,$$