ИЗВѢСТІЯ

ВАРШАВСКАГО

ПОЛИТЕХНИЧЕСКАГО ИНСТИТУТА

ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II.

ВЫПУСКЪ II.—1901 г.

ВАРШАВА.

ВЪ ТИПОГРАФІИ ВАРШАВСКАГО УЧЕБНАГО ОКРУГА.
Краковское-Предмѣстье № 3.

1901.

Печатано по опредѣленію Совѣта Варшавскаго Политехническаго Института Императора Николая II.

Директоръ *А. Лагоріо.*

СОДЕРЖАНІЕ.

Ученый и учебный отдѣлы.

Редакторъ *И. И. Иванюковъ.*

УЧЕНЫЙ И УЧЕБНЫЙ ОТДѢЛЫ.

Опредѣленіе прогибовъ въ прямолинейныхъ брусьяхъ при помощи второго веревочнаго многоугольника.

Съ 4-мя таблицами составленными для нормальнаго поѣзда (по цирк. Мин. Пут. Сообщ.) и 15-ю политипажами въ текстѣ.

Инженера **К. А. Оппенгейма.**

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Испытаніе новыхъ верхнихъ строеній мостовъ на большинствѣ русскихъ желѣзныхъ дорогахъ сводится въ настоящее время почти исключительно къ опредѣленію величины прогиба по серединѣ пролета отъ пробнаго поѣзда.

Техническія условія пріемки новыхъ строеній мостовъ (см. IX отдѣлъ „Свода распоряженій Министерства Путей Сообщенія по службѣ пути желѣзныхъ дорогъ“ и приказъ Господина Министра Путей Сообщенія отъ 5 іюля 1897 г. за № 113) допускаютъ для постояннаго прогиба отъ статической нагрузки максимальный предѣлъ $^1/_{5000}$ разсчетнаго пролета, а Управленіе желѣзныхъ дорогъ включаетъ нынѣ въ договоры съ заводами на поставку новыхъ строеній еще условіе, чтобы въ фермахъ со сплошной стѣнкой упругій прогибъ не превышалъ $^1/_{1000}$

разсчетнаго пролета, а въ прочихъ фермахъ $^{1}/_{1250}$ таковаго пролета (см. циркуляръ б. Упр. каз. ж. дор. отъ $^{8}/_{9}$ окт. 1897 г. за № 44492). Эти предѣлы, конечно, относятся къ случаю испытанія строеній поѣздами того типа, который былъ положенъ въ основу проектированія самаго строенія. Между тѣмъ въ весьма рѣдкихъ случаяхъ удается въ настоящее время испытывать новыя строенія поѣздами, и даже отдѣльными паровозами съ тендерами типа, принятаго въ разсчетъ, отчасти за неимѣніемъ часто на дорогахъ подобныхъ паровозовъ и подвижного состава, а иногда и за невозможностью пропустить тяжелые паровозы къ испытываемому мосту, если таковой находится на участкѣ дороги, гдѣ верхнія строенія мостовъ еще не усилены, (подобныя случаи бываютъ, напримѣръ, при установкѣ новыхъ строеній на мостахъ, коихъ старыя верхнія строенія повреждены крушеніемъ поѣзда), а потому въ большинствѣ случаевъ новыя строенія испытываются поѣздами, составленными изъ паровозовъ и вагоновъ, далеко несоотвѣтствующими типовымъ. Вслѣдствіе этого получаемые при подобномъ испытаніи прогибы не могутъ быть сравниваемы съ вышеуказанными предѣльными и въ этомъ случаѣ для полученія нѣкотораго представленія о надежности испытываемаго строенія является раціональнымъ, какъ намъ кажется, опредѣлять вмѣстѣ съ тѣмъ для сравненія и теоретическій прогибъ, который должно получить строеніе при испытаніи имѣющимся на лицо поѣздомъ. Мы здѣсь говоримъ нѣкотораго представленія, потому что и вообще на испытаніе строеній въ видѣ опредѣленія прогиба по серединѣ пролета, составляющаго результатъ измѣненій длинъ всѣхъ частей сооруженія, слѣдуетъ смотрѣть, какъ на вспомогательное средство, коимъ нельзя однако пренебрегать для опредѣленія такъ называемаго „средняго" состоянія всего сооруженія. Замѣтимъ здѣсь, что во Франціи, циркуляромъ Министерства Публичныхъ Работъ отъ 29 августа 1891 г., преподающимъ основанія для проектированія новыхъ верхнихъ строеній мостовъ, предписывается въ концѣ каждаго проекта верхняго строенія помѣщать разсчетъ прогибовъ, какъ отъ постоянной нагрузки, принятой въ основаніе, такъ и отъ временной; нашимъ Министерствомъ Путей сообщенія этого не требуется, но вмѣстѣ съ тѣмъ нельзя признать это не полезнымъ.

Всѣ способы, какъ аналитическіе, такъ и графическіе, опредѣленія теоретическаго прогиба въ балкахъ при движеніи по нимъ сосредоточенныхъ грузовъ весьма сложны, даже въ случаѣ разрѣзной балки съ небольшимъ пролетомъ, а потому мы позволяемъ себѣ для опредѣленія теоретическаго прогиба отъ статической нагрузки предложить пользоваться указываемыми въ настоящей статьѣ формулами и таблицами, что несомнѣнно дастъ большое сбереженіе труда и времени. Пользованіе этими формулами и таблицей № 1-й весьма удобно, каковы бы не были давленія на оси паровозовъ, тендеровъ и вагоновъ; для осевыхъ давленій нормальнаго поѣзда, предписаннаго Министерствомъ Путей Сообщенія, вычислены для ускоренія подсчета свои самостоятельныя таблицы №№ 2, 3 и 4. Приводимые въ настоящей статьѣ формулы выведены французскими инженерами Hausser и Cunq въ ихъ трудѣ „Poutres droites", Paris 1894 г., причемъ ими составлены таблицы для осевыхъ давленій, указанныхъ въ циркулярѣ французскаго Министерства Публичныхъ Работъ 1891 г. Гг. Hausser и Cunq, занимавшіеся въ большомъ количествѣ исчисленіями прогибовъ различныхъ верхнихъ строеній и примѣнявшіе поэтому всевозможные способы, указываютъ именно на удобство въ смыслѣ быстроты подсчета пользоваться подобными таблицами; ихъ трудъ „Poutres droites" обнимаетъ нетолько разсмотрѣніе прогибовъ въ разрѣзныхъ и неразрѣзныхъ балкахъ, но еще и разсмотрѣніе наибольшихъ изгибающихъ моментовъ въ разрѣзныхъ и неразрѣзныхъ балкахъ, для чего ими составлены также особыя таблицы. Въ настоящей же статьѣ разсматривается только опредѣленіе прогибовъ и при томъ исключительно въ разрѣзныхъ балкахъ, какъ наиболѣе часто встрѣчающихся.

Инженеръ *К. Оппенгеймъ.*

Варшава,
1901 года.

ВВЕДЕНІЕ.

Прогибы брусьевъ представляютъ, какъ извѣстно, ординаты упругой линіи, т. е. изогнутой нейтральной оси. Построеніе послѣдней можно произвести при помощи графической статики, пользуясь тѣмъ, что радіусъ кривизны изогнутой нейтральной оси, какъ доказывается ниже, равенъ радіусу кривизны веревочнаго многоугольника, построеннаго въ томъ предположеніи, что на данный брусъ дѣйствуютъ въ видѣ воображаемыхъ силъ изгибающіе моменты, и принимая кромѣ того при построеніи полюсное разстояніе равнымъ произведенію модуля упругости E на моментъ инерціи поперечнаго сѣченія J, т. е. $= EJ$. Указанный веревочный многоугольникъ называется *„вторымъ веревочнымъ многоугольникомъ“*.

Изъ общей теоріи изгиба брусьевъ извѣстно, что зависимость между радіусомъ кривизны ρ какого либо элемента оси послѣ изгиба и радіусомъ кривизны того-же элемента до изгиба ρ' выражается въ видѣ.

$$M = EJ\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right),$$

гдѣ M — моментъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на брусъ.

Такъ какъ мы въ настоящей статьѣ разсматриваемъ только прямолинейные брусья съ црямолинейною осью до изгиба, для которыхъ слѣдовательно $\rho' = \infty$, то приведенная формула обращается въ слѣдующую.

$$M = \frac{EJ}{\rho}, \quad \text{откуда}$$

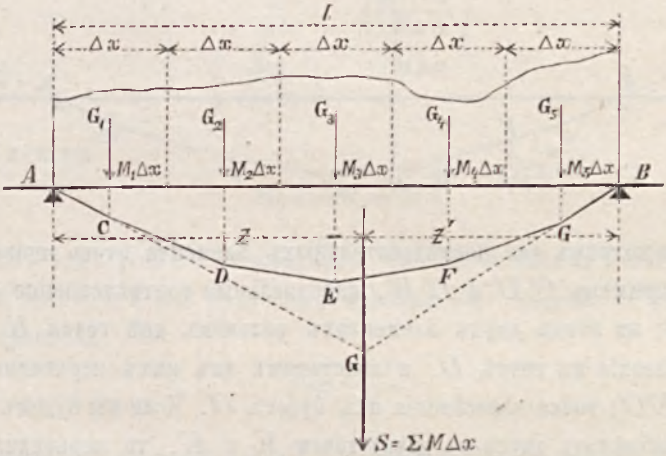
$$\rho = \frac{EJ}{M.}$$

Слѣдовательно, если прямолинейный брусъ подвергается дѣйствію нормальныхъ къ нему внѣшнихъ силъ, то его нейтральная ось принимаетъ видъ линіи, для которой радіусъ кривизны представляетъ частное отъ дѣленія произведенія EJ на моментъ этихъ силъ.

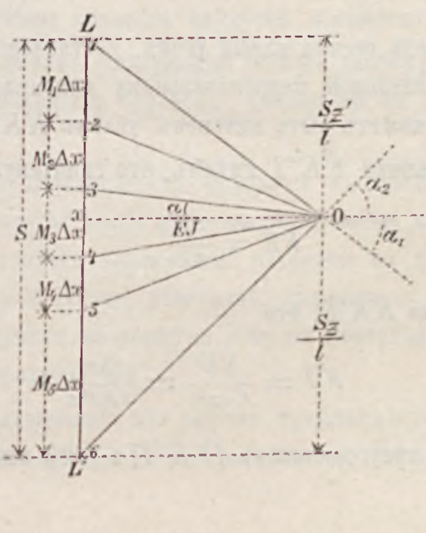
Покажемъ теперь, что такой же величины радіусъ кривизны будетъ имѣть и второй веревочный многоугольникъ.

Пусть на брусъ (черт. 1) дѣйствуютъ внѣшнія силы; опредѣляемъ для различныхъ сѣченій части AB изгибающіе моменты и откладываемъ ихъ отъ линіи AB въ видѣ ординатъ; площадь S, заключенную между кривою, соединяющею концы этихъ ординатъ, между крайними ординатами на опорахъ и линіею абсциссъ, т. е. линіею AB, дѣлимъ вертикалями на нѣсколько площадей $M\Delta x$, т. е. $S = \Sigma M\Delta x$, и воображаемъ нашъ брусъ нагруженнымъ фиктивными силами, равными этимъ $M\Delta x$ и приложенными въ центрахъ тяжести G этихъ площадей. Затѣмъ строимъ многоугольникъ силъ съ полюснымъ разстояніемъ $= EJ$ (черт. $1'$) и соотвѣтственный ему веревочный многоугольникъ, т. е. второй веревочный многоугольникъ для даннаго бруса, $ACDEFGB$.

Черт. 1.

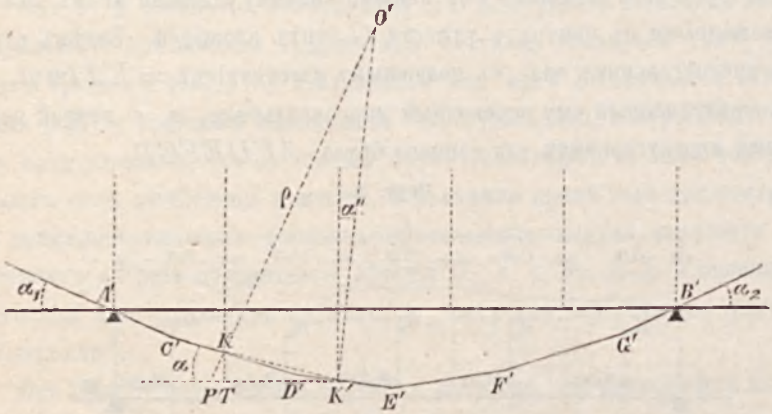


Черт. $1'$.



Для удобства изобразимъ отдѣльно многоугольникъ $A'C'D'E\,F'G'B$, совершенно равный полученному веревочному многоугольнику $ACDEFGB$ (черт. 1″).

Черт. 1″.



Разсмотримъ два послѣдовательныхъ элемента этого многоугольника, напримѣръ $C'D'$ и $D'E'$, параллельныя соотвѣтственно лучамъ 02 и 03; на этихъ двухъ элементахъ возьмемъ двѣ точки K и K', весьма близкія къ точкѣ D', и возставимъ изъ нихъ перпендикуляры KO' и $K'O'$; точка пересѣченія ихъ будетъ O'. Если мы будемъ безконечно приближать другъ къ другу точки K и K', то перпендикуляры KO' и $K'O'$ сольются и представятъ радіусъ кривизны многоугольника въ точкѣ D'.

Пусть α будетъ весьма малый уголъ, составленный $D'K'$ съ линіемъ $K'P$, параллельной первоначальному направленію нейтральной оси; этотъ уголъ можетъ быть замѣненъ угломъ $KK'P$.

Изъ треугольника $KK'T$ имѣемъ, что гипотенуза

$$KK' = \frac{\Delta x}{\cos\alpha}$$

а изъ треугольника $KK'P$, что

$$K'P = \frac{KK'}{\cos\alpha} = \frac{\Delta x}{\cos^2\alpha}$$

Изъ подобія треугольниковъ $O'K'P$ и $O23$ имѣемъ

$$\frac{O'K'}{K'P} = \frac{0.3}{2.3}$$

Здѣсь:

$$O'K' = \rho$$

$$K'P = \frac{\Delta x}{Cos^2 \alpha}$$

$$0.3 = \frac{EJ}{Cos\, \alpha}$$

$$2.3 = M\Delta x$$

Слѣдовательно

$$\frac{\rho}{\left(\frac{\Delta x}{Cos^2 \alpha}\right)} = \frac{\left(\frac{EJ}{Cos\, \alpha}\right)}{M\Delta x}$$

откуда имѣемъ

$$M\rho\, Cos^3 \alpha = EJ$$

Такъ какъ уголъ α весьма малъ, то $Cos^3 \alpha$ весьма близко подходитъ къ единицѣ и мы получаемъ приближеніе сходное съ тѣмъ, что даетъ практика:

$$\rho = \frac{EJ}{M.}$$

и слѣдовательно указанное выше равенство радіусовъ кривизны упругой линіи и второго веревочнаго многоугольника доказано; изъ равенства же радіусовъ кривизны кривыхъ слѣдуетъ равенство самыхъ кривыхъ.

Отсюда мы имѣемъ слѣдующую общую теорему, дѣйствительную для всѣхъ прямолинейныхъ брусьевъ, каково бы ни было число и расположеніе опоръ:

„Во всѣхъ прямолинейныхъ брусьяхъ съ постоянным поперечнымъ сѣченіемъ упругая линія представляетъ собою веревочный многоугольникъ, для котораго перемѣнная нагрузка на погонную единицу есть моментъ M, а полюсное разстояніе котораго $= EJ$ — произведенію модуля упругости на моментъ инерціи поперечнаго сѣченія бруса относительно нейтральной оси“.

При выводѣ выраженія для радіуса кривизны второго веревочнаго многоугольника мы принимали за перемѣнную нагрузку на погонную единицу моментъ M; мы можемъ, очевидно, также принимать за эту нагрузку величины $\frac{M}{J}$, но при условіи, что полюсное разстояніе многоугольника силъ будетъ равно модулю упругости E.

Въ такомъ случаѣ приведенная теорема будетъ дѣйствительна какъ для прямолинейныхъ брусьевъ съ перемѣнными поперечными сѣченіями, такъ и для брусьевъ съ постояннымъ моментомъ инерціи J.

Замѣтимъ здѣсь еще, что если мы сдѣлаемъ полюсное разстояніе n разъ меньше, то получимъ ординаты упругой линіи въ n разъ больше. Это слѣдуетъ изъ самаго построенія веревочнаго многоугольника: если вмѣсто полюснаго разстоянія $= EJ$ возьмемъ величину $\frac{EJ}{n}$, то ординаты упругой линіи будутъ въ n разъ больше; слѣдовательно если мы возьмемъ для ординатъ упругой линіи масштабъ $= \frac{1}{n}$, то эпюра намъ дастъ прогибы изогнутаго бруса въ натуральную величину.

Такимъ образомъ выбирая соотвѣтственный масштабъ весьма просто, пользуясь вторымъ веревочнымъ многоугольникомъ, построить видъ изогнутаго подъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ прямолинейнаго бруса и опредѣлить его прогибы въ любой точкѣ, а слѣдовательно и максимальный прогибъ.

Въ случаѣ балки свободно лежащей на опорахъ дѣйствующія внѣшнія силы даютъ изгибающіе моменты всѣ одного знака; моменты эти, дающіе отрицательные прогибы, т. е. считаемые внизъ отъ оси, условимся называть *отрицательными*. Въ случаѣ же балки закрѣпленной въ концахъ или неразрѣзной дѣйствующія внѣшнія силы даютъ въ каждомъ пролетѣ тѣ же отрицательные моменты (такой же величины какъ въ первомъ случаѣ), закрѣпленность же концовъ и неразрывность балки рождаютъ еще моменты противоположнаго знака — *положительные*,—а потому дѣйствующіе въ каждомъ сѣченіи моменты будутъ представлять алгебраическую сумму положительныхъ и отрицательныхъ моментовъ, и слѣдовательно будутъ либо положительны, либо отрицательны, смотря по тому, которые изъ слагающихъ по абсолютной величинѣ больше,

Относительно построенія упругой линіи для такихъ брусьевъ, т. е. въ которыхъ встрѣчаются за разъ положительные и отрицательные моменты, замѣтимъ, что совершенно безразлично, построимъ ли мы прямо второй веревочный многоугольникъ, пользуясь площадью окончательныхъ моментовъ, или же мы построимъ сперва два отдѣльныхъ веревочныхъ многоугольника посредствомъ площади положительныхъ и площади отрицательныхъ моментовъ и затѣмъ ихъ соединимъ вмѣстѣ.

На практикѣ обыкновенно не строютъ всей упругой линіи, а ограничиваются только опредѣленіемъ теоретическаго прогиба бруса по серединѣ пролета; въ такомъ случаѣ вопросъ значительно упрощается. Намъ приходится площадь моментовъ раздѣлить только на двѣ части перпендикуляромъ, возставленнымъ изъ середины пролета, и разсматривая эти двѣ части, какъ фиктивныя силы, приложенныя въ центрзхъ тяжести ихъ, построить веревочный многоугольникъ, сдѣлавъ въ многоугольникѣ силъ полюсное рязстояніе равнымъ EJ. Этотъ многоугольникъ будетъ о трехъ сторонахъ; обѣ крайнія стороны его будутъ касательныя къ упругой линіи на опорахъ, а средняя сторона — касательная по серединѣ пролета; ордината этой средней стороны веревочнаго многоугольника, по серединѣ пролета, и будетъ искомый прогибъ. Покажемъ теперь чему равны наклоненія касательныхъ къ упругой линіи на опорахъ относительно первоначальнаго направленія нейтральной оси.

Изъ чертежа 1 видно, что углы α_1 и α_2 равны соотвѣтственно угламъ LOX и $L'OX$.

Изъ треугольника LOX имѣемъ

$$LX = EJtg\alpha_1$$

а изъ треугольника $L'OX$

$$L'X = EJtg\alpha_2.$$

LX и $L'X$ — двѣ фиктивныя параллельныя силы, дѣйствующія въ точкахъ опоры A и B, и получающіяся отъ разложенія фиктивной же силы S, представляющей площадь моментовъ и дѣйствующей въ центрѣ тяжести, лежащемъ на разстояніяхъ Z и Z' отъ опоръ,

На основаніи закона рычага имѣемъ

$$LX = \frac{SZ'}{l}$$

$$L'X = \frac{SZ}{l}$$

Отсюда для опредѣленія угловъ α_1 и α_2 имѣемъ слѣдующія выраженія

$$\left. \begin{aligned} EJ\,tg\,\alpha_1 &= \frac{SZ'}{l} \quad \text{и} \\ EJ\,tg\,\alpha_2 &= \frac{SZ}{l}\,. \end{aligned} \right| \quad (A)$$

Не трудно видѣть, что эти выраженія вовсе не зависятъ отъ способа дѣленія на части площади моментовъ и отъ числа этихъ дѣленій; каково бы ни было это дѣленіе линія LL_1 всегда представитъ всю площадь моментовъ и полярный лучъ OX, параллельный замыкающей веревочнаго многоугольника, отсѣчетъ всегда на ней отрѣзки LX и $L'X$, которыя служатъ для опредѣленія угловъ α_1 и α_2.

Дѣленіе на части площади моментовъ, необходимое для вычерчиванія упругой линіи, необходимо при опредѣленіи угловъ α_1 и α_2 только для нахожденія положенія вертикали, проходящей черезъ центръ тяжести моментовъ. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ положеніе этой вертикали такъ сказать извѣстно a priori и тогда достаточно знать величину площади моментовъ S, чтобы опредѣлить направленія AG или LO, и GB или $L'O$ касательныхъ на опорахъ.

Уравненія $EJtg\alpha_1 = \frac{SZ'}{l}$ и $EJtg\alpha_2 = \frac{SZ}{l}$ носятъ характеръ общій, а потому необходимо обращать вниманіе на знаки моментовъ, дѣйствующихъ въ различныхъ сѣченіяхъ взятыхъ между двумя послѣдовательными опорами.

Этими уравненіями можно пользоваться безразлично, будемъ ли мы опредѣлять углы α_1 и α_2 по площади окончательныхъ моментовъ, или же будемъ опредѣлять α_1 и α_2 отдѣльно по площади положительныхъ и по площади отрицательныхъ моментовъ и затѣмъ полученные результаты суммировать.

Изложивъ въ общемъ сущность предлагаемаго способа опредѣленія для прямолинейныхъ балокъ прогибовъ и наклоненій касательныхъ къ упругой линіи на опорахъ мы переходимъ къ разсмотрѣнію въ частности только однопролетныхъ балокъ: 1) свободно лежащихъ на опорахъ 2) закрѣпленныхъ горизонтально обоими концами и 3) закрѣпленныхъ горизонтально однимъ концомъ, а другимъ свободно лежащихъ на опорѣ.

При этомъ мы дѣлаемъ слѣдующія предположенія: 1) что опоры находятся въ одномъ уровнѣ 2) что моментъ инерціи балки постояненъ и равенъ среднему изъ всѣхъ дѣйствительныхъ моментовъ инерціи. Это предположеніе не имѣетъ особеннаго вліянія на величину прогиба по серединѣ пролета и 3) что дѣйствіе грузовъ, находящихся на пролетѣ, статическое; получаемые при этомъ прогибы соотвѣтствуютъ испытаніямъ статической пробной нагрузкой.

I. Балки свободно-лежащія на опорахъ.

A. Опредѣленіе прогиба по серединѣ пролета.

Грузы дѣйствующіе на балку, свободно-лежащую на опорахъ, даютъ изгибающіе моменты исключительно отрицательные, которые будучи приложены къ балкѣ въ видѣ фиктивныхъ силъ вызовутъ прогибы тоже исключительно отрицательные.

Разсмотримъ прогибы балки, вызываемые равномѣрной нагрузкой и вызываемые сосредоточенными грузами.

a) Балка нагружена равномѣрно.

Положимъ, что имѣемъ свободно-лежащую на опорахъ балку AB (черт. 2), нагруженную по всей длинѣ равномѣрно грузомъ p на погонную единицу. Въ данномъ случаѣ площадь моментовъ представится въ видѣ параболическаго сегмента, наибольшая ордината котораго по серединѣ пролета $CD = \frac{pl^2}{8}$.

Площадь S этого сегмента выразится

$$S = 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{l}{2} \times \frac{pl^2}{8} = \frac{pl^3}{12}$$

центръ тяжести этой площади лежитъ на ординатѣ CD, а слѣдовательно

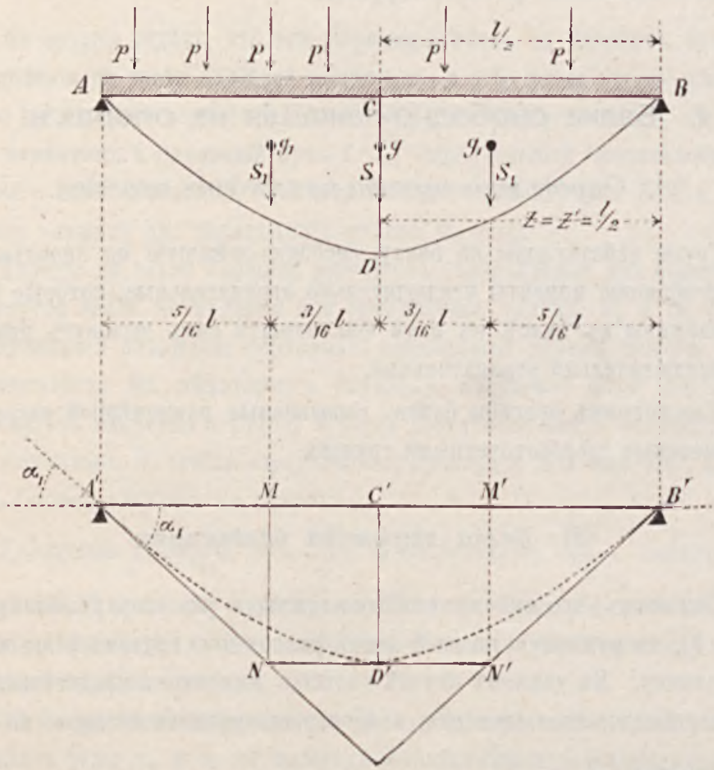
$$Z = Z' = \frac{l}{2}$$

Раздѣлимъ ординатою CD данную площадь S на двѣ равныя части

$S_1 = \frac{pl^3}{24}$; центръ тяжести каждой изъ этихъ частей будетъ лежать отъ сосѣдней опоры на разстояніи

$$A'M = \frac{5}{8} \times \frac{l}{2} = \frac{5}{16} l.$$

Черт. 2.



Вслѣдствіи симметріи сторона NN' многоугольника, составленнаго изъ касательныхъ къ упругой линіи, параллельна $A'B'$; отсюда ордината $C'D'$, представляющая прогибъ бруса по серединѣ пролета, равна ординатѣ MN, которая есть ни что иное, какъ часть вертикали, проходящей черезъ центръ тяжести g_1, отрѣзанная касательной къ упругой линіи на опорѣ A.

Изъ треугольника $A'MN$ имѣемъ

$$MN = A'M \, tg\alpha_1,$$

Въ введеніи указано, что

$$tg\alpha_1 = \frac{1}{EJ} \times \frac{SZ'}{l}$$

Слѣдовательно

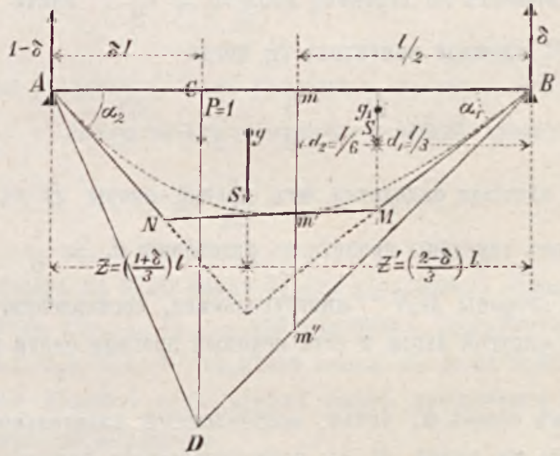
$$F = C' D' = MN = \frac{5}{16} \times l \times \frac{1}{EJ} \times \frac{pl^3}{12} \times \frac{1}{l} \times \frac{l}{2} =$$

$$= \frac{5}{384} \times \frac{1}{EJ} \times pl^4 \;(1)$$

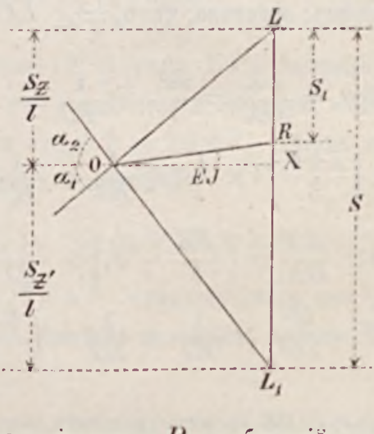
b) *Балка нагружена сосредоточенными грузами.*

Положимъ, что мы имѣемъ свободно-лежащую на опорахъ балку AB (черт. 3); пусть на нее дѣйствуетъ всего одинъ грузъ P, равный единицѣ и приложенный въ разстояніи δl отъ лѣвой опоры A; опредѣлимъ прогибъ f по серединѣ пролета, вызываемый этимъ грузомъ P.

Черт. 3.



Черт. 3'.



Въ точкѣ приложенія груза P изгибающій моментъ

$$CD=(1-\delta)\,\delta l=(\delta-\delta^2)\,l$$

Слѣдовательно площадь моментовъ ADB выразится

$$S=(\delta-\delta^2)\,l\times\frac{l}{2}=(\delta-\delta^2)\,\frac{l^2}{2}\,.$$

Центръ тяжести g этой площади находится отъ лѣвой опоры A въ разстояніи

$$Z=\frac{(1+\delta)}{3}\,l$$

Проведемъ по серединѣ пролета вертикаль mm'', длина которой представитъ моментъ по серединѣ пролета $=\frac{\delta l}{2}$; пусть S_1 будетъ часть $mm''B$ площади моментовъ S; тогда

$$S_1=\frac{\delta l}{2}\times\frac{l}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\delta l^2}{8}$$

ц. т. g_1 этой площади находится отъ правой опоры B въ разстояніи $d_1=\frac{l}{3}$, а отъ середины пролета въ разстояніи $d_2=\frac{l}{6}$. Ордината mm' средней стороны MN *) многоугольника, составленнаго изъ касательныхъ къ упругой линіи, и есть искомый прогибъ балки по серединѣ пролета.

Означимъ черезъ α_1 уголъ, составленный касательной MB къ упругой линіи на опорѣ B съ первоначальнымъ направленіемъ нейтральной оси, а черезъ α — уголъ, составленный средней стороной MN съ тѣмъ же направленіемъ; очевидно, что $\alpha_1=\angle LOX$, а $\alpha=\angle ROX$; слѣдовательно

$$tg\alpha_1=\frac{LX}{OX}=\frac{SZ}{l}\times\frac{1}{EJ}=$$

$$=(\delta-\delta^2)\,\frac{l^2}{2}\times\left(\frac{1+\delta}{3}\right)l\times\frac{1}{l}\times\frac{1}{EJ}=\frac{1}{EJ}\times\frac{\delta-\delta^3}{6}\,l^2.$$

$$tg\alpha=\frac{RX}{OX}=\left(\frac{SZ}{l}-S_1\right)\times\frac{1}{EJ}=$$

$$=\left(\frac{\delta-\delta^3}{6}\,l^2-\frac{\delta l^2}{8}\right)\times\frac{1}{EJ}=\frac{1}{EJ}\times\left(\frac{\delta-4\delta^3}{24}\right)l^2.$$

---

*) Сторона MN // лучу OR въ многоугольникѣ силъ.

Изъ чертежа видно, что

$$f = mm' = d_1\, tg\alpha_1 + d_2\, tg\alpha$$

слѣдовательно

$$f = \frac{1}{EJ}\left(\frac{\delta - \delta^3}{6} l^2 \times \frac{l}{3} + \frac{\delta - 4\delta^3}{24} l^2 \times \frac{l}{6}\right) = \frac{1}{EJ} l^3 \left(\frac{3\delta - 4\delta^3}{48}\right). \quad (2)$$

Для сокращенія означимъ

$$\frac{3\delta - 4\delta^3}{48} = u.$$

тогда

$$f = \frac{1}{EJ} l^3 u \quad (2')$$

Если бы въ точкѣ C былъ приложенъ не грузъ $P = 1$, а какой либо $P_0 \gtrless 1$, то имѣли бы для прогиба по серединѣ пролета.

$$f = \frac{1}{EJ} l^3 P_0 u. \quad (2'')$$

Если теперь на нашу балку будетъ дѣйствовать одновременно нѣсколько грузовъ P_1, P_2, P_3, $\cdots$, приложенныхъ соотвѣтственно на разстояніяхъ $\delta_1 l$, $\delta_2 l$, $\delta_3 l$, $\cdots$ отъ лѣвой опоры A, то на основаніи начала независимости дѣйствія силъ будемъ имѣть для прогиба по серединѣ пролета слѣдующее выраженіе

$$f = \frac{1}{EJ} l^3 (P_1 u_1 + P_2 u_2 + P_3 u_3 + \cdots) = \frac{1}{EJ} l^3 \Sigma\, Pu \quad (2''')$$

Для этой формулы $(2''')$ сумма ΣPu вычисляется быстро при помощи приведенныхъ въ концѣ статьи таблицъ; послѣднія для различныхъ δ, мѣняющихся отъ 0,2 до 39,8 *), даютъ величины произведенія Pu для слѣдующихъ значеній P:

$$1^t,\ 5^t,\ 6^t.25,\ \text{и}\ 7^t.5.$$

Грузы $7^t.5$, $6^t.25$ и 5 представляютъ изъ себя давленія колесъ нормальнаго паровоза, тендера и вагона, предписанныя нашимъ Мини-

*) Цѣлыя означаютъ сороковыя части пролета, считая отъ лѣвой опоры.

стерствомъ Путей Сообщенія. (См. IV Отд. „Свода распоряженій М. П. С. по Службѣ Пути Жел. Дорогъ“ 1900 г.).

Имѣя произведенія Pu для $P = 1^t$ мы можемъ найти соотвѣтственныя произведенія для любого P посредствомъ помноженія ихъ на величину этого P; такъ напримѣръ, если для $\delta = 3,2$ при $P = 1^t$ $Pu = 5,0$, то для того же δ при $P = 3^t.5$ $Pu = 5.0 \times 3.5 = 17.5$.

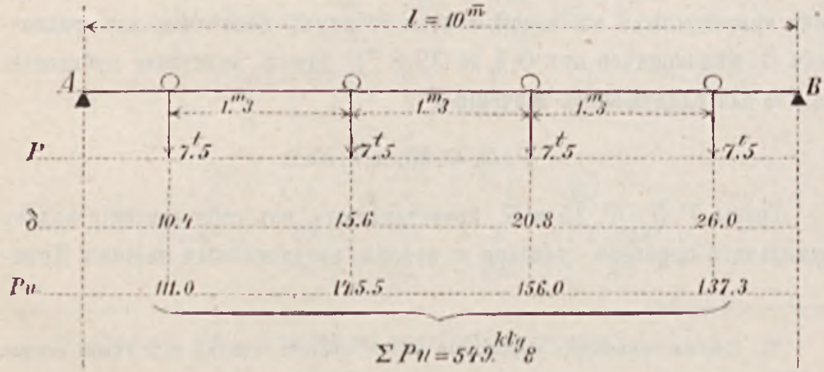
Цѣлыя части произведеній Pu, данныхъ въ таблицѣ, означаютъ тысячныя доли тоннъ, т. е. килограммы. Для δ, не указанныхъ въ таблицѣ, мы получаемъ величину Pu посредствомъ интерполяціи: такъ для груза $P = 5^t$, приложеннаго въ $\delta = 15,9$ мы имѣемъ

$$Pu = \frac{97.5 + 98.5}{2} = 98.\overset{klg.}{00}$$

Такимъ образомъ для опредѣленія прогиба балки по серединѣ пролета, вызваннаго дѣйствіемъ системы сосредоточенныхъ грузовъ, необходимо прежде всего найти для каждаго груза величину δ, т. е. разстояніе точки приложенія отъ лѣвой опоры въ сороковыхъ частяхъ пролета; затѣмъ для каждаго δ и P найти по таблицѣ величины Pu и ихъ просуммировать; наконецъ полученную сумму $\Sigma\, Pu$ помножить на $\frac{1}{EJ} l^3$.

Покажемъ все сказанное на примѣрѣ. Положимъ, что имѣемъ свободно-лежащую на опорахъ балку AB, пролетомъ $l = 10^m$ и съ среднимъ моментомъ инерціи $J = 0,\ 0015$; $E = 180 \times 10^8$; пусть на этой балкѣ расположенъ согласно черт. 4 нормальный паровозъ съ давленіями на колеса въ $7^t.5$. Требуется опредѣлить прогибъ по серединѣ пролета.

Черт. 4.



Опредѣлимъ для каждаго груза величину δ *); пусть онѣ, выраженныя въ сороковыхъ частяхъ пролета AB, будутъ

$$\delta_1 = 10.4;\ \delta_2 = 15.6;\ \delta_3 = 20.8;\ \delta = 26.0$$

Ищемъ для этихъ δ въ таблицѣ для $P = 7^t.5$ соотвѣтственныя значенія Pu; находимъ:

$$Pu_1 = 111.00;\ Pu_2 = 145.50;\ Pu_3 = 156.00;\ Pu_4 = 137.3$$

Слѣдовательно $\Sigma Pu = \overset{klg.}{549.8}$.

Прогибъ балки по серединѣ пролета найдется по формулѣ $(2''')$:

$$f = \frac{1}{EJ} \times l^3 \times \Sigma Pu = \frac{1}{180 \times 10^8 \times 0.0015} \times 10^3 \times 549.8 = 0^m.0203.$$

B. Опредѣленіе наклоненія касательныхъ къ упругой линіи на опорахъ.

Въ введеніи мы указали, что величины угловъ наклоненія касательныхъ къ упругой линіи на опорахъ относительно первоначальной нейтральной оси найдутся изъ слѣдующихъ выраженій.

$$\left.\begin{aligned} tg\alpha_1 &= \frac{1}{EJ} \times \frac{SZ}{l} \\ tg\alpha_2 &= \frac{1}{EJ} \times \frac{SZ'}{l} \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

гдѣ α_1 — уголъ при правой опорѣ.

α_2 — уголъ при лѣвой опорѣ.

S — площадь моментовъ.

Z и Z' — разстоянія центра тяжести площади S отъ опоръ.

l — пролетъ балки.

Разсмотримъ, какія выраженія получаются для $tg\alpha_1$ и $tg\alpha_2$ въ случаѣ загруженія балки равномѣрно и въ случаѣ загруженія сосредоточенными грузами.

---

*) Способъ опредѣленія δ указанъ въ приложеніи.

a. Балка нагружена равномѣрно.

При опредѣленіи прогиба балки по серединѣ пролета (черт. 2) мы получили, что въ данномъ случаѣ

$$S=\frac{pl^3}{12}, \text{ а } Z=Z'=\frac{l}{2}.$$

Слѣдовательно

$$tg\alpha_1=tg\alpha_2=\frac{1}{EJ}\times\frac{pl^3}{24} \qquad (3)$$

Такъ какъ прогибъ балки по серединѣ пролета

$$F=\frac{1}{EJ}\times\frac{5}{384}\times pl^4$$

то $tg\alpha_1$ и $tg\alpha_2$ могутъ быть выражены функціей отъ F въ слѣдующемъ видѣ.

$$tg\alpha_1=tg\alpha_2=\frac{F}{0.329\,l.} \qquad (4)$$

b. Балка нагружена сосредоточенными грузами.

При опредѣленіи выше прогиба балки по серединѣ пролета (черт. 3) мы получили, что въ данномъ случаѣ

$$S=(\delta-\delta^2)\ \frac{l^2}{2}$$

$$Z=\left(\frac{1+\delta}{3}\right)l$$

$$Z=\left(\frac{2-\delta}{3}\right)l$$

Слѣдовательно

$$tg\alpha_1=\frac{1}{EJ}\times(\delta-\delta^2)\ \frac{l^2}{2}\times\left(\frac{1+\delta}{3}\right)l\times\frac{1}{l}=\frac{1}{EJ}\,l^2\left(\frac{\delta-\delta^3}{6}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} tg\alpha_2&=\frac{1}{EJ}\times(\delta-\delta^2)\ \frac{l^2}{2}\times\left(\frac{2-\delta}{3}\right)l\times\frac{1}{l}=\\ &=\frac{1}{EJ}\,l^2\left(\frac{2\delta-3\delta^2+\delta^3}{6}\right)\end{aligned}\right| \qquad (5)$$

Для сокращенія означимъ

$$\frac{\delta-\delta^3}{6}=m$$

$$\frac{2\delta-3\delta^2+\delta^3}{6}=n$$

тогда

$$\left.\begin{aligned} tg\alpha_1 &= \frac{1}{EJ}\,l^2\,m \\ tg\alpha_2 &= \frac{1}{EJ}\,l^2\,n \end{aligned}\right\}\quad (5')$$

Если бы въ точкѣ C былъ приложенъ не грузъ $P=1$, а какой либо $P_0 \gtrless 1$, то имѣли бы для $tg\alpha_1$ и $tg\alpha_2$ слѣдующія выраженія

$$\left.\begin{aligned} tg\alpha_1 &= \frac{1}{EJ}\,P_0\,l^2\,m \\ tg\alpha_2 &= \frac{1}{EJ}\,P_0\,l^2\,n\,. \end{aligned}\right\}\quad (5'')$$

Выраженія же $\frac{SZ}{l}$ и $\frac{SZ'}{l}$ *) получатъ слѣдующій видъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{SZ}{l} &= P_0\,l^2\,m \\ \frac{SZ'}{l} &= P_0\,l^2\,n\,. \end{aligned}\right\}\quad (6'')$$

Если на балку будутъ дѣйствовать одновременно нѣсколько грузовъ P_1, P_2, P_3 ..... приложенныхъ соотвѣтственно на разстояніяхъ $\delta_1 l$, $\delta_2 l$, $\delta_3 l$ ..... отъ лѣвой опоры A, то на основаніи начала независимости дѣйствія силъ будемъ имѣть для $tg\alpha_1$, $tg\alpha_2$, $\frac{SZ}{l}$ и $\frac{SZ'}{l}$ слѣдующія выраженія

$$\left.\begin{aligned} tg\alpha_1 &= \frac{1}{EJ}\,l^2\,\Sigma\,P\,m \\ tg\alpha_2 &= \frac{1}{EJ}\,l^2\,\Sigma\,P\,n \end{aligned}\right\}\quad (5''')$$

---

*) Значеніе этихъ выраженій необходимо знать при опредѣленіи ниже опорныхъ моментовъ для бруса закрѣпленнаго въ концахъ.

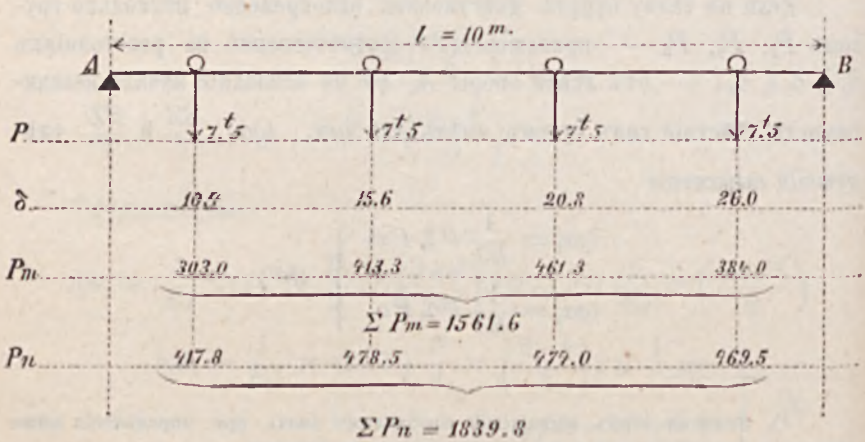
$$\left.\begin{aligned} \frac{SZ}{l} &= l^2 \Sigma Pm \\ \frac{SZ'}{l} &= l^2 \Sigma Pn \end{aligned}\right\} \quad (6''')$$

Замѣтимъ здѣсь, что перенося начало координатъ изъ A въ B, выраженіе для n превращается въ выраженіе для m; значенія для m симметричны относительно середины пролета значеніямъ для n. Величина m получаетъ максимальное значеніе при $\delta l = \frac{23}{40} l$, а величина n — при $\delta l = \frac{17}{40} l$.

Для формулъ $(5''')$ и $(6''')$ суммы $\Sigma\ Pm$ и $\Sigma\ Pn$ вычисляются быстро при помощи уже выше объясненной и приведенной въ концѣ статьи таблицы; замѣтимъ, что столбцы, помѣченные въ этой таблицѣ на верху Pn и Pm для δ, указанныхъ въ первомъ столбцѣ на лѣво, переходятъ соотвѣтственно въ Pm и Pn, какъ указано внизу таблицы, для δ, указанныхъ въ послѣднемъ столбцѣ на право.

Все объясненное выше относительно величинъ Pu относится также и до произведеній Pm и Pn. Для примѣра опредѣлимъ величины $tg\alpha_1$ и $tg\alpha_2$ для бруса, указаннаго на черт. 5; для подобнаго расположенія колесъ уже опредѣлены (см. черт. 4) величины δ; пусть моментъ инерціи $J = 0.0015$, а $E = 180 \times 10^8$.

Черт. 5.



Ищемъ для этихъ δ въ таблицѣ для $P = 7^t.5$ соотвѣтственныя значенія Pm и Pn (они указаны на чертежѣ) и затѣмъ находимъ

$$\Sigma\, Pm = \overset{klg}{1561.6}$$

$$\Sigma\, Pn = \overset{klg}{1839.8}.$$

Величины $tg\alpha_1$ и $tg\alpha_2$ найдутся по формуламъ ($5'''$), а именно

$$tg\alpha_1 = \frac{1}{180 \times 10.^8 \times 0.0015} \times \overset{2}{10.00} \times 1561.6 = \overset{m}{0.00578}$$

$$tg\alpha_2 = \frac{1}{180 \times 10.^8 \times 0.0015} \times \overset{2}{10.00} \times 1839.8 = \overset{m}{0.00681}.$$

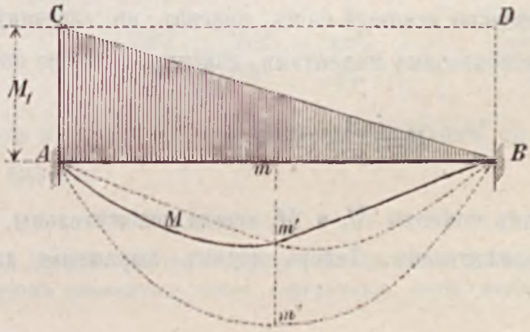
II. Балки закрѣпленныя горизонтально въ концахъ.

Прогибъ балки, закрѣпленной горизонтально въ концахъ, по серединѣ пролета будетъ представлять алгебраическую сумму двухъ прогибовъ: 1) прогиба, вызываемаго грузами дѣйствующими на пролетъ и 2) прогиба, вызываемаго изгибающими моментами, дѣйствующими на опорахъ.

Первый изъ этихъ двухъ прогибовъ будетъ имѣть ту же величину, какую бы онъ имѣлъ, если бы наша балка была свободно лежащая на опорахъ; онъ, какъ уже указано, всегда отрицателенъ и способъ его опредѣленія указанъ въ отд. I, а потому мы переходимъ прямо къ разсмотрѣнію второго прогиба F, т. е. прогиба вызываемаго изгибающими моментами, дѣйствующими на опорахъ.

Пусть AB (черт. 6) будетъ балка, закрѣпленная горизонтально въ своихъ концахъ, а M_1 и M_2 — изгибающіе моменты на опорахъ.

Черт. 6.



Моментъ M_1 вызываетъ въ различныхъ сѣченіяхъ пролета изгибающіе моменты, изображенные ординатами линіи CB. Площадь ACB представляетъ площадь нагрузки, веревочный многоугольникъ которой, съ полюснымъ разстояніемъ EJ, дастъ намъ видъ нейтральной оси балки AB, измѣненный подъ вліяніемъ изгибающаго момента M_1. Этотъ видъ AMB нейтральной оси можно построить или графически или же помощью нижеприведенной таблицы, т. к. ординаты линіи AMB пропорціональны величинамъ, которыя мы выше обозначили буквою m. Но намъ нѣтъ надобности строить всей линіи AMB, а необходимо только опредѣлить ординату mm' по серединѣ пролета, представляющую прогибъ балки f_1 по серединѣ пролета, вызванный моментомъ M_1.

На сторонахъ AB и AC построимъ прямоугольникъ $ABCD$; треугольники ABC и CBD равны и симметричны; искомый прогибъ mm' есть половина прогиба mm'' веревочной кривой, соотвѣтствующей прямоугольной площади нагрузки $ABCD$. Но эта площадь представляетъ нагрузку, равномѣрно распредѣленную по M_1 на погонную единицу длины, а потому соотвѣтственная веревочная кривая будетъ, какъ извѣстно, парабола второй степени, наибольшая ордината которой $=$ $\frac{M_1 l^2}{8}$; слѣдовательно прогибъ, соотвѣтствующій площади ACB, будетъ

$$f_1 = mm' = \frac{1}{2} \times \frac{M_1 l^2}{8} \times \frac{1}{EJ} = \frac{1}{EJ} \times \frac{M_1 l^2}{16}. \quad (7')$$

Имѣя на правой опорѣ моментъ M_2 и разсуждая подобнымъ же образомъ получимъ, что прогибъ, вызванный этимъ моментомъ, будетъ:

$$f_2 = \frac{1}{EJ} \times \frac{M_2 l^2}{16}. \quad (7'')$$

Слѣдовательно искомый нашъ прогибъ по серединѣ пролетъ F, вызванный изгибающими моментами, дѣйствующими на опорахъ, будетъ

$$F = \frac{1}{EJ} (M_1 + M_2) \frac{l^2}{16}. \quad (7)$$

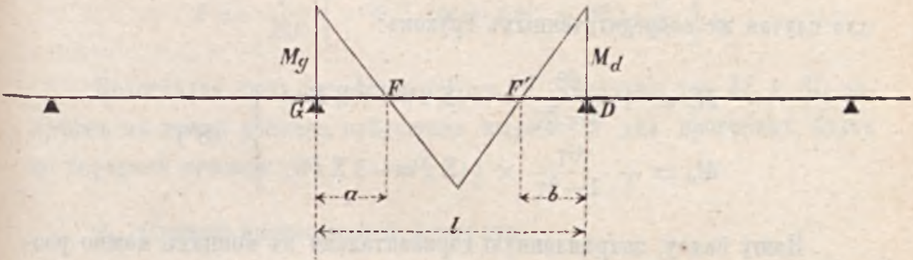
Такъ какъ моменты M_1 и M_2 всегда положительны, то и прогибъ F всегда положителенъ. Теперь дадимъ выраженія для моментовъ M_1 и M_2.

Hausser и Cunq для опорныхъ моментовъ какого-либо нагруженнаго промежуточнаго пролета CD (черт. 7) неразрѣзной балки даютъ слѣдующія выраженія:

$$M_g = +\frac{6\beta}{1-\beta\gamma}\left(\frac{SZ'-\gamma SZ}{l^2}\right)^{*)}$$

$$M_d = +\frac{6\gamma}{1-\beta\gamma}\left(\frac{SZ-\beta SZ'}{l^2}\right)$$

Черт. 7.



Здѣсь: $\beta = \frac{a}{l-a}$; $\gamma = \frac{b}{l-b}$.

a — разстояніе отъ лѣвой опоры g
фокуса **) F,
b — разстояніе отъ правой опоры D
фокука F',
l — величина пролета.

Если пролетъ нагруженъ равномѣрно грузомъ p на единицу длины, то на основаніи формул. (3) имѣемъ:

$$\frac{SZ}{l} = \frac{SZ'}{l} = \frac{pl^3}{24};$$

если же пролетъ нагруженъ сосредоточенными грузами, то на основаніи формул. ($6'''$) имѣемъ:

---

*) Смот. „Hausser и Cunq" — Poutres droites. Paris. p. 38; form. 12.

**) Фокусомъ называется точка пересѣченія линіи моментовъ съ осью абсциссъ.

$$\frac{SZ}{l} = l^2 \Sigma Pm$$

$$\frac{SZ'}{l} = l^2 \Sigma Pn$$

Слѣдовательно для случая равномѣрной нагрузки будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} M_g &= + \frac{6\beta}{1-\beta\gamma} \times \frac{pl^2}{24}(1-\gamma) \\ M_d &= + \frac{6\gamma}{1-\beta\gamma} \times \frac{pl^2}{24}(1-\beta) \end{aligned}\right\} \quad (8')$$

для случая же сосредоточенныхъ грузовъ:

$$\left.\begin{aligned} M_g &= + \frac{6\beta}{1-\beta\gamma} \times l\,(\Sigma Pn - \gamma\,\Sigma Pm) \\ M_d &= + \frac{6\gamma}{1-\beta\gamma} \times l\,(\Sigma Pm - \beta\,\Sigma Pn) \end{aligned}\right\} \quad (8'')$$

Нашу балку, закрѣпленную горизонтально въ концахъ можно разсматривать какъ промежуточный пролетъ неразрѣзной балки; для нея будетъ

$$a = b = \frac{l}{3}$$

Слѣдовательно

$$\beta = \gamma = \frac{1}{2}$$

$$\frac{6\beta}{1-\beta\gamma} = \frac{6\gamma}{1-\beta\gamma} = 4$$

Отсюда имѣемъ для случая равномѣрной нагрузки

$$M_1 = M_2 = + \frac{pl^2}{12} \quad (9')$$

а для случая сосредоточенныхъ грузовъ:

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= l\,(4\,\Sigma Pn - 2\,\Sigma Pm) \\ M_2 &= l\,(4\,\Sigma Pm - 2\,\Sigma Pn) \end{aligned}\right\} \quad (9'')$$

Моменты M_1 и M_2 всегда положительны. Чтобы получить наконецъ прогибы нашей балки по серединѣ пролета, намъ нужно въ случаѣ полной загрузки пролета равномѣрнымъ грузомъ p на единицу длины соединить форм. (1) и (7), а въ случаѣ нахожденія на пролетѣ нѣсколько сосредоточенныхъ грузовъ $P_1, P_2, P_3 \cdots\cdots$ соединить форму. (2‴) и (7).

Получаемъ для случая равномѣрной нагрузки

$$F = \frac{1}{EJ}\left[-\frac{5}{384}\,pl^4 + (M_1 + M_2)\,\frac{l^2}{16}.\right]$$

для случая же сосредоточенныхъ грузовъ:

$$F = \frac{1}{EJ}\left[-l^3\,\Sigma\,Pu + (M_1 + M_2)\,\frac{l^2}{16}\right]$$

Подставляя сюда изъ форм. (9′) и (9″) значеніе для M_1 и M_2 получимъ въ концѣ концовъ слѣдующія выраженія для прогибовъ балки по серединѣ пролета.

1. Случай равномѣрной нагрузки.

$$F = -\frac{1}{EJ} \times \frac{pl^4}{384} \qquad (10')$$

2. Случай сосредоточенныхъ грузовъ.

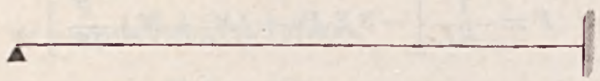
$$F = \frac{l^3}{EJ}\left(-\Sigma\,Pu + \frac{\Sigma\,Pn + \Sigma\,Pm}{8}\right) \qquad (10'')$$

III. Балки, однимъ концомъ горизонтально закрѣпленныя, а другимъ свободно-лежащія на опорѣ.

Прогибъ по серединѣ пролета балки, однимъ концомъ горизонтально закрѣпленной, а другимъ свободно-лежащей на опорѣ, будетъ представлять алгебраическую сумму двухъ прогибовъ; 1) прогиба, вызываемаго грузами, дѣйствующими на пролетѣ и 2) прогиба, вызываемаго изгибающимъ моментомъ, дѣйствующимъ на закрѣпленной опорѣ. Первый изъ этихъ двухъ прогибовъ будетъ имѣть ту же величину, какую бы онъ имѣлъ, если бы наша балка была свободно-лежащая на обѣихъ опорахъ; онъ всегда отрицателенъ и способъ его опредѣленія указанъ въ отд. I. Что же касается до второго прогиба, то величина его получится изъ форм. (7), гдѣ надо сдѣлать или $M_1 = 0$, или же $M_2 = 0$, смотря потому, будетъ ли правый конецъ балки закрѣпленъ, или же лѣвый. *) Слѣдовательно если у насъ имѣется балка, показанная на черт. 8′, то

$$F = \frac{1}{EJ} \times M_2 \times \frac{l^2}{16} \qquad (11')$$

Черт. 8′.



если же балка по черт. 8″, то

$$F = \frac{1}{EJ} \times M_1 \times \frac{l^2}{16} \qquad (11'')$$

Черт. 8″.

Величины моментовъ M_1 и M_2 найдутся изъ форм. (8′) и (8″).

Въ указанныхъ балкахъ (черт. 8′ и черт. 8″) одинъ изъ фокусовъ отстоитъ на треть пролета отъ закрѣпленной опоры, а другой фокусъ совпадаетъ съ опорой, на которой они лежатъ свободно.

Слѣдовательно для случая балки по черт. 8′

$$\beta = 0;\ \gamma = \frac{1}{2};\ \frac{6\gamma}{1-\beta\gamma} = 3.$$

а для случая балки по черт. 8″.

$$\beta = \frac{1}{2};\ \gamma = 0;\ \frac{6\beta}{1-\beta\gamma} = 3.$$

*) Мы разсматриваемъ эти балки, какъ крайніе пролеты неразрѣзныхъ балокъ.

Отсюда имѣемъ для случая полной загрузки пролета равномѣрнымъ грузомъ p на погонную единицу

$$M_2 = M_1 = +\frac{pl^2}{8} \qquad (12')$$

а для случая нахожденія на пролетѣ нѣсколькихъ сосредоточенныхъ грузовъ P_1, P_2, P_3, ...

$$\left.\begin{aligned} M_2 &= +3l\,\Sigma\,Pm \\ M_1 &= +3l\,\Sigma\,Pn \end{aligned}\right\} \qquad (12'')$$

Моменты M_1 и M_2 всегда положительны. Чтобы получить теперь прогибы нашихъ балокъ по серединѣ пролета намъ нужно въ случаѣ равномѣрной нагрузки соединить форм. (1) и (11′) или (11″), а въ случаѣ сосредоточенныхъ грузовъ — соединить форм. (2‴) и (11′) или (11″). Получаемъ для балки по черт. 8′:

1. Случай равномѣрной нагрузки.

$$F = \frac{1}{EJ}\left(-\frac{5}{384}pl^4 + M_2 \times \frac{l^2}{16}\right)$$

2. Случай сосредоточенныхъ грузовъ.

$$F = \frac{1}{EJ}\left(-l^3\,\Sigma\,Pu + M_2 \times \frac{l^2}{16}\right).$$

для балки же по черт. 8″:

1. Случай равномѣрной нагрузки.

$$F = \frac{1}{EJ}\left(-\frac{5}{384}pl^4 + M_1 \times \frac{l^2}{16}\right)$$

2. Случай сосредоточенныхъ грузовъ.

$$F = \frac{1}{EJ}\left(-l^3\,\Sigma\,Pu + M_1 \times \frac{l^2}{16}\right)$$

Подставляя сюда изъ форм. (12′) и (12″) значенія для M_1 и M_2 получимъ въ концѣ концовъ слѣдующія выраженія для прогибовъ балокъ по серединѣ пролета:

Балка по черт. 8'.

1. *Случай равномѣрной нагрузки.*

$$F = \frac{1}{EJ} \times -\frac{2}{384} pl^4 . \qquad (13')$$

2. *Случай сосредоточенныхъ грузовъ.*

$$F = \frac{1}{EJ} \times l^3 \left(-\Sigma Pu + \frac{3}{16} \Sigma Pm \right) \qquad (13'')$$

Балка по черт. 8''.

1. *Случай равномѣрной нагрузки.*

$$F = \frac{1}{EJ} \times -\frac{2}{384} pl^4 \qquad (14')$$

2. *Случай сосредоточенныхъ грузовъ.*

$$F = \frac{1}{EJ} \times l^3 \left(-\Sigma Pu + \frac{3}{16} \Sigma Pn \right). \qquad (14'')$$

Замѣтимъ здѣсь, что въ случаѣ полной загрузки пролета равномѣрнымъ грузомъ максимальный прогибъ будетъ строго говоря не посерединѣ, гдѣ согласно форм. (13') и (14')

$$F = 0{,}0052 \frac{pl^4}{EJ} ,$$

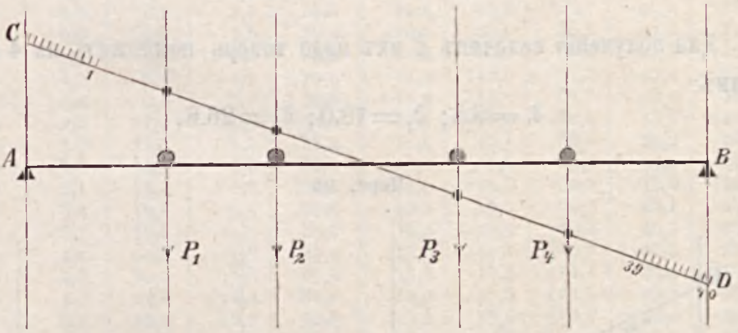
а въ разстояніи отъ закрѣпленной опоры, равномъ $0{,}5785\ l$ и будетъ $= 0{,}0054 \frac{pl^4}{EJ}$.

Приложеніе.

Въ заключеніе покажемъ, какъ просто можно опредѣлить величины δ.

Нанеся на бумагѣ въ соотвѣтственномъ масштабѣ величину пролета заданной балки и отмѣтивъ положеніе находящихся на пролетѣ грузовъ, для котораго мы желаемъ опредѣлить прогибъ помѣщаемъ между вертикалями, проходящими чрезъ точки опоры, линейку CD длиною $\overset{m}{0.40}$. (черт. 9) и замѣчаемъ на ней число сантиметровъ и миллиметровъ, находящихся между лѣвымъ концомъ C и вертикалями, проходящими черезъ грузы.

Черт. 9.



Каждый прочитанный на линейкѣ CD сантиметръ указываетъ, очевидно, сороковую часть пролета AB, а каждый миллиметръ — одну десятую сороковой части. Очевидно, что положеніе линейки CD не играетъ роли, если только концы ея лежатъ на вертикаляхъ, проходящихъ черезъ точки опоры.

Если пролетъ незначителенъ, то длину линейки CD можно сдѣлать равнымъ $\frac{\overset{m}{0.40}}{4}$ или $\frac{\overset{m}{0.40}}{2}$; тогда уже каждый сантиметръ, читанный на линейкѣ, даетъ четыре или двѣ сороковыя части пролета, и слѣдовательно прочитанныя числа надо учетверить или же удвоить. Такимъ же точнымъ образомъ, если пролетъ очень великъ, то можно длину линейки CD сдѣлать равнымъ $\overset{m}{0.80}$; тогда каждый читанный сантиметръ даетъ половину сороковой части пролета и слѣдовательно прочитанныя числа надо уменьшить вдвое.

Приведемъ слѣдующій примѣръ. Положимъ пролетъ балки AB (черт. 10) $l = \overset{m}{9.00}$ и на ней находятся три груза P_1, P_2 и P_3. въ сѣченіяхъ указанныхъ на чертежѣ. Требуется опредѣлить величины δ для каждаго груза?

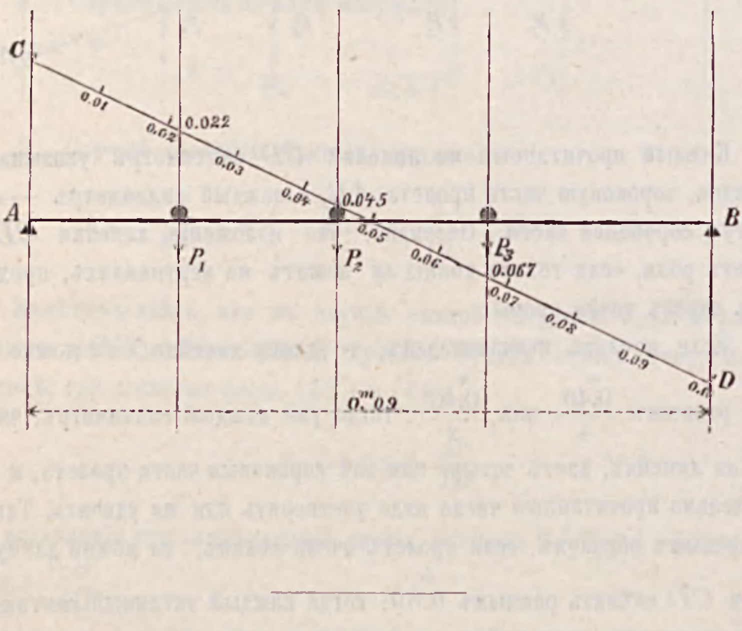
Откладываемъ величину нашего пролета въ масштабѣ $^1/_{100}$, т. е. дѣлаемъ $\overset{m}{1.00} = \overset{m}{0.01}$; слѣдовательно величина пролета на чертежѣ будетъ $= \overset{m}{0}.09$. Дѣлаемъ длину линейки $CD = \overset{m}{0}.10$, прикладываемъ ее такъ, чтобы концы ея лежали на опорныхъ вертикаляхъ и читаемъ число сантиметровъ и миллиметровъ, приходящіеся у вертикалей, проходящихъ черезъ каждый грузъ. Эти числа будутъ

$$0.022;\ 0.045;\ 0.067.$$

Для полученія величинъ δ ихъ надо теперь помножить на 4 и получимъ:

$$\delta_1 = 8.8;\ \delta_2 = 18.0;\ \delta_3 = 26.8.$$

Черт. 10.



Таблицы величинъ *Pu*, *Pn* и *Pt*

для $P = 1^t, 5^t, 6{,}25^t$, и $7{,}5^t$.

δ	$P = 1t$				δ	$P = 1t$			
	Pu	*Pn*	*Pt*			*Pu*	*Pn*	*Pt*	
0,2	0,3	1,6	0,8	39,8	10,2	14,6	55,2	39,7	29,8
0,4	0,6	3,2	1,7	39,6	10,4	14,8	55,7	40,4	29,6
0,6	0,9	4,8	2,5	39,4	10,6	15,0	56,3	41,0	29,4
0,8	1,3	6,4	3,3	39,2	10,8	15,2	56,8	41,7	29,2
1,0	1,6	8,0	4,2	39,0	11,0	15,5	57,3	42,4	29,0
1,2	1,9	9,5	5,0	38,8	11,2	15,7	57,7	43,0	28 8
1,4	2,2	11,0	5,8	38,6	11,4	15,9	58,2	43,6	28,6
1,6	2,5	12,5	6,7	38,4	11,6	16,1	58,6	44,2	28,4
1,8	2,8	14,0	7,5	38,2	11,8	16,3	59,1	44,9	28,2
2,0	3,1	15,4	8,3	38,0	12,0	16,5	59,5	45,5	28,0
2,2	3,4	16,8	9,1	37,8	12,2	16,7	59,9	46,1	27,8
2,4	3,7	18,2	10,0	37,6	12,4	16,9	60,3	46,7	27,6
2,6	4,1	19,5	10,8	37,4	12,6	17,1	60,7	47,3	27,4
2,8	4,3	20,9	11,6	37,2	12,8	17,3	61,1	47,9	27,2
3,0	4,7	22,3	12,4	37,0	13,0	17,5	61,5	48,4	27,0
3,2	5,0	23,5	13,2	36,8	13,2	17,6	61,7	49,0	26,8
3,4	5,3	24,8	14,1	36,6	13,4	17,8	61,9	49,5	26,6
3,6	5,6	26,0	14,9	36,4	13,6	18,0	62,1	50,1	26,4
3,8	5,9	27,3	15,7	36,2	13,8	18,1	62,4	50,6	26,2
4,0	6,2	28,5	16,5	36,0	14,0	18,3	62,6	51,2	26,0
4,2	6,5	29,6	17,3	35,8	14,2	18,5	62,7	51,7	25,8
4,4	6,8	30,8	18,1	35,6	14,4	18,6	62,9	52,2	25,6
4,6	7,1	31,9	18,9	35,4	14,6	18,7	63,1	52,7	25,4
4,8	7,4	33,0	19,7	35,2	14,8	18,9	63,3	53,2	25,2
5,0	7,7	34,2	20,5	35,0	15,0	19,0	63,5	53,7	25,0
5,2	7,9	35,2	21,3	34,8	15,2	19,2	63,6	54,2	24,8
5,4	8,2	36,2	22,1	34,6	15,4	19,3	63,7	54,6	24,6
5,6	8,5	37,3	22,9	34,4	15,6	19,4	63,8	55,1	24,4
5,8	8,8	38,3	23,7	34,2	15,8	19,5	63,9	55,5	24,2
6,0	9,1	39,3	24,4	34,0	16,0	19,7	64,0	56,0	24,0
6,2	9,4	40,2	25,2	33,8	16,2	19,8	64,0	56,4	23,8
6,4	9,7	41,1	26,0	33,6	16,4	19,9	64,1	56,8	23,6
6,6	9,9	42,1	26,7	33,4	16,6	20,0	64,1	57,2	23,4
6,8	10,2	43,0	27,5	33,2	16,8	20,1	64,1	57,6	23,2
7,0	10,5	43,9	28,3	33,0	17,0	20,2	64,1	58,0	23,0
7,2	10,8	44,7	29,0	32,8	17,2	20,2	64,1	58,4	22,8
7,4	11,0	45,6	29,8	32,6	17,4	20,3	64,1	58,7	22,6
7,6	11,3	46,4	30,5	32,4	17,6	20,4	64,0	59,1	22,4
7,8	11,6	47,2	31,3	32,2	17,8	20,5	64,0	59,5	22,2
8,0	11,8	48,0	32,0	32,0	18,0	20,5	63,9	59.8	22,0
8,2	12,1	48,7	32,7	31,8	18,2	20,6	63,8	60,1	21,8
8,4	12,3	49,4	33,4	31,6	18,4	20,6	63,7	60,4	21,6
8,6	12,6	50,2	34,2	31,4	18,6	20,7	63,6	60,7	21,4
8,8	12,9	50,9	34,9	31,2	18,8	20,7	63,5	61,0	21,2
9,0	13,1	51,6	35,6	31,0	19,0	20,8	63,4	61,3	21,0
9,2	13,4	52,2	36,3	30,8	19,2	20,8	63,3	61,5	20,8
9,4	13,6	52,8	37,0	30,6	19,4	20,8	63,0	61.8	20,6
9,6	13,8	53,4	37,7	30,4	19,6	20,8	62,9	62,0	20,4
9,8	14,1	54,1	38,4	30,2	19,8	20,8	62,7	62,3	20,2
10,0	14,3	54,7	39,1	30,0	20,0	20,8	62,5	62,5	20,0
	Pu.	*Pt.*	*Pn.*	δ	δ	*Pu*	*Pt.*	*Pn.*	δ
	$P = 1t$					$P = 1t$			

δ	P = 5t				δ	P = 5t			
	Pu.	Pn.	Pm.			Pu.	Pn.	Pm.	
0,2	1,5	8,0	4,0	39,8	10,2	73,0	276,8	198,5	29,8
0,4	3,0	16,0	8,5	39,6	10,4	74,0	278,5	202,0	29,6
0,6	4,5	24,0	12,5	39,4	10,6	75,0	281,5	205,0	29,4
0,8	6,5	32,0	16,5	39,2	10,8	76,0	284,0	208,5	29,2
1,0	8,0	40,0	21,0	39,0	11,0	77,5	286,5	212,0	29,0
1,2	9,5	47,5	25,0	38,8	11,2	78,5	288,5	215,0	28,8
1,4	11,0	55,0	29,0	38,6	11,4	79,5	291,0	218,0	28,6
1,6	12,5	65,0	33,5	38,4	11,6	80,5	293,0	221,4	28,4
1,8	14,0	70,0	37,5	38,2	11,8	81,5	295,5	224,5	28,2
2,0	15,5	77,0	41,5	38,0	12,0	82,5	297,5	227,5	28,0
2,2	17,0	84,0	45,5	37,8	12,2	83,5	299,5	230,5	27,8
2,4	18,5	91,0	50,0	37,6	12,4	84,5	301,5	233.5	27,6
2,6	20,5	97,5	54,0	37,4	12,6	85,5	303,5	236,5	27,4
2,8	21,5	104,5	58,0	37,2	12,8	86,5	305,5	239,5	27,2
3,0	23,5	111,5	62,0	37,0	13,0	87,5	307,5	242,0	27·0
3,2	25,0	117,5	66,0	36,8	13,2	88,0	308,5	245,0	26,8
3,4	26,5	124,0	70,5	36,6	13,4	89,0	309,5	247,5	26,6
3,6	28,0	130,0	74,5	36,4	13,6	90,0	310,5	250,5	26,4
3,8	29,5	136,5	78,5	36,2	13,8	90,5	312,0	253,0	26,2
4,0	31,0	142,5	82,5	36.0	14,0	91,5	313,0	256,0	26,0
4,2	32,5	148,0	86,5	35,8	14,2	92,5	313,5	258,5	25,8
4,4	34,0	154,0	90,5	35,6	14,4	93,0	314,5	261,0	25,6
4,6	35,5	159,5	94,5	35,4	14,6	93,5	315,5	263,5	25,4
4,8	37,0	165,0	98,5	35,2	14.8	94,5	316,5	266,0	25,2
5,0	38,5	171,0	102,5	35,0	15,0	95,0	317,5	268,5	25,0
5,2	39,5	176,0	106.5	34,8	15,2	96,0	318,0	271,0	24,8
5,4	41,0	181,0	110,5	34,6	15,4	96,5	318,5	273,0	24,6
5,6	42,5	186,5	114,5	34,4	15,6	97,0	319,0	275,5	24,4
5,8	44,0	191,5	118,5	34,2	15,8	97,5	319,5	277,5	24,2
6,0	45,5	196,5	122,0	34,0	16,0	98,5	320,0	280,0	24,0
6,2	47,0	201,0	126,0	33,8	16,2	99,0	320,0	282,0	23,8
6,4	48,5	205,5	130,0	33,6	16,4	99,5	320,5	284,0	23,6
6,6	49,5	210,5	133,5	33,4	16,6	100,0	320,5	286,0	23,4
6,8	51,0	215,0	137,5	33,2	16,8	100,5	320,5	288,0	23,2
7,0	52,5	219,5	141,5	33,0	17,0	101,0	320,5	290,0	23,0
7,2	54,0	223,5	145,0	32,8	17,2	101,0	320,5	292,0	22,8
7,4	55,0	228,0	149,0	32,6	17,4	101,5	320,5	293,5	22,6
7,6	56,5	232,0	152,5	32,4	17,6	102,0	320,0	295,5	22,4
7,8	58,0	236,0	156,5	32,2	17.8	102,5	320,0	297,5	22,2
8,0	59,0	240,0	160,0	32,0	18,0	102,5	319,5	299,0	22,0
8,2	60,5	243,5	163,5	31,8	18,2	103,0	319,0	300,5	21,8
8,4	61,5	247,0	167,0	31,6	18,4	103,0	318,5	302,0	21,6
8,6	63,0	251,0	171,0	31,4	18,6	103,5	318,0	303,5	21,4
8,8	64,5	254,5	174,5	31,2	18.8	103,5	317,5	305,0	21,2
9,0	65,5	258,0	178,0	31,0	19,0	104,0	317,0	306,5	21,0
9,2	67,0	261,0	181,5	30,8	19,2	104,0	316,0	307,5	20,8
9,4	68,0	264,0	185,0	30,6	19,4	104,0	315,0	309,0	20,6
9,6	69,0	267,0	188,5	30,4	19,6	104,0	314,5	310,0	20,4
9,8	70,5	270,5	192,0	30,2	19,8	104,0	313,5	311,5	20,2
10,1	71,5	273,5	195,5	30,0	20,0	104,0	312,5	312,5	20,0
	Pu.	Pm.	Pn.	δ		Pu.	Pm.	Pn.	δ
	P = 5t					P = 5t			

δ	P=6,25 t				δ	P=6,25 t			
	Pu.	*Pn.*	*Pm.*			*Pu.*	*Pn.*	*Pm.*	
0,2	1,9	10,0	5,0	39,8	10,2	91,3	345,0	248,1	29,8
0,4	3,8	20,0	10,6	39,6	10,4	92,5	348,1	252,5	29,6
0,6	5,7	30,0	15,6	39.4	10,6	93,8	351,9	256,3	29,4
0,8	8,1	40,0	20,6	39,2	10,8	95,0	355,0	260,6	29,2
1.0	10,0	50,0	26,3	39,0	11,0	96.9	358,1	265,0	29,0
1.2	11,9	59,4	31,3	38,8	11,2	98,1	360.6	268,8	28,8
1,4	13,8	68,8	36,3	38,6	11,4	99,4	363,8	272,5	28,6
1,6	15,6	78,1	41,9	38,4	11,6	100,6	366,3	276,3	28,4
1,8	17,5	87,5	46,9	38,2	11,8	101,9	369,4	280,6	28,2
2,0	19,4	96,3	51,9	38,0	12,0	103,1	371,9	284,4	28,0
2,2	21,3	105,0	56,9	37,8	12,2	104,4	374,4	288,1	27,8
2,4	23,1	113,8	62,5	37,6	12,4	105,6	376,9	291,9	27.6
2,6	25.6	121,9	67,5	37,4	12 6	106,9	379,4	295,6	27,4
2,8	26,9	130,6	72,5	37,2	12,8	108,1	381,9	299,4	27,2
3,0	29,4	139,4	77,5	37.0	13,0	109,4	384,4	302,5	27,0
3,2	31,3	146,9	82,5	36,8	13,2	110,0	385,6	306,3	26,8
3,4	33,1	155,0	88,1	36,6	13,4	111,3	386,9	309.4	26,6
3,6	35,0	162,5	93,1	36,4	13,6	112,5	388,1	313,1	26,4
3,8	36,9	170,6	98,1	36,2	13,8	113,1	390,0	316,3	26,2
4,0	38,8	178,1	103,1	36,0	14,0	114,4	391,3	320,0	26,0
4,2	40,6	185,0	108,1	35,8	14,2	115,6	391,9	323,1	25,8
4,4	42,5	192,5	113,1	35,6	14,4	116,3	393,1	326,3	25,6
4,6	44,4	199,4	118,1	35,4	14,6	116,9	394.4	329,4	25,4
4,8	46,3	206,3	123,1	35,2	14,8	118,1	395,6	332,5	25,2
5,0	48,1	213,8	128,1	35.0	15 0	118,8	396,9	335.6	25,0
5,2	49,4	220,0	133,1	34,8	15,2	120,0	397,5	338,8	24,8
5 4	51,3	226,3	138,1	34,6	15,4	120,6	398,1	341,3	24,6
5,6	53,1	233,1	143,1	34,4	15,6	121,3	398,8	344,4	24,4
5,8	55,0	239,4	148,1	34,2	15,8	121,9	399,4	346,9	24,2
6,0	56,9	245,6	152,5	34,0	16,0	123,1	400.0	350,0	24,0
6,2	58,8	251,3	157,5	33,8	16,2	123,8	400,6	352,5	23,8
6,4	60,6	256,9	162.5	33,6	16,4	124,4	400,6	355,0	23,6
6,6	61,9	263,1	166,9	33,4	16,6	125,0	400,6	357,5	23,4
6,8	63,8	268,8	171,9	33,2	16,8	125,6	400,6	360,0	23,2
7,0	65.6	274,4	176,9	33,0	17,0	126,3	400,6	362,5	23,0
7,2	67,5	279,4	181,3	32,8	17,2	126,3	400,6	365,0	22,8
7,4	68,8	285,0	186,3	32,6	17,4	126,9	400,6	366,9	22,6
7.6	70,6	290,0	190,6	32,4	17,6	127,5	400,0	369,4	22,4
7,8	72,5	295,0	195,6	32,2	17,8	128,1	400,0	371,9	22,2
8,0	73,8	300,0	200,0	32,0	18,0	128,1	399.4	373,8	22,0
8,2	75,6	304,4	204,4	31,8	18,2	128,8	398.8	375,6	21,8
8,4	76,9	308,8	208,8	31,6	18,4	128,8	398.1	377,5	21,6
8,6	78,8	313,8	213 8	31,4	18.6	129,4	397,5	379,4	21,4
8.8	80,6	318,1	218,1	31,2	18,8	129,4	396,9	381.3	21,2
9,0	81,9	322,5	222,5	31,0	19,0	130,0	396,3	383,1	21,0
9,2	83,8	326,3	226,9	30,8	19,2	130,0	395,0	384,4	20,8
9,4	85,0	330,3	231,3	30,6	19,4	130,0	393,8	386,3	20,6
9,6	86,3	333,8	235,6	30,4	19,6	130,0	393,1	387,5	20.4
9,8	88,1	338,1	240,0	30,2	19,8	130,0	391,9	389,4	20,2
10,0	89,4	341,9	244,4	30,0	20,0	130,0	390,6	390,6	20,0
	Pu	*Pm*	*Pn*	δ	δ	*Pu*	*Pm*	*Pn*	δ
	P=6,25 t					P=6,25 t			

δ	P=7,5 t				δ	P=7,5 t			
	Pu	*Pn*	*Pm*			*Pu*	*Pn*	*Pm*	
0,2	2,3	12,0	6,0	39,8	10,2	109,5	414,0	297,8	29,8
0,4	4,5	24,0	12.8	39,6	10,4	111,0	417,8	303,0	29,6
0,6	6,8	36,0	18,8	39,4	10,6	112,5	422,3	307,5	29,4
0,8	9,8	48,0	24,8	39,2	10,8	114,0	426,0	312,8	29,2
1,0	12,0	60,0	31,5	39,0	11,0	116,3	429,8	318,0	29,0
1,2	14,3	71,3	37,5	38,8	11,2	117,8	432,8	322,5	28,8
1,4	16,5	82,5	43,5	38,6	11,4	119,3	436,5	327,0	28,6
1,6	18,8	93,8	50,3	38,4	11,6	120.8	439,5	331,5	28,4
1,8	21.0	105,0	56,3	38,2	11.8	122,3	443,3	336,8	28,2
2,0	23,3	115,5	62,3	38,0	12,0	123,8	446,3	341.3	28,0
2,2	25,5	126,0	68,3	37.8	12,2	125,3	447,3	345,7	27,8
2,4	27,8	136,5	75,0	37,6	12,4	126,8	452,3	350,3	27,6
2,6	30,8	146,3	81,0	37,4	12,6	128,3	455,3	354,8	27,4
2,8	32,3	156,8	87,0	37,2	12,8	129,8	458,3	359,3	27,2
3,0	35,3	167,3	93,0	37,0	13,0	131,3	461,3	368,0	27,0
3,2	37,5	176,3	99,0	36,8	13,2	132,0	462,8	367.5	26,8
3,4	39,8	186,0	105,8	36,6	13,4	133.5	464,3	371,3	26,6
3,6	42,0	195,0	111,8	36,4	13,6	135,0	465,8	375,8	26,4
3,8	44,3	204,8	117,8	36,2	13.8	135,8	468,0	379,5	26,2
4,0	46,5	213,8	123,8	36,0	14,0	137,3	469,5	384,0	26,0
4,2	48,8	222,0	129,8	35,8	14,2	138,8	470,3	387.8	25.8
4,4	51,0	231,0	135,8	35.6	14,4	139,5	471,8	391,5	25,6
4,6	53,3	239,3	141,8	35,4	14,6	140.3	473,3	395,3	25,4
4,8	55,5	247,5	147,8	35,2	14,8	141,8	474,8	399,0	25,2
5,0	57,8	256,5	153,8	35,0	15,0	142,5	476,3	402,8	25 0
5,2	59,3	264,0	159,8	34,8	15,2	144,0	477.0	406,5	24,8
5,4	61,5	271,5	165,8	34,6	15,4	144,8	477,8	409,5	24,6
5,6	63,8	279,8	171,8	34,4	15.6	145,5	478,5	413,3	24,4
5,8	66,0	287,3	177,8	34,2	15,8	146,3	479.3	416,3	24,2
6,0	68,3	294,8	183,0	34 0	16,0	147.8	480,0	420,0	24,0
6,2	70,5	301,5	189,0	33,8	16,2	148,5	480,0	423,0	23.8
6,4	72,8	308,3	195,0	33,6	16,4	149,3	480,8	426,0	23,6
6,6	74,3	315,8	200,3	33,4	16,6	150,0	480,8	429,0	23,4
6,8	76,5	322,5	206,3	33,2	16,8	150.8	480,8	433.0	23,2
7,0	78,8	329,3	212,8	33,0	17,0	151,5	480,8	435,0	23.0
7,2	81,0	335,3	217,5	32,8	17,2	151,5	480,8	438,0	22,8
7.4	82,5	342,0	223,5	32,6	17,4	152,3	480.8	440,3	22,6
7,6	84,8	348,0	228,8	32,4	17,6	153,0	480,0	443,3	22,4
7,8	87.0	354,0	234.8	32,2	17,8	153,8	480,0	446.3	22,2
8,0	88,5	360,0	240,0	32,0	18,0	153,8	479,3	448.5	22,0
8,2	90,8	365,3	245,3	31,8	18,2	154,5	478,5	450,8	21,8
8,4	92,3	370.5	250,5	32,6	18,4	154,5	477,8	453,0	21,6
8,6	94,5	376,5	256.5	31,4	18,6	155,3	477,0	455,3	21.4
8,8	96,8	381,8	261,8	31,2	18,8	155,3	476,3	457,5	21,2
9,0	98,3	387,0	267,0	31.0	19.0	156.0	474,5	459,8	21,0
9,2	100,5	391,5	272,3	30,8	19,2	156,0	474,0	461,3	20,8
9,4	102,0	396,0	277,5	30,6	19,4	156,0	472,5	463,5	20,6
9,6	103,5	400,5	282.8	30,4	19,6	156,0	471,8	465,0	20,4
9,8	105,8	405,8	288,0	30,2	19,8	156,0	470,3	467,3	20,2
10,0	107,3	410,3	293,3	30,0	20,0	156,0	468,8	468,8	20,0
	Pu	*Pm*	*Pn*	δ		*Pu*	*Pm*	*Pn*	δ
	P=7,5 t					P=7,5 t			

Къ теоріи уравнительныхъ проводовъ.

А. Вульфа.

§ 1. Разсчетъ замкнутыхъ сѣтей предполагаетъ существованіе вполнѣ опредѣленныхъ нагрузокъ въ питательныхъ пунктахъ, которыя и полагаются въ основаніе разсчета сѣченій питательныхъ проводовъ. Но такой случай, когда дѣйствительно во всѣхъ питательныхъ пунктахъ окажутся предполагаемыя впередъ нагрузки, вообще невѣроятенъ, вслѣдствіе чего и того распредѣленія токовъ, которое опредѣляется разсчетомъ, вообще не бываетъ. Уклоненія дѣйствительныхъ величинъ нагрузокъ отъ предполагаемыхъ только въ томъ частномъ случаѣ не нарушаютъ основного условія замкнутыхъ сѣтей, — равенства напряженій въ питательныхъ пунктахъ, — если отношеніе между ними при этомъ не мѣняется. Такъ, если предполагаемыя нагрузки питательныхъ пунктовъ равны J_1, $J_2 \cdots J_m$, и потери напряженія въ питательныхъ проводахъ равны $\varepsilon_s = J_1 R_1 = J_2 R_2 = \cdots$, гдѣ R_1, $R_2 \cdots$ — сопротивленія питательныхъ проводовъ, то очевидно и при нагрузкахъ nJ_1, nJ_2, $\cdots nJ_m$ паденія напряженія nJ_1R_1, $nJ_2R_2 \cdots$ останутся одинаковыми для всѣхъ питательныхъ проводовъ и равными $n\varepsilon_s$; если къ тому же регулировка напряженія въ питательныхъ пунктахъ происходитъ при помощи контрольныхъ проводовъ, то измѣняя соотвѣтственнымъ образомъ напряженіе на источникѣ тока, возможно поддерживать напряженіе ε_s на постоянной высотѣ. Постоянство отношенія между нагрузками питательныхъ пунктовъ является необходимымъ условіемъ сохраненія равновѣсія въ распредѣленіи токовъ въ сѣти, такъ какъ всякое уклоненіе отъ этого условія влечетъ за собою неравенство напряженій въ питательныхъ пунктахъ. Дѣйствительно, пусть всѣ нагрузки кромѣ пункта k равны nJ_1, $nJ_2 \cdots nJ_m$, въ пунктѣ же k нагрузка равна $nJ_k + i_k$; прилагая принципъ наложенія токовъ, мы можемъ разсматривать двѣ системы нагрузокъ: одна изъ нихъ не нарушаетъ равновѣсія сѣти, такъ какъ состоитъ изъ нагрузокъ nJ_1, $nJ_2 \cdots nJ_m$, пропорціональныхъ предполагаемымъ нагрузкамъ, другая же — представляется добавочной нагрузкой i_k, присоединенной къ пункту k и вызывающей въ распредѣлительныхъ проводахъ токи, нарушающіе равенство напряженій въ питательныхъ пунктахъ. Въ простѣйшей сѣти, состоящей изъ двухъ питательныхъ проводовъ $C1$ и $C2$ (черт. 1) и распредѣлительнаго провода **12** это явленіе весьма наглядно.

Черт. 1.

Пусть J_1 и J_2 будутъ наибольшія предполагаемыя нагрузки питательныхъ пунктовъ, которыя мы сочтемъ для простоты разсужденій присоединенными къ самимъ пунктамъ. Если нагрузка пункта 1 сдѣлается равною $nJ_1 + i_1$, тогда какъ нагрузка пункта 2 будетъ nJ_2, то въ сѣти будетъ существовать какъ бы двѣ системы нагрузокъ:

1)	nJ_1	и	nJ_2
2)	$+i_1$	и	0.

Первая даетъ въ обоихъ пунктахъ одинаковыя потери напряженія $n\varepsilon_s = nJ_1 R_1 = nJ_2 R_2$, гдѣ R_1 и R_2 — сопротивленія питательныхъ проводовъ $C1$ и $C2$, вторая же — вызываетъ токи j_1 и j_2, подчиняющіеся условіямъ

$$j_1 + j_2 = i_1 \quad \text{и} \quad \frac{j_1}{j_2} = \frac{R_2 + R_{12}}{R_1}$$

Очевидно токъ j_2 вызоветъ въ пунктахъ 1 и 2 разность напряженій $\varepsilon_{12} = j_2 R_{12}$, и равновѣсіе сѣти будетъ нарушено.

Появленіе тока j_2, идущаго къ пункту, въ которомъ вызвано нарушеніе равновѣсія, какъ бы по обходному пути, составляетъ, какъ извѣстно, главную цѣль замкнутыхъ сѣтей; если бы проводъ 12 на черт. 1 былъ разорванъ, то распредѣленіе нагрузокъ, предполагаемое выше, т. е. $nJ_1 + i_1$ въ пунктѣ 1 и nJ_2 въ пунктѣ 2, дало бы замѣтно большее различіе въ напряженіяхъ ε_{12}, чѣмъ въ замкнутой цѣпи. Въ то время какъ при существованіи провода 12 разность напряженій $\varepsilon_{12} = (nJ_1 + j_1) R_1 - (nJ_2 + j_2) R_2$, безъ него она была бы $\varepsilon'_{12} = (nJ_1 + i_1) R_1 - nJ_2 R_2$, т. е. больше на величину $R_1 (i_1 - j_1) + j_2 R_2 = j_2 (R_1 + R_2)$. Такимъ образомъ проводъ 12, который можетъ служить для *распредѣленія* энергіи въ мѣстахъ потребленія, расположенныхъ между пунктами 1 и 2 и называемый поэтому *распредѣлительнымъ* (Vertheilungsleitung), является вмѣстѣ съ тѣмъ и *уравнительнымъ* проводомъ (Ausgleichleitung), такъ какъ онъ сглаживаетъ, на сколько это допускаютъ обстоятельства, колебанія напряженій при нарушеніи равновѣсія нагрузокъ. Условія, оказывающія существенное вліяніе на работу уравнительныхъ проводовъ, очевидны сами по себѣ, такъ какъ уравнительная способность, или короче *уравненіе* (Ausgleich) сѣти тѣмъ больше, чѣмъ меньше сопротивленія уравнительныхъ и питательныхъ проводовъ. Но такое общее положеніе для практическихъ приложеній не достаточно, такъ какъ съ одной стороны стремиться къ безконечно большому уравненію нѣтъ основаній, съ другой же — сопротивленія проводовъ, составляющихъ сѣть, произвольно малыми быть не могутъ. Слѣдуетъ прежде всего конечно установить тѣ границы, которыя допустимы для колебаній напряженія въ питательныхъ пунктахъ, и эту величину положить въ основаніе дальнѣйшихъ разсужденій.

§ 2. Тэйхмюллеръ [1]) первый сдѣлалъ попытку дать точное опредѣленіе уравненія; по его словамъ подъ уравненіемъ сѣти, состоящей

---

[1]) Elektrotechnische Zeitschrift. 1901 H. 11, 12, 13. Ausgleichleitungen. Dr. J. Teichmüller.

изъ 2-хъ пунктовъ, слѣдуетъ подразумѣвать то „процентное уменьшеніе одного (все равно котораго) изъ отвѣтвленныхъ токовъ (одной изъ нагрузокъ питательныхъ пунктовъ), при которомъ должно наблюдаться измѣненіе полезнаго напряженія на 1%, въ то время какъ другой отвѣтвленный токъ сохраняетъ свою наибольшую силу“.

Тэйхмюллеръ не приводитъ мотивовъ, почему онъ останавливается на величинѣ колебаній напряженія въ 1%; съ этимъ числомъ можно вполнѣ согласиться, если считать его предѣломъ, къ которому желательно стремиться, такъ какъ оно представляетъ въ сущности предѣлъ точности регулировки напряженія на источникѣ, и требованіе меньшаго числа для колебанія напряженія не имѣло бы основаній, но достиженіе такихъ малыхъ колебаній едва ли возможно въ дѣйствительности, и для уравненія сѣти не слѣдовало бы ставить такихъ узкихъ предѣловъ, особенно если предположить, что напряженіе на источникѣ регулируется по среднему напряженію въ питательныхъ пунктахъ. Если въ сѣти напряженія питательныхъ пунктовъ получатъ значенія V и $V + 0{,}01\,V$, гдѣ V — нормальное полезное напряженіе, и мы измѣнимъ напряженіе на источникѣ такъ, чтобы въ питательныхъ пунктахъ были напряженія $V - 0{,}005\,V$ и $V + 0{,}005\,V$, то на зажимахъ пріемниковъ напряженіе уклонится отъ нормальнаго всего на 0,5%, въ то время, какъ въ питательныхъ пунктахъ разность напряженій останется равною 1%.

Такимъ образомъ, полагая, что регулировка напряженія на источникѣ съ точностью болѣе 1% слишкомъ затруднительна, чтобы ея добиваться[1]), и что измѣненіе напряженія на зажимахъ калильныхъ лампъ въ 1% не вызываетъ еще рѣзкаго колебанія свѣта, возможно допустить колебанія разностей рабочаго напряженія въ питательныхъ пунктахъ до 2% при условіи регулировки на среднее напряженіе.

Также точно Тэйхмюллеръ не останавливается на вопросѣ, что понимать подъ наибольшей нагрузкой, т. е. считать ли ее равной числу всѣхъ присоединенныхъ амперъ, или принимать въ разсчетъ и коэффиціентъ эксплуатаціи (Betriebskoefficient); такъ какъ послѣдній напр., для городскихъ сѣтей можетъ считаться равнымъ $b = 0{,}6$, то ока-

[1]) Въ аккумуляторныхъ батареяхъ она и невозможна при напряженіяхъ въ 220 V и ниже, такъ какъ въ нихъ напряженіе можетъ мѣняться лишь скачками въ 2 V.

жется большая разница въ дѣйствительномъ уравненіи сѣти въ зависимости отъ того, что считать за наибольшую нагрузку. Казалось бы раціональнымъ установить слѣдующія нормы: за наибольшую нагрузку считать число присоединенныхъ амперъ, за предѣлы же колебанія напряженій взять 2%. Тогда колебаніе въ 2% окажется лишь въ наименѣе вѣроятномъ случаѣ, т. е. когда $b = 1$, вообще же оно будетъ меньше 2%, и при $b = 0,6$ будетъ всего 1,2%, т. е. вполнѣ допустимымъ.

Называя черезъ q процентное колебаніе нагрузки въ какомъ либо изъ двухъ питательныхъ пунктовъ, получимъ выраженіе для уравненія

$$a = \frac{q}{p},$$

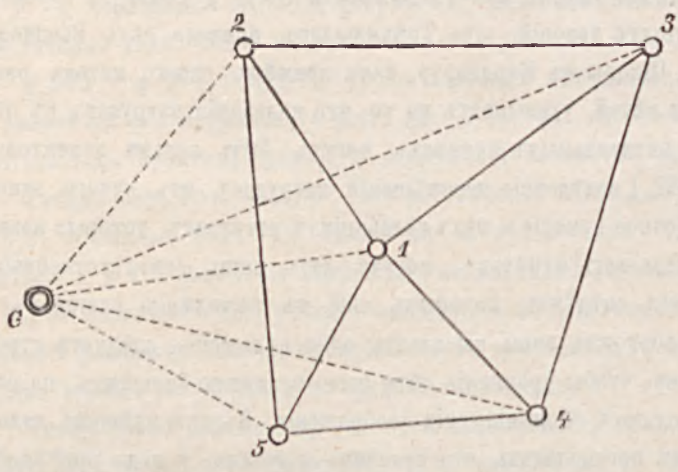
гдѣ p — допустимое процентное колебаніе напряженія. Величина a къ сожалѣнію можетъ быть установлена лишь очень гадательно; для городскихъ сѣтей она можетъ считаться въ среднемъ равной ок. 30%, но это число можетъ давать значительныя уклоненія въ обѣ стороны, и въ частномъ случаѣ можетъ достигать 80% и болѣе въ зависимости отъ мѣстныхъ условій; такъ Тэйхмюллеръ, приводя сѣть Высшей Технической Школы въ Карльсруэ, какъ примѣръ своего метода разсчета уравненія сѣтей, указываетъ на то, что колебанія нагрузокъ въ отдѣльныхъ ея питательныхъ пунктахъ могутъ быть весьма значительными (болѣе 80%) вслѣдствіе перемѣщеній нагрузокъ изъ одного зданія въ другое. Точное понятіе о тѣхъ колебаніяхъ нагрузокъ, которыя возможны въ питательныхъ пунктахъ, могутъ дать лишь соотвѣтственныя статистическія свѣдѣнія, которыхъ еще къ сожалѣнію слишкомъ мало, пока же возможно лишь высказать одно положеніе: слѣдуетъ стремиться къ тому, чтобы уравненіе сѣти было возможно большимъ, на сколько это позволяютъ экономическія соображенія. Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы будемъ предполагать, что величина a задана, и подъ повѣркой сѣти на уравненіе будемъ подразумѣвать рѣшеніе вопроса: удовлетворяетъ ли сѣть требованію, чтобы ея уравненіе было равно данной величинѣ a.

§ 3. Свойства уравненія сѣти разработаны Тэйхмюллеромъ весьма подробно въ цитированной выше статьѣ, и разборъ этого явленія не прибавилъ бы ничего новаго, но нельзя не остановиться предъ наиболѣе существенной частью статьи Тэйхмюллера, именно предъ методомъ повѣрки сѣти на уравненіе, который не можетъ вполнѣ удовлетворить читателя, тѣмъ болѣе, что самъ Тэйхмюллеръ настаиваетъ на томъ, что повѣрка сѣти на уравненіе не менѣе важна, чѣмъ самый разсчетъ сѣти; и дѣйствительно сѣть, разсчитанная правильно на предѣльное паденіе напряженія, не можетъ считаться удовлетворительной, если отъ малой уравнительной ея способности въ ней будутъ возможны значительныя колебанія напряженія, недопускаемыя лампами. Способъ, предлагаемый Тэйхмюллеромъ, весьма элементаренъ и простъ по существу, но грѣшитъ въ двухъ отношеніяхъ: допускаетъ произволъ безъ возможности оцѣнить вѣроятную ошибку и ведетъ къ утомительнымъ вычисленіямъ. Основаніемъ разсчета служитъ Тэйхмюллеру формула

$$a=\left(\frac{R_1+R_2}{R_a}+1\right)\frac{100}{p_s}, \qquad (1)$$

выведенная имъ для простѣйшей сѣти, состоящей изъ двухъ питательныхъ пунктовъ, соединенныхъ уравнительнымъ проводомъ.

Черт. 2.



Здѣсь R_1, R_2 и R_a — сопротивленія питательныхъ и уравнительнаго проводовъ, p_s — процентная потеря въ питательномъ проводѣ при наибольшей нагрузкѣ питательнаго пункта, и a — уравненіе. При извѣстныхъ R и p_s вычисляется a, и обратно можетъ быть вычислено сѣченіе провода R_a при заданной величинѣ уравненія.

На основаніи простыхъ допущеній Тэйхмюллеръ даетъ возможность приложить формулу (1) и къ болѣе сложнымъ случаямъ.

Всякій питательный пунктъ присоединенъ питательнымъ проводомъ къ станціи и кромѣ того связанъ распредѣлительными проводами съ сосѣдними пунктами. Разсматривая такую систему пунктовъ, какъ „округъ“, возможно различать два крайнихъ случая:

1) Пункты 2, 3, 4 и 5 (черт. 2) связаны между собой проводами 23, 34, 45, 52, сопротивленія которыхъ равны нулю. Такимъ путемъ эти провода устраняются изъ разсмотрѣнія, и сѣть сводится къ виду, изображенному на черт. 3, т. е. къ сѣти съ двумя питательными пунктами 1 и 2—5. Для нея сопротивленіе R_2 формулы (1) имѣетъ видъ

$$R'_2 = \frac{1}{F_2 + F_3 + F_4 + F_5},$$

гдѣ $F_2, F_3 \cdots F_5$ проводимости питательныхъ проводовъ $C2$, $C3 \cdots C5$, а R_a принимаетъ видъ

$$R'_a = \frac{1}{F_{12} + F_{13} + F_{14} + F_{15}},$$

гдѣ F проводимости распредѣлительныхъ проводовъ.

Этотъ случай очевидно соотвѣтствуетъ предположенію, что уравненіе сѣти относительно каждой пары пунктовъ 1,2; 1,3; 1,4; 1,5 — одинаково.

Черт. 3.

2) Въ сѣти вида, изображеннаго на черт. 2 и 3 пункты 2, 3, 4 и 5 предполагаются не связанными вовсе; такимъ образомъ получается пучекъ проводовъ, для котораго уравненія находятся слѣдующимъ образомъ.

Проводъ $C1$ предполагается *расщепленнымъ* на столько отдѣльныхъ вѣтвей, сколько пунктовъ находится въ соединеніи съ пунктомъ 1; сопротивленія этихъ вѣтвей вычисляются изъ проводимостей проводовъ, соединенныхъ съ ними послѣдовательно, т. е. изъ сопротивленій R_{12} и R_2, R_{13} и R_3 и т. д., причемъ для разсчепленія получается формула

$$(R_1)_\mu = \frac{\sum_2^n \mu \frac{1}{R_\mu + R_{,\mu}}}{\frac{1}{R_\mu + R_{,\mu}}} R_1 ,$$

гдѣ $(R_1)_\mu$ означаетъ сопротивленіе вѣтви № μ провода R_1.

Уравненіе для каждой пары пунктовъ 1,2; 1,3; 1,4; 1,5 вычисляется по формулѣ

$$a = \left(\frac{(R_1)_\mu + R_\mu}{R_{,\mu}} + \right) \frac{100}{p_s} .$$

Легко видѣть, что второй путь обѣщаетъ большую точность, чѣмъ первый, который содержитъ безусловно невѣрное предположеніе о равенствѣ уравненій для различныхъ паръ пунктовъ, но и онъ надежнымъ быть не можетъ, такъ какъ исключаетъ изъ разсмотрѣнія распредѣлительные провода, соединяющіе пункты 2, 3, 4 и 5, и бóльшая его близость къ дѣйствительности не искупаетъ утомительности разсчета величины a.

§ 4. Хотя разсчетъ замкнутыхъ сѣтей и грѣшитъ отсутствіемъ точности, но этого нельзя сказать про повѣрку сѣтей на уравненіе, которая a priori должна быть опредѣленной задачей. Дѣйствительно, въ сѣти, для которой сѣченія проводовъ уже такъ, или иначе вычислены, распредѣленіе токовъ можетъ быть только единственнымъ, и достаточно свести задачу объ уравненіи къ вопросу о распредѣленіи токовъ при заданныхъ сопротивленіяхъ проводовъ, чтобы она могла быть рѣшена съ произвольною точностью.

Но прежде чѣмъ излагать путь сведенія задачи объ уравненіи къ задачѣ о распредѣленіи токовъ, дадимъ понятію объ уравненіи нѣсколько другое опредѣленіе, не измѣняющее сущности опредѣленія Тэйхмюллера, но болѣе удобное, такъ какъ оно дастъ возможность устранить изъ разсмотрѣнія всѣ нагрузки за исключеніемъ нагрузки того пункта, относительно котораго повѣряется уравненіе.

Напомнимъ, что равновѣсіе въ сѣти нарушается въ томъ случаѣ, если мѣняется отношеніе между нагрузками. Такъ, если, придерживаясь опредѣленія Тэйхмюллера, предположимъ, что во всѣхъ пунктахъ сѣти $1, 2, 3 \cdots m$ за исключеніемъ пункта k нагрузки равны наибольшей величинѣ $J_1, J_2, J_3 \cdots J_m$, а въ пунктѣ k произошло уменьшеніе нагрузки на величину i_k, то въ сѣти появятся уравнительные токи, нарушающіе равенство напряженій въ питательныхъ пунктахъ. По принципу наложенія токовъ всѣ нагрузки могутъ быть разбиты на двѣ группы:

$$\begin{array}{ll} 1) & J_1, J_2, J_3 \cdots J_k \cdots J_m \\ 2) & 0,\ 0,\ 0, \cdots - i_k \cdots 0, \end{array}$$

изъ которыхъ первая не нарушаетъ равновѣсія сѣти, вторая же, состоящая изъ *отрицательной* нагрузки $- i_k$ даетъ систему токовъ, вызывающую неравенство напряженій въ питательныхъ пунктахъ.

При опредѣленіи уравненія сѣти знакъ у разности напряженій не играетъ никакой роли, и величины уравненія сѣти по отношенію къ пункту k останутся тѣми же, если вмѣсто фиктивной отрицательной нагрузки $- i_k$ мы помѣстимъ дѣйствительную нагрузку $+ i_k$. Кромѣ того, не интересуясь вовсе первой группой нагрузокъ, какъ не нарушающей равновѣсія сѣти, мы можемъ совсѣмъ исключить ее изъ разсмотрѣнія, сдѣлавъ всѣ нугрузки $J_1, J_2 \cdots J_k \cdots J_m$ равными нулю.

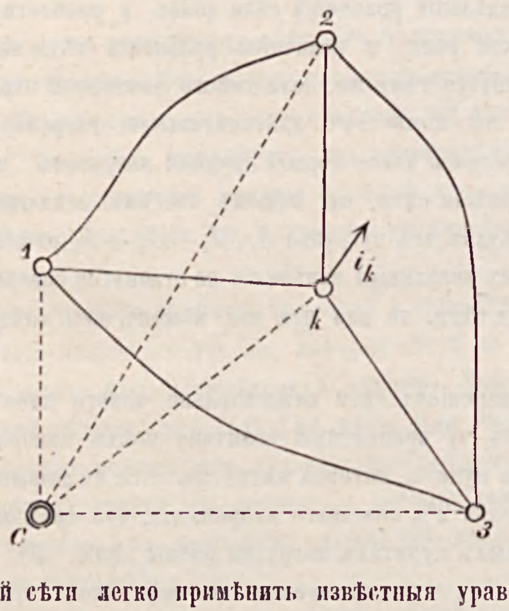
Такъ какъ указанныя измѣненія не отзовутся совершенно на величинѣ уравненія сѣти, то для нея мы можемъ дать слѣдующее опредѣленіе:

Подъ уравненіемъ сѣти относительно какого либо пункта k мы подразумѣваемъ ту процентную величину всѣхъ присоединенныхъ амперъ въ этомъ пунктѣ, которая нигдѣ въ сѣти не вызываетъ разностей напряженія болѣе 2% полезнаго напряженія, при предположеніи, что во всѣхъ остальныхъ пунктахъ нагрузки равны нулю. Въ видѣ примѣчанія замѣтимъ еще, что вышеприведенное опредѣленіе годится не только для нагрузокъ питательныхъ пунктовъ, но и для всякаго отвѣтвленія, гдѣ бы оно ни было помѣщено въ распредѣлительной части сѣти.

Сведя такимъ образомъ задачу объ уравненіи сѣти къ изслѣдованію вліянія *одной* нагрузки, возьмемъ какую либо сѣть, въ которой мы желаемъ опредѣлить уравненіе относительно какого либо пункта k (Черт. 4), причемъ пока предположимъ, что распредѣлительная сѣть состоитъ изъ простыхъ проводовъ, соединяющихъ питательные пункты, т. е. не имѣетъ узловъ.

Пусть въ пунктѣ k находится нагрузка i_k, равная $\frac{q}{100} J_k$, гдѣ q задано. Очевидно при этихъ условіяхъ питательные пункты потеряютъ свой смыслъ и *превратятся въ простые узлы* сѣти, у которой лишь на концахъ проводовъ kC, $1C$, $2C\cdots$ т. е. на шинахъ распредѣлительной доски станціи C будутъ одинаковыя напряженія. Легко видѣть поэтому, что сѣть на черт. 4 будетъ совершенно эквивалентна сѣти, въ которой концы проводовъ kC, $1C\cdots$ представляютъ собою питательные пункты, а прежніе питательные пункты являются лишь узлами, въ одномъ изъ которыхъ — k—находится нагрузка i_k.

Черт. 4.



Для такой сѣти легко примѣнить извѣстныя уравненія, дающія распредѣленіе токовъ. Дѣйствительно, называя черезъ V съ соотвѣтственными значками напряженія въ узловыхъ точкахъ, и черезъ V_0 — напряженіе въ питательныхъ пунктахъ, и обозначая черезъ R съ соотвѣтственными значками сопротивленія проводовъ, получимъ очевидно:

$$\frac{V_0-V_1}{R_{c1}}+\frac{V_2-V_1}{R_{12}}+\frac{V_3-V_1}{R_{13}}+\frac{V_k-V_1}{R_{1k}}=0 \cdots \text{для пункта 1}$$

$$\frac{V_0-V_2}{R_{c2}}+\frac{V_1-V_2}{R_{12}}+\frac{V_3-V_2}{R_{23}}+\frac{V_k-V_2}{V_{2k}}=0 \cdots \text{для пункта 2}$$

$$\frac{V_0 - V_3}{R_{c3}} + \frac{V_1 - V_3}{R_{13}} + \frac{V_2 - V_3}{R_{23}} + \frac{V_k - V_2}{V_{3k}} = 0 \cdots \text{для пункта } 3$$

$$\frac{V_1 - V_k}{R_{1k}} + \frac{V_2 - V_k}{R_{2k}} + \frac{V_3 - V_k}{R_{3k}} - i_k = 0 \cdots \text{для пункта } k.$$

Собирая члены съ одинаковыми V, получимъ

$$-V_1 \Sigma_1 \frac{1}{R} + \frac{V_2}{R_{12}} + \frac{V_3}{R_{13}} + \frac{V_k}{R_{1k}} + \frac{V_0}{R_{c1}} = 0$$

$$\frac{V_1}{R_{12}} - V_2 \Sigma_2 \frac{1}{R} + \frac{V_3}{R_{23}} + \frac{V_k}{R_{2k}} + \frac{V_0}{R_{c2}} = 0$$

$$\frac{V_1}{R_{13}} + \frac{V_2}{R_{23}} - V_3 \Sigma_3 \frac{1}{R} + \frac{V_k}{R_{3k}} + \frac{V_0}{R_{c3}} = 0$$

$$\frac{V_1}{R_{1k}} + \frac{V_2}{R_{2k}} + \frac{V_3}{R_{3k}} - V_k \Sigma_k \frac{1}{R} - i_k = 0,$$

гдѣ $\Sigma_k \frac{1}{R}$ есть сумма проводимостей всѣхъ проводовъ, сходящихся въ узлѣ k т. е. $\Sigma_1 \frac{1}{R} = \frac{1}{R_{c1}} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{1k}}$ и т. д.

Складывая 1-е равенство съ тождествомъ

$$\frac{V_0}{R_{c1}} - \frac{V_0}{R_{c1}} + \frac{V_0}{R_{12}} - \frac{V_0}{R_{12}} + \frac{V_0}{R_{13}} - \frac{V_0}{R_{13}} + \frac{V_0}{R_{1k}} - \frac{V_0}{R_{1k}} = 0,$$

получимъ

$$\varepsilon_1 \Sigma_1 \frac{1}{R} - \frac{\varepsilon_2}{R_{12}} - \frac{\varepsilon_3}{R_{13}} - \frac{\varepsilon_k}{R_{1k}} = 0 \cdots \quad (2)$$

Производя аналогичныя дѣйствія съ остальными равенствами, получимъ также точно:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\varepsilon_1}{R_{12}} + \varepsilon_2 \Sigma_2 \frac{1}{R} - \frac{\varepsilon_3}{R_{23}} - \frac{\varepsilon_k}{R_{2k}} &= 0 \\ -\frac{\varepsilon_1}{R_{13}} - \frac{\varepsilon_2}{R_{23}} + \varepsilon_3 \Sigma_3 \frac{1}{R} - \frac{\varepsilon_k}{R_{3k}} &= 0 \\ -\frac{\varepsilon_1}{R_{1k}} - \frac{\varepsilon_2}{R_{2k}} - \frac{\varepsilon_3}{R_{3k}} + \varepsilon_k \Sigma_k \frac{1}{R} - i_k &= 0 \end{aligned}\right| \cdots (2)$$

Эти уравненія содержатъ число неизвѣстныхъ ε_1, ε_2, ε_3 и ε_k, равное числу уравненій, почему опредѣленіе уравненій сѣти въ проводахъ $1k$, $2k$ и $3k$ всегда возможно; онѣ найдутся, если извѣстны разности напряженій: $\varepsilon_1 - \varepsilon_k = \varepsilon_{1k}$, $\varepsilon_2 - \varepsilon_k = \varepsilon_{2k}$ и $\varepsilon_3 - \varepsilon_k = \varepsilon_{3k}$.

Указанный пріемъ годенъ очевидно одинаково, какъ для любого питательнаго пункта, такъ и для любого отвѣтвленія гдѣ нибудь на проводахъ $k1$, $k2$ ⋯ 12, 13 ⋯

§ 5. Но если не можетъ быть возраженій противъ предлагаемаго метода съ чисто теоретической точки зрѣнія, то вся его годность можетъ исчезнуть предъ затруднительностью рѣшенія приведенныхъ уравненій. Даже приближенный методъ Зейделя, приложимый къ подобной системѣ уравненій, мало можетъ помочь, такъ какъ онъ ведетъ къ быстрому рѣшенію въ тѣхъ случаяхъ, когда размѣры неизвѣстныхъ могутъ быть хотя приблизительно предугаданы; иначе примѣненіе его поведетъ къ весьма утомительнымъ разсчетамъ. Замѣтимъ однако, что величины разностей напряженій между разсматриваемымъ пунктомъ k и сосѣдними могутъ быть приблизительно угаданы, такъ какъ онѣ не должны быть очень далеки отъ $1\%_0$ — $2\%_0$ полезнаго напряженія, и неопредѣленными вполнѣ остаются лишь паденія напряженія ε_1, ε_2 ⋯ въ питательныхъ проводахъ.

Если k есть питательный пунктъ, то затрудненіе въ нахожденіи напряженій можетъ быть значительно уменьшено слѣдующимъ образомъ.

Замѣчая, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_k - \delta_1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_k - \delta_2$ и $\varepsilon_3 = \varepsilon_k - \delta_3$, гдѣ подъ δ_1, δ_2 и δ_3 мы для краткости обозначеній подразумѣваемъ величины t_{1k}, t_{2k} и t_{3k}, мы можемъ разложить члены, входящіе въ рав. (2) на двѣ группы; такъ вмѣсто $\varepsilon_1 \Sigma_1 \dfrac{1}{R}$ въ первомъ равенствѣ можемъ написать

$$\varepsilon_1 \Sigma_1 \frac{1}{R} = \frac{\varepsilon_k}{R_{c1}} + \frac{\varepsilon_k}{R_{12}} + \frac{\varepsilon_k}{R_{13}} + \frac{\varepsilon_k}{R_{1k}} - \frac{\delta_1}{R_{12}} - \frac{\delta_1}{R_{13}} - \frac{\delta_1}{R_{1k}};$$

вмѣсто $\dfrac{\varepsilon_2}{R_{12}}$ и $\dfrac{\varepsilon_3}{R_{13}}$ въ томъ же равенствѣ — разности:

$$\frac{\varepsilon_2}{R_{12}} = \frac{\varepsilon_k}{R_{12}} - \frac{\delta_2}{R_{12}} \text{ и } \frac{\varepsilon_3}{R_{13}} = \frac{\varepsilon_k}{R_{13}} - \frac{\delta_3}{R_{13}}.$$

Подставляя эти выраженія въ 1-ое равенство, получимъ его въ видѣ

$$-\delta_1 \Sigma_1 \frac{1}{R} + \frac{\delta_2}{R_{12}} + \frac{\delta_3}{R_{13}} + \frac{\varepsilon_k}{R_{c1}} = 0,$$

гдѣ подъ $\Sigma_1 \frac{1}{R}$ подразумѣвается сумма проводимостей проводовъ, сходящихся въ пунктѣ 1, но уже *безъ проводимости питательнаго провода* $C1$.

Такимъ же путемъ получимъ:

$$\frac{\delta_1}{R_{12}} - \delta_2 \Sigma_2 \frac{1}{R} + \frac{\delta_3}{R_{23}} + \frac{\varepsilon_k}{R_{c2}} = 0$$

и

$$\frac{\delta_1}{R_{13}} + \frac{\delta_2}{R_{23}} - \delta_3 \Sigma_3 \frac{1}{R} + \frac{\varepsilon_k}{R_{c3}} = 0$$

Вмѣсто 4-го же равенства получимъ

$$\frac{\delta_1}{R_{1k}} + \frac{\delta_2}{R_{2k}} + \frac{\delta_3}{R_{3k}} + \frac{\varepsilon_k}{R_{ck}} - i_k = 0 .$$

Эта система 4-хъ уравненій можетъ быть рѣшена слѣдующимъ образомъ при помощи способа Зейделя *).

---

*) Извѣстно, что способъ Зейделя рѣшенія системы уравненій вида:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + \dots + n_1 = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + \dots + n_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x + a_{n2}y + a_{n3}z + \dots + n_n = 0 \end{array}\right\} \dots (A)$$

т. е. такихъ, которыя по отношенію къ коэффиціентамъ при неизвѣстныхъ $x, y, z \cdots$ симметричны, заключается въ слѣдующемъ.

Для неизвѣстныхъ берутся произвольныя значенія $x_0, y_0, z_0 \cdots$, которыя, будучи подставлены въ уравненія (A), даютъ ошибки $N_1, N_2 \cdots N_n$. Вычисливъ величину $\Delta x = -\frac{N_1}{a_{11}}$, слѣдуетъ изъ ошибокъ $N_1, N_2 \cdots N_n$ вычислить новыя ошибки $N'_1, N'_2 \cdots$ помощью уравненій

$$\begin{array}{l} N'_1 = N_1 + a_{11}\,\Delta x = 0 \\ N'_2 = N_2 + a_{21}\,\Delta x \\ \dots\dots\dots\dots \\ N'_n = N_n + a_{n1}\,\Delta x \end{array}$$

Въ послѣднее равенство подставляемъ вмѣсто δ_1, δ_2 и δ_3 предѣльную величину δ_0, допустимую для δ_1, δ_2 и δ_3, и получаемъ значеніе для ε_k, равное ε'_k. Подставивъ δ_0 вмѣсто δ_1, δ_2 и δ_3 и найденное для ε_k значеніе въ первыя три равенства, получимъ первый рядъ ошибокъ N_1, N_2 и N_3, изъ которыхъ вычислимъ поправки $\Delta\delta_1$, $\Delta\delta_2$ и $\Delta\delta_3$; затѣмъ подставимъ въ послѣднее равенство вмѣсто δ_1, δ_2 и δ_3 величины $\delta_0+\Delta\delta_1=\delta'_1$, $\delta_0+\Delta\delta_2=\delta'_2$ и $\delta_0+\Delta\delta_3=\delta'_3$ и найдемъ болѣе точное значеніе для $\varepsilon_k=\varepsilon''_k$. Подставивъ опять въ первыя 3 уравненія новыя значенія неизвѣстныхъ ε'', δ'_1, δ'_2 и δ'_3, получимъ новый рядъ ошибокъ N'_1, N'_2 и N'_3, изъ которыхъ вычислимъ поправки $\Delta'\delta_1$, $\Delta'\delta_2$ и $\Delta'\delta_3$, которыя мы должны конечно считать *первыми*, такъ какъ первый разсчетъ велъ лишь къ исправленію значенія $\varepsilon_k=\varepsilon'_k$.

Если ε''_k близко къ ε'_k, то на послѣднемъ дѣйствіи можно и остановиться, не смотря на грубость приближенія для величинъ δ. Дѣйствительно, истинная величина δ выражается сходящеюся суммой

$$\delta=\delta_0+\Delta\delta_0+\Delta'\delta_0+\cdots$$

гдѣ $\Delta\delta_0$, $\Delta'\delta_0$ ··· могутъ быть и одинаковыхъ и разныхъ знаковъ, при-

---

Далѣе опредѣляется величина $\Delta y=-\frac{N'_2}{a_{22}}$ и новый рядъ ошибокъ

$$N''_1=N'_1+a_{12}\,\Delta y$$
$$N''_2=N'_2+a_{22}\,\Delta y=0$$
$$N''_n=N'_n+a_{n2}\,\Delta y$$

Повторяя это дѣйствіе n разъ, получимъ рядъ первыхъ поправокъ къ произвольнымъ значеніямъ x_0, y_0 ··· въ видѣ величинъ Δx, Δy, Δz ··· Съ послѣднимъ рядомъ значеній N, т. е. съ величинами $N^{(n)}_1$, $N^{(n)}_2$, $N^{(n)}_3$... слѣдуетъ поступить также, какъ въ началѣ вычисленій, опредѣливъ вторую поправку для x_0, именно величину $\Delta'_x=-\frac{N^{(n)}_1}{a_{11}}$, и продолжать дѣйствія по вышеприведенному пути. Повторяя дѣйствіе до тѣхъ поръ, пока неизвѣстныя не опредѣлятся съ желаемой точностью, получимъ послѣднія въ формѣ:

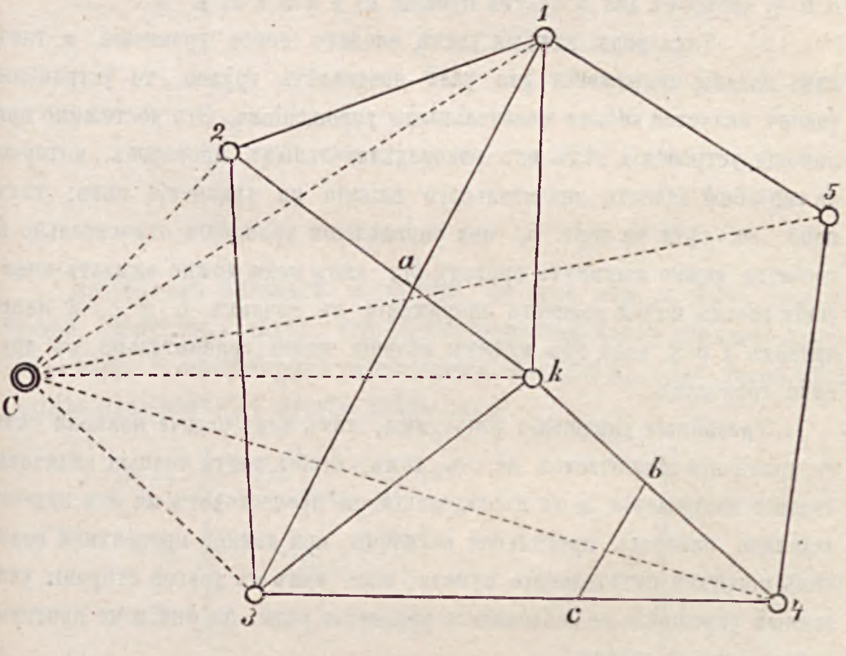
$$x=x_0+\Delta x+\Delta' x+\Delta'' x+\cdots$$
$$y=y_0+\Delta y+\Delta' y+\Delta'' y+\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

чемъ по абсолютной величинѣ $\Delta\delta_0 > \Delta'\delta_0 > \Delta''\delta_0 \cdots$; если δ_0 имѣетъ предѣльную допустимую величину, то уже *знакъ* при $\Delta\delta_0$ укажетъ на то, удовлетворяетъ ли данный проводъ требованіямъ уравненія, или нѣтъ, такъ какъ, если $\Delta\delta_0 > 0$, то и $\delta > \delta_0$ и наоборотъ.

Очевидно совершенно такой же пріемъ разсчета возможенъ для каждаго питательнаго пункта, входящаго въ составъ сѣти на черт. 4.

§ 6. Разобранный нами случай слѣдуетъ разсматривать, какъ простѣйшій. Усложненія могутъ заключаться въ появленіи питательныхъ пунктовъ, которые не соединены непосредственно съ пунктомъ k, относительно котораго разсматривается уравненіе сѣти, напр. пункта 5 на черт. 5, и въ образованіи узловъ, напр. a, b и c на черт. 5. Эти усложненія превращаютъ нашу задачу изъ частнаго въ общій случай.

Черт. 5.



Очевидно, основныя уравненія (2) пригодны и для общаго случая, но вычисленія могутъ настолько усложниться, что упрощеніе разсчета, хотя бы и въ ущербъ точности, станетъ весьма желательнымъ.

Такія упрощенія могутъ заключаться въ слѣдующемъ:

1) Колебанія нагрузки въ пунктѣ k отзываются главнымъ образомъ въ пунктахъ, прилегающихъ къ нему непосредственно. Такъ на черт. 5 ε_{1k} будетъ вообще значительно больше ε_{15}, если разстояніе между пунктами 1 и 5 значительно и близко къ разстоянію между 1 и k, что въ экономно разсчитанной сѣти обыкновенно и бываетъ; дѣйствительно, сопротивленія распредѣлительныхъ проводовъ обыкновенно замѣтно больше, чѣмъ питательныхъ, и обходной токъ по проводамъ $C5$ и 15 будетъ по большей части слабъ сравнительно съ прямымъ токомъ $C1$.

Въ виду сказаннаго, изслѣдованіе уравненія сѣти возможно вести по „округамъ", подразумѣвая подъ послѣдними группы питательныхъ пунктовъ, состоящихъ изъ того пункта, относительно котораго опредѣляется уравненіе и пунктовъ, присоединенныхъ къ нему непосредственно. Такъ округомъ для пункта k будетъ група пунктовъ k, 1, 2, 3 и 4, округомъ для 5 будутъ пункты 1, 4 и 5 и т. д.

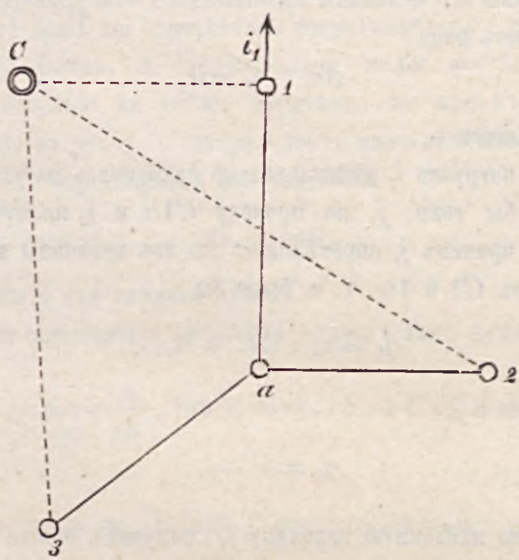
2) Такъ какъ каждый узелъ вводитъ новое уравненіе, и такъ какъ паденіе напряженія для узла предвидѣть трудно, то устраненіе узловъ является весьма желательнымъ упрощеніемъ. Это достижимо при помощи устраненія тѣхъ изъ распредѣлительныхъ проводовъ, которые не способны оказать значительнаго вліянія на уравненіе сѣти; такъ напр. въ сѣти на черт. 5, при опредѣленіи уравненія относительно k свободно можно выкинуть проводъ bc, такъ какъ можно ожидать появленія весьма малой разности напряженій въ точкахъ b и c, и напр. проводъ 1 и 3, если онъ имѣетъ сѣченіе малое сравнительно съ другими проводами.

Указанныя упрощенія допустимы, такъ какъ задача повѣрки сѣти на уравненіе заключается не въ томъ, чтобы найти точныя величины паденій напряженія, а въ изслѣдованіи, не превосходятъ ли эти паденія заданной напередъ предѣльной величины при данной процентной величинѣ нагрузки питательнаго пункта; такъ какъ съ другой стороны указанныя упрощенія не повышаютъ уравненія сѣти, то они и не противорѣчатъ смыслу задачи.

§ 7. Полезно обратить вниманіе на одинъ частный случай, который можетъ часто встрѣтиться при упрощеніи сѣти, и къ которому слѣдуетъ стремиться сводить упрощеніе сѣти, обладающей узлами, такъ какъ этотъ случай рѣшается особенно просто.

Предположимъ, что сѣть имѣетъ видъ, изображенный на черт. 6, т. е. представляетъ группу питательныхъ пунктовъ, присоединенныхъ къ одному узлу a.

Черт. 6.



На чертежѣ показаны 3 пункта, но ихъ можетъ быть сколько угодно. Допустимъ далѣе, что разсматривается какой либо изъ пунктовъ, напр. 1, въ которомъ существуетъ нагрузка i_1. Для такой сѣти система уравненій (2) будетъ имѣть видъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_1 \Sigma_1 \frac{1}{R} - \varepsilon_a \frac{1}{R_{a1}} - i_1 = 0 \\
&\varepsilon_2 \Sigma_2 \frac{1}{R} - \varepsilon_a \frac{1}{R_{a2}} = 0 \\
&\varepsilon_3 \Sigma_3 \frac{1}{R} - \varepsilon_a \frac{1}{R_{a3}} = 0 \\
&\varepsilon_a \Sigma_a \frac{1}{R} - \varepsilon_1 \frac{1}{R_{a1}} - \varepsilon_2 \frac{1}{R_{a2}} - \varepsilon_3 \frac{1}{R_{a3}} = 0
\end{aligned}\right| \qquad (3)$$

Легко видѣть, что эти уравненія рѣшались бы особенно просто, если бы членъ i_1 входилъ въ послѣднее уравненіе, т. е. еслибы нагрузка

i_1 была присоединена не къ питательному пункту, а къ узлу. Предположимъ, что это такъ и есть въ дѣйствительности; тогда 3 первыя уравненія даютъ

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_a \frac{1}{R_{a1}} : \Sigma_1 \frac{1}{R}\,; \varepsilon_2 = \varepsilon_a \frac{1}{R_{a2}} : \Sigma_2 \frac{1}{R}\,; \varepsilon_3 = \varepsilon_a \frac{1}{R_{a3}} : \Sigma_3 \frac{1}{R}\,.$$

Подставивъ эти величины въ послѣднее изъ уравненій (3), получимъ зависимость вида

$$A\varepsilon_a - i_1 = 0,$$

откуда опредѣлится ε_a.

Если бы нагрузка i_1 дѣйствительно находилась въ узлѣ, то въ сѣти существовали бы токи: j_1 по проводу $C1a$ и j_2 по пучку проводовъ $C2a$ и $C3a$, причемъ j_1 опредѣлилось бы изъ величины ε_a и сопротивленій проводовъ $C1$ и $1a$, т. е. было бы

$$j_1 = \varepsilon_a : (R_{c1} + R_{1a}),$$

откуда найдется и j_2:

$$j_2 = i_1 - j_1$$

Дѣля ε_a на найденную величину j_2, получимъ *общее* сопротивленіе развѣтвленной части сѣти

$$\rho_1 = \frac{\varepsilon_a}{j_2}$$

Предположимъ теперь, что нагрузка i_1 *перемѣстится* въ пунктъ 1. Тогда токи j_1 и j_2 получатъ новыя значенія j_1' и j_2', опредѣляющіяся условіями:

$$\frac{j_1'}{j_2'} = \frac{\rho_1 + R_{a1}}{R_{c1}} \quad \text{и} \quad j_1' + j_2' = i_1$$

Очевидно въ послѣднихъ равенствахъ j_1' и j_2' являются вполнѣ опредѣленными величинами, и найдя значенія для нихъ, мы можемъ считать задачу рѣшенною.

Дѣйствительно j_1' и j_2' даютъ:

$$\varepsilon_1' = j_1' R_{c1} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{1a}' = j_1' R_{1a},$$

откуда

$$\varepsilon'_a = \varepsilon'_1 - \varepsilon'_{1a};$$

подставивъ же эту величину въ систему уравненій (3) вмѣсто ε_a, находимъ значенія для ε_1, ε_2 и ε_3.

Обратимъ вниманіе на то обстоятельство, что нагрузка i_1, помѣщенная нами не въ пунктѣ 1, а въ узлѣ, послужила въ первый періодъ рѣшенія задачи лишь къ опредѣленію сопротивленія ρ; поэтому она совершенно произвольна, и слѣдовательно, желая изслѣдовать сѣть на черт. 6 по отношенію ко всѣмъ пунктамъ, мы можемъ помѣстить въ a какую угодно нагрузку i, которая даетъ намъ возможность при помощи величины ε_a, опредѣленной изъ уравненія

$$A\varepsilon_a - i = 0,$$

найти величины ρ для каждаго пункта.

Такъ при опредѣленіи уравненія относительно пункта 1

$$\rho_1 = \frac{\varepsilon_a}{j'_1}, \text{ гдѣ } j'_1 = \varepsilon_a : (R_{c1} + R_{1a}),$$

для пункта 2

$$\rho_2 = \frac{\varepsilon_a}{j''_1}, \text{ гдѣ } j''_1 = \varepsilon_a : (R_{c2} + R_{2a})$$

и для пункта 3

$$\rho_3 = \frac{\varepsilon_a}{j'''_1}, \text{ гдѣ } j'''_1 = \varepsilon_a : (R_{3c} + R_{3a})$$

Величины же ρ_1, ρ_2 и ρ_3 послужатъ намъ для опредѣленія величинъ ε'_1, ε'_2 и ε'_3, а также конечно и паденій напряженія до узла a, что вполнѣ рѣшаетъ задачу.

§ 8. Къ вышеизложенному слѣдуетъ еще сдѣлать нѣкоторыя дополненія.

1) Мы совершенно не касались вопроса, какъ исправить сѣть, если бы ея уравненіе оказалось недостаточнымъ. Это исправленіе можетъ быть выполнено произвольнымъ увеличеніемъ сѣченія того изъ проводовъ, который оказываетъ наиболѣе существенное вліяніе на величину уравненія и новой провѣркой по уравненіямъ (2). Чтобы умень-

шить произволъ, на сколько возможно, лучше оцѣнить проводимость выбраннаго провода по одному изъ уравненій (2), подставивъ вмѣсто слишкомъ большаго паденія напряженія, полученнаго изъ первоначальной провѣрки, предѣльную величину, допустимую условіемъ уравнительной способности сѣти [1]).

2) Во всѣхъ предыдущихъ разсужденіяхъ мы разсматривали лишь нагрузки питательныхъ пунктовъ, тогда какъ нагрузки въ сѣти вообще существуютъ не только въ питательныхъ пунктахъ, но и на распредѣлительныхъ проводахъ.

Если нагрузки распредѣлительныхъ проводовъ опредѣляются амперами, или уаттами на погонный метръ, то провѣрять сѣть на уравнительную способность иначе и невозможно, какъ разсматривая нагрузки питательныхъ пунктовъ. Если же онѣ имѣютъ опредѣленныя мѣста на распредѣлительныхъ проводахъ, то, хотя общія уравненія (2) къ этому случаю и приложимы, но задача можетъ очень усложниться, и упрощенія могутъ быть очень желательными. Перенесеніе нагрузокъ въ питательные пункты и является такимъ упрощеніемъ, притомъ вполнѣ допустимымъ, такъ какъ оно влечетъ за собою нѣкоторое уменьшеніе уравненія сѣти противъ дѣйствительной его величины.

---

[1]) Вмѣсто увеличенія сѣченія распредѣлительнаго провода, можно конечно добавить спеціальный уравнительный проводъ между пунктами, для которыхъ уравненіе недостаточно.

Объ одной новой зависимости между силою тяги паровоза и его скоростью.

Студ. мех. **А. Липеца.**

При опредѣленіи главнѣйшихъ размѣровъ паровоза, а также при разсчетахъ состава и расписаній поѣздовъ, основной формулой, какъ извѣстно, является зависимость силы тяги отъ скорости. Въ Россіи въ основу этой зависимости кладутъ обычно соображеніе, что котелъ не можетъ давать болѣе опредѣленнаго числа килограммовъ пару съ одного квадратнаго метра поверхности нагрѣва въ часъ. Если это число $\frac{U}{H}$ извѣстно и извѣство „H“ — поверхность нагрѣва котла, — то легко вычислить „U“ и затѣмъ, зная число выхлоповъ въ часъ „m“, мы найдемъ расходъ пара на 1 выхлопъ

$$u = \frac{U}{m}$$

Но $u = u_0 + u_k$, гдѣ u_0 — полезный расходъ пара, а „u_k“ расходъ пара, пошедшаго на внутреннюю конденсацію; тотъ и другой зависятъ отъ скорости и отсѣчки и, слѣдовательно, зная „u“ и задавшись нѣкоторой скоростью, можно найти отсѣчку „ε“, соотвѣтствующую расходу пара „u“ и скорости „V“. Зная эту отсѣчку, мы найдемъ и соотвѣтствующее среднее индикаторное давленіе „p_i“, а слѣдовательно, и искомую наибольшую возможную при данной скорости силу тяги по извѣстной формулѣ:

$$F_i = \frac{l.d^2}{D} p_i$$

Для того, чтобы произвести такой разсчетъ, очевидно необходимо знать значенiе $\frac{U}{H}$ и коэффицiенты въ формулахъ

$$u = \varphi(\varepsilon, V) \quad \text{и} \quad p_i = \psi(\varepsilon)$$

Отысканiе этихъ величинъ изъ опыта требуетъ детальнаго изученiя работы котла и машины паровоза, а потому производится рѣдко, и намъ приходится за неимѣнiемъ лучшаго пользоваться устарѣвшими и неточными данными. Кромѣ того основное положенiе о постоянствѣ $\frac{U}{H}$ въ послѣднее время подвержено сомнѣнiю; именно, нѣкоторые изслѣдователи утверждаютъ, что съ увеличенiемъ числа оборотовъ движущихъ колесъ, т. е. съ увеличенiемъ скорости, тяга въ конусѣ дѣлается равномѣрнѣе и испарительная способность котла увеличивается.

Гораздо болѣе рацiоналенъ, по мнѣнiю профессоровъ Романова и Ломоносова, нѣмецкiй способъ, по которому изъ опыта находятъ лишь число индикаторныхъ лошадей, получаемыхъ при данномъ числѣ оборотовъ съ 1 metr^2 поверхности нагрѣва, что сдѣлать не трудно, и затѣмъ по этому $\frac{N_i}{H}$ находятъ на основанiи равенства

$$N_i = \frac{F_i V}{270}$$

при заданныхъ „H“ и „V“ величину F_i

Величина $\frac{N_i}{H}$ въ функцiи скорости впервые дана была проф. Frank'омъ формулою *)

$$\frac{N_i}{H} = \alpha + \beta \sqrt{v}$$

гдѣ „v“ скорость движенiя въ $^{metr}/_{sec}$, а „α“ и „β“ имѣютъ слѣдующiя значенiя:

*) См. Курсъ паровозовъ проф. Романова. С.-Петербургъ 1893—1894 г.

Для нормальнаго прусскаго пассажирскаго паровоза $\alpha = 0 \quad \beta = 1{,}17$
„ „ „ товарнаго „ $\alpha = 0{,}6 \quad \beta = 1{,}00$
„ „ „ танковаго „ $\alpha = 2 \quad \beta = 0{,}8$

Формулу проф. Франка врядъ ли можно считать удовлетворительной, т. к. при $v = 0$, N_i не всегда обращается въ нуль. Зависимости вида:

$$\frac{N_i}{H} = AV + BV^2 + CV^3$$

или

$$\frac{N_i}{H} = A\sqrt{V} + BV + CV^2$$

предлагавшіяся Barbier и проф. Ломоносовымъ, тоже невполнѣ удовлетворяютъ всѣмъ опытнымъ даннымъ.

Въ послѣднее время von Borries'омъ былъ произведенъ на прусскихъ дорогахъ рядъ опытовъ съ цѣлью найти зависимость $\frac{N_i}{H}$ отъ числа оборотовъ движущихъ колесъ. Данныя его опытовъ, помѣщенныя въ сочиненіи: „Das Eisenbahn-Maschinenwesen der Gegenwart" (Herausgegeben von Blum, Borries, Barkhausen. 1898 in Wiesbaden), будучи выражены не въ видѣ формулы, а въ видѣ таблицы, представляютъ очень цѣнный, но мало удобный для практическихъ примѣненій метеріалъ.

Поэтому я попробовалъ выразить данныя Borries'а общей формулой, предположивъ, что она представляетъ собою многочленъ, расположенный по степенямъ „$\sqrt{n}$", гдѣ „n" число оборотовъ движущихъ колесъ Для пассажирскаго паровоза обыкновеннаго дѣйствія Borries даетъ слѣдующія данныя:

При $n =$	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$\frac{N_i}{H}$ изъ опыта $=$	3,5	4,1	4,7	5,1	5,5	5,8	6

Принимая, что $\frac{N_i}{H} = A_0\sqrt{n} + A_1 n + A_2 n\sqrt{n} + A_3 n^2$, ищемъ коэффиціенты A_0, A_1, A_2 и A_3; если формула вѣрна при четырехъ значеніяхъ

$$n = 1; \quad n = 2; \quad n = 3; \quad n = 4,$$

то находимъ зависимость

$$\frac{N_i}{H} = 4{,}518\sqrt{n} - 1{,}807\,n + 1{,}054\,n\sqrt{n} - 0{,}256\,n^2 =$$

$$= 4{,}518\sqrt{n}\left(1 - 0{,}4\sqrt{n} + 0{,}233\,n - 0{,}0586\,n\sqrt{n}\right).$$

Многочленъ, стоящій въ скобкахъ, напоминаетъ разложеніе бинома въ отрицательной степени, т. к. знаки чередуются. Приравнивъ многочленъ, стоящій въ скобкахъ биному

$$(1+\beta\sqrt{n})^{-\gamma}$$

и сравнивъ коэф., можемъ найти постоянныя „β“ и „γ“. Но полученная такимъ образомъ формула:

$$\frac{N_i}{H} = 4{,}518\sqrt{n}\,(1+\beta\sqrt{n})^{-\gamma}$$

не дастъ точныхъ результатовъ, т. к. мы приравнили только 4-е члена цѣлому биному съ безконечно большимъ числомъ членовъ, суммой которыхъ, начиная съ 5-го, мы все-таки пренебречь не можемъ.

Убѣдившись однако, что $\frac{N_i}{H}$ можно представить въ видѣ

$$\frac{N_i}{H} = \frac{\alpha\sqrt{n}}{(1+\beta\sqrt{n})^{\gamma}}$$

постараемся найти α, β, γ по даннымъ изъ опытовъ. Находимъ тогда формулу

$$\frac{N_i}{H} = 4{,}02\,\frac{\sqrt{n}}{(1+0{,}0363\sqrt{n})^4} = 4{,}02\sqrt{n}\,(1+0{,}0363\sqrt{n})^{-4}$$

Если разложимъ $(1+0{,}0363\sqrt{n})^{-4}$ въ рядъ

I) $$(1+0{,}0363\sqrt{n})^{-4} =$$

$$= 1 - 0{,}1452\sqrt{n} + 0{,}0132\,n - 0{,}000954\,n\sqrt{n} + \cdots\cdots$$

и сравнимъ его съ рядомъ

II) $$(1+0{,}1452\sqrt{n})^{-1} =$$

$$= 1 - 0{,}1452\sqrt{n} + 0{,}0203\,n - 0{,}00285\,n\sqrt{n} + \cdots\cdots$$

то увидимъ, что разница между этими двумя рядами, равная

$$(1+0{,}1452\sqrt{n})^{-1}-(1+0{,}0363\sqrt{n})^{-4}=0{,}0071n-0{,}0019n\sqrt{n}\cdots$$

при „n_{max}“ $= 4$ обращается въ

$$0{,}0071.4-0{,}0019.8=0{,}0132$$

т. е. въ такую малую величину, которой можно пренебречь; мы вправѣ поэтому рядъ (I) замѣнить рядомъ (II).

Приходимъ такимъ образомъ къ формулѣ:

$$\frac{N_i}{H}=4{,}02\frac{\sqrt{n}}{1+0{,}1452\sqrt{n}}$$

Формула эта даетъ для различныхъ „n“ слѣдующія значенія для $\frac{N_i}{H}$

	$n=1$	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$\frac{N_i}{H}$ равно изъ опыта	3,5	4,1	4,7	5,1	5,5	5,8	6
$\frac{N_i}{H}$ равно по формулѣ	3,5	4 17	4,65	5,17	5,56	5,9	6,2
Ошибка	$=0$	+1,7%	−1%	+1,4%	+1%	+2%	+3%

Максимальная ошибка, какъ видно, равна 3%, въ то время, какъ по замѣчанію проф. Ломоносова, результаты опытовъ надъ паровозами въ пути не могутъ претендовать на точность большую чѣмъ $\pm$ 2%.

Замѣтимъ здѣсь одно свойство, которое намъ пригодится впослѣдствіи: можно мѣнять „β“ въ довольно широкихъ предѣлахъ, мѣняя соотвѣтственно и „α“, а ошибка только незначительно возрастаетъ. Напр., принимая $\beta=0{,}1$ и $\alpha=3{,}76$, находимъ

$$\frac{N_i}{H}=3{,}76\frac{\sqrt{n}}{1+0{,}1\sqrt{n}}\quad\cdots\quad \text{III}$$

и при различныхъ скоростяхъ, находимъ слѣдующія значенія для $\frac{N_i}{H}$

	$n=1$	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$\frac{N_i}{H}$ изъ опыт.	$=3{,}5$	4,1	4,7	5,1	5,5	5,8	6
$\frac{N_i}{H}$ по ф. III)	$=3{,}42$	4,1	4,66	5,14	5,55	5,92	6,26
Ошибка	$=-2$%	0%	−0,8%	+0,8%	+0,9%	+2%	+4%

Отсюда видно, что максимальная ошибка незначительно возросла: съ 3% до 4%, а потому можно пользоваться для одного и того же паровоза нѣсколькими формулами; такъ для пассажирскаго паровоза обыкновеннаго дѣйствія можно пользоваться одною изъ слѣдующихъ 2-хъ формулъ:

$$\frac{N_i}{H} = 4{,}02 \frac{\sqrt{n}}{1+0{,}1452\sqrt{n}} \text{ или } \frac{N_i}{H} = 3{,}76 \frac{\sqrt{n}}{1+0{,}1\sqrt{n}} \ldots \quad \text{(VI)}$$

Стараясь подыскать формулы, аналогичныя формуламъ IV для различныхъ паровозовъ, надъ которыми von Borries производилъ свои опыты, получаемъ въ общей формулѣ

$$\frac{N_i}{H} = \frac{\alpha\sqrt{n}}{1+\beta\sqrt{n}}$$

слѣдующія значенія для „α“ и для „β“:

Родъ паровоза	p_k Давленіе въ котлѣ	H/G Отношеніе пов. нагр. къ пл. кол. рѣш.	α	β	α'	β'
Паровозъ обыкновеннаго дѣйствія для скорыхъ поѣздовъ	12	55	3,38	0,05	3,76	0,1
Паровозъ обыкновеннаго дѣйствія для пассажирскихъ поѣздовъ	12	55	4,02	0,1452	3,76	0,1
Пассажирскій паровозъ компаундъ	12	55	3,6	0	3,6	0
Товарный паровозъ обыкновеннаго дѣйствія	10	80	2,69	0,05	2,72	0,07
Товарный паровозъ обыкновеннаго дѣйствія	10	60	3,8	0,1	3,2	0,07
Товарный паровозъ компаундъ	12	63	3,94	0,15	3,7	0,1
Товарный „ „	12	75	3,3	0,1	3,3	0,1
Товарный „ „	12	60	3,43	0,04	3,72	0,1

Числа въ столбцѣ $\frac{H}{G}$ представляютъ отношеніе поверхности нагрѣва къ площади колосниковой рѣшетки; „α'“ и „β'“ коэффиціенты, видоизмѣнененные такимъ образомъ, чтобы „β'“ при паровозахъ одного типа было одно и то же. Коэффиціенты α, β, α' и β' удовлетворяютъ условію:

$$\frac{\alpha}{1{,}5\beta+1}=\frac{\alpha'}{1{,}5\beta'+1}=Const. \text{ для всякаго паровоза.}$$

Приведя такимъ образомъ „α„ такъ, чтобы увеличеніе ошибки было незначительно, попытаемся найти зависимость „α“ отъ „$\frac{H}{G}$“ и „P_k“. Получимъ тогда

$$\frac{\alpha}{1+1{,}5\beta}=k\,6{,}03\,\frac{1}{1+m\frac{H}{G}}\quad *)$$

гдѣ „k“ для паровозовъ обыкновеннаго дѣйствія $=1$, а для паровозовъ компаундъ $k=1{,}118$; величина же „m“ для паровозовъ товарныхъ поѣздовъ $=0{,}018$, а пассажирскихъ $=0{,}0158$. Итакъ, получаемъ окончательныя для всѣхъ паровозовъ общія формулы:

$$\frac{N_i}{H}=\alpha\,\frac{\sqrt{n}}{1+\beta\sqrt{n}}\quad \dots\quad (V^a)$$

$$\alpha=\frac{6{,}03\,.\,k(1+1{,}5\beta)}{1+m\frac{H}{G}}\quad \dots\quad (V^b)$$

или

$$\frac{N_i}{H}=6{,}03\,\frac{k(1+1{,}5\beta)}{1+m\frac{H}{G}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{1+\beta\sqrt{n}}\quad \dots\quad (V^c)$$

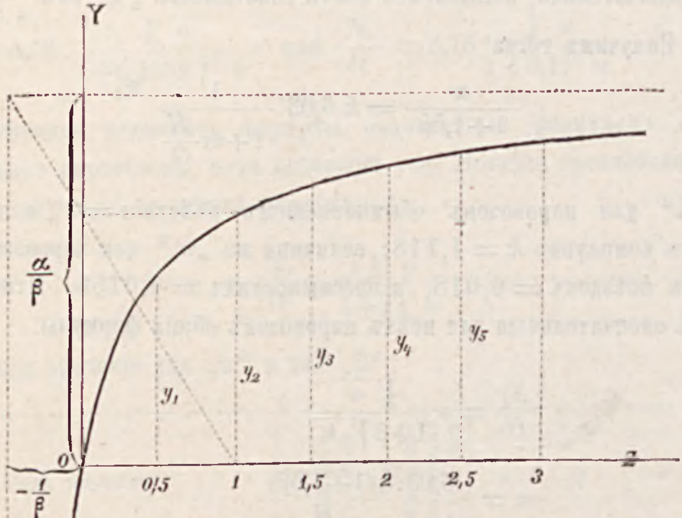
Коэффиціенты k, m, β могутъ быть для всякаго типа паровозовъ взяты изъ таблицы:

Родъ паровоза.	k	m	β
Пассажирскіе не compound . .	1,000	0,0158	0,10
Пассажирскіе compound	1,118	0,0158	0,00
Товарные не compound	1,000	0,0180	0,07
Товарные compound . . , ...	1,118	0,0180	0,10

*) Зависимость эта аналогична зависимости между количествомъ килограммовъ пару съ 1 metr² поверхности нагрѣва $\left(\frac{U}{H}\right)$ и $\frac{H}{G}$;

Формулами (V) очень удобно пользоваться, вычертивъ кривую

$$y = \frac{\alpha \sqrt{x}}{1+\beta \sqrt{x}}$$



Фиг. I.

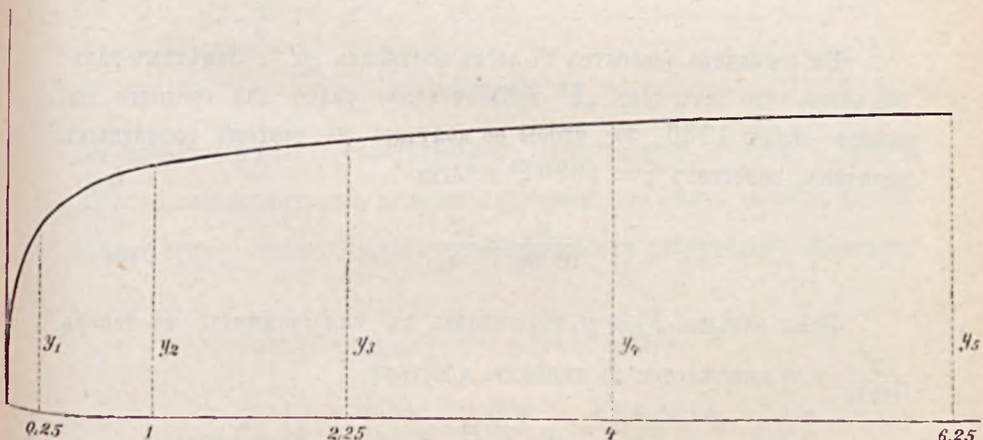
$$\frac{U}{H} = \frac{k \cdot \frac{щ_1}{H}}{\frac{щ_1}{H} + m} = \frac{k}{1+m\frac{H}{щ_1}} = \frac{k}{1+m\frac{G}{H}\cdot\frac{H}{G}} = \frac{k}{1+m'\frac{H}{G}},$$ гдѣ

„$щ_1$" количество сжигаемаго угля для полученія „U" килогр. пару. (См. лекціи, читанныя проф. Ломоносовымъ въ Варшавскомъ Политехническомъ Институтѣ).

гдѣ „α" и „β" для существующаго паровоза извѣстны. Замѣнивъ $\sqrt{x}$ на „z", получимъ

$$y = \frac{\alpha z}{1+\beta z},$$

уравненіе гиперболы, ассимптоты которой, какъ легко найти, параллельны оси OY и OZ и отсѣкаютъ отъ оси OY величину $\frac{\alpha}{\beta}$, а отъ оси OZ величину $\left(-\frac{1}{\beta}\right)$. Уравненіе гиперболы въ новыхъ координатахъ (если ее отнести къ ассимптотамъ) будетъ $y'z' = -\frac{\alpha}{\beta^2} = \left(+\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\right)$, т. е. гипербола проходитъ черезъ начало „O"; ее поэтому легко построить, какъ это и сдѣлано на фиг. I. Кривая вида $y = \frac{\alpha\sqrt{x}}{1+\beta\sqrt{x}}$ получится изъ нашей гиперболы такъ, какъ парабола $y = \sqrt{x}$ получается изъ прямой $y = z$. Для этого нужно ординаты, соотвѣтствующія обсциссамъ z_1, z_2, z_3, $\cdots$ откладывать на абсциссахъ z_1^2, z_2^2, $z_3^2\cdots$, какъ это и сдѣлано на фиг. II для кривой фиг. I.



Фиг. II.

Имѣя видъ кривой $y = \frac{\alpha\sqrt{x}}{1+\beta\sqrt{x}}$, можемъ получить также видъ кривой силы тяги изъ зависимостей:

$$\frac{N_i}{H} = y = \frac{\alpha \sqrt{n}}{1+\beta \sqrt{n}} \quad \text{и} \quad \frac{F_i V}{270} = N_i$$

Имѣемъ

$$\frac{F_i \,.\, V}{270\, H} = \frac{N_i}{H} \text{ или } \frac{N_i}{H} = \frac{F_i \,.\, \pi\, D.\, n.\, 3{,}6}{270\, H} = \frac{F_i \,.\, n}{\xi},$$

$$\text{гдѣ } \xi = \frac{270.\, H}{\pi.\, D.\, 3{,}6} = 75\ \frac{H}{\pi.\, D.}$$

Отсюда получаемъ:

$$F_i = \xi\ \frac{N_i}{H} \cdot \frac{1}{n} \text{ или } F_i = \xi\ \frac{\alpha}{\sqrt{n}\,(1+\beta\sqrt{n}\,)}$$

Если обозначимъ ординату F_i черезъ ,,y'", то

$$y' = \frac{\xi y}{n} \text{ или } \frac{y'}{y} = \frac{\xi}{n} \quad \ldots\ldots \quad \text{(VI)}$$

гдѣ ,,y" есть ордината кривой $\frac{N_i}{H}$.

На основаніи равенства VI легко построить „y'". Замѣтимъ раньше всего, что такъ какъ „ξ" прблизительно равно для средняго паровоза около 1200, то, чтобы не получать на чертежѣ громадныхъ величинъ, полагаетъ $\xi = 1000\,\xi'$ и тогда

$$\frac{y'}{1000 y} = \frac{\xi'}{n}.$$

Если раньше $F_i = y$ выражалось въ килограммахъ, то теперь $\frac{y'}{1000} = \eta$ выражается въ тоннахъ, а потому

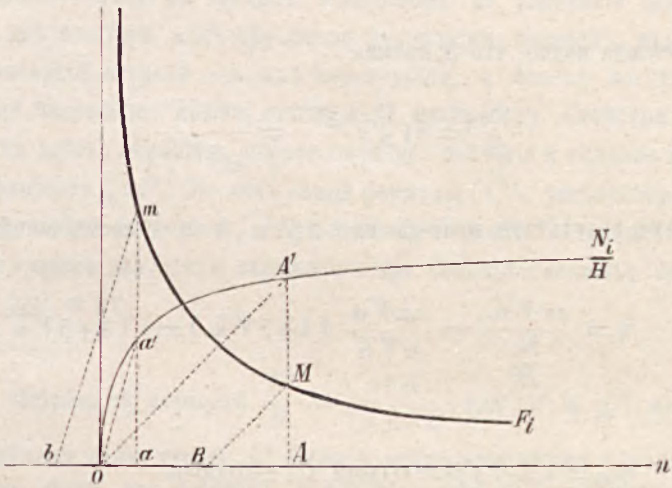
$$\frac{\eta}{y} = \frac{\xi'}{n}$$

Положимъ, что кривая $\frac{N_i}{H}$ по прежде изложенному способу уже начерчена, то для полученія кривой F_i поступаемъ слѣдующимъ образомъ: беремъ нѣкоторую абсциссу OA и откладываемъ $AB = \xi'$.

Соединяемъ „O“ съ A' и изъ „B“ проводимъ прямую, параллельную къ OA'; получаемъ точку „M“ кривой F_i. Построивъ такимъ образомъ нѣсколько точекъ, получимъ кривую силы тяги (фиг. III).

Если желательно пользоваться формулой:

$$\frac{N_i}{H} = \frac{\alpha \sqrt{n}}{1+\beta \sqrt{n}}$$



Фиг. III.

для вычисленій безъ предварительнаго графическаго построенія кривой $\frac{N_i}{H}$, то она оказывается немного неудобной, такъ какъ въ знаменателѣ имѣемъ сумму. Но это неудобство можно обойти слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{N_i}{H} = \frac{\alpha \sqrt{n}}{1+\beta \sqrt{n}} = \alpha \sqrt{n} \, (1+\beta \sqrt{n})^{-1} =$$

$$= \alpha \sqrt{n} \left(1 - \frac{\beta \sqrt{n}}{1} + \frac{\beta^2 n}{1} - \frac{\beta^3 n \sqrt{n}}{1} + \cdots \right) =$$

$$= \alpha \sqrt{n} \left[\left(1 - \frac{\beta \sqrt{n}}{1} + \frac{\beta^2 n}{1.2} - \frac{\beta^3 n \sqrt{n}}{1.2.3} + \cdots \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta^2 n}{2} - 5 \frac{\beta^3 n \sqrt{n}}{6} + \cdots \right] = \alpha \sqrt{n} \, (e^{-\beta \sqrt{n}} + \varepsilon)$$

где $\varepsilon = \frac{\beta^2 n}{2} - 5\frac{\beta^3 n\sqrt{n}}{6} + \cdots$

При β_{max} (въ нашихъ формулахъ $\beta_{max} = 0{,}1$) и „n“$_{max} = 4$ имѣемъ

$$\varepsilon_{min} = 0{,}005 - 0{,}0008 = 0\ 0042$$

$$\varepsilon_{max} = 0{,}02 - 0{,}007 = 0{,}013$$

Отсюда видно, что принимая

$$\frac{N_i}{H} = \alpha\sqrt{n}\, e^{-\beta\sqrt{n}} = \frac{\alpha\sqrt{n}}{e^{+\beta\sqrt{n}}},$$

получаемъ результаты меньшіе на $\varepsilon\alpha\sqrt{n}$, т. е. дѣлаемъ ошибку

$$\eta = \frac{\varepsilon\alpha\sqrt{n}}{\frac{N_i}{H}} = \frac{\varepsilon\alpha\sqrt{n}}{\alpha\sqrt{n}}(1+\beta\sqrt{n}) = \varepsilon(1+\beta\sqrt{n})$$

и

$$\eta_{min} = \varepsilon_{min}(1+\beta) = 0{,}0042.\ 1{,}1 = 0{,}0046$$

$$\eta_{max} = \varepsilon_{max}(1+2\beta) = 0{,}013.\ 1{,}2 = 0{,}0156$$

Эту ошибку можемъ уменьшить, если соотвѣтственно увеличить „α“ и принять его равнымъ α', гдѣ

$$\alpha' = \alpha\left(1 + \frac{\eta_{min} + \eta_{max}}{2}\right) = \alpha\left(1 + \frac{0{,}0046 + 0{,}0156}{2}\right) =$$

$$= \alpha(1 + 0{,}0101) = 1{,}0101\alpha.$$

Получимъ тогда

$$\frac{N_i}{H} = 1{,}01\alpha\frac{\sqrt{n}}{e^{\beta\sqrt{n}}}$$

Замѣтимъ, что если мы бы отбросили въ вышеприведенномъ разложеніи всѣ члены, начиная съ 3-го, то получили бы зависимость:

$$\frac{N_i}{H} = \alpha \sqrt{n}\left(1 - \beta \sqrt{n}\right) = \alpha \sqrt{n} - \alpha\beta n,$$

которая представила бы параболу, но ошибка при этомъ возросла бы вдвое.

Замѣчу въ заключеніе, что я далекъ отъ мысли приписывать моей формулѣ общее значеніе для всѣхъ паровозовъ. Числовые коэффиціенты, представленные мною въ таблицѣ, выведенные на основаніи данныхъ, взятыхъ изъ опытовъ надъ прусскими паровозами, зависятъ, вѣроятно, въ значительной степени отъ ихъ конструкціи, а потому могутъ оказаться для паровозовъ иныхъ конструкцій невѣрными. Свойства топлива имѣютъ здѣсь, вѣроятно, первенствующее значеніе и сильное вліяніе на коэффиціентъ „m“. Но видъ самой формулы (V^a), удовлетворяющей съ поразительной точностью всѣмъ даннымъ опыта *), окажется вѣроятно, вѣрнымъ для всѣхъ паровозовъ при соотвѣтственныхъ коэффиціентахъ „α“ и β“.

---

*) Ошибка по формулѣ $\frac{N_i}{H} = \frac{\alpha \sqrt{n}}{1+\beta\sqrt{n}}$, гдѣ „$\alpha$“ и „$\beta$“ не были еще подобраны такъ, чтобы „β“ было у всѣхъ паровозовъ одного типа одинаково, была для многихъ паровозовъ просто нечувствительна ($\frac{1}{2}$% и 1%). Для примѣра приведу товарный паровозъ компаундъ съ большой рѣшеткой, $\frac{H}{G} = 60$; $p = 12$; я нашелъ для него $\alpha = 3{,}43$; $\beta = 0{,}04$, а потому формула принимаетъ видъ:

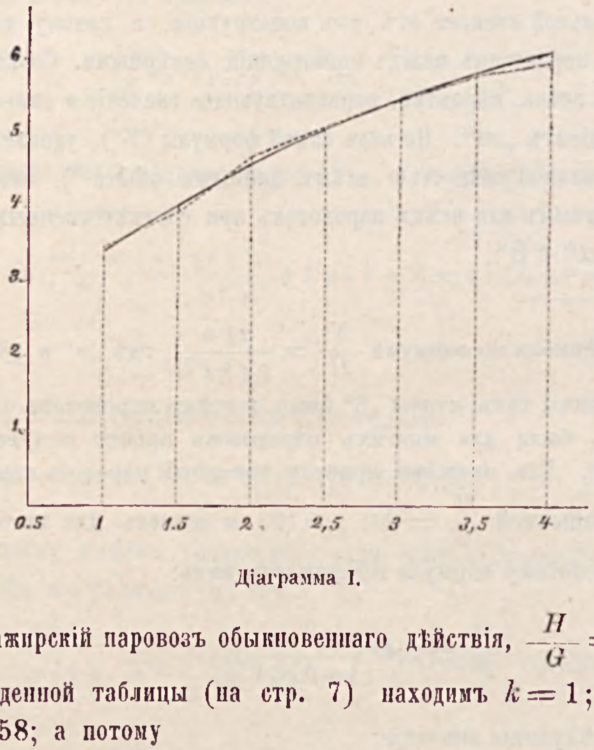
$$\frac{N_i}{H} = 3{,}43\,\frac{\sqrt{n}}{1+0{,}04\sqrt{n}}\;\;\ldots\quad \text{(VII)}$$

и даетъ слѣдующія значенія:

	$n = 1$	1,5	2	2,5	3
$\frac{N_i}{H}$ по форм.	$= 3{,}3$	4,01	4,6	5,1	5,6
$\frac{N_i}{H}$ изъ опыта	$= 3{,}3$	4,00	4,6	5,1	5,5

Если принять во вниманіе, что на опытѣ опредѣляли $\frac{N_i}{H}$ съ точ-

Нижеприведенныя діаграммы показываютъ на сколько формулы (V) соотвѣтствуютъ даннымъ, полученнымъ изъ опыта von Borries'омъ и другими. На оси абсциссъ откладывали число оборотовъ „n“, на оси ординатъ — число паровыхъ лошадей съ 1 metr², $\frac{N_i}{H}$. Пунктирныя кривыя соотвѣтствуютъ даннымъ опыта; сплошныя — формулѣ $\frac{N_i}{H}$.

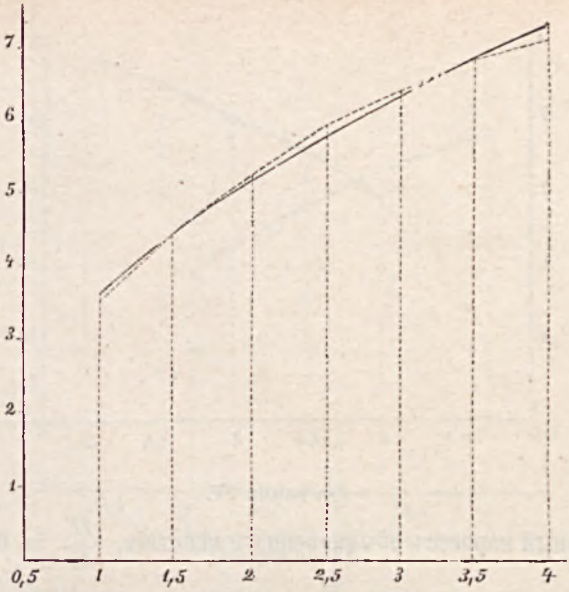


Діаграмма I.

Пассажирскій паровозъ обыкновеннаго дѣйствія, $\frac{H}{G} = 55$; изъ вышеприведенной таблицы (на стр. 7) находимъ $k = 1$; $\beta = 0{,}1$; $m = 0{,}0158$; а потому

$$a = \frac{6{,}03.\ 1{,}15}{1{,}87} = 3{,}71;\ \frac{N_i}{H} = 3{,}71\ \frac{\sqrt{n}}{1+0{,}1\sqrt{n}}$$

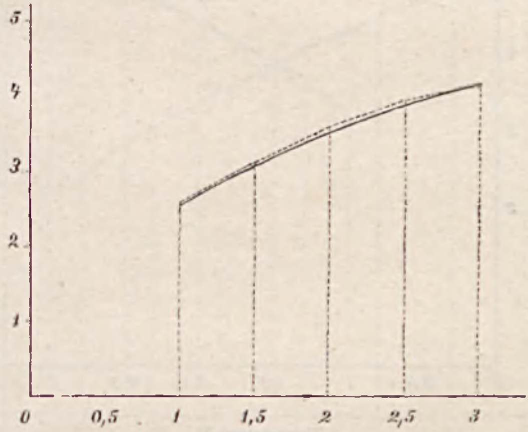
ностью до перваго десятичнаго знака и что по формулѣ (VII) получаются значенія, первые десятичные знаки которыхъ тождественны съ первыми десятичными знаками значеній, полученныхъ на опытѣ, то слѣдуетъ считать формулу (VII) вполнѣ удовлетворительной.



Діаграмма II.

Пассажирскій паровозъ компаундъ, $\frac{H}{G} = 55$. Изъ вышеприведенной таблицы находимъ $k = 1,118$; $\beta = 0$; $m = 0,0158$; а потому

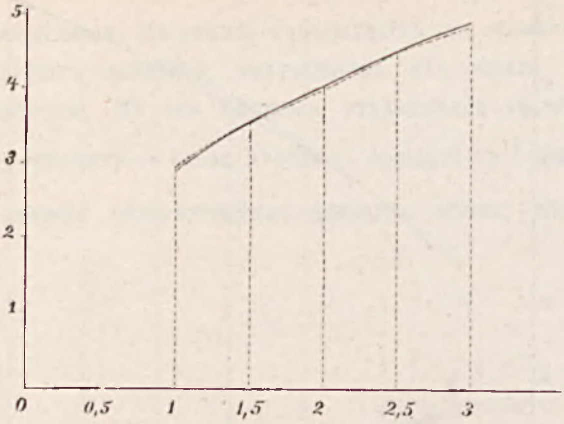
$$\alpha = \frac{6,03 . 1,118}{1,87} = 3,6 ; \quad \frac{N_i}{H} = 3,6 \sqrt{n}$$



Діаграмма III.

Товарный паровозъ обыкновеннаго дѣйствія, $\frac{H}{G} = 80$; а потому

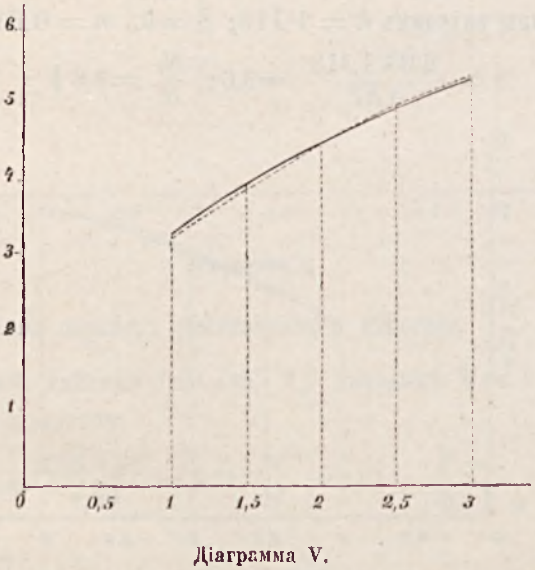
$$\alpha = \frac{6,03 . 1,105}{2,44} = 2,73 ; \quad \frac{N_i}{H} = 2,73 \frac{\sqrt{n}}{1 + 0,07 \sqrt{n}}$$



Діаграмма IV.

Товарный паровозъ обыкновеннаго дѣйствія, $\frac{H}{G} = 60$, а потому

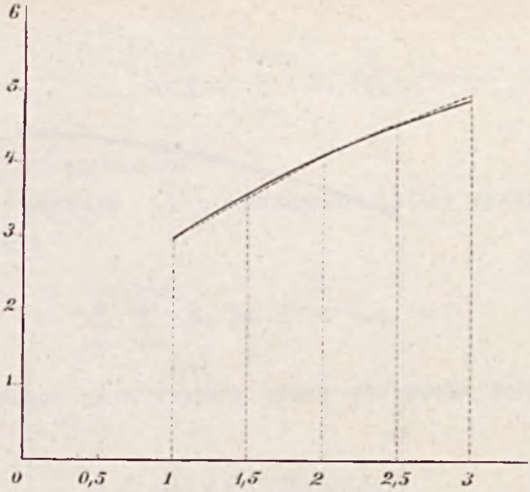
$$\alpha = \frac{6{,}03.1{,}105}{2{,}08} = 3{,}2; \quad \frac{N_i}{H} = 3{,}2\,\frac{\sqrt{n}}{1+0{,}07\sqrt{n}}$$



Діаграмма V.

Товарный паровозъ компаундъ, $\frac{H}{G} = 60$, а потому

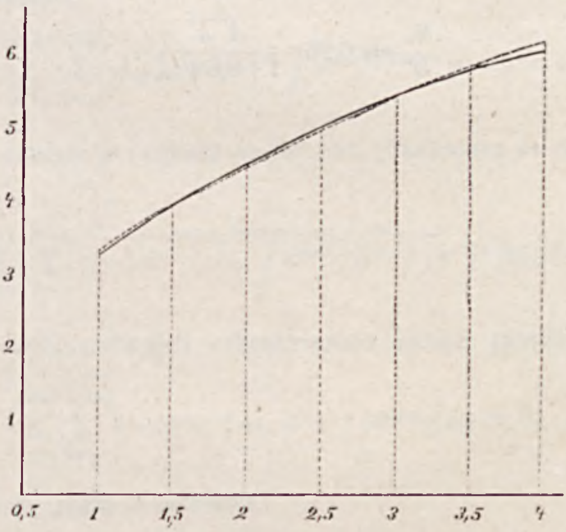
$$\alpha = \frac{6{,}03.\,1{,}118.1{,}15}{1+0{,}018.60} = 3{,}72\,; \quad \frac{N_i}{H} = 3{,}72\,\frac{\sqrt{n}}{1+0{,}1\sqrt{n}}$$



Діаграмма VI.

Товарный паровозъ компаундъ, $\frac{H}{G} = 75$; а потому

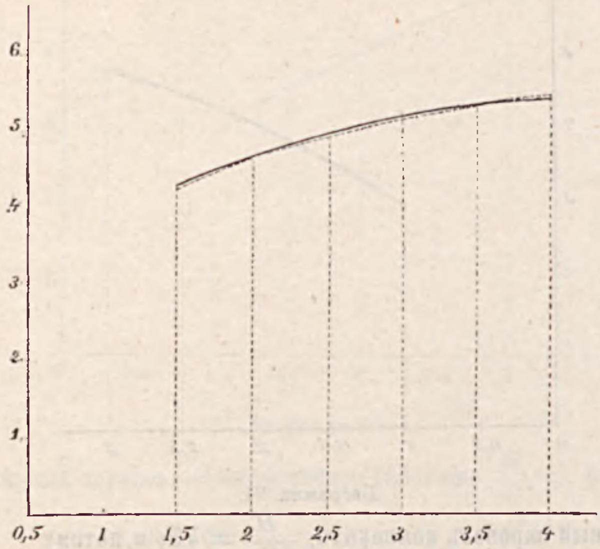
$$\alpha = \frac{6{,}03 . 1 . 118 . 1{,}15}{2{,}35} = 3{,}3\,; \quad \frac{N_i}{H} = 3{,}3 \frac{\sqrt{n}}{1 + 0{,}1\sqrt{n}}$$



Діаграмма VII.

Баварскій пассажирскій паровозъ обыкновеннаго дѣйствія. Для него я нашелъ формулу

$$\frac{N_i}{H} = 3{,}38 \frac{\sqrt{n}}{1 + 0{,}05\sqrt{n}}$$



Діаграмма VIII.

Австрійскій товарный паровозъ компаундъ. Для него я нашелъ формулу

$$\frac{N_i}{H} = 6{,}26\frac{\sqrt{n}}{1+0{,}6\sqrt{n}}$$

гдѣ принято:

$$f_{m_p}[\varphi(x)] = \sum_{k=0}^{k=m_p} A_{k_p}[\varphi(x)]^{m_p-k}; \tag{231}$$

при чемъ A_{kp} — постоянное.

Въ силу формулы (231), соотношеніе (230) напишется слѣдующимъ образомъ:

$$\sum_{p=0}^{p=n} \sum_{k=0}^{k=m_p} A_{kp}[\varphi(x)]^{m_p-k} u_{x+p} = 0. \tag{232}$$

Постараемся удовлетворить этому уравненію посредствомъ интеграла:

$$u_x = \int_L v^{\varphi(x)-1} f(v)\, dv, \tag{233}$$

гдѣ L есть дозволенный путь интеграціи, а $f(v)$ можетъ быть также и періодической функціей отъ x съ періодомъ, равнымъ единицѣ.

Внеся это выраженіе для u_x въ соотношеніе (232), на основаніи (229) получимъ:

$$\sum_{p=0}^{p=n} \sum_{k=0}^{k=m_p} A_{kp}[\varphi(x)]^{m_p-k} \int_L v^{\varphi(x)+p\theta(x)-1} f(v) dv = 0. \tag{234}$$

При помощи интеграціи по частямъ убѣждаемся въ справедливости равенства:

$$\sum_{p=0}^{p=n} \sum_{k=0}^{k=m_p} (-1)^{m_p-k} A_{kp} \int_L v^{\varphi(x)-1} \Delta^{m_p-k}[v^{p\theta(x)} f(v)]\, dv = 0. \tag{235}$$

Для опредѣленія $f(v)$, слѣдовательно, имѣемъ уравненіе:

$$\sum_{p=0}^{p=n} \sum_{k=0}^{k=m_p} (-1)^{m_p-k} A_{kp}\, \Delta^{m_p-k}[v^{p\theta(x)} f(v)] = 0. \tag{236}$$

Введемъ далѣе обозначеніе:

$$v^{\theta(x)} = z. \tag{237}$$

Легко сообразить, что

$$\Delta^{m_p-k}[v^{p\theta(x)} f(v)] = \theta(x)^{m_p-k} \Delta_1^{m_p-k}[z^p f_1(z)], \tag{238}$$

гдѣ положено:

$$\Delta_1 = z\,\frac{d}{dz}, \tag{239}$$

а $f_1(z)$ есть $f(v)$ послѣ замѣны въ этой послѣдней функціи v перемѣннымъ z по формулѣ (237).

Благодаря формулѣ (238), соотношеніе (236) приметъ видъ:

$$\sum_{p=0}^{p=n} \sum_{k=0}^{k=m_p} (-1)^{m_p-k} A_{kp} \theta(x)^{m_p-k} \Delta^{m_p-k} \left[z^p f_1(z)\right] = 0. \tag{240}$$

Такимъ образомъ интегрированіе уравненія (230) при помощи преобразованія:

$$u_x = C \int\limits_L z^{\frac{\varphi(x)}{\theta(x)}-1} f_1(z)\,dz, \tag{241}$$

гдѣ C есть произвольная періодическая функція съ періодомъ единица,— приводится къ интегрированію дифференціальнаго линейнаго уравненія однородной формы съ раціональными коэффиціентами. Порядокъ этого уравненія опредѣляетъ наибольшее изъ чиселъ $m_0, m_1, \cdots m_n$.

Обратимъ вниманіе на нѣсколько частныхъ видовъ уравненія (230).

Пусть $m_0 = m_1 = \cdots = m_n = 1$. Тогда уравненіе (232) приметъ видъ:

$$\sum_{p=0}^{p=n} \sum_{k=1}^{k=1} A_{kp} \left[\varphi(x)\right]^{1-k} u_{x+p} = 0. \tag{242}$$

Что же касается до уравненія (240), то оно обратится въ слѣдующее:

$$\theta(x) z \sum_{p=0}^{p=n} A_{0p} z^p \frac{df_1(z)}{dz} = f_1(z) \sum_{p=0}^{p=n} z^p (A_{1p} - A_{0p}\, p\, \theta(x)). \tag{242'}$$

Пусть будетъ:

$$\sum_{p=0}^{p=n} A_{0p} z^p = A_{0p} (z-\delta_1)(z-\delta_2) \cdots (z-\delta_n). \tag{243}$$

Уравненіе (242′) можно представить въ формѣ:

$$\frac{d\lg f_1(z)}{dz} = \frac{\sigma_1}{z} + \frac{\nu_1 - 1}{z-\delta_1} + \frac{\nu_2 - 1}{z-\delta_2} + \cdots + \frac{\nu_n - 1}{z-\delta_n}, \tag{244}$$

гдѣ $\sigma_1, \nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n$ суть извѣстныя функціи отъ $\theta(x)$. Интеграломъ уравненія (244) будетъ:

$$f_1(z) = \text{Const. } z^{\sigma_1} (z-\delta_1)^{\nu_1-1} (z-\delta_2)^{\nu_2-1} \cdots (z-\delta_n)^{\nu_n-1}. \tag{245}$$

Искомые же интегралы уравненія (242) напишутся въ формѣ:

$$u_x = C \int_{L_1} z^{\frac{\varphi(x)}{\theta(x)}+\sigma_1-1} (z-\delta_1)^{\nu_1-1} \cdots (z-\delta_n)^{\nu_n-1}\, dz. \tag{246}$$

Если

$$\varphi(x) = Ex, \tag{247}$$

то

$$U_x = C_1 \int_{L_1} z^{Ex+\sigma_1'-1} (z-\delta_1)^{\nu_1'-1} \cdots (z-\delta_n)^{\nu_n'-1}\, dz, \tag{248}$$

гдѣ $\sigma_1', \nu_1', \cdots, \nu_n'$ — постоянныя, а C_1 произвольное постоянное или произвольная періодическая функція съ періодомъ единица.

Допустимъ теперь, что

$$\sum_{p=0}^{p=n} A_{0p} z^p = A_{0n} (z-\delta_1)^{l_1} (z-\delta_2)^{l_2} \cdots (z-\delta_n)^{l_k}, \tag{249}$$

гдѣ

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_k = n. \tag{249'}$$

Уравненіе (242') можетъ быть написано такъ:

$$\begin{aligned} \frac{d\lg f_1(z)}{dz} = \frac{\sigma}{z} &+ \frac{\alpha_{l_1}}{(z-\delta_1)^{l_1}} + \frac{\alpha_{l_1-1}}{(z-\delta_1)^{l_1-1}} + \cdots + \frac{\alpha_1}{z-\delta_1} + \\ &+ \frac{\beta_{l_2}}{(z-\delta_2)^{l_2}} + \frac{\beta_{l_2-1}}{(z-\delta_2)^{l_2-1}} + \cdots + \frac{\beta_1}{z-\delta_2} + \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{\lambda_{l_k}}{(z-\delta_k)^{l_k}} + \frac{\lambda_{l_k-1}}{(z-\delta_k)^{l_k-1}} + \cdots + \frac{\lambda_1}{z-\delta_k}, \end{aligned} \tag{250}$$

гдѣ $\sigma, \alpha, \beta, \cdots, \lambda$ суть извѣстныя функціи отъ $\theta(x)$.

Интеграломъ уравненія (250) будетъ:

$$f_1(z) = \text{Const. } e^W z^\sigma (z-\delta_1)^{\alpha_1} (z-\delta_2)^{\beta_1} (z-\delta_k)^{\lambda_1}, \tag{251}$$

гдѣ положено:

$$W = -\frac{\alpha_{l_1}}{(l_1-1)(z-\delta_1)^{l_1-1}} - \frac{\alpha_{l_1-1}}{(l_1-2)(z-\delta_1)^{l_1-2}} - \cdots - \frac{\alpha_2}{z-\delta_1} -$$

. . . .

. . . .

(252)

$$-\frac{\lambda_{l_k}}{(l_k-1)(z-\delta_k)^{l_k-1}} - \frac{\lambda_{l_k-1}}{(l_k-2)(z-\delta_k)^{l_k-2}} - \cdots - \frac{\lambda_2}{z-\delta_2}.$$

Искомые же интегралы уравненія (242) напишутся въ формѣ:

(253) $$u_x = C'_1 \int_{L_1} e^W z^{\frac{\varphi(x)}{\theta(x)}+\sigma-1} (z-\delta_1)^{\alpha_1} \cdots (z-\delta_k)^{\lambda_1}\, dz,$$

гдѣ C'' имѣетъ такой же смыслъ, какъ предыдущее C.

Въ случаѣ значенія $\varphi(x)$ (247) имѣемъ:

(254) $$u_x = C'_1 \int_{L_1} e^{W} z^{Ex+\sigma'-1} (z-\delta_1)^{\alpha'_1} \cdots (z-\delta_k)^{\lambda'_1}\, dz,$$

гдѣ σ', α'_1, β'_1, $\cdots$, λ'_1 суть постоянныя, а W' есть W при настоящихъ условіяхъ,

Разсмотримъ также слѣдующее уравненіе:

(255) $$[c_0\varphi^2(x)+c_1\varphi(x)+c_2]\, u_{x+2}+[b_1\varphi(x)+b_2]\, u_{x+1}+ \\ +a_2 u_x = 0.$$

Уравненіе (240) обращается въ

$$c_0\theta^2(x)\nabla_1{}^2[z^2 f_1(z)] - \theta(x)\nabla_1[z(c_1z+b_1)f_1(z)] + $$

(256) $$+(c_2z^2+b_2z+a_2)f_1(z) = 0.$$

Оперируя надъ этимъ послѣднимъ уравненіемъ по пріему § 4 настоящей главы, интегрированіе уравненія (255) приведемъ въ зависимость отъ интегрированія уравненія:

$$c_0\theta^2(x)\xi\frac{d^2w}{d\xi^2}+\theta(x)[b_1\xi+2\lambda c_0\theta(x)+c_1-3c_0\theta(x)]\frac{dw}{d\xi} +$$

(257)

$$+[a_2\xi+\lambda b_1\theta(x)-b_1\theta(x)+b_2]\, w = 0;$$

при чемъ, имѣетъ мѣсто:

$$u_x = -\frac{1}{\theta(u)}\int\limits_{L_1} \xi^{\lambda - \frac{\varphi(x)}{\theta(x)} - 1} w(\xi)\, d\xi, \tag{258}$$

гдѣ λ опредѣляется изъ условія:

$$c_0\theta^2(x)\lambda(\lambda-1)+\theta(x)\left(c_1 - 3c_0\theta(x)\right)\lambda + 4c_0\theta^2(x) - 2c_1\theta(x) + c_2 = 0. \tag{259}$$

Далѣе, полагая, что

$$w(\xi) = \int\limits_{L'} e^{\xi\eta}\varphi(\eta)\, d\eta, \tag{260}$$

для опредѣленія $\varphi(\eta)$ находимъ уравненіе:

$$[c_0\theta^2(x)\eta^2 + b_1\theta(x)\eta + a_2]\frac{d\varphi(\eta)}{d\eta} = \tag{261}$$

$$= [(2\lambda c_0\theta(x) - 5c_0\theta(x) + c_1)\eta\theta(x) + \lambda b_1\theta(x) - 2b_1\theta(x) + b_2]\varphi(\eta).$$

Положимъ, что

$$c_0\theta^2(x)\eta^2 + b_1\theta(x)\eta + a_1 = c_0\theta^2(x)(\eta - \beta_1)(\eta - \beta_2). \tag{262}$$

Тогда уравненіе (261) можно будетъ написать въ формѣ:

$$\frac{d\lg\varphi(\eta)}{d\eta} = \frac{D_1}{\eta - \beta_1} + \frac{D_2}{\eta - \beta_2}, \tag{263}$$

гдѣ D_1 и D_2 суть извѣстныя функціи отъ $\theta(x)$.

Уравненіе (263) своимъ интеграломъ имѣетъ функцію:

$$\varphi(\eta) = \text{Const.}\,(\eta - \beta_1)^{D_1}(\eta - \beta_2)^{D_2}. \tag{264}$$

А потому искомые интегралы уравненія (255) представятся въ формѣ:

$$u_x = C_2\int\limits_{L_1} \xi^{\lambda - \frac{\varphi(x)}{\theta(x)} - 1} d\xi \int\limits_{L'} e^{\xi\eta}(\eta - \beta_1)^{D_1}(\eta - \beta_2)^{D_2}\, d\eta, \tag{265}$$

гдѣ C_2 есть произвольная періодическая функція съ періодомъ, равнымъ единицѣ.

Пусть далѣе:

$$c_0\theta^2(x)\eta^2 + b_1\theta(x)\eta + a_2 = c\theta^2(x)(\eta - \beta)^2. \tag{266}$$

Уравненіе (261) напишемъ въ видѣ:

(267) $$\frac{d\lg\varphi(\eta)}{d\eta} = \frac{\varepsilon_2}{(\eta-\beta)^2} + \frac{\varepsilon_1}{\eta-\beta},$$

гдѣ ε_1 и ε_2 — извѣстныя функціи отъ $\theta(x)$.

Интегрируя уравненіе (267), находимъ:

(268) $$\varphi(\eta) = \text{Const.}\ (\eta-\beta)^{\varepsilon_1} e^{-\frac{\varepsilon_2}{\eta-\beta}}.$$

Искомое же выраженіе для u_x есть:

(269) $$u_x = C_2'' \int\limits_{L_1} \xi^{\lambda-\frac{\varphi(x)}{\theta(x)}-1} d\xi \int\limits_{L'} e^{\xi\eta-\frac{\varepsilon_2}{\eta-\beta}} (\eta-\beta)^{\varepsilon_1} d\eta,$$

гдѣ C_2'' произвольная періодическая функція съ періодомъ единица.

Остановимся еще на интегрированіи слѣдующаго уравненія:

(270) $$\begin{aligned} &A_0(Ex+n-1)_n U_x - (Ex+n-1)_{n-1}[A_1+B_0(Ex+n)]U_{x+1} + \\ &+ (Ex+n-1)_{n-2}[A_2+B_1(Ex+n)]U_{x+2} - \\ &- (Ex+n-1)_{n-3}[A_3+B_2(Ex+n)]U_{x+3} + \cdots \\ &\cdots + (-1)^n[A_n+B_{n-1}(Ex+n)]U_{x+n} + (-1)^{n+1}B_n U_{x+n+1} = 0, \end{aligned}$$

гдѣ A и B суть постоянныя.

Уравненіе (240) въ разсматриваемомъ случаѣ обращается въ уравненіе:

(271) $$(A_0-B_0v)\frac{d^ny}{dv^n} + (A_1-B_1v)\frac{d^{n-1}y}{dv^{n-1}} + \cdots + (A_n-B_nv)\,y = 0,$$

интеграція котораго была выполнена нами по пріему Лапласа въ § 4 настоящей главы.

Въ заключеніе разсмотримъ слѣдующую систему двухъ уравненій:

(272) $$\begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{\nu=m}\sum_{k=0}^{k=q_\nu} b_{k\nu}[\varphi(x)]^k u_{x+\nu} + \sum_{\nu=0}^{\nu=m'}\sum_{k=0}^{k=l_\nu} c_{k\nu}[\varphi(x)]^k v_{x+\nu} = 0; \\ &\sum_{\nu=0}^{\nu=n}\sum_{k=0}^{k=q'_\nu} b'_{k\nu}[\varphi(x)]^k u_{x+\nu} + \sum_{\nu=0}^{\nu=n}\sum_{k=0}^{k=l'_\nu} c'_{k\nu}[\varphi(x)]^k v_{x+\nu} = 0. \end{aligned}$$

По пріему предыдущаго параграфа убѣждаемся, что интегралы этой системы можно искать въ видѣ:

$$u_x = \int_L v^{\varphi(x)-1} f(v)\, dv;$$
$$v_x = \int_L v^{\varphi(x)-1} \theta_1(v)\, dv, \tag{273}$$

гдѣ дозволенный путь L въ обоихъ интегралахъ одинъ и тотъ же.

Внеся эти выраженія для u_x и v_x въ соотношенія (272) и пользуясь интеграціей по частямъ, будемъ имѣть:

$$\int_L v^{\varphi(x)-1} \Big[\sum_{\nu=0}^{\nu=m} \sum_{k=0}^{k=q_\nu} (-1)^k b_{k\nu} \nabla^k [v^{\nu\theta(x)} f(v)] + $$
$$+ \sum_{\nu=0}^{\nu=m'} \sum_{\nu=0}^{k=l_\nu} (-1)^k c_{k\nu} \nabla^{\nu\theta(x)} \theta_1(v)\Big] dv = 0;$$
$$\int_L v^{\varphi(x)-1} \Big[\sum_{\nu=0}^{\nu=n} \sum_{k=0}^{k=q'_\nu} (-1)^k (b'_{k\nu} \nabla^k [v^{\nu\theta(x)} f(v)] + \tag{274}$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{\nu=n'} \sum_{k=0}^{k=l'_\nu} (-1)^k c'_{k\nu} \nabla^k [v^{\nu\theta(x)} \theta_1(v)] \Big] dv = 0.$$

Отсюда для опредѣленія $f(v)$ и $\theta(u)$ находимъ уравненія:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=m} \sum_{k=0}^{k=q_\nu} (-1)^k b_{k\nu} \nabla^k [v^{\nu\theta(x)} f(v)] +$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{\nu=m'} \sum_{k=0}^{k=l_\nu} (-1)^k c_{k\nu} \nabla^k [v^{\nu\theta(x)} \theta_1(v)] = 0;$$
$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} \sum_{k=0}^{k=q'_\nu} (-1)^k b'_{k\nu} \nabla^k [v^{\nu\theta(x)} f(v)] + \tag{275}$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{\nu=n'} \sum_{k=0}^{k=l'_\nu} (-1)^k c_{k\nu} \nabla^k [v^{\nu\theta(x)} \theta_1(v)] = 0.$$

Принимая во вниманіе соотношенія (237) и (238), послѣднимъ двумъ уравненіямъ дадимъ слѣдующій видъ:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=m}\sum_{k=0}^{k=q_\nu}(-1)^k b_{k\nu}\,\theta^k(x)\,\nabla_1{}^k\,[z^\nu f_2(z)]+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{\nu=m'}\sum_{k=0}^{k=l_\nu}(-1)^k c_{k\nu}\,\theta^k(x)\,\nabla_1{}^k\,[z^\nu \theta_2(z)]=0;$$

(276)

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n}\sum_{k=0}^{k=q'_\nu}(-1)^k b'_{k\nu}\,\theta^k(x)\,\nabla_1{}^k[z^\nu f_2(z)]+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{\nu=n'}\sum_{k=0}^{k=l'_\nu}(-1)^k c'_{k\nu}\,\theta^k(x)\,\nabla_1{}^k[z^\nu \theta_2(z)]=0,$$

гдѣ $f_2(z)$ и $\theta_2(z)$ суть соотвѣтственно $f(v)$ и $\theta_1(v)$ послѣ замѣны въ этихъ послѣднихъ аргумента v перемѣннымъ z по формулѣ (237).

§ 8.

Остановимся теперь на изысканіи системы дифференціальныхъ линейныхъ уравненій, которыя получаются изъ уравненія:

$$\sum_{k=0}^{k=\nu} P_{m_k}(u)\,\frac{d^{n-k}y}{du^{n-k}}=0 \tag{277}$$

при помощи преобразованія:

$$\eta=\int_L (u-x_1)^{\lambda_1-1}\,(u-x_2)^{\lambda_2-1}\,(u-x_m)^{\lambda_m-1}\,y\,du. \tag{278}$$

Обозначимъ чрезъ α наибольшее изъ чиселъ m_0-n, m_1-n+1, ..., m_k-n+k, ..., m_n. Далѣе, умноживъ обѣ части соотношенія (277) на функцію $(u-x_1)^{\lambda_1-\alpha-1}\,(u-x_2)^{\lambda_2-1}\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-1}$, возьмемъ отъ полученныхъ результатовъ интегралъ по дозволенному пути L.

Тогда будемъ имѣть

$$\sum_{k=0}^{k=n}\sum_{p=0}^{p=m_k}\frac{P^{(p)}_{m_k}(x_1)}{p!}\int_L (u-x_1)^{\lambda_1-\alpha+p-1}\,(u-x_2)^{\lambda_2-1}\cdots$$
(279)
$$\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-1}\,\frac{d^{n-k}y}{du^{n-k}}\,du=0.$$

Пользуясь интеграціей по частямъ, этому соотношенію дадимъ слѣдующій видъ:

$$\sum_{(kpq_1\cdots q_{m-1})} \frac{(-1)^k\,\delta(k,p,q_1,\cdots,q_{m-1})}{p!}\,P^{(p)}_{m_k}(x_1)\int\limits_L (u-x_1)^{\lambda_1-\alpha-n+k+q_1+p-1}$$

$$\left[\,(u-x_2)^{\lambda_2-q_1+q_2-1}\cdots(u-x_{m-1})^{\lambda_{m-1}-q_{m-2}+q_{m-1}-1}\right. \tag{280}$$

$$\left[\,(u-x_m)^{\lambda_m-q_{m-1}-1}\,y\,du=0;\right.$$

$$\delta(k,p,q_1,\cdots,q_{m-1})=[n-k]_{q_1}[q_1]_{q_2}\cdots$$

$$\cdots[q_{m-2}]_{q_{m-1}}(\lambda_1-\alpha+p-1)_{n-k-q_1}(\lambda_2-1)_{q_1-q_2}\cdots \tag{281}$$

$$\cdots(\lambda_{m-1}-1)_{q_{m-2}-q_{m-1}}(\lambda_m-1)_{q_{m-1}}.$$

При этомъ q_{m-1}, q_{m-2}, $\cdots$, q_2, q_1, p и k принимаютъ слѣдующія цѣлыя значенія:

$$q_{m-1}=[0,q_{m-2}],\cdots,q_2=[0,q_1],q_1=[0,n-k],$$
$$p=[0,m_k],k=[0,n], \tag{282}$$

гдѣ символъ $[0,\ s]$ представляетъ всѣ цѣлыя числа отъ 0 до s включительно.

Принимая во вниманіе (278), соотношенію (280) дадимъ видъ:

$$\sum_{(kpq_1\cdots q_{m-1})}\frac{(-1)^p\,P^{(p)}_{m_k}(x_1)}{p!\,(\lambda_1-1)_{\alpha-p}}[n-k]_{q_1}[q_1]_{q_2}\cdots$$

$$\cdots[q_{m-2}]_{q_{m-1}}\frac{\partial^{\alpha+n-k-p}\eta}{\partial x_1^{\alpha+n-k-q_1-p}\,\partial x_2^{q_1-q_2}\cdots\partial x_m^{q_{m-1}}}=0. \tag{283}$$

Это есть линейное однородное уравненіе съ частными производными порядка $\alpha+n$.

Изъ него послѣ взаимнаго перемѣщенія λ_1 и λ_2, x_1 и x_2; $\cdots$; λ_1 и λ_3, x_1 и x_3; $\cdots$; λ_1 и λ_m, x_1 и x_m — получаются еще $m-1$ уравненій. Эти m соотношеній вмѣстѣ съ $\frac{m(m-1)}{2}$ соотношеніями (77) главы III составляютъ полную систему $\frac{m(m+1)}{2}$ уравненій, которымъ удовлетворяютъ интегралы вида (278).

Соотношеніе (280) легко приводитъ къ линейному уравненію въ конечныхъ частныхъ разностяхъ, которому удовлетворяютъ интегралы вида:

$$284)\qquad U_{z_1, z_2, \dots z_m} = \int\limits_L (u-\beta_1)^{z_1-1}\,(u-\beta_2)^{z_2-1}\cdots(u-\beta_m)^{z_m-1}\,f(u)\,du.$$

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что

$$(285)\qquad \begin{gathered} \lambda_1-\alpha-n=z_1\ \lambda_2-\alpha-n=z_2, \cdots, \lambda_m-\alpha-n=z_m; \\ x_1=\beta_1, x_2=\beta_2, \cdots, x_m=\beta_m. \end{gathered}$$

Тогда соотношеніе (280) представится такъ:

$$(286)\qquad \sum_{(kpq\, - q_{m-1})} \frac{(-1)^k}{p!}\,\delta_{1(k, p, q_1, \cdots, q_{m-1})}\,P_{m_k}^{(p)}{}_{(\beta_1)}$$
$$[\ U_{z_1+k+q_1+p,\ z_2+\alpha+n-q_1+q_2, \cdots\ z_m+\alpha+n-q_{m-1}} = 0,$$

гдѣ $\delta_1(k, p, q_1, \cdots, q_{m-1})$ есть $\delta(k, p, q_1, \cdots, q_{m-1})$ при условіяхъ (285).

Изъ этого послѣдняго уравненія при помощи взаимнаго перемѣщенія количествъ: z_1 и z_2, β_1 и β_2: $\cdots$; z_1 и z_m, β_1 и β_m получаются еще $m-1$ новыхъ. Эти же m уравненій вмѣстѣ съ $\frac{m(m-1)}{2}$ соотношеніями (99) главы III (послѣ замѣны въ нихъ α чрезъ β) составляютъ систему $\frac{m(m+1)}{2}$ уравненій, частными интегралами которыхъ служатъ функціи вида (284). Обратимъ тутъ вниманіе на нѣкоторые частные случаи.

Пусть уравненіемъ (277) будетъ соотношеніе (271), а число независимыхъ перемѣнныхъ два, а именно: $x_1 = x$ и $x_2 = y$.

Тогда искомая система состоитъ изъ слѣдующихъ трехъ уравненій:

$$\sum_{k=0}^{k=n}\sum_{q=0}^{q=n-k}(-1)^k\,[n-k]_q\left[(A_k-B_kx)\frac{\partial^{n-k+1}\eta}{\partial x^{n-k-q+1}\partial y^q}+\right.$$
$$\left.+(\lambda_1-1)\,B_k\,\frac{\partial^{n-k}\eta}{\partial x^{n-k-q}\partial y^q}\right]=0;$$

$$\sum_{k=0}^{k=n}\sum_{q=0}^{q=n-k}(-1)^k[n-k]_q\left[(A_k-B_ky)\frac{\partial^{n-k-1}\eta}{\partial y^{n-k-q+1}\partial x^q}+\right.$$

$$\left.+(\lambda_2-1)B_k\frac{\partial^{n-k}\eta}{\partial y^{n-k-q}\partial x^q}\right]=0; \tag{287}$$

$$(x-y)\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}+(\lambda_2-1)\frac{\partial\eta}{\partial x}+(1-\lambda_1)\frac{\partial\eta}{\partial y}=0.$$

Порядокъ первыхъ двухъ уравненій, очевидно, $n+1$. Частные же интегралы ихъ выражаются чрезъ интегралы уравненія (271) слѣдующимъ образомъ:

$$\eta=\int_L(u-x)^{\lambda_1-1}(u-y)^{\lambda_2-1}\,y\,du. \tag{288}$$

Положимъ далѣе, что уравненіе (277) имѣетъ составъ:

$$(Au^2+Bu+C)\frac{d^2y}{du^2}+(Eu+D)\frac{dy}{du}+Ky=0, \tag{289}$$

гдѣ A, B, C, E, D и K суть постоянныя.

При помощи интеграла (288) это послѣднее уравненіе преобразуется въ систему трехъ уравненій:

$$(Ax^2+Bx+C)\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}\right)+(Ay^2+By+C)\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}+$$

$$+[(E-2\lambda_1A)x+D-\lambda_1B]\frac{\partial\eta}{\partial x}+$$

$$+[(Ey+D-(2\lambda_1+\lambda_2-2)(2Ax+B)-2A(\lambda_1+\lambda_2-1)(y-x)]\frac{\partial\eta}{\partial y}+$$

$$+\left[A\left((\lambda_1+1)_2+2(\lambda_1+1)(\lambda_2-1)+(\lambda_2-1)_2\right)-\right.$$

$$\left.-E(\lambda_1+\lambda_2-1)+K\right]\eta=0; \tag{290}$$

$$(Ay^2+By+C)\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}\right)+(Ax^2+Bx+C)\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+$$

$$+[(E-2\lambda_2A)y+D-\lambda_2B]\frac{\partial\eta}{\partial y}+[Ex+D-$$

$$-(2\lambda_2+\lambda_1-2)(2Ay+B)-2A(\lambda_2+\lambda_1-1)(x-y)]\frac{\partial\eta}{\partial x}+$$

$$+\left[A\left((\lambda_2+1)_2+2(\lambda_2+1)(\lambda_1-1)+(\lambda_1-1)_2\right)-\right.$$

$$\left.-E(\lambda_1+\lambda_2-1)+K\right]\eta=0;$$

$$(x-y)\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}+(\lambda_2-\ )\frac{\partial\eta}{\partial x}+(1-\lambda_1)\frac{\partial\eta}{\partial y}=0.$$

Для полученія полнаго интеграла системы (290), постараемся представить рѣшенія уравненія (289) въ формѣ опредѣленныхъ интеграловъ.

Полагаемъ, что

(291) $$y=\int_{L_1}(v-u)^{\lambda-1}f(v)\,dv.$$

Внеся это выраженіе для y въ уравненіе (289), послѣ простыхъ преобразованій будемъ имѣть:

(292) $$(Av^2+Bv+C)\frac{df}{dv}+[Ev+D+(\lambda-1)(2Av+B)]\,f=0.$$

При этомъ λ опредѣляется изъ условія:

(293) $$A(\lambda-1)_2-E(\lambda-1)_1+K=0.$$

Пусть будетъ

(294) $$Av^2+Bv+C=A(v-\alpha)(v-\beta).$$

Уравненіе (292) представится тогда въ формѣ:

(295) $$\frac{dlgf}{dv}=\frac{b_1-1}{v-\alpha}+\frac{b_2-1}{v-\beta},$$

гдѣ

(296) $$b_1-1=-\frac{E\alpha+(\lambda-1)(2A\alpha+B)}{A(\alpha-\beta)};$$

$$b_2-1=-\frac{E\beta+(\lambda-1)(2A\beta+B)}{A(\beta-\alpha)}.$$

Уравненію (295) удовлетворяетъ функція:

(297) $$f(v)=\mathrm{Const.}\,(v-\alpha)^{b_1-1}(v-\beta)^{b_2-1}.$$

Линейно независимыми интегралами уравненія (289) будутъ:

$$y_1 = \text{Const.} \int\limits_{c_1}^{(\alpha\ u\ \overline{\alpha}\ \overline{u})} (v-u)^{\lambda-1} (v-\alpha)^{b_1-1} (v-\beta)^{b_2-1} dv;$$

$$y_2 = \text{Const.} \int\limits_{c_1}^{(\beta\ u\ \overline{\beta}\ \overline{u})} (v-u)^{\lambda-1} (v-\alpha)^{b_1-1} (v-\beta)^{b_2-1} dv. \tag{298}$$

Исключая изъ разсмотрѣнія извѣстные предѣльные случаи относительно показателей λ_1, b_1 и b_2, полный интегралъ системы уравненій (290) можемъ представить въ любомъ изъ двухъ видовъ:

$$\eta_1 = C_1 \int\limits_{0}^{(x\ y\ \overline{x}\ \overline{y})} (u-x)^{\lambda_1-1} (u-y)^{\lambda_2-1} y_1 du +$$

$$+ C_2 \int\limits_{c}^{(x\ \alpha\ \overline{x}\ \overline{\alpha})} (u-x)^{\lambda_1-1} (u-y)^{\lambda_2-1} y_1 du + \tag{299}$$

$$+ C_3 \int\limits_{c}^{(x\ \beta\ \overline{x}\ \overline{\beta})} (u-x)^{\lambda_1-1} (u-y)^{\lambda_2-1} y_1 du;$$

$$\eta_3 = C_1' \int\limits_{c}^{(x\ y\ \overline{x}\ \overline{y})} (u-x)^{\lambda_1-1} (x-y)^{\lambda_2-1} y_2 du +$$

$$+ C_2' \int\limits_{c}^{(x\ \alpha\ \overline{x}\ \overline{\alpha})} (u-x)^{\lambda_1-1} (u-y)^{\lambda_2-1} y_2 du + \tag{299'}$$

$$+ C_3' \int^{(x\ \beta\ \overline{x}\ \overline{\beta})} (u-x)^{\lambda_1-1} (u-y)^{\lambda_2-1} y_2 du.$$

Допустимъ, что

$$Av^2 + Bv + C = A(v-\alpha)^2. \tag{300}$$

Уравненіе (292) представимъ такъ:

$$\frac{dlgf(v)}{dv} = \frac{d_2}{(v-\alpha)^2} + \frac{d_1-1}{v-\alpha}, \tag{301}$$

гдѣ

$$
(302) \qquad \begin{aligned} d_2 &= -\frac{aE+D+(\lambda-1)(B+2A\alpha)}{A} \\ d_1-1 &= -\frac{E+2A(\lambda-1)}{A}. \end{aligned}
$$

Интегрируя уравненіе (301), находимъ:

$$
(303) \qquad f(v) = \text{Const.}\,(v-\alpha)^{d_1-1}\,e^{-\frac{d_2}{v-\alpha}}.
$$

Линейно независимыми интегралами уравненія (289) будутъ:

$$
(304) \qquad \begin{aligned} y' &= \text{Const.} \int_c^{(\alpha\ u\ \overline{\alpha}\ \overline{u})} (v-u)^{\lambda-1}(v-\alpha)^{d_1-1}\,e^{-\frac{d_2}{v-\alpha}}\,dv; \\ y'' &= \text{Const.}\,[(00)]_\alpha. \end{aligned}
$$

За полный интегралъ уравненій (290) можно принять:

$$
(305) \qquad \begin{aligned} \eta' = C_1 &\int_c^{(x\ y\ \overline{x}\ \overline{y})} (u-x)^{\lambda_1-1}\,(u-y)^{\lambda_2-1}\,y'\,du\ + \\ + C_2 &\int_c^{(x\ \alpha\ \overline{x}\ \overline{\alpha})} (u-x)^{\lambda_1-1}\,(u-y)^{\lambda_2-1}y'\,du\ + \\ + C_3 &\int_c^{(x\ \alpha\ \overline{x}\ \overline{\alpha})} (u-x)^{\lambda_1-1}\,(u-y)^{\lambda_2-1}[(00)]_\alpha\,du. \end{aligned}
$$

Возьмемъ теперь систему двухъ уравненій:

$$
(306) \qquad \begin{aligned} &\sum_{k=0}^{k=n} P_{m_k}(u)\,\frac{d^{n-k}y}{du^{n-k}} + \sum_{k_1=0}^{k_1=q} Q_{m_{k_1}}(u)\,\frac{d^{q-k_1}\eta}{du^{q-k_1}} = 0; \\ &\sum_{k_2=0}^{k_2=n'} M_{m_{k_2}}(u)\,\frac{d^{n'-k_2}y}{du^{n'-k_2}} + \sum_{k_3=0}^{k_3=q'} N_{m_{k_3}}(u)\,\frac{d^{q'-k_3}\eta}{du^{q'-k_3}} = 0, \end{aligned}
$$

гдѣ $P_{m_k}(u)$, $Q_{m_{k_1}}(u)$, $M_{m_{k_2}}(u)$ и $N_{m_{k_3}}(u)$ суть полиномы степеней соотвѣтственно: m_k, m_{k_1}, m_{k_2} и m_{k_3}.

При помощи интеграловъ:

$$W = \int\limits_L (u - x_1)^{\lambda_1 - 1} \cdots (u - x_m)^{\lambda_m - 1} y\,du;$$
$$V = \int\limits_L (u - x_1)^{\lambda_1 - 1} \cdots (u - x_m)^{\lambda_m - 1} \eta\,du \tag{307}$$

эту систему можно преобразовать въ слѣдующія два уравненія:

$$\sum_{(kpq_1\cdots q_{m-1})} \frac{(-1)^p P_{m_k}^{(p)}(x_1)}{p!\,(\lambda_1 - 1)_{\alpha - p}} [n-k]_{q_1} [q_1]_{q_2} \cdots [q_{m-2}]_{q_{m-1}} \left[\frac{\partial^{n+\alpha-k-p} W}{\partial x_1^{n+\alpha-k-q_1-p}\, \partial x_2^{q_1-q_2} \cdots \partial x_m^{q_{m-1}}} \right] +$$
$$+ \sum_{(k_1pq_1\cdots q_{m-1})} \frac{(-1)^p \theta_{m_{k_1}}^{(p)}(x_1)}{p!\,(\lambda_1 - 1)_{\alpha - p}} [q-k_1]_{q_1} [q_1]_{q_2} \cdots [q_{m-2}]_{q_{m-1}} \left[\frac{\partial^{q+\alpha-k_1-p} V}{\partial x_1^{q+\alpha-k_1-q_1-p}\, \partial x_2^{q_1-q_2} \cdots \partial x_m^{q_{m-1}}} \right] = 0;$$

$$\sum_{(k_2pq_1\cdots q_{m-1})} \frac{(-1)^p M_{m_{k_2}}^{(p)}(x_1)}{p!\,(\lambda_1 - 1)_{\beta - p}} [n'-k_2]_{q_1} [q_1]_{q_2} \cdots [q_{m-2}]_{q_{m-1}} \left[\frac{\partial^{n'+\beta-k_2-p} W}{\partial x_1^{n'+\beta-k_2-q_1-p}\, \partial x_2^{q_1-q_2} \cdots \partial x_m^{q_{m-1}}} \right] + \tag{308}$$
$$+ \sum_{(k_3pq_1\cdots q_{m-1})} \frac{(-1)^p N_{m_{k_3}}^{(p)}(x_1)}{p!\,(\lambda_1 - 1)_{\beta - p}} [q'-k_3]_{q_1} [q_1]_{q_2} \cdots [q_{m-2}]_{q_{m-1}} \left[\frac{\partial^{q'+\beta-k_3-p} V}{\partial x_1^{q'+\beta-k_3-q_1-p}\, \partial x_2^{q_1-q_2} \cdots \partial x_m^{q_{m-1}}} \right] = 0.$$

Замѣтимъ, что α есть наибольшее изъ чиселъ: m_k и m_{k_1}, а β наибольшее изъ чиселъ: m_{k_2} и m_{k_3}.

При сужденіи о предѣлахъ суммъ соотношеній (308) надо имѣть въ виду равенства (282).

Изъ уравненій (308) чрезъ взаимное перемѣщеніе количествъ λ_1 и λ_2, x_1 и x_2; $\cdots$; λ_1 и λ_m, x_1 и x_m получаются еще $2(m-1)$ новыхъ. Эти же $2m$ уравненій вмѣстѣ съ $m(m-1)$ соотношеніями:

$$
\begin{aligned}
&(x_i-x_j)\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial x_j}+(\lambda_j-1)\frac{\partial W}{\partial x_i}+(1-\lambda_i)\frac{\partial W}{\partial x_j}=0;\\
(309)\qquad &(x_i-x_j)\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\,\partial x_j}+(\lambda_j-1)\frac{\partial V}{\partial x_i}+(1-\lambda_i)\frac{\partial V}{\partial x_j}=0
\end{aligned}
$$

составляютъ полную систему $m(m+1)$ уравненій, частные интегралы которыхъ выражаются въ формѣ (307).

Далѣе, полагая:

$$
\begin{aligned}
&U_{z_1, z_2, \cdots, z_m}=\int_{L_1}(u-\beta_1)^{z_1-1}(u-\beta_2)^{z_2-1}\cdots(u-\beta_m)^{z_m-1}\,y\,du,\\
(310)\qquad &\\
&V_{z_1, z_2, \cdots, z_m}=\int_{L_1}(u-\beta_1)^{z_1-1}(u-\beta_2)^{z_2-1}\cdots(u-\beta_m)^{z_m-1}\,\eta\,du,
\end{aligned}
$$

систему (306) можно преобразовать въ уравненія съ конечными частными разностями:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{(kpq_1\cdots q_{m-1})}\frac{(-1)^k}{p!}\,\mu(k, p, q_1, \cdots, q_{m-1})\\
&\qquad\qquad [\;U_{z_1+k+q_1+p,\; z_2+\alpha+n-q_1+q_2,\; \cdots,\; z_m+\alpha+n-q_{m-1}}+\\
&+\sum_{(k_1pq_1\cdots q_{m-1})}\frac{(-1)^{k_1}}{p!}\,\nu(k_1, p, q_1, \cdots, q_{m-1})\\
&\qquad\qquad [\;V_{z_1+k_1+q_1+p,\; z_2+\alpha+q-q_1+q_2,\; \cdots\; z_m+\alpha+q-q_{m-1}}=0;\\
(311)\qquad &\\
&\sum_{(k_2pq_1\cdots q_{m-1})}\frac{(-1)^{k_2}}{p!}\,\mu'(k_2, p, q_1, \cdots q_{m-1})\\
&\qquad\qquad [\;U_{z_1+k_2+q_1+p,\; z_2+\beta+n'-q_1+q_2,\; \cdots,\; z_m+\beta+n'-q_{m-1}}+\\
&+\sum_{(k_3pq_1\cdots q_{m-1})}\nu'(k_3, p, q_1, \cdots, q_{m-1})\\
&\qquad\qquad [\;V_{z_1+k_3+q_1+p,\; z_2+\beta+q'-q_1+q_2,\; \cdots\; z_m+\beta+q'-q_{m-1}}=0.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\mu(k, p, q_1, \cdots, q_{m-1}) = \\
&= [n-k]_{q_1} [q_1]_{q_2} \cdots [q_{m-2}]_{q_{m-1}} (\lambda_1-\alpha+p-1)_{n-k-q_1} (\lambda_2-1)_{q_1-q_2} \cdots \\
&\cdots (\lambda_m-1)_{q_{m-1}} P^{(p)}_{m_k}(\beta_1); \\
&\nu(k_1, p, q_1, \cdots, q_{m-1}) = \\
&= [q-k_1]_{q_1} [q_1]_{q_2} \cdots [q_{m-2}]_{q_{m-1}} (\lambda_1-\alpha+p-1)_{q-k-q_1} (\lambda_2-1)_{q_1-q_2} \cdots \\
&\cdots (\lambda_m-1)_{q_{m-1}} Q^{(p)}_{m_{k_1}}(\beta_1); \\
&\mu'(k_2, p, q_1, \cdots, q_{m-1}) = \\
&= [n'-k_2]_{q_1} [q_1]_{q_2} \cdots [q_{m-2}]_{q_{m-1}} (\lambda_1-\alpha+p-1)_{n'-k_1-q_1} (\lambda_2-1)_{q_1-q_2} \cdots \\
&\cdots (\lambda_m-1)_{q_{m-1}} M^{(p)}_{m_{k_1}}(\beta_1); \\
&\nu'(k_3, p, q_1, \cdots, q_{m-1}) = \\
&= [q'-k_3]_{q_1} [q_1]_{q_2} \cdots [q_{m-2}]_{q_{m-1}} (\lambda_1-\beta+p-1)_{q'-k_3-q_1} (\lambda_2-1)_{q_1-q_2} \cdots \\
&\cdots (\lambda_m-1)_{q_{m-1}} N^{(p)}_{m_{k_1}}(\beta_1).
\end{aligned} \tag{312}$$

Изъ уравненій (311) чрезъ взаимное перемѣщеніе z_1 и z_2, β_1 и β_2, ; $\cdots$; z_1 и z_m, β_1 и β_m получаются $2(m-1$ новыхъ. Эти $2m$ соотношеній вмѣстѣ съ $\frac{m(m-1)}{2}$ уравненіями (99) главы III (послѣ замѣны въ нихъ α чрезъ β) и $\frac{m(m-1)}{2}$ имъ подобными для $V_{z_1, z_2, \cdots, z_m}$ составляютъ полную систему $m\,(m+1)$ уравненій, которымъ удовлетворяютъ интегралы вида (310).

Разсмотримъ нѣсколько частныхъ случаевъ.

Пусть прежде всего системою (306) будетъ:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{k=n} (A_k - B_k u) \frac{d^{n-k} y}{du^{n-k}} + \sum_{k=0}^{k=q} (C_k - D_k u) \frac{d^{q-k} \eta}{du^{q-k}} = 0; \\
&\sum_{k=0}^{k=n'} (A'_k - B'_k u) \frac{d^{n'-k} y}{du^{n'-k}} + \sum_{k=0}^{k=q'} (C'_k - D'_k u) \frac{d^{q'-k} \eta}{du^{q'-k}} = 0.
\end{aligned} \tag{313}$$

Посредствомъ интеграловъ:

$$u_{xy} = \int_L (u-x)^{\lambda_1-1} (u-y)^{\lambda_2-1}\, y\, du;$$

(314)
$$v_{xy} = \int\limits_L (u-x)^{\lambda_1-1} (u-y)^{\lambda_2-1} \eta \, du$$

уравненія (313) преобразуются въ систему шести уравненій:

$$\sum_{k=0}^{k=n} \sum_{p=0}^{p=n-k} (-1)^k [n-k]_p \left[(A_k - B_k x) \frac{\partial^{n-k+1} u_{xy}}{\partial x^{n-k-p+1} \partial y^p} + \right.$$

$$\left. + (\lambda_1 - 1) B_k \frac{\partial^{n-k} u_{xy}}{\partial x^{n-k-p} \partial y^p} \right] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{k=n} \sum_{p=0}^{p=q-k} (-1)^k [q-k]_p \left[(C_k - D_k x) \frac{\partial^{q-k+1} v_{xy}}{\partial x^{b-k-p+1} \partial y^p} + \right.$$

$$\left. + (\lambda_1 - 1) D_k \frac{\partial^{q-k} v_{xy}}{\partial x^{q-k-p} \partial y^p} \right] = 0;$$

$$\sum_{k=0}^{k=n'} \sum_{p=0}^{p=n_1-k} (-1)^k [n'-k]_p \left[(A'_k - B'_k x) \frac{\partial^{n'-k+1} u_{xy}}{\partial x^{n'-k-p+1} \partial y^p} + \right.$$

$$\left. + (\lambda_1 - 1) B'_k \frac{\partial^{n'-k} v_{xy}}{\partial x^{n'-k-p} \partial y^p} \right] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{k=q'} \sum_{p=0}^{p=q'-k} (-1)^k [q'-k]_p \left[(C''_k - D'_k x) \frac{\partial^{q'-k+1} v_{xy}}{\partial x^{q'-k-p+1} \partial y^p} \right.$$

$$\left. + (\lambda_1 - 1) D'_k \frac{\partial^{q'-k} v_{xy}}{\partial x^{q'-k-p} \partial y^p} \right] = 0;$$

(314′)

$$\sum_{k=0}^{k=n} \sum_{p=0}^{p=n-k} (-1)^k [n-k]_p \left[(A_k - B_k y) \frac{\partial^{n-k+1} u_{xy}}{\partial y^{n-k-p+1} \partial x^p} + \right.$$

$$\left. + (\lambda_2 - 1) B_k \frac{\partial^{n-k} u_{xy}}{\partial y^{n-k-p} \partial x^p} \right] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{k=q} \sum_{p=0}^{p=q-k} (-1)^k [q-k)_p \left[(C_k - D_k y) \frac{\partial^{q-k+1} v_{xy}}{\partial y^{q-k-p+1} \partial x^q} + \right.$$

$$\left. + (\lambda_2 - 1) D_k \frac{\partial^{q-k} v_{xy}}{\partial y^{q-k-p} \partial x^p} \right] = 0;$$

$$\sum_{k=0}^{k=n'} \sum_{p=0}^{p=n'-k} (-1)^k [n'-k]_p \Big[(A'_k - B'_k\, y) \frac{\partial^{n'-k+1} u_{xy}}{\partial y^{n'-k-p} \partial x^p} +$$

$$+ (\lambda_2 - 1) B'_k \frac{\partial^{n'-k} v_{xy}}{\partial y^{n'-k-p} \partial x^p} \Big] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{k=q'} \sum_{p=0}^{p=q'-k} (-1)^k [q'-k]_p \Big[(C''_k - D'_k\, y) \frac{\partial^{q'-k+1} v_{xy}}{\partial y^{q'-k-p+1} \partial x^p} +$$

$$+ (\lambda_2 - 1) D'_k \frac{\partial^{q'-k} v_{xy}}{\partial y^{q'-k-p} \partial x^p} \Big] = 0;$$

$$(x-y) \frac{\partial^2 u_{xy}}{\partial x \partial y} + (\lambda_2 - 1) \frac{\partial u_{xy}}{\partial x} + (1-\lambda_1) \frac{\partial u_{xy}}{\partial y} = 0;$$

$$(x-y) \frac{\partial^2 v_{xy}}{\partial x \partial y} + (\lambda_2 - 1) \frac{\partial v_{xy}}{\partial x} + (\psi-\lambda_1) \frac{\partial v_{xy}}{\partial y} = 0.$$

Система (313) при помощи интеграловъ:

$$y = \int_{L'} e^{uv_1} f_1(v_1)\, dv_1;$$

$$\eta = \int_{L'} e^{uv_1} f_2(v_1)\, dv_1 \tag{315}$$

сводится къ системѣ двухъ линейныхъ уравненій перваго порядка однородной формы съ раціональными коэффиціентами. Значитъ, къ этой послѣдней преобразуются уравненія (314′) посредствомъ двукратныхъ интеграловъ:

$$u_{xy} = \int_L (u-x)^{\lambda_1-1} (u-y)^{\lambda_2-1} du \int_{L'} e^{uv_1} f_1(v_1)\, dv_1;$$

$$v_{xy} = \int_L (u-x)^{\lambda_1-1} (u-y)^{\lambda_2-1} du \int_{L'} e^{uv_1} f_2(v)\, dv_1.$$

Положимъ, что система (306) имѣетъ составъ:

$$\varphi_1(u) \frac{dy}{du} + \theta_1(u) \frac{d\eta}{du} + \varphi_2(u) y + \theta_2(u) \eta = 0; \tag{317}$$

$$\psi_1(u)\frac{dy}{du} + \chi_1(u)\frac{d\eta}{du} + \psi_2(u)y + \chi_2(u)\eta = 0;$$

при чемъ степени полиномовъ $\varphi_1(u)$, $\theta_1(u)$, $\varphi_2(u)$, $\theta_2(u)$, $\psi_1(u)$, $\chi_1(u)$, $\psi_2(u)$ и $f_2(u)$ соотвѣтственно суть: n, m, n', m', p, q, p' и q'.

Обозначимъ далѣе наибольшее изъ чиселъ: n, m, n' и m' чрезъ α, а наибольшее изъ чиселъ: p, q, p' и q' чрезъ β_1.

Тогда система (317) при помощи интеграловъ (314) преобразуется въ слѣдующую систему шести уравненій:

$$\sum_{k=0}^{k=n}\frac{(-1)^k\varphi_1^{(k)}(x)}{k!(\lambda_1-1)_{\alpha_1-k}}\left[\frac{\partial^{\alpha_1-k+1}u_{xy}}{\partial x^{\alpha_1-k+1}}+\frac{\partial^{\alpha_1-k+1}u_{xy}}{\partial x^{\alpha_1-k}\partial y}\right]+$$

$$+\sum_{k=0}^{k=m}\frac{(-1)^k\theta_1^{(k)}(x)}{k!(\lambda_1-1)_{\alpha_1-k}}\left[\frac{\partial^{\alpha_1-k+1}v_{xy}}{\partial x^{\alpha_1-k+1}}+\frac{\partial^{\alpha_1-k+1}v_{xy}}{\partial x^{\alpha_1-k}\partial y}\right]+$$

$$\sum_{k=0}^{k=n'}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\varphi_2^{(k)}(x)}{(\lambda_1-1)_{\alpha_1-k}}\frac{\partial^{\alpha_1-k}u_{xy}}{\partial x^{\alpha_1-k}}+$$

$$+\sum_{k=0}^{k=m'}\frac{(-1)^k\theta_2^{(k)}(x)}{k!(\lambda_1-1)_{\alpha_1-k}}\frac{\partial^{\alpha_1-k}v_{xy}}{\partial x^{\alpha_1-k}}=0;$$

$$\sum_{k=0}^{k=p}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\psi_1^{(k)}(x)}{(\lambda_1-1)_{\beta_1-k}}\left[\frac{\partial^{\beta_1-k+1}u_{xy}}{\partial x^{\beta_1-k+1}}+\frac{\partial^{\beta_1-k+1}u_{xy}}{\partial x^{\beta_1-k}\partial y}\right]+$$

$$+\sum_{k=0}^{k=q}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\chi_1^{(k)}(x)}{(\lambda_1-1)_{\beta_1-k}}\left[\frac{\partial^{\beta_1-k+1}v_{xy}}{\partial x^{\beta_1-k+1}}+\frac{\partial^{\beta_1-k+1}v_{xy}}{\partial x^{\beta_1-k}\partial y}\right]+$$

$$+\sum_{k=0}^{k=p'}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\psi_2^{(k)}(x)}{(\lambda_1-1)_{\beta_1-k}}\frac{\partial^{\beta_1-k}u_{xy}}{\partial x^{\beta_1-k}}+$$

$$+\sum_{k=0}^{k=q'}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\chi_2^{(k)}(x)}{(\lambda_1-1)_{\beta_1-k}}\frac{\partial^{\beta_1-k}v_{xy}}{\partial x^{\beta_1-k}}=0;$$

$$\sum_{k=0}^{k=n}\frac{(-1)^k\varphi_1^{(k)}(y)}{k!(\lambda_1-1)_{\alpha_1-k}}\left[\frac{\partial^{\alpha_1-k+1}u_{xy}}{\partial y^{\alpha_1-k+1}}+\frac{\partial^{\alpha_1-k+1}u_{xy}}{\partial y^{\alpha_1-k}\partial x}\right]+$$

(318)

$$+\sum_{k=0}^{k=m}\frac{(-1)^k\theta_1^{(k)}(y)}{k!(\lambda_1-1)_{\alpha_1-k}}\left[\frac{\partial^{\alpha_1-k+1}v_{xy}}{\partial y^{\alpha_1-k+1}}+\frac{\partial^{\alpha_1-k+1}v_{xy}}{\partial y^{\alpha_1-k}\partial x}\right]+$$

$$+\sum_{k=0}^{k=n'}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\varphi_2^{(k)}(y)}{(\lambda_1-1)_{\alpha_1-k}}\frac{\partial^{\alpha_1-k}u_{xy}}{\partial y^{\alpha_1-k}}+$$

$$+\sum_{k=0}^{k=m'} \frac{(-1)^k\,\theta_2^{(k)}(y)}{k!\,(\lambda_1-1)_{\alpha_1-k}}\,\frac{\partial^{\alpha_1-k} v_{xy}}{\partial y^{\alpha_1-k}}=0;$$

$$\sum_{k=0}^{k=p} \frac{(-1)^k}{k!}\,\frac{\psi_1(y)}{(\lambda_1-1)_{\beta_1-k}}\left[\frac{\partial^{\beta_1-k+1}u_{xy}}{\partial y^{\beta_1-k+1}}+\frac{\partial^{\beta_1-k+1}u_{xy}}{\partial y^{\beta_1-k}\partial x}\right]+$$

$$+\sum_{k=0}^{k=q} \frac{(-1)^k}{k!}\,\frac{\chi_1^{(k)}(y)}{(\lambda_1-1)_{\beta_1-k}}\left[\frac{\partial^{\beta_1-k+1}v_{xy}}{\partial y^{\beta_1-k+1}}+\frac{\partial^{\beta_1-k+1}v_{xy}}{\partial y^{\beta_1-k}\partial x}\right]+$$

$$+\sum_{k=0}^{k=p'} \frac{(-1)^k}{k!}\,\frac{\psi_2^{(k)}(y)}{(\lambda_1-1)_{\beta_1-k}}\,\frac{\partial^{\beta_1-k}u_{xy}}{\partial y^{\beta_1-k}}+$$

$$+\sum_{k=0}^{k=q'} \frac{(-1)^k}{k!}\,\frac{\chi_2^{(k)}(y)}{(\lambda_1-1)_{\beta_1-k}}\,\frac{\partial^{\beta_1-k}v_{xy}}{\partial y^{\beta_1-k}}=0.$$

$$(x-y)\,\frac{\partial^2 u_{xy}}{\partial x\partial y}+(\lambda_2-1)\,\frac{\partial u_{xy}}{\partial x}+(1-\lambda_2)\,\frac{\partial u_{xy}}{\partial y}=0;$$

$$(x-y)\,\frac{\partial^2 v_{xy}}{\partial x\partial y}+(\lambda_2-1)\,\frac{\partial v_{xy}}{\partial x}+(1-\lambda_1)\,\frac{\partial v_{xy}}{\partial y}=0.$$

ГЛАВА VI.

Приложеніе метода опредѣленныхъ интеграловъ къ линейнымъ дифференціальнымъ, разностнымъ, смѣшаннымъ и особаго типа функціональнымъ уравненіямъ съ постоянными коэффиціентами со многими независимыми перемѣнными. Условіе совмѣстнаго существованія нѣсколькихъ уравненій каждаго означеннаго рода, содержащихъ одну искомую функцію.

Примѣненіе метода опредѣленныхъ интеграловъ къ линейнымъ дифференціальнымъ, разностнымъ и смѣшаннымъ уравненіямъ со многими независимыми перемѣнными, коэффиціенты которыхъ суть цѣлыя алгебраическія функціи.

Приложеніе метода опредѣленныхъ интеграловъ къ нѣкоторымъ разностнымъ уравненіямъ со многими независимыми перемѣнными, коэффиціенты которыхъ зависятъ отъ трансцендентныхъ и числовыхъ функцій.

Линейныя функціональныя уравненія особаго типа съ однимъ и многими независимыми перемѣнными, которыя интегрируются посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ.

Условіе совмѣстнаго существованія уравненій каждаго означеннаго рода, содержащихъ одну искомую функцію.

Интегрированіе нѣкоторыхъ оперативныхъ уравненій.

§ 1.

Въ настоящемъ параграфѣ мы будемъ пользоваться интегралами слѣдующихъ типовъ:

$$\int\limits_{L_1} \varphi_1(u_1 x_1)\,du_1 \int\limits_{L_1} \varphi_1(u_2 x_2)\,du_2 \cdots \tag{1}$$

$$\cdots \int\limits_{L_m} \varphi_m(u_m x_m)\, \theta(u_1, u_2, \cdots, u_m, x_1, x_2, \cdots, x_m)\,du_m;$$

$$\int\limits_{L_1} f_1(u_1 - x_1)\,du_1 \int\limits_{L_1} (u_2 - x_2)\,du_2 \cdots \tag{2}$$

$$\cdots \int\limits_{L_m} f_m(u_m - x_m)\, \theta(u_1, u_2, \cdots, u_m)\,du_m,$$

гдѣ L_1, L_2, $\cdots$, L_m суть дозволенные пути.

Мы не станемъ входить здѣсь въ разработку этихъ интеграловъ,— это мы сдѣлаемъ во второй части своей работы. Тутъ же мы замѣтимъ, что дифференцированіе любого изъ этихъ интеграловъ по x_k сводится къ дифференцированію подъинтегральной функціи, содержащей это перемѣнное.

Обратимъ предварительное вниманіе на уравненіе Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{3}$$

Станемъ искать интегралъ его въ формѣ:

$$u = \int\limits_{L_1} f_1(v_1 - x)\,dv_1 \int\limits_{L_2} f_2(v_2 - y)\, \varphi(v_1, v_2)\,dv_2, \tag{4}$$

гдѣ составъ функцій $f_1(v_1 - x)$ и $f_2(v_2 - y)$ таковъ, что представляется возможность выбора дозволенныхъ путей L_1 и L_2.

Внеся выраженіе (4) въ уравненіе (3), послѣ интеграціи по частямъ получимъ:

$$\int\limits_{L_1} f_1(v_1 - x)\,dv_1 \int\limits_{L_2} f_2(v_2 - y) \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v_2^2} \right] dv_2 = 0. \tag{5}$$

Отсюда для опредѣленія $\varphi(v_1, v_2)$ находимъ условіе:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial {v_1}^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial {v_2}^2} = 0. \tag{6}$$

При такомъ выборѣ $\varphi(v_1, v_2)$. выраженіе (4) представляетъ интегралъ уравненія (3).

Примѣръ I. Положимъ:

$$\begin{aligned} f_1(v_1 - x) &= (v_1 - x)^{\lambda_1 - 1}; \\ f_2(v_2 - y) &= (v_2 - y)^{\lambda_2 - 1}; \\ \varphi(v_1, v_2) &= \frac{1}{v_2 - iv_1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Будемъ имѣть:

$$u = \int_{L_1} (v_1 - x)^{\lambda_1 - 1} dv_1 \int_{L_2} (v_2 - y)^{\lambda_2 - 1} \frac{dv_2}{v_2 - iv_1}. \tag{8}$$

Очевидно, что

$$L_2 = (y\, i v_1\, \overline{y}\, \overline{iv_1}). \tag{9}$$

Получимъ:

$$u = 2\pi i^{\lambda_2} (e^{2\pi\lambda_2 i} - 1) \int_{c_1}^{(x\, \zeta\, \overline{x}\, \overline{\zeta})} (v - \zeta)^{\lambda_2 - 1} (v - x)^{\lambda_1 - 1} dv_1, \tag{10}$$

гдѣ положено:

$$\zeta = -iy. \tag{11}$$

Выполняя интеграцію, находимъ:

$$u = 2\pi(-1)^{\lambda_1} i^{\lambda_2} e^{\pi(\lambda_1 + \lambda_2)i} (1 - e^{2\pi\lambda_2 i}) \overline{E}(\lambda_1, \lambda_2) (x + iy)^{\lambda_1 + \lambda_2 - 1}. \tag{12}$$

Примѣръ II. Допустимъ, что

$$\begin{aligned} f_1(v_1 - x) &= [lg(v_1 - x)]^p; \\ f_2(v_2 - y) &= [lg(v_2 - y)]^q, \end{aligned}$$

а $\varphi(v_1, v_2)$ имѣетъ составъ (7).

Имѣемъ:

$$u = \int\limits_{L_1} [lg(v_1 - x)]^p \, dv_1 \int\limits_{L_2} [lg(v_2 - y)]^q \, \frac{dv_2}{v_2 - iv_1} =$$

$$(13) \qquad = \int\limits_{L_1} [lg(v_1 - x)]^p \, dv_1 \int\limits_{c}^{(y\, i\, v_1\, \overline{y\, i\, v_1})} [lg(v_2 - y)]^q \, \frac{dv_2}{v_2 - iv_1} +$$

$$= 2\pi i \int\limits_{L_1} [lg(v_1 - x)]^p \left\{ [lg(iv_1 - y) + 2\pi i]^q - [lg(iv_1 - y)]^q \right\} dv_1.$$

Разсмотримъ далѣе уравненіе:

$$(14) \qquad \sum_{p=0}^{p=n} \sum_{k=0}^{k=p} A_{kp} \frac{\partial^p u}{\partial x^{p-k} \partial y^k} = 0,$$

гдѣ A_{kp} постоянное.

Если въ это соотношеніе (14) внесемъ выраженіе (4) и въ полученномъ результатѣ произведемъ интеграцію по частямъ, то найдемъ:

$$(15) \qquad \int\limits_{L_1} f_1(v_1 - x) \, dv_1 \int\limits_{L_2} f_2(v_2 - y) \left[\sum_{p=0}^{p=n} \sum_{k=0}^{k=p} A_{kp} \frac{\partial^p \varphi}{\partial v_1^{p-k} \partial v_2^k} \right] dv_2 = 0.$$

Значитъ, для $\varphi(v_1, v_2)$ имѣемъ условіе:

$$(16) \qquad \sum_{p=0}^{p=n} \sum_{k=o}^{k=p} A_{kp} \frac{\partial^p \varphi}{\partial v_1^{p-k} \partial v_2^k} = 0.$$

При такомъ выборѣ $\varphi(v_1, v_2)$, интегралъ (4) удовлетворяетъ уравненію (14).

Оперируя надъ уравненіемъ (16) такимъ же образомъ, какъ это мы дѣлали съ уравненіемъ (14), получимъ новый интегралъ уравненія (14) въ формѣ:

$$(17) \qquad u = \int\limits_{L_1} f_1(v_1 - x) \, dv_1 \int\limits_{L_2} f_2(v_2 - y) \, dv_2 \int\limits_{L_3} f_3(v_3 - v_1) \, dv_3 \int\limits_{L_4} f_4(v_4 - v_2) \cdot$$

$$\cdot \, \varphi_1(v_3, v_4) \, dv_4,$$

гдѣ $\varphi_1(v_3, v_4)$ представляетъ интегралъ уравненія:

$$(18) \qquad \sum_{p=0}^{p=n} \sum_{k=0}^{k=p} A_{pk} \frac{\partial^p \varphi_1}{\partial v_3^{p-k} \, \partial v_4^k} = 0.$$

Этотъ процессъ можно неопредѣленно продолжить; такъ что можно получить безграничный рядъ интеграловъ уравненія (14).

Очевидно, что тотъ же пріемъ примѣняется и къ уравненію вида (14) съ m независимыми перемѣнными.

Мы пользовались интегралами вида (2). Но и интегралы вида (1) могутъ служить для той же цѣли.

Пусть дано уравненіе:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{19}$$

Поищемъ интегралъ его въ формѣ:

$$u =$$

$$= \int\limits_{L_1} e^{v_1 x}\, dv_1 \int\limits_{L_2} e^{v_2 y}\, dv_2 \int\limits_{L_3} e^{v_3 z}\, \theta(v_1, v_2, v_3, x)\, dv_3, \tag{20}$$

который, очевидно, представляетъ частный случай интеграла (1).

Внеся выраженіе (20) въ соотношеніе (19), будемъ имѣть:

$$\int\limits_{L_1} e^{v_1 x}\, dv_1 \int\limits_{L_2} e^{v_2 y}\, dv_2 \int\limits_{L_3} e^{v_3 z} \Big[(v_1{}^2 + v_2{}^2 + v_3{}^2)\theta +$$

$$+ 2v_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\Big] dv_3 = 0. \tag{21}$$

Отсюда для $\theta(v_1, v_2, v_3, x)$ находимъ уравненіе:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 2v_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} + (v_1{}^2 + v_2{}^2 + v_3{}^2)\,\theta = 0. \tag{22}$$

Общій интегралъ этого уравненія можно написать въ формѣ:

$$\theta(v_1, v_2, x) =$$

$$= \Phi_1(v_1, v_2, v_3)\, e^{-v_1 x + i\sqrt{v_2{}^2 + v_3{}^2}\, x} +$$

$$+ \Phi_2(v_1, v_2, v_3)\, e^{-v_1 x - i\sqrt{v_2{}^2 + v_3{}^2}\, x}, \tag{23}$$

гдѣ $\Phi_1(v_1, v_2, v_3)$ и $\Phi_2(v_1, v_2, v_3)$ суть произвольныя функціи перемѣнныхъ v_1, v_2 и v_3.

Искомый интегралъ уравненія (19) напишется тогда слѣдующимъ образомъ:

$$u =$$

(24) $$= \int_{L_1} dv_1 \int_{L_2} e^{v_2 y}\, dv_2 \int_{L_3} e^{v_3 z + i\sqrt{v_2^2+v_3^2}\,x}\, \Phi_1(v_1, v_2, v_3)\, dv_3 +$$

$$+ \int_{L_1'} dv_1 \int_{L_2'} e^{v_1 y}\, dv_2 \int_{L_3'} e^{v_3 z - i\sqrt{v_2^2+v_3^2}\,x}\, \Phi_2(v_1, v_2, v_3)\, dv_3,$$

или:

$$u =$$

$$= \int_{L_1} dv_1 \int_{L_2} e^{v_2 y}\, dv_2 \int_{L_3} e^{v_3 z}\, cs\, (\sqrt{v_2^2+v_3^2})\, x\, \chi_1(v_1, v_2, v_3)\, dv_3 +$$

(25) $$+ \int_{L_1'} dv_1 \int_{L_2'} e^{v_2 y}\, dv_2 \int_{L_3'} e^{v_3 z}\, sn\, (\sqrt{v_2^2+v_3^2})\, x\, \chi_2(v_1, v_2\ v_3)\, dv_3,$$

гдѣ $\chi_1(v_1, v_2, v_2)$ и $\chi_2(v_1, v_2, v_3)$ суть произвольныя функціи перемѣнныхъ v_1, v_2, и v_3.

Примѣръ III. Пусть будутъ:

(26) $$\chi_2(v_1, v_2, v_3) = 0;$$

$$\chi_1(v_1, v_2, v_3) = \frac{e^{v_1}}{(v_1 - a)(v_2 - b)(v_3 - c)},$$

Выраженіе (25) приметъ видъ:

$$u =$$

$$= \int_{L_1} e^{v_1} \frac{dv_1}{v_1 - a} \int_{L_2} e^{v_2 y} \frac{dv_2}{v_2 - b} \int_{L_3} e^{v_3 z} \frac{cs(\sqrt{v_2^2 + v_3^2})\, x}{v_3 - c}\, dv_3 =$$

(27) $$= 2\pi i\, e^{cz} \int_{L_1} e^{v_1} \frac{dv_1}{v_1 - a} \int_{L_2} e^{v_2 y} \frac{cs(\sqrt{v_2^2 + c^2})\, x}{v_2 - b}\, dv_2 =$$

$$= (2\pi i)^3\, e^{a + by + cz}\, cs(\sqrt{b^2 + c^2})\, x\,.$$

Тотъ же пріемъ примѣняется и къ уравненію (14).

Въ самомъ дѣлѣ, внеся въ него выраженіе:

$$u = \int\limits_{L_1} e^{c_1 x}\, dv_1 \int\limits_{\Lambda} e^{c_2 y}\, \theta(v_1, v_2, x)\, dv_2, \tag{28}$$

послѣ интеграціи по частямъ получимъ:

$$\int\limits_{L_1} e^{c_1 x}\, dv_1 \int\limits_{\Lambda} e^{c_2 y} \left[\sum_{p=0}^{p=n} \sum_{k=0}^{k=p} \sum_{q=0}^{q=p-k} [p-k]_q\, A_{kp}\, v_1^{\,p-k-q}\, v_2^{\,k}\, \frac{\partial^q \theta}{\partial x^q} \right] dv_2 = 0. \tag{29}$$

Для опредѣленія θ имѣемъ, слѣдовательно, уравненіе:

$$\sum_{p=0}^{p=n} \sum_{k=0}^{k=p} \sum_{q=0}^{q=p-k} [p-k]_q\, A_{kp}\, v_1^{\,p-k-q}\, v_2^{\,k}\, \frac{\partial^q \theta}{\partial x^q} = 0. \tag{30}$$

Общій интегралъ этого уравненія (30) можно написать въ формѣ:

$$\theta(v_1, v_2, x) = \Phi_1(v_1, v_2)\, e^{\alpha_1 x} + \Phi_2(v_1, v_2)\, e^{\alpha_2 x} + \cdots$$
$$\cdots + \Phi_n(v_1, v_2)\, e^{\alpha_n x}, \tag{31}$$

гдѣ $\Phi_1(v_1, v_2)$, $\Phi_2(v_1, v_2)$, $\cdots$, $\Phi_n(v_1, v_2)$ суть произвольныя функціи аргументовъ v_1 и v_2, а α_1, α_2, α_3, $\cdots$, α_n корни уравненія:

$$\sum_{p=0}^{p=n} \sum_{k=0}^{k=p} \sum_{q=0}^{q=p-k} A_{kp}\, [p-k]_q\, v_1^{\,p-k-q}\, v_2^{\,k}\, \alpha^q = 0. \tag{32}$$

Искомый интегралъ уравненія (14) напишется такъ:

$$u = \sum_{k=1}^{k=n} \int\limits_{L_k} e^{c_1 x}\, dv_1 \int\limits_{\Lambda_k} e^{c_2 y + \alpha_k x}\, \Phi_k(v_1, v_2)\, dv_2. \tag{33}$$

Посмотримъ теперь, въ какомъ случаѣ совмѣстны уравненія:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{p=0}^{p=n} \sum_{k=0}^{k=p} A_{kp} \frac{\partial^p u}{\partial x^{p-k}\, \partial y^k} = 0; \\ &\sum_{p=0}^{p=m} \sum_{k=0}^{k=p} A_{kp} \frac{\partial^p u}{\partial x^{p-k}\, \partial y^k} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Ища интегралъ этой системы въ формѣ (28), для $\theta(v_1, v_2, x)$ находимъ слѣдующія уравненія:

$$(35)\qquad \begin{aligned} &\sum_{p=0}^{p=n}\sum_{k=0}^{k=p} A_{kp}\, v_2^k \sum_{q=0}^{q=p-k} [p-k]_q\, v_1^{p-k-q} \frac{\partial^q \theta}{\partial x^q} = 0. \\ &\sum_{p=0}^{p=m}\sum_{k=0}^{k=p} B_{kp}\, v_2^k \sum_{q=0}^{q=p-k} [p-q]_q\, v_1^{p-k-q} \frac{\partial^q \theta}{\partial x^q} = 0. \end{aligned}$$

Полагая

$$(36)\qquad \theta(v_1, v_2, x) = e^{\alpha x},$$

будемъ имѣть для опредѣленія α уравненія:

$$(37)\qquad \begin{aligned} &\sum_{p=0}^{p=n}\sum_{k=0}^{k=p}\sum_{q=0}^{q=p-k} A_{kp}\,[p-k]_q\, v_1^{p-k-q}\, v_2^k\, \alpha^q = 0; \\ &\sum_{p=0}^{p=m}\sum_{k=0}^{k=p}\sum_{q=0}^{q=p-k} B_{kp}\,[p-k]_q\, v_1^{p-k-q}\, v_2^k\, \alpha^q = 0. \end{aligned}$$

Мы убѣждаемся такимъ образомъ, что совмѣстное существованіе дифференціальныхъ уравненій (34) обусловливается совмѣстностью алгебраическихъ уравненій (37).

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_t$ исчерпываютъ общіе корни этихъ послѣднихъ. Тогда самое общее рѣшеніе, опредѣляемое по нашему пріему, будетъ слѣдующее:

$$(38)\qquad u = \sum_{p=1}^{p=t} \int_{L_k} e^{c_1 x} dv_1 \int_{\Lambda_k} e^{c_2 y + \alpha_p x} \Phi_p(v_1, v_2)\, dv_2 .$$

Очевидно, что тотъ же пріемъ примѣняется и къ случаю уравненій вида (33) съ m независимыми перемѣнными.

§ 2.

Здѣсь мы займемся предварительно примѣненіемъ интеграловъ вида:

$$U_{x_1, x_2, \cdots x_m} =$$

$$(39)\qquad = \int_{L_1} u_1^{x_1-1}\, du_1 \int_{L_2} u_2^{x_2-1}\, du_2 \cdots \int_{L_m} u_m^{x_m-1} f(u_1, u_2, \cdots, u_m)\, du_m,$$

гдѣ L_1, L_2, $\cdots$, L_m суть дозволенные пути, для интегрированія линейныхъ уравненій въ частныхъ разностяхъ съ постоянными коэффиціентами.

Замѣтимъ, что интегралами этого типа въ иныхъ случаяхъ пользовался Hj. Mellin въ своей статьѣ: „Zur Theorie zweier allgemeinen Klassen bestimmter Integrale“ [1]).

Разсмотримъ прежде всего уравненіе:

$$U_{x+2,y}+U_{x,y+2}=0. \tag{40}$$

Поищемъ интегралъ его въ формѣ:

$$U_{x,y}=\int\limits_{L_1} u_1^{x-1}\,du\int\limits_{L_2} u_2^{y-1}\,\varphi(u_1,u_2,x)\,du_2. \tag{41}$$

Внеся выраженіе (41) въ уравненіе (40), будемъ имѣть:

$$\int\limits_{L_1} u_1^{x-1}\,du_1\int\limits_{L_2} u_2^{y-1}\left[u_1^2\,\varphi(u_1,u_2,x+2)+u_2^2\,\varphi(u_1,u_2,x)\right]du_2=0. \tag{42}$$

Для опредѣленія $\varphi(u_1, u_2, x)$, значитъ, находимъ условіе:

$$u_1^2\,\varphi(u_1,u_2,x+2)+u_2^2\varphi(u_1,u_2,x)=0. \tag{43}$$

Общій интегралъ уравненія (43) можетъ быть представленъ въ формѣ:

$$\varphi(u_1,u_2,x)=$$

$$=\varphi_1(u_1,u_2,x)\,a_1^x+\varphi_2(u_1,u_2,x)\,a_2^x. \tag{44}$$

Замѣтимъ, что $\varphi_1(u_1, u_2, x)$ и $\varphi_2(u_1, u_2, x)$ представляютъ произвольныя періодическія функціи отъ x съ періодомъ единица и совершенно произвольно зависятъ отъ u_1 и u_2. Что же касается до a_1 и a_2, то это корни уравненія:

$$a^2u_1^2+u_2^2=0. \tag{45}$$

---

[1]) Acta Societatis Fennicae, t. XXII, № 2. 1897. s. 3—75.

Искомый интегралъ уравненія (40), значитъ, напишется такъ:

$$U_{x,y}=$$

(46)
$$= \int_{L_1} u_1^{-1} du_1 \int_{L_1} u_2^{y-1} (iu_2)^x \varphi_1(u_1, u_2, x)\, du_2 +$$

$$+ \int_{L_1'} u_1^{-1} du_1 \int_{L_1'} u_2^{y-1} (-iu_2)^x \varphi_2(u_1, u_2, x)\, du_2.$$

Такимъ же путемъ находимъ интегралъ уравненія:

(47)
$$U_{x+2,y,z} + U_{x,y+2,z} + U_{x,y,z+2} = 0$$

въ формѣ:

$$U_{x,y,z} =$$

(48)
$$= \int_{\Lambda_1} u_1^{-1} du_1 \int_{\Lambda_2} u_2^{y-1}\, du_2 \int_{\Lambda_3} u_3^{z-1} \left(i\sqrt{u_2^2+u_3^2}\right)^x \varphi_1(u_1, u_1, u_3, x)\, du_3 +$$

$$+ \int_{\Lambda_1'} u_1^{-1}\, du_1 \int_{\Lambda_1'} u_2^{y-1}\, du_2 \int_{\Lambda_3'} u_3^{z-1} \left(-i\sqrt{u_2^2+u_3^2}\right)^x \varphi_2(u_1, u_2, u_3, x)\, du_3,$$

гдѣ $\varphi_1(u_1, u_2, u_3, x)$ и $\varphi_2(u_1, u_2, u_3, x)$ представляютъ произвольныя функціи u_1, u_2 и u_3 и произвольныя періодическія функціи x съ періодомъ единица.

Примѣръ. Положимъ:

(49)
$$\varphi_2(u_1, u_2, u_3, x) = 0;$$
$$\varphi_1(u_1, u_2, u_3, x) = \frac{(u_1-a)^m}{(u_2-b)(u_3-c)},$$

гдѣ a, b, c и m суть нѣкоторыя постоянныя; при чемъ, послѣднее отлично отъ цѣлаго числа или нуля.

Имѣемъ:

$$U_{x,y,z} =$$

$$= \int_{\Lambda_1} u_1^{-1}(u_1-a)^m du_1 \int_{\Lambda_2} u_2^{y-1} \frac{du_2}{u_2-b} \int_{\Lambda_3} u_3^{z-1} \frac{\left(i\sqrt{u_2^2+u_3^2}\right)^x}{u_3-c}\, du_3 =$$

$$= (2\pi i)^2 (e^{2\pi zi} - 1)(e^{2\pi yi} - 1)\, i^x b^{y-1} c^{z-1} (\sqrt{b^2+c^2})^x \int\limits_{\Lambda_1} u_1^{-1} (u_1 - a)^m du_1 =$$

$$= (2\pi i)^3 (-a)^m (1 - e^{2\pi mi})\, e^{2\pi zi} - 1)(e^{2\pi yi} - 1)\, i^x b^{y-1} c^{z-1} (\sqrt{b^2+c^2})^x. \qquad (50)$$

Далѣе, интеграломъ уравненія:

$$\sum_{p=0}^{p=n} \sum_{k=0}^{k=p} A_{kp}\, U_{x+p-k,\, y+k} = 0, \qquad (51)$$

гдѣ A_{kp} постоянное, будетъ:

$$U_{x,y} =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} \int\limits_{L_k} u_1^{x-1} du_1 \int\limits_{\Lambda_k} u_2^{y-1} \beta_k^x\, \vartheta_k(u_1, u_2, x)\, du_2, \qquad (52)$$

гдѣ $\vartheta_k(u_1, u_2, x)$ произвольная функція u_1 и u_2 и произвольная періодическая функція x съ періодомъ единица, а $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ представляютъ корни уравненія:

$$\sum_{p=0}^{p=m} \sum_{k=0}^{k=p} A_{kp}\, u_1^{p-k} u_2^k \beta^{p-k} = 0. \qquad (53)$$

Тотъ же пріемъ примѣняется и къ случаю уравненія вида (51), содержащаго m независимыхъ перемѣнныхъ.

Остановимся теперь на смѣшанномъ уравненіи съ постоянными коэффиціентами:

$$\sum_{p=0}^{p=n} \sum_{k=0}^{k=p} \sum_{p_1=0}^{p_1=m} \sum_{k_1=0}^{k_1=p_1} A_{kpk_1p_1} \frac{\partial^{p_1} U_{x+p-k,\, y+k}}{\partial x^{p_1-k_1} \partial y^{k_1}} = 0. \qquad (54)$$

Внеся выраженіе (41) для $U_{x,y}$ въ это уравненіе, будемъ имѣть:

$$\int\limits_{L_1} u_1^{x-1} du_1 \int\limits_{L_2} u_2^{y-1} \Bigg\{ \sum_{p=0}^{p=n} \sum_{k=0}^{k=p} \sum_{p_1=0}^{p_1=m} \sum_{k_1=0}^{k_1=p_1} \sum_{q=0}^{q=p_1-k_1} A_{kpk_1p_1} [p_1 - k_1]_q\, u_1^{p-k} \qquad (55)$$

$$[\ (lgu_1)^{p_1-k_1-q} u_2^k (lgu_2)^{k_1} \frac{\partial^q \varphi(u_1, u_2\, x+p-k)}{\partial x^q} \Bigg\} du_2 = 0.$$

Значитъ, для опредѣленія $\varphi(u_1, u_2, x)$ имѣемъ уравненіе:

$$\sum_{p=0}^{p=n}\sum_{k=0}^{k=p}\sum_{p_1=0}^{p_1=m}\sum_{k_1=0}^{k_1=p_1}\sum_{q=0}^{q=p_1-k_1} A_{kpk_1p_1}\,[p_1-k_1]_q\, u_1^{p-k}(lgu_1)^{p_1-k_1-q}\, u_2^k \left[(lgu_2)^{k_1} \frac{\partial^q\varphi(u_1, u_2, x+p-k)}{\partial x^q} = 0. \right. \tag{56}$$

Ищемъ частное рѣшеніе его въ формѣ:

$$\varphi = a^x. \tag{57}$$

Тогда a будетъ связано соотношеніемъ:

$$\sum_{p=0}^{q=n}\sum_{k=0}^{k=p}\sum_{p_1=0}^{p_1=m}\sum_{k_1=0}^{k_1=p_1}\sum_{q=0}^{q=p_1-k_1} A_{kpk_1p_1}\,[p_1-k_1]_q\, u_1^{p-k}\,(lgu_1)^{p_1-k_1-q}\, u_2^k \left[(lgu_2)^{k_1}\, u^{p-k}\,(lga)^q = 0. \right. \tag{58}$$

Мы видимъ, что u опредѣляется изъ трансцендентнаго уравненія.

Пусть корни его будутъ:

$$a_1,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k,\ \cdots \tag{58'}$$

Тогда общій интегралъ уравненія (56) можетъ быть представленъ въ формѣ:

$$\varphi(u_1, u_2, x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \Phi_k(u_1, u_2)\, a_k^x\,, \tag{59}$$

гдѣ $\Phi_0(u_1, u_2)$, $\Phi_1(u_1, u_2)$, $\cdots$ представляютъ произвольныя функціи перемѣнныхъ u_1 и u_2, обезпечивающія возможность суммы безконечнаго числа слагаемыхъ.

Самое общее искомое рѣшеніе уравненія (54) по нашему пріему представится такъ:

$$U_{x,y} =$$

$$= \sum_{k=0}^{k=\infty} \int\limits_{L_k} u_1^{x-1}\, du_1 \int\limits_{\Lambda_k} u_2^{y-1}\, a_k^x\, \Phi_k(u_1, u_2)\, du_2. \tag{60}$$

Для примѣра возьмемъ уравненіе:

$$a\,\frac{\partial U_{x,y+1}}{\partial x} + b\,\frac{\partial U_{x+1,y}}{\partial y} + cU_{x+1,y+1} = 0, \tag{61}$$

гдѣ a, b, c суть постоянныя.

Уравненіе (58) приметъ тогда простой видъ:

$$(au_1)^{au_1}\, u_2^{abu_1}\, e^{cau_1u_2} = 1. \tag{61'}$$

Обратимъ теперь вниманіе на систему уравненій съ постоянными коэффиціентами:

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=0}^{p=n} \sum_{k=0}^{k=p} A_{kp}\, U_{x+p-k,\, y+k} = 0;\\
&\sum_{p=0}^{p=m} \sum_{k=0}^{k=p} B_{kp}\, U_{x+p-k,\, y+k} = 0.
\end{aligned} \tag{62}$$

Для рѣшенія вопроса, когда эти уравненія совмѣстны, поступаемъ слѣдующимъ образомъ.

Будемъ искать общій интегралъ уравненій (62) въ формѣ (41). Тогда для $\varphi(u_1, u_3, x)$ будемъ имѣть уравненія:

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=0}^{p=n} \sum_{k=0}^{k=p} A_{kp}\, u_1^{p-k}\, u_2^k\, \varphi(u_1, u_2, x+p-k) = 0;\\
&\sum_{p=0}^{p=m} \sum_{k=0}^{k=p} B_{kp}\, u_1^{p-k}\, u_2^k\, \varphi(u_1, u_2, x+p-k) = 0.
\end{aligned} \tag{63}$$

Ища частное общее рѣшеніе этихъ уравненій въ формѣ (57), будемъ имѣть для a уравненія:

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=0}^{p=n} \sum_{k=0}^{k=p} A_{kp}\, u_1^{p-k}\, u_2^k\, a^{p-k} = 0;\\
&\sum_{p=0}^{p=m} \sum_{k=0}^{k=p} B_{kp}\, u_1^{p-k}\, u_2^k\, a^{p-k} = 0.
\end{aligned} \tag{64}$$

Если эти послѣднія уравненія совмѣстны, то и уравненія (62) также совмѣстны.

Пусть общіе корни уравненій (64) будутъ: $a_1, a_2, \cdots, a_k$. Тогда общій интегралъ системы (62) напишется такъ:

$$U_{x,\,y} = \\ = \sum_{p=1}^{p=k} \int_{L_p} u_1^{x-1}\, du_1 \int_{\Lambda_p} u_2^{y-1}\, a_p^x\, \Phi_p(u_1, u_2, x)\, du_2, \tag{65}$$

гдѣ функціи $\Phi_1(u_1, u_2, x)$, $\Phi_2(u_1, u_2, x)$, $\cdots$, $\Phi_k(u_1, u_2, x)$ имѣютъ тотъ же смыслъ, какъ $\vartheta_1(u_1, u_2, x)$, $\vartheta_2(u_1, u_2, x)$, $\cdots$, $\vartheta_n(u_1, u_2, x)$ въ формулѣ (52).

Разсмотримъ еще слѣдующую систему уравненій:

$$(66)\quad \begin{cases} \sum_{p=0}^{p=n} \sum_{k=0}^{k=p} \sum_{p_1=0}^{p_1=m} \sum_{k_1=0}^{k_1=p_1} A_{kpk_1p_1} \dfrac{\partial^{p_1} u_{x+p-k,\,y+k}}{\partial x^{p_1-k_1}\,\partial y^{k_1}} = 0; \\ \sum_{p=0}^{p=n'} \sum_{k=0}^{k=p} \sum_{p_1=0}^{p_1=m'} \sum_{k_1=0}^{k_1=p_1} B_{kpk_1p_1} \dfrac{\partial^{p_1} u_{x+p-k,\,y+k}}{\partial x^{p_1-k_1}\,\partial y^{k_1}} = 0. \end{cases}$$

Ища общій интегралъ этихъ уравненій въ формѣ (41), совмѣстность ихъ сведемъ въ зависимость отъ совмѣстности соотношеній:

$$(67)\quad \begin{cases} \sum_{p=0}^{p=n} \sum_{k=0}^{k=p} \sum_{p_1=0}^{p_1=m} \sum_{k_1=0}^{k_1=p_1} \sum_{\delta=0}^{\delta=p_1-k_1} A_{kpk_1p_1} [p_1-k_1]_\delta\, u_1^{p-k} u_2^{k} (lgu_1)^{p_1-k_1-\delta} \\ \qquad\qquad (lgu_2)^{k_1} a^{p-k} (lga)^\delta = 0; \\ \sum_{p=0}^{p=n'} \sum_{k=0}^{k=p} \sum_{p_1=0}^{p_1=m'} \sum_{k_1=0}^{k_1=p_1} \sum_{\delta=0}^{\delta=p_1-k_1} B_{kpk_1p_1} [p_1-k_1]_\delta\, u_1^{p-k} u_2^{k} (lgu_1)^{p_1-k_1-\delta} \\ \qquad\qquad (lgu_2)^{k_1} a^{p-k} (lga)^\delta = 0. \end{cases}$$

Въ заключеніе настоящаго параграфа, разсмотримъ линейныя функціональныя уравненія особаго вида, которыя имѣютъ значеніе въ математикѣ. Рѣчь идетъ объ уравненіяхъ вида:

$$(68)\qquad A_0\, U_{c_0x,\,d_0y} + A_1\, U_{c_1x,\,d_1y} + \cdots + A_n\, U_{c_nx,\,d_ny} = 0,$$

гдѣ A_0, A_1, $\cdots$, A_n, c_0, c_1, c_2, $\cdots$, c_n, d_0, d_1, d_2, $\cdots$, d_n суть постоянныя.

Для отысканія функціи $U_{x,y}$, удовлетворяющей уравненію (68), воспользуемся интеграломъ:

$$(69)\qquad U_{x,y} = \int_L x^u\, du \int_\Lambda y^v f(u, v, x)\, du,$$

гдѣ L и Λ дозволенные пути, значеніе котораго для случая, когда f не зависитъ отъ x, въ теоріи линейныхъ уравненій съ частными конечными разностями такое [1]), какъ интеграла $\int\limits_L x^u f(u)\,du$ въ теоріи линейныхъ обыкновенныхъ разностныхъ уравненій [2]).

Внеся выраженіе (69) въ уравненіе (68), получимъ:

$$\int\limits_L x^u du \int\limits_\Lambda y^v [A_0 c_0^u d_0^v f(u,v,c_0 x) + A_1 c_1^u d_1^v f(u,v,c_1 x) + \cdots \\ \cdots + A_n c_n^u d_n^v f(u,v,c_n x)]\,dv = 0. \tag{70}$$

Отсюда для опредѣленія $f(u, v, x)$ находимъ условіе:

$$A_0 c_0^u d_0^v f(u,v,c_0 x) + A_1 c_1^u d_1^v f(u,v,c_1 x) + \cdots \\ \cdots + A_n c_n^u d_n^v f(u,v,c_n x) = 0. \tag{71}$$

Общее рѣшеніе этого уравненія (71) можно представить въ формѣ:

$$f(u,v,x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \Phi_k(u,v,x)\, x^{\alpha_k}, \tag{72}$$

гдѣ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_k, \cdots$ суть корни уравненія:

$$A_0 c_0^{u+\alpha} d_0^v + A_1 c_1^{u+\alpha} d_1^v + \cdots + A_n c_0^{u+\alpha} d_n^v = 0, \tag{73}$$

а $\Phi_k(u, v, x)$ есть функція произвольная относительно u и v, относительно же x удовлетворяющая условію:

$$\Phi_k(u,v,c_0 x) = \Phi_k(u,v,c_1 x) = \cdots = \Phi_k(u,v,x). \tag{74}$$

Искомое рѣшеніе уравненія (68) напишется слѣдующимъ образомъ:

$$U_{x,y} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \int\limits_{L_k} x^u du \int\limits_{\Lambda_k} y^v x^{\alpha_k} \Phi_k(u,v,x)\,dv. \tag{75}$$

---

[1]) *Hj. Mellin.* „Zur Theorie zweier allgemeinen Klassen bestimmter Integrale".

[2]) *Pincherle.* „Sopra una transformatione delle equazioni differentiali lineari in equazioni lineari alle differenze, e viceversa". Rend. del R. Ist. Lomb. Serie II. v. XIX. „Sulle funzione ipergeometriche generalizzate". *Hj. Mellin.* „Om definita integraler hwilka för obergränsadt växande värden etc."

Замѣтимъ, что годность суммы, состоящей изъ безконечнаго числа слагаемыхъ, обезпечивается насчетъ произвольныхъ функцій.

Легко рѣшить теперь вопросъ о совмѣстности уравненій:

$$
(76)\quad
\begin{aligned}
&A_0\, U_{c_0 x,\, d_0 y} + A_1\, U_{c_1 x,\, d_1 y} + \cdots + A\ \ U_{c_n x,\, d_n y} = 0;\\
&B_0\, U_{c'_0 x,\, d'_0 y} + B_1\, U_{c'_1 x,\, d'_1 y} + \cdots + B_m\, U_{c'_m x,\, d'_m y} = 0.
\end{aligned}
$$

Ища интегралъ ихъ въ формѣ (69), для $f(u, v, x)$ найдемъ уравненія:

$$
(77)\quad
\begin{aligned}
&A_0 c_0{}^u d_0{}^v f(u, v, c_0 x) + A_1 c_1{}^u d_1{}^v f(u, v, c_1 x) + \cdots\\
&\qquad\cdots + A_n c_n{}^u d_n{}^v f(u, v, c_n x) = 0;\\
&B_0 c_0'^{\,u} d_0'^{\,v} f(u, v, c'_0 x) + B_1 c_1'^{\,u} d_1'^{\,v} f(u, v, c'_1 x) + \cdots\\
&\qquad\cdots + B_m c_m'^{\,u} d_m'^{\,v} f(u, v, c'_m x) = 0.
\end{aligned}
$$

Совмѣстное существованіе этихъ соотношеній (77) и, слѣдовательно, соотношеній (76) обусловливается совмѣстностью слѣдующихъ уравненій:

$$
(78)\quad
\begin{aligned}
&A_0 c_0{}^{u+\alpha} d_0{}^v + A_1 c_1{}^{u+\alpha} d_1{}^v + \cdots + A_n c_n{}^{u+\alpha} d_n{}^v = 0;\\
&B_0 c_0'^{\,u+\alpha} d_0'^{\,v} + B_1 c_1'^{\,u+\alpha} d_1'^{\,v} + \cdots + B_m c_m'^{\,u+\alpha} d_m'^{\,v} = 0.
\end{aligned}
$$

Допустимъ, что уравненія (78) имѣютъ общими корнями: α_1, α_2, $\cdots$, α_k. Тогда совокупной системѣ уравненій (76) удовлетворяетъ слѣдующая функція:

$$
(79)\qquad U_{x,y} = \sum_{p=1}^{p=k} \int_{L_p} x^u\, du \int_{\Lambda_p} y^v x^{\alpha_p} \Phi_p(u, v, x)\, dv,
$$

гдѣ $\Phi_p(u, v, x)$ имѣетъ тотъ же смыслъ, какъ и функціи того же обозначенія въ формулѣ (75).

Тотъ же пріемъ, очевидно, примѣняется и къ случаю уравненій настоящаго параграфа, содержащихъ m независимыхъ перемѣнныхъ.

§ 3.

Формулы предыдущихъ параграфовъ, по нашему убѣжденію, даютъ общіе интегралы уравненій съ постоянными коэффиціентами, о которыхъ у насъ шла тамъ рѣчь. Откладывая доказательство этого до второй части работы, которая будетъ содержать различныя приложенія нашихъ формулъ къ причиннымъ и случайнымъ явленіямъ, мы однако должны указать, что нѣкоторыя изъ нашихъ формулъ очевиднымъ образомъ даютъ общіе интегралы.

Обратимъ прежде всего вниманіе на уравненіе:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{80}$$

По нашему методу получается такой его интегралъ:

$$\begin{aligned} U = &\int_{L_1} du_1 \int_{L_2} e^{u_2(y+ix)}\, \theta_1(u_1, u_2)\, du_2 + \\ &+ \int_{\Lambda_1} du_1 \int_{\Lambda_2} e^{u_2(y-ix)}\, \theta_2(u_1, u_2)\, du_2 , \end{aligned} \tag{81}$$

гдѣ $\theta_1(u_1, u_2)$ и $\theta_2(u_1, u_2)$ суть произвольныя функціи перемѣнныхъ u_1 и u_2.

Очевидно, что этотъ интегралъ совпадаетъ съ извѣстнымъ общимъ интеграломъ уравненія (80):

$$U = \varphi(y+ix)+\psi(y-ix). \tag{82}$$

Далѣе, формула (46) совпадаетъ съ слѣдующей:

$$U_{x,y} = i^x\, \varphi(x+y)+(-i)^x\, \psi(x+y), \tag{83}$$

гдѣ $\varphi(x+y)$ и $\psi(x+y)$ суть произвольныя функціи аргумента $x+y$, и представляетъ общій интегралъ уравненія (40). Не лишенъ интереса другой путь для изысканія интеграловъ уравненій съ постоянными коэффиціентами. Но здѣсь мы ограничимся лишь дифференціальными уравненіями вида:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1{}^n} + \frac{\partial^n u}{\partial x_2{}^n} + \cdots + \frac{\partial^n u}{\partial x_m{}^n} = 0. \tag{84}$$

Предварительно остановимся на уравненіи (80). Прибѣгаемъ къ пріему Cauchy, изложенному въ работѣ С. В. Ковалевской: „Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen“ [1]):

[1]) Crelle's Journal, Bd. 80, s. 1—32.

Будемъ искать интегралъ уравненія (80) при условіи, что

$$u_{0,y} = \varphi(y);$$

(85) $$\left(\frac{\partial u_{x,y}}{\partial x}\right)_{x=0} = \varphi_1(y),$$

гдѣ $\varphi(y)$ и $\varphi_1(y)$ произвольно заданныя функціи.

Легко убѣдиться, что искомое рѣшеніе можетъ быть представлено въ формѣ:

(86) $$u_{x,y} = \varphi(y) + \frac{x}{1}\varphi_1(y) - \frac{x^2}{1.2}\frac{\partial^2\varphi(y)}{\partial y^2} - \frac{x^3}{1.2.3}\frac{\partial^2\varphi_1(y)}{\partial y^2} + \\ + \frac{x^4}{1.2.3.4}\frac{\partial^4\varphi(y)}{\partial y^4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5}\frac{\partial^4\varphi_1(y)}{\partial y^4} - \ldots$$

. . . .

Въ виду соотношенія (86), мы имѣемъ основаніе искать интегралъ уравненія (80) въ формѣ:

(87) $$V_{x,y} = \lambda(csx, y) + \mu(csx, y)\, snx,$$

гдѣ $\lambda(csx, y)$ и $\mu(csx, y)\, snx$ суть интегралы того же уравненія (80).

Ищемъ предварительно функцію $\lambda(csx, y)$. Для этой цѣли уравненіе (80) преобразуемъ къ новому перемѣнному t на основаніи подстановки:

(88) $$csx = t.$$

Тогда для опредѣленія функціи $\lambda(t, y)$ будемъ имѣть условіе:

(89) $$(1 - t^2)\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} - t\frac{\partial\lambda}{\partial t} = 0.$$

Представимъ интегралъ этого уравненія такъ:

(90) $$\lambda(t, y) = \int\limits_{L_1} e^{u_1 y}\, du_1 \int\limits_{L_2} e^{u_2 t}\, \theta(u_1, u_2)\, du_2,$$

гдѣ L_1 и L_2 суть дозволенные пути.

При помощи выраженія (90) уравненіе (89) преобразуется въ слѣдующее:

$$\frac{d}{du_2}\, u_2 \left(u_2 \frac{d\theta}{du_2} + \theta \right) = (u_1^2 + u_2^2)\theta. \tag{91}$$

Полагая, что

$$\theta = u_2^{\rho-1}\, p(u_2), \tag{92}$$

гдѣ ρ представляетъ одинъ изъ корней уравненія:

$$\rho^2 = u_1^2, \tag{93}$$

соотношеніе (91) преобразуемъ къ слѣдующему:

$$u_2\, p''(u_2) + (2\rho + 1)\, p'(u_2) - u_2\, p(u_2) = 0. \tag{94}$$

Изъ соотношенія (93) слѣдуетъ, что ρ имѣетъ значеніе u_1 и $u-u_1$. Пусть $\rho = u_1$. Уравненіе (94) приметъ видъ:

$$u_2\, p''(u_2) + (2u_1 + 1)\, p'(u_2) - u_2\, p(u_2) = 0. \tag{95}$$

Обозначивъ чрезъ $p_1(u_2)$ и $p_2(u_2)$ два частныхъ линейно независимыхъ интеграла уравненія (95), общее рѣшеніе его можемъ написать въ формѣ:

$$p(u_2) = c_1(u_1)\, p_1(u_2) + c_2(u_1)\, p_2(u_2), \tag{96}$$

гдѣ $c_1(u_1)$ и $c_2(u_1)$ суть произвольныя функціи перемѣннаго u_1.

Выраженіе (90) приметъ тогда форму:

$$\lambda(t, y) = \int\limits_{L_1} e^{u_1 y}\, c_1(u_1)\, du_1 \int\limits_{L_2} e^{u_2 t}\, u_2^{u_1 - 1}\, p_1(u_2)\, du_2 + \\ + \int\limits_{L_1'} e^{u_1 y}\, c_2(u_1)\, du_1 \int\limits_{L_2'} e^{u_2 t}\, u_2^{u_1 - 1}\, p_2(u_2)\, du_2. \tag{97}$$

Искомый интегралъ уравненія (80) будемъ имѣть въ формѣ:

$$u = \int\limits_{L_1} e^{u_1 y}\, c_1(u_1)\, du_1 \int\limits_{L_2} e^{u_2 csx}\, u_2^{u_1 - 1}\, [1 + u_2 snx]\, p_1(u_2)\, du_2 + \\ + \int\limits_{L_1'} e^{u_1 y}\, c_2(u_1)\, du_1 \int\limits_{L_2'} e^{u_2 csx}\, u_2^{u_1 - 1}\, [1 + u_2 snx]\, p_2(u_2)\, du_2. \tag{98}$$

Если $\rho = -u_1$, то будемъ имѣть:

$$u = \int\limits_{\Lambda_1} e^{u_1 y}\, c_1'(u_1)\, du_1 \int\limits_{\Lambda_2} e^{u_2 csx}\, u_2^{-u_1-1}\, [1+u_2\, sn\, x]\, q_1(u_2)\, du_2 +$$

(99)

$$+ \int\limits_{\Lambda_1'} e^{u_1 y}\, c_2'(u_1)\, du_1 \int\limits_{\Lambda_2'} e^{u_2 csx}\, u_2^{-u_1-1}\, [1+u_2\, sn\, x]\, q_2(u_2)\, du_2,$$

гдѣ $q_1(u_2)$ и $q_2(u_2)$ два частныхъ линейно независимыхъ интеграла уравненія:

(100) $$u_2 q''(u_2) - (2u_1 - 1)\, q'(u_2) = u_2 q(u_2).$$

Обратимся теперь къ уравненію:

(101) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Поступая по предыдущему пріему, найдемъ:

$$u = \int\limits_{\Lambda_1} e^{u_1 y}\, du_1 \int\limits_{\Lambda_2} e^{u_2 z}\, c_1(u_1, u_2)\, du_2 \int\limits_{\Lambda_3} e^{u_3 csx}\, u_3^{\sqrt{u_1^2+u_2^2}-1}\, [1+u_3\, snx]\, p_1(u_3)\, du_3 +$$

(102)

$$+ \int\limits_{\Lambda_1'} e^{u_1 y}\, du_1 \int\limits_{\Lambda_2'} e^{u_2 z}\, c_2(v_1, u_2)\, du_2 \int\limits_{\Lambda_3'} e^{u_3 csx}\, u_3^{\sqrt{u_1^2+u_2^2}-1}\, [1+u_3\, sn\, x]\, p_2(u_3)\, du_3,$$

гдѣ Λ_1, Λ_2. Λ_3, Λ_1', Λ_2', и Λ_3' дозволенные пути, $c_1(u_1,\ u_2)$ и $c_2(u_1,\ u_2)$ произвольныя функціи отъ u_1 и u_2, а $p_1(u_3)$ и $p_2(u_3)$ суть линейно независимые интегралы уравненія:

(103) $$u_3\, p''(u_3) + (2\sqrt{u_1^2+u_2^2} + 1)\, p'(u_3) - u_3 p(u_3) = 0.$$

Другая форма интеграла уравненія (101) есть:

$$u = \int\limits_{L_1} e^{u_1 y}\, du_1 \int\limits_{L_2} e^{u_2 z}\, c_1'(u_1, u_2)\, du_2 \int\limits_{L_3} e^{u_3 csx}\, u_3^{-\sqrt{u_1^2+u_2}-1}\, [1+u_3\, sn\, x]\, q_1(u_3)\, du_3 +$$

(104)

$$+ \int\limits_{L_1'} e^{u_1 y}\, du_1 \int\limits_{L_2'} e^{u_2 z}\, c_2'(u_1, u_2)\, du_2 \int\limits_{L_3'} e^{u_3 csx}\, u_3^{-\sqrt{u_1^2+u_2^2}-1}\, [1+u_3 snx]\, q_2(u_3)\, du_3,$$

гдѣ $q_1\,(u_3)$ и $q_2\,(u_3)$ суть линейно независимые интегралы уравненія:

$$u_3 q''(u_3) - (2\sqrt{u_1^2+u_2^2} - 1)\, q'(u_3) - u_3\, q(u_3) = 0. \tag{105}$$

Примѣняя тотъ же пріемъ къ уравненію:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} = 0, \tag{106}$$

найдемъ интегралъ его въ формѣ:

$$\begin{aligned} u = & \int\limits_{L_1} e^{u_1 x_2} du_1 \int\limits_{L_2} e^{u_2 x_3} du_2 \cdots \int\limits_{L_{m-1}} e^{u_{m-1} x_m} C_1(u_1\, u_2, \cdots, u_{m-1}) du_{m-1} \\ & \left[\int\limits_{L_m} e^{u_m cs x_1} u_m^{\sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_{m-1}^2}-1} [1+u_m sn\, x_1]\, p_1(u_m)\, du_m + \right. \\ + & \int\limits_{L_1'} e^{u_1 x_1} du_1 \int\limits_{L_2'} e^{u_2 x_2} du_2 \cdots \int\limits_{L_m'} e^{u_{m-1} x_m} C_2(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1})\, du_{m-1} \\ & \left[\int\limits_{L_m'} e^{u_m cs x_1} u_m^{\sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_{m-1}^2}-1} [1+u_m sn\, x_1]\, p_2(u_m)\, du_m, \right. \end{aligned} \tag{107}$$

гдѣ $C_1(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1})$ и $C_2(u_1, u_2, u_3, \cdots, u_{m-1})$ суть произвольныя функціи отъ $u_1, u_2, \cdots, u_{m-1}$, а $p_1(u_m)$ и $p_2(u_m)$ линейно независимые интегралы уравненія:

$$u_m\, p''(u_m) + (2\sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_{m-1}^2} + 1)\, p'(u_m) - u_m p(u_m) = 0. \tag{108}$$

Другая форма интеграла уравненія (106) есть:

$$\begin{aligned} u = & \int\limits_{\Lambda_1} e^{u_1 x_2} du_1 \cdots \int\limits_{\Lambda_{m-1}} e^{u_{m-1} x_m} C_1(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1})\, du_{m-1} \\ & \left[\int\limits_{\Lambda_m} e^{u_m cs x_1} u_m^{-\sqrt{u_1^2+\cdots+u_{m-1}^2}-1} [1+u_m sn\, x_1]\; Q_1(u_m)\, du_m + \right. \\ & \int\limits_{\Lambda_1'} e^{u_1 x_2} du_1 \cdots \int\limits_{\Lambda_2'} e^{u_{m-1} x_m} C_2(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1})\, du_{m-1} \\ & \left[\int\limits_{\Lambda_m'} e^{u_m cs x_1} u_m^{-\sqrt{u_1^2+\cdots+u_{m-1}^2}-1} [1+u_m sn\, x_1]\; Q_2(u_m)\, du_m, \right. \end{aligned} \tag{109}$$

гдѣ $Q_1(u_m)$ и $Q_2(u_m)$ линейно независимые интегралы уравненія:

(110) $$u_m\, p''(u_m) - (2\sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_{m-1}^2} - 1)\, p'(u_m) - u_m\, p(u_m) = 0.$$

Указанный тутъ процессъ можетъ быть примѣненъ къ уравненію:

(111) $$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x_1^{2k}} + \frac{\partial^{2k} u}{\partial x_2^{2k}} + \cdots + \frac{\partial^{2k} u}{\partial x_m^{2k}} = 0.$$

Разсмотримъ предварительно уравненіе:

(112) $$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0.$$

Преобразуемъ его къ новому перемѣнному t на основаніи подстановки (88).

Будемъ имѣть:

113) $$(t^2-1)^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - 6t(1-t^2)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + (7t^2-4)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \\ + t\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0.$$

При помощи интеграла

(114) $$u = \int_{L_1} e^{u_1 y}\, du_1 \int_{L_2} e^{u_2 t}\, \varphi(u_1, u_2)\, du_2,$$

гдѣ L_1 и L_2 дозволенные пути, уравненіе (113) преобразуется въ слѣдующее:

(115) $$\frac{d^4(u_2^4\varphi)}{du_2^4} - 6\frac{d^3(u_2^3\varphi)}{du_2^3} - 2\frac{d^2(u_2^4\varphi)}{du_2^2} + 7\frac{d^2(u_2^2\varphi)}{du_2^2} + \\ + 6\frac{d(u_2^3\varphi)}{du_2} - \frac{d(u_2\varphi)}{du_2} + (u_1^4 - 4u_2^2 + u_2^4)\varphi = 0.$$

Полагая:

(116) $$\varphi = u_2^{\sigma_1} M,$$

гдѣ σ_1 есть любой изъ корней уравненія

(117) $$(\sigma-4)_4 - 6(\sigma+3)_3 + 7(\sigma+2)_2 - (\sigma+1) + u_1^4 = 0,$$

соотношеніе (115) представимъ въ формѣ:

$$u_2^3 M^{(IV)} + 2u_2^2(2\sigma_1+5)M''' + u_2[6(\sigma_1+1)(\sigma_1+3) - 2u_2^2 + 7]M'' +$$
$$+ [2(\sigma_1+3)_2(2\sigma_1-1) + 14(\sigma_1+2) - 1 - 2(2\sigma_1+5)u_2^2]M' + \tag{118}$$
$$+ u_2[u_2^2 - 4 - 2(\sigma_1+1)(\sigma_1+3)]M = 0$$

Если $M_1(u_2)$, $M_2(u_2)$, $M_3(u_2)$ и $M_4(u_2)$ линейно независимые интегралы уравненія (118), то общій его интегралъ можетъ быть представленъ въ формѣ:

$$M = \tag{119}$$
$$= C_1(u_1)M_1(u_2) + C_2(u_1)M_2(u_2) + C_3(u_1)M_3(u_2) + C_4(u_1)M_4(u_2),$$

гдѣ $C_1(u_1)$, $C_2(u_1)$, $C_3(u_1)$ и $C_4'(u_1)$ суть произвольныя функціи перемѣннаго u_1.

Искомый интегралъ уравненія (112) напишется такъ:

$$u = \int_{\Lambda_1} e^{u_1 y} C_1(u_1)\,du_1 \int_{L_1} e^{u_1 csx} u_2^{\sigma_1}(1+u_2 snx)M_1(u_2)du_2 +$$
$$+ \int_{\Lambda_2} e^{u_1 y} C_2(u_1)\,du_1 \int_{L_2} e^{u_1 csx} u_2^{\sigma_1}(1+u_2 snx)M_2(u_2)du_2 + \tag{120}$$
$$+ \int_{\Lambda_3} e^{u_1 y} C_3'(u_1)\,du_1 \int_{L_3} e^{u_1 csx} u_2^{\sigma_1}(1+u_2 snx)M_2(u_2)du_2 +$$
$$+ \int_{\Lambda_4} e^{u_1 y} C_4'(u_1)\,du_1 \int_{L_4} e^{u_1 csx} u_2^{\sigma_1}(1+u_2 snx)M_4(u_2)du_2 .$$

Точно также интеграломъ уравненія:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = 0 \tag{121}$$

будетъ:

$$u = \int_{L_1} e^{u_1 y} du_1 \int_{M_1} e^{u_2 z} C_1'(u_1, u_2)\,du_2 \int_{N_1} e^{u_3 csx} u_2^{\sigma'}(1+u_3 snx)F_1(u_3)\,du_3 +$$
$$+ \int_{L} e^{u_1 y} du_1 \int_{M_2} e^{u_2 z} C_1''(u_1, u_2)\,du_2 \int_{N_2} e^{u_3 csx} u_3^{\sigma'}(1+u_3 snx)F_2(u_3)\,du_3 +$$

$$+\int_{L_3} e^{u_1 y}\, du_1 \int_{M_3} e^{u_2 z}\, C_3''(u_1, u_2)\, du_2 \int_{N_3} e^{u_3 \mathrm{cs} x}\, u_3^{\sigma'} (1+u_3 \mathrm{sn} x)\, F_3(u_3)\, du_3 +$$

(122)

$$+\int_{L_4} e^{u_1 y}\, du_1 \int_{M_4} e^{u_2 z}\, C_4''(u_1, u_2)\, du_2 \int_{N_4} e^{u_3 \mathrm{cs} x}\, u_3^{\sigma'} (1+u_3 \mathrm{sn} x)\, F_4(u_3)\, du_3,$$

гдѣ L, M и N дозволенные пути, $C_1''(u_1, u_2)$, $C_2''(u_1, u_2)$, $C_3''(u_1, u_2)$ и $C_4''(u_1, u_2)$ произвольныя функціи перемѣнныхъ u_1 и u_2, σ' есть любой изъ корней уравненія:

$$(\sigma+4)_4 - 6(\sigma+3)_3 + 7(\sigma+2)_2 - (\sigma+1) + u_1^4 + u_2^4 = 0, \tag{123}$$

а $F_1(u_3)$, $F_2(u_3)$, $F_3(u_3)$ и $F_4(u_3)$ линейно независимыя интегралы уравненія (118) послѣ замѣны въ немъ перемѣннаго u_2 чрезъ u_3, а σ_1 чрезъ σ'. Легко теперь написать интегралъ, аналогичный выраженію (122), для уравненія:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} + \cdots + \frac{\partial^4 u}{\partial x_m^4} = 0. \tag{124}$$

Тотъ же самый процессъ примѣняется и къ уравненію (111).

Укажемъ еще одинъ пріемъ, который, будучи аналогиченъ предыдущему, не приводитъ однако къ такимъ общимъ результатамъ:

Мы изложимъ его лишь по отношенію къ уравненію:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0. \tag{125}$$

Преобразуемъ это уравненіе къ новому перемѣнному z при помощи подстановки.

$$x^3 = z. \tag{126}$$

Будемъ имѣть:

$$6\frac{\partial u}{\partial z} + 54 z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 27 z^2 \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0. \tag{127}$$

Ища интегралъ этого уравненія въ формѣ:

$$u = \int_L e^{u_1 y}\, du_1 \int_\Lambda e^{u_2 z}\, \theta(u_1, u_2)\, du_2, \tag{128}$$

для опредѣленія $\theta(u_1, u_2)$ находимъ условіе:

$$27\, u_2^3 \frac{d^2\theta}{du_2^2} + 108\, u_2^2 \frac{d\theta}{du_2} + (60 u_2 + u_1^3)\theta = 0. \tag{129}$$

Обозничимъ чрезъ S_1 и S_2 два линейно независимыхъ интеграла этого уравненія.

Тогда искомый интегралъ уравненія (125) напишется слѣдующимъ образомъ:

$$u = \int\limits_{L_1} e^{u_1 y}\, du_1 \int\limits_{\Lambda_1} e^{u_2 x^3} C_1(u_1) S_1 [1 + x^2 u_2]\, du_2 + \tag{130}$$

$$+ \int\limits_{L_2} e^{u_1 y}\, du_1 \int\limits_{\Lambda_2} e^{u_2 x^3} C_2(u_1)\, S_2\, [1 + x^2 u_2]\, du_2,$$

гдѣ $C_1(u_1)$ и $C_2(u_1)$ произвольныя функціи перемѣннаго u_1.

§ 4.

Изслѣдованія настоящаго параграфа находятся въ тѣсной связи съ двумя работами Hj. Mellin'a: „Ueber die Integration partieller linearen Differentialgleichungen durch vielfache Integrale[1]) и „Zur Theorie zweier allgemeinen Klassen bestimmter Integrale". О послѣдней работѣ у насъ уже была рѣчь.

Касаясь того же самаго предмета, какъ и этотъ ученый, мы предлагаемъ иное изложеніе, которое по нашему убѣжденію проще и опредѣленнѣе.

Разсмотримъ уравненіе:

$$\sum_{k=0}^{k=n} \sum_{p=0}^{p=k} \sum_{(s,t)} a_{kpst}\, x^s y^t \frac{\partial^k v}{\partial x^{k-p} \partial y^p} = 0, \tag{131}$$

гдѣ a_{kpst} постоянное.

Полагая въ немъ

---

[1]) Acta Mathematica, Bd. 22. Berlin. Stockholm. Paris. 1899. s. 19—54.

$$(132)\qquad v = \int\limits_{\Lambda_1} e^{u_1 x} du_1 \int\limits_{\Lambda_2} e^{u_2 y} \theta(u_1, u_2)\, du_2$$

гдѣ Λ_1 и Λ_2 дозволенные пути, послѣ интеграціи по частямъ будемъ имѣть:

$$(133)\qquad \int\limits_{\Lambda_1} e^{u_1 x} du_1 \int\limits_{\Lambda_2} e^{u_2 y} \left[\sum_{k=0}^{k=n} \sum_{p=0}^{p=k} \sum_{(s,t)} (-1)^{s+t} a_{kpst} \frac{\partial^{s+t}[u_1^{k-p} u_2^p \theta(u_1, u_2)]}{\partial u_1^s \partial u_2^t} \right] du_2 = 0.$$

Отсюда для $\theta(u_1, u_2)$ находимъ условіе:

$$(134)\qquad \sum_{k=0}^{k=n} \sum_{p=0}^{p=k} \sum_{(s,t)} (-1)^{s+t} a_{kpst} \frac{\partial^{s+t}[u_1^{k-p} u_2^p \theta(u_1, u_2)]}{\partial u_1^s \partial u_2^t} = 0.$$

Порядокъ этого уравненія опредѣляетъ наибольшее изъ чиселъ $s+t$. Если коэффиціенты уравненія (131) суть цѣлыя линейныя функціи перемѣнныхъ x и y, уравненіе (134) перваго порядка. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ интегрированіе уравненія (131) сводится къ интегрированію нѣкоторой системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами.

Для примѣра возьмемъ уравненіе:

$$(135)\qquad (A_0 x + B_0 y + C_0) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (A_1 x + B_1 y + C_1) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} +$$
$$+ (A_2 x + B_2 y + C_2) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_3 \frac{\partial v}{\partial x} + C_4 \frac{\partial v}{\partial y} + C_5 v = 0.$$

Соотношеніе (134) въ разсматриваемомъ случаѣ приметъ видъ:

$$(136)\qquad \begin{gathered} (A_0 u_1^2 + A_1 u_1 u_2 + A_2 u_2^2) \frac{\partial \theta}{\partial u_1} + \\ + (B_0 u_1^2 + B_1 u_1 u_2 + B_2 u_2^2) \frac{\partial \theta}{\partial u_2} = \\ = [C_0 u_1^2 + C_1 u_1 u_2 + C_2 u_2^2 + (C_3 - B_1 - 2A_0) u_1 + \\ + (C_4 - A_1 - 2B_2) u_2 + C_5] \theta \end{gathered}$$

Пусть

$$(137)\qquad f(u_1, u_2, \theta) = 0$$

будетъ интеграломъ уравненія (136). Уравненіе (136) преобразуется тогда въ слѣдующее:

$$\begin{aligned}&(A_0 u_1^2+A_1 u_1 u_2+A_2 u_2^2)\frac{\partial f}{\partial u_1}+\\&+(B_0 u_1^2+B_1 u_1 u_2+B_2 u_2^2)\frac{\partial f}{\partial u_2}+\\&+[C_0 u_1^2+C_1 u_1 u_2+C_2 u_2^2+(C_3-B_1-2A_0)u_1+\\&+(C_4-A_1-2B_2)u_2+C_5]\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}=0.\end{aligned} \tag{138}$$

Система обыкновенныхъ уравненій, эквивалентная уравненію (138), есть:

$$\begin{aligned}&\frac{du_1}{A_0u_1^2+A_1u_1u_2+A_2u_2^2}=\frac{du_2}{B_0u_1^2+B_1u_1u_2+B_2u_2^2}=\\&=\frac{d\theta}{[C_0u_1^2+C_1u_1u_2+C_2u_2^2+(C_3-B_1-2A_0)u_1+(C_4-A_1-2B_2)u_2+C_5]\theta}.\end{aligned} \tag{139}$$

Полагая въ уравненіи:

$$\frac{du_1}{du_2}=\frac{A_0u_1^2+A_1u_1u_2+A_2u_2^2}{B_0u_1^2+B_1u_1u_2+B_2u_2^2} \tag{140}$$

$$u_1=z\,u_2, \tag{141}$$

найдемъ:

$$\frac{dlgu_2}{dz}=\frac{B_0z^2+B_1z+B_2}{-B_0z^3+(A_0-B_1)z^2+(A_1-B_2)z+A_2}. \tag{142}$$

Пусть

$$\begin{aligned}&-B_0z^3+(A_0-B_1)z^2+(A_1-B_2)z+A_2=\\&=-B_0(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3).\end{aligned} \tag{143}$$

Тогда

$$\frac{dlgu_2}{dz}=\frac{\delta_1}{z-\alpha_1}+\frac{\delta_2}{z-\alpha_2}+\frac{\delta_3}{z-\alpha_3}, \tag{144}$$

гдѣ δ_1, δ_2 и δ_3 извѣстныя постоянныя.

Интегрируя уравненіе (144), находимъ:

(145) $$u_2 = C(z-\alpha_1)^{\delta_1}(z-\alpha_2)^{\delta_2}(z-\alpha_3)^{\delta_3},$$

или:

(145′) $$C = u_2^{\delta_1+\delta_2+\delta_3+1}(u_1-\alpha_1 u_2)^{-\delta_1}(u_1-\alpha_2 u_2)^{-\delta_2}(u_1-\alpha_3 u_2)^{-\delta_3}.$$

Положимъ, что изъ этого уравненія мы нашли u_2 по формулѣ:

(146) $$u_2 = \psi(C, u_1).$$

Тогда θ имѣетъ составъ:

(147) $$\theta = \Phi\left[u_1^{\delta_1+\delta_2+\delta_3+1}(u_1-\alpha_1 u_2)^{-\delta_1}(u_1-\alpha_2 u_2)^{-\delta_2}(u_1-\alpha_3 u_2)^{-\delta_3}\right] e^{\int M(C,u_1)du_1},$$

гдѣ

(148) $$M(C,u_1) = \frac{C_0 u_1^2 + C_1 u_1 \psi(C,u_1) + C_2\psi(C,u_1)^2 + (C_3 - B_1 - 2A_0)u_1 + (C_4 - A_1 - 2B_2)\psi(C,u_1) + C_5)}{A_0 u_1^2 + A_1 u_1 \psi(C,u_1) + A_2\psi^2(C,u_1),},$$

а Φ произвольная функція.

Замѣтимъ, что въ правой части соотношенія (147) послѣ выполненія интеграціи надо вмѣсто C внести его выраженіе по формулѣ (145′).

Примѣнимъ предыдущіе результаты къ уравненію:

(149) $$(2x+y+2)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (x+2y+1)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (8x+y+8)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 6\frac{\partial v}{\partial x} + 3\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Будемъ имѣть:

(150) $$\theta = e^{u_1}\Phi\left[u_1^{\frac{1}{2}}(u_1-\alpha_1 u_2)^{\frac{3}{4}}(u_1-\alpha_2 u_2)^{\frac{7}{4}}(u_1-\alpha_3 u_2)^{\frac{7}{4}}\right].$$

Искомыя рѣшенія уравненія (149) содержатся въ формулѣ:

(151) $$V = \int_{\Lambda_1} e^{u_1(x+1)}du_1 \int_{\Lambda_2} e^{u_1 y}\,\Phi\left[u_1^{\frac{1}{2}}(u_1-\alpha_1 u_2)^{\frac{3}{4}}(u_1-\alpha_2 u_2)^{\frac{7}{4}}(u_1-\alpha_3 u_2)^{\frac{7}{4}}\right]du_2.$$

Дозволенныя пути интеграціи Λ_2 и Λ_1 тутъ вполнѣ очевидны.

Остановимся теперь на слѣдующемъ разностномъ уравненіи:

$$\sum_{k=0}^{k=n} \sum_{p=0}^{p=k} \sum_{(s,t)} a_{kpst}\, x^s y^t\, V_{x+k-p,\, y+p} = 0, \tag{152}$$

гдѣ a_{kpst} постоянное.

Поищемъ функцію $V_{x,y}$ въ формѣ:

$$V_{x,y} = $$
$$= \int\limits_{L_1} u_1^{x-1}\, du_1 \int\limits_{L_2} u_2^{y-1}\, \varphi(u_1, u_2)\, du_2, \tag{153}$$

гдѣ L_1 и L_2 суть дозволенные пути.

Внеся выраженіе (153) въ соотношеніе (152), послѣ интеграціи по частямъ получимъ:

$$\int\limits_{L_1} u_1^{x-1}\, du_1 \int\limits_{L_2} u_2^{y-1} \left[\sum_{k=0}^{k=n} \sum_{p=0}^{p=k} \sum_{(s,t)} (-1)^{s+t} a_{kpst} \nabla_{u_1}^{s} \nabla_{u_2}^{t} [u_1^{k-p} u_2^{p} \varphi(u_1, u_2)] \right] du_2 = 0. \tag{154}$$

Для опредѣленія $\varphi(u_1, u_2)$ имѣемъ, слѣдовательно, условіе:

$$\sum_{k=0}^{k=n} \sum_{p=0}^{p=k} \sum_{(s,t)} (-1)^{s+t} a_{kpst}\, \nabla_{u_1}^{s} \nabla_{u_2}^{t} [u_1^{k-p} u_2^{p}\, \varphi(u_1, u_2)] = 0. \tag{155}$$

Порядокъ уравненія (155) опредѣляетъ наибольшее изъ чиселъ $s+t$.

Въ случаѣ, если коэффиціенты уравненія (152) представляютъ линейныя цѣлыя функціи x и y, уравненіе (155) перваго порядка.

Интегрированіе уравненія (152) тогда приводится къ интегрированію нѣкоторой системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій. Для примѣра разсмотримъ уравненіе:

$$\begin{gathered}(a_1 x + b_1)\, u_{x+1,y} + (a_2 y + b_2)\, u_{x,y+1} + \\ + (c_1 x + c_2 y + c_3)\, u_{x,y} = 0,\end{gathered} \tag{156}$$

гдѣ a, b и c постоянныя.

Уравненіе (155) въ этомъ случаѣ приметъ видъ:

$$u_1\,(a u_1 + c_1)\,\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} + u_2\,(a_2 u_2 + c_2)\,\frac{\partial\varphi}{\partial u_2} =$$

(157)

$$= [(b_1 - a_1)\,u_1 + (b_2 - a_2)\,u_2 + c_3]\,\varphi.$$

Ищемъ функцію φ.

Имѣемъ:

$$\frac{du_1}{u_1(a_1 u_1 + c_1)} =$$

(158)
$$= \frac{du_2}{u_2(a_2 u_2 + c_2)} = \frac{d\varphi}{\varphi\,[(b_1 - a_1)\,u_1 + (b_2 - a_2)\,u_2 + c_3]}\,.$$

Отсюда по извѣстному пріему находимъ:

(159)
$$\varphi\,(u_1, u_2) = e^{\int s\,(c,u_1)\,du_1}\,\Phi\left[\frac{(a_1 u_1)^{\frac{1}{c_1}}\,(a_2 u_2 + c_2)^{\frac{1}{c_2}}}{(a_1 u_1 + c_1)^{\frac{1}{c_1}}\,(a_1 u_2)^{\frac{1}{c_2}}}\right],$$

гдѣ

$$S(c, u) = \frac{(b_1 - a_1)\,u_1 + (b_2 - a_2)\,\chi\,(c, u_1) + c_3}{u_1\,(a_1 u_1 + c_1)}\,;$$

(160)

при чемъ c по выполненіи указанной интеграціи замѣщается по формулѣ:

(161)
$$c = \frac{(a_1 u_1)^{\frac{1}{c_1}}\,(a_2 u_2 + c_2)^{\frac{1}{c_2}}}{(a_1 u_1 + c_1)^{\frac{1}{c_1}}\,(a_2 u_2)^{\frac{1}{c_2}}}\,.$$

Искомый интегралъ уравненія (156) напишется въ формѣ:

$$U_{x,y} =$$

(162)
$$= \int_{c}^{(0\ \alpha\ \overline{0}\ \overline{\alpha})} u_1^{\,x-1}\,du_1 \int_{c_1}^{(0\ \beta\ \overline{0}\ \overline{\beta})} u_2^{\,y-1}\,\Phi\left[\frac{(a_1 u_1)^{\frac{1}{c_1}}\,(a_2 u_2 + c_2)^{\frac{1}{c_2}}}{(a_1 u_1 + c_1)^{\frac{1}{c_1}}\,(a_2 u_2)^{\frac{1}{c_2}}}\right] e^{\int s(c, u_1)\,du_1}\,du_2\,,$$

гдѣ принято:

$$\alpha = -\,\frac{c_1}{a_1},\ \beta = -\,\frac{c_2}{a_2}\,.$$

(162′)

Тотъ же пріемъ примѣняется и къ уравненію вида (152) съ m независимыми перемѣнными.

§ 5.

Разсмотримъ слѣдующія два дифференціальныхъ уравненія:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{k=n}\sum_{p=0}^{p=k}\sum_{(s,t)} a_{kpst}x^s y^t \frac{\partial^k V}{\partial x^{k-p}\partial y^p}=0; \\ &\sum_{k=0}^{k=m}\sum_{p=0}^{p=k}\sum_{(s,t)} b_{kpst}x^s y^s \frac{\partial^k V}{\partial x^{k-p}\partial y^p}=0. \end{aligned} \tag{163}$$

Преобразуемъ эти уравненія на основаніи соотношенія (132). Тогда для $\theta(u_1, u_2)$ будемъ имѣть условія:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{k=n}\sum_{p=0}^{p=k}\sum_{(s,t)} (-1)^{s+t}a_{kpst}\frac{\partial^{s+t}[u_1{}^{k-p}u_2{}^p\theta]}{\partial u_1{}^s\partial u_2{}^t}=0; \\ &\sum_{k=0}^{k=m}\sum_{p=0}^{p=k}\sum_{(s,t)} (-1)^{s+t}b_{kpst}\frac{\partial^{s+t}[u_1{}^{k-p}u_2{}^p\theta]}{\partial u_1{}^s\partial u_2{}^t}=0. \end{aligned} \tag{164}$$

Въ свою очередь $\theta(u_1, u_2)$ выражается чрезъ V по формулѣ вида (132).

Отсюда слѣдуетъ, что совмѣстность уравненій (163) обусловливается совмѣстнымъ существованіемъ уравненій (164).

Въ случаѣ, если коэффиціенты уравненій (163) линейныя цѣлыя функціи перемѣнныхъ x и y, совмѣстность этихъ уравненій зависитъ отъ совмѣстнаго существованія двухъ уравненій перваго порядка однородной формы. Изысканіе же условій совмѣстности этихъ послѣднихъ является въ математикѣ вопросомъ элементарнымъ,

Остановимся теперь на системѣ уравненій:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{k=n}\sum_{p=0}^{p=k}\sum_{(s,t)} a_{kpst}x^s y^t V_{x+k-p,\,y+p}=0; \\ &\sum_{k=0}^{k=m}\sum_{p=0}^{p=k}\sum_{(s,t)} b_{kpst}x^s y^t V_{x+k-p,\,y+p}=0. \end{aligned} \tag{165}$$

При помощи выраженія (153) для $V_{x,y}$ эти уравненія могутъ быть преобразованы въ слѣдующія:

$$
(166)\qquad
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{k=n}\sum_{p=0}^{p=k}\sum_{(s,t)}(-1)^{s+t}a_{kpst}\nabla^{s}_{u_1}\nabla^{t}_{u_2}[u_1^{k-p}u_2^{p}\varphi]=0;\\
&\sum_{k=0}^{k=m}\sum_{p=0}^{p=k}\sum_{(s,t)}(-1)^{s+t}b_{kpst}\Delta^{s}_{u_1}\nabla^{t}_{u_2}[u_1^{k-p}u_2^{p}\varphi]=0.
\end{aligned}
$$

Совмѣстность уравненій (166) влечетъ за собою совмѣстное существованіе уравненій (165). Если коэффиціенты уравненій (165) суть цѣлыя линейныя функціи x и y, уравненія (166) перваго порядка, — и тогда вопросъ о совмѣстности уравненій (165) рѣшается элементарнымъ путемъ. Указанный пріемъ примѣняется къ любому числу уравненій разсмотрѣнныхъ родовъ, содержащихъ какое угодно число независимыхъ перемѣнныхъ.

Перейдемъ теперь къ смѣшаннымъ уравненіямъ. Пусть предложено уравненіе:

$$
(167)\qquad \sum_{k=0}^{k=n}\sum_{p=0}^{p=k}\sum_{k_1=0}^{k_1=m}\sum_{q=0}^{q=k_1}\sum_{(s,t)}a_{kpst}\,x^{s}y^{t}\frac{\partial^{k}u_{x+k_1-q,\,y-q}}{\partial x^{k-p}\partial y^{p}}=0,
$$

гдѣ a_{kpst} постоянное.

Полагая

$$
(168)\qquad u_{x,y}=\int_{\Lambda_1}u_1^{x-1}du_1\int_{\Lambda_2}u_2^{y-1}\varphi(u_1,u_2)du_2,
$$

при помощи интеграціи по частямъ найдемъ:

$$
(169)\qquad \int_{\Lambda_1}u_1^{x-1}du_1\int_{\Lambda_1}u^{2y-2}\Big[\sum_{k=0}^{k=n}\sum_{p=0}^{p=k}\sum_{k_1=0}^{k_1=m}\sum_{q=0}^{q=k_1}\sum_{(s,t)}(-1)^{s+t}a_{kpst}\nabla^{s}_{u_1}\nabla^{t}_{u_2}\Big|\;(lgu_1)^{k-p}(lgu_2)^{p}u_1^{k_1-q}u_2^{q}\varphi]\Big]du_2=0.
$$

Для опредѣленія φ, значитъ, имѣемъ дифференціальное уравненіе:

$$
(170)\qquad \sum_{k=0}^{k=n}\sum_{p=0}^{p=k}\sum_{k_1=0}^{k_1=m}\sum_{q=0}^{q=k_1}\sum_{(s,t)}(-1)^{s+t}a_{kpst}\nabla^{s}_{u_1}\nabla^{t}_{u_2}[lgu_1)^{k-p}(lgu_2)^{p}u_1^{k_1-q}\Big|\;u_2^{q}\varphi]=0.
$$

Порядокъ этого уравненія опредѣляетъ наибольшее изъ чиселъ $s+t$. Если коэффиціенты уравненія (167) суть цѣлыя линейныя функціи перемѣнныхъ x и y, уравненіе (170) перваго порядка, и интегрированіе его зависитъ отъ интегрированія нѣкоторой обыкновенной системы дифференціальныхъ уравненій·

Тотъ же пріемъ примѣняется и къ случаю уравненія вида (167), содержащаго m независимыхъ перемѣнныхъ.

При помощи того же самаго пріема совмѣстность нѣсколькихъ уравненій вида (167) приводится въ зависимость отъ совмѣстнаго существованія такого же числа дифференціальныхъ уравненій вида (170). Остановимся теперь на разсмотрѣніи особаго состава разностныхъ уравненій.

Обозначимъ чрезъ $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ функціи, удовлетворяющія условію:

$$\begin{aligned} \varphi(x+1) &= \varphi(x)+\theta_1(x); \\ \psi(y+1) &= \psi(y)+\theta_2(y), \end{aligned} \tag{171}$$

гдѣ $\theta_1(x)$ и $\theta_2(y)$ суть постоянныя (нуль не исключается) или нѣкоторыя періодическія функціи съ періодомъ единица.

Возьмемъ далѣе уравненіе:

$$\sum_{k=0}^{k=n} \sum_{p=0}^{p=k} \sum_{(s,t)} a_{kpst} [\varphi(x)]^s \, [\psi(y)]^t \, V_{x+k-p,\, y+p} = 0, \tag{172}$$

гдѣ a_{kpst} постоянное.

Ищемъ интегралъ его въ формѣ:

$$V_{x,y} = \int\limits_{L_1} u_1^{\varphi(x)-1} \, du_1 \int\limits_{L_2} u_2^{\psi(y)-1} \, \theta(u_1, u_2) \, du_2, \tag{173}$$

гдѣ L_1 и L_2 дозволенные пути.

Внеся выраженіе (173) въ уравненіе (172), при помощи интеграціи по частямъ получимъ:

$$\int\limits_{L_1} u_1^{\varphi(x)-1} \, du_1 \int\limits_{L_2} u_2^{\psi(y)-1} \Big[\sum_{k=0}^{k=n} \sum_{p=0}^{p=k} \sum_{(s,t)} (-1)^{s+t} a_{kpst} \, \nabla^s_{u_1} \nabla^t_{u_2} \big[u_1^{(k-p)\theta_1(x)} \tag{174}$$

$$u_2^{p\theta_2(y)} \theta\big] \Big] du_2 = 0.$$

Для опредѣленія $\theta(u_1, u_2)$, слѣдовательно, имѣемъ условіе:

(175) $$\sum_{k=0}^{k=n}\sum_{p=0}^{p=k}\sum_{(s,t)}(-1)^{s+t}a_{kpst}\nabla^s_{u_1}\nabla^t_{u_1}[u_1^{(k-p)\theta_1(x)}u_2^{p\theta_1(y)}\theta]=0.$$

Пусть

(176) $$u_1^{\theta_1(x)}=v_1\,;$$
$$u_2^{\theta_2(y)}=v_2\,.$$

Тогда уравненіе (175) преобразуется въ слѣдующее:

(177) $$\sum_{k=0}^{k=n}\sum_{p=0}^{p=k}\sum_{(s,t)}(-1)^{s+t}a_{kpst}[\theta_1(x)]^s[\theta_2(y)]^t\,\square^s_{v_1}\square^t_{v_2}[v_1^{k-p}v_2^p\,\theta_2]=0,$$

гдѣ θ_2 есть $\theta(u_1, u_2)$ послѣ замѣны въ немъ перемѣнныхъ u_1 и u_2 чрезъ v_1 и v_2 по формуламъ (176), а

(178) $$\square_{v_k}=v_k\frac{\partial}{\partial v_k}\,.$$

Мы видимъ такимъ образомъ, что интегрированіе уравненія (172) приводится къ интегрированію дифференціальнаго линейнаго уравненія (177), коэффиціенты котораго представляютъ цѣлыя алгебраическія функціи независимыхъ перемѣнныхъ. Порядокъ уравненія (177) равенъ наибольшему изъ чиселъ $s+t$. Если таковое число единица, то уравненіе (177) оказывается перваго порядка.

Тотъ же пріемъ примѣняется также и къ случаю уравненія вида (172), содержащаго m независимыхъ перемѣнныхъ.

Въ случаѣ, когда имѣется нѣсколько уравненій вида (172) съ одною искомой функціей, совмѣстное существованіе ихъ зависитъ отъ совмѣстности такого же числа уравненій вида (177).

§ 6.

Въ этомъ параграфѣ остановимся на разсмотрѣніи особаго вида функціональныхъ линейныхъ уравненій.

Обратимъ предварительно вниманіе на обыкновенное уравненіе:

(179) $$\sum_{k=0}^{k=n}\sum_{p=0}^{p=m_k}A_{kp}(lgx)^p\,U_{c_kx}=0,$$

гдѣ A_{kp} и c_k суть нѣкоторыя постоянныя.

Ищемъ рѣшеніе этого уравненія въ формѣ:

$$U_x = \int\limits_{\Lambda} x^u f(u)\,du, \tag{180}$$

гдѣ Λ дозволенный путь.

Внеся это выраженіе для u въ уравненіе (179), будемъ имѣть:

$$\sum_{k=0}^{k=n} \sum_{p=0}^{p=m_k} A_{kp}\,(lgx)^p \int\limits_{\Lambda} x^u c_k^u f(u)\,du = 0, \tag{181}$$

или послѣ интеграціи по частямъ:

$$\int\limits_{\Lambda} x^u \left[\sum_{k=0}^{k=n} \sum_{p=0}^{p=m_k} (-1)^p A_{kp} \frac{d^p\, c_k^u f(u)}{du^p} \right] du = 0. \tag{182}$$

Отсюда для опредѣленія $f(u)$ находимъ условіе:

$$\sum_{k=0}^{k=n} \sum_{p=0}^{p=m_k} (-1)^p A_{kp} \frac{d^p\, c_k^u f(u)}{du^p} = 0. \tag{183}$$

Полагаемъ далѣе:

$$v = c_k^u. \tag{184}$$

Тогда уравненіе (183) преобразуется въ слѣдующее:

$$\sum_{k=0}^{k=n} \sum_{p=0}^{p=m_k} (-1)^p A_{kp}\,(lgc_k)^p\, \nabla^p\,[v f(v)] = 0, \tag{185}$$

гдѣ $f_1(v)$ есть $f(u)$ послѣ замѣны въ немъ перемѣннаго u чрезъ v по формулѣ (184). Замѣтимъ, что уравненій вида (185), отвѣчающихъ (183), безчисленное множество.

Порядокъ уравненія (185) опредѣляется наибольшимъ изъ чиселъ: $m_0, m_1, m_2, \cdots, m_n$. Если эти послѣднія единицы, то уравненіе (185) перваго порядка и, слѣдовательно, интегрируется въ окончательной формѣ. Остановимся нѣсколько на этомъ послѣднемъ случаѣ.

Уравненіе (185) принимаетъ видъ:

$$\frac{df_1}{dv} = \frac{1}{v} \left[\frac{\sum\limits_{k=0}^{k=n} A_{k0}}{\sum\limits_{k=0}^{k=n} A_{k1}\, lg\, c_k} - 1 \right] f_1. \tag{186}$$

Интегрируя это уравненіе, находимъ:

(187)
$$f_1 = \text{Const. } v^{\frac{\sum\limits_{k=0}^{k=n} A_{k0}}{\sum\limits_{k=0}^{k=n} A_{k1}\, lg c_k} - 1}.$$

Искомые интегралы уравненія (179) въ разсматриваемомъ случаѣ содержатся въ слѣдующемъ выраженіи:

(188)
$$U = \text{Const.} \int\limits_{\Lambda'} x^{\frac{lg\, c}{lg\, c_k}}\, v^{\frac{\sum\limits_{k=0}^{k=n} A_{k0}}{\sum\limits_{k=0}^{k=n} A_{k1}\, lg c_k} - 2} dv.$$

Возьмемъ теперь уравненіе типа (179) съ двумя независимыми перемѣнными:

(189)
$$\sum_{k=0}^{k=m} \sum_{p=0}^{p=n} \sum_{(s,t)} a_{kpst}\, (lgx)^s\, (lgy)^t\, u_{c_k x, d_k y} = 0,$$

гдѣ a_{kpst}, c_k и d_k постоянныя.

Поищемъ интегралъ его въ формѣ:

(190)
$$U_{x,y} = \int\limits_{\Lambda_1} x^{u_1}\, du \int\limits_{\Lambda_2} y^{u_2} \varphi(u_1, u_2)\, du_2.$$

Внеся это выраженіе (190) въ соотношеніе (189) и выполняя тамъ интеграцію по частямъ, будемъ имѣть:

(191)
$$\sum_{k=0}^{k=m} \sum_{p=0}^{p=n} \sum_{(s,t)} (-1)^{s+t} a_{kpst} \int\limits_{\Lambda_1} x^{u_1}\, du_1 \int\limits_{\Lambda_2} y^{u_2} \frac{\partial^{s+t} [c_k^{u_1} d_k^{u_2} \varphi]}{du_1^s\, du_2^t}\, du_2 = 0.$$

Выберемъ φ подъ условіемъ, чтобы

(192)
$$\sum_{k=0}^{k=m} \sum_{p=0}^{p=n} \sum_{(s,t)} (-1)^{s+t} a_{kpst} \frac{\partial^{s+t} [c_k^{u_1} d_k^{u_2} \varphi]}{\partial u_1^s\, \partial u_2^t} = 0.$$

Пусть

$$\begin{aligned} c_k^{u_1} &= v_1\,; \\ d_k^{u_2} &= v_2\,. \end{aligned} \tag{193}$$

Уравненіе (192) преобразуется тогда въ слѣдующее:

$$\sum_{k=0}^{k=m}\sum_{p=0}^{p=n}\sum_{(s,t)}(-1)^{s+t}a_{kpst}(lgc_k)^s(lgd_k)^t\nabla^s_{v_1}\Delta^t_{v_2}[v_1v_2\varphi_1]=0. \tag{194}$$

Порядокъ этого уравненія (194) опредѣляется наибольшимъ изъ чиселъ $s+t$. Въ случаѣ, если коэффиціенты уравненія (189) представляютъ цѣлыя линейныя функціи перемѣнныхъ x и y, уравненіе (194) перваго порядка.

Тотъ же пріемъ примѣняется къ уравненію вида (189) съ m независимыми перемѣнными.

При помощи того же процесса весьма просто рѣшается вопросъ о совмѣстности нѣсколькихъ уравненій типа (189), или же системы уравненій, состоящей изъ уравненій вида (189) и уравненій другихъ родовъ, о которыхъ у насъ шла рѣчь въ предыдущемъ, и содержащей одну искомую функцію. Но на этомъ мы останавливаться не станемъ.

§ 7.

Здѣсь мы обнаружимъ возможность примѣненія метода опредѣленныхъ интеграловъ къ нѣкоторымъ оперативнымъ уравненіямъ.

Обозначимъ чрезъ $\varphi(x)$ функцію, выражаемую рядомъ:

$$\varphi(x)=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}A_kx^k. \tag{195}$$

Тогда чрезъ $\varphi\left(\frac{d}{dx}\right)$ будемъ опредѣлять такую операцію.

$$\varphi\left(\frac{d}{dx}\right)=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}A_k\frac{d^k}{dx^k}. \tag{196}$$

Пусть будутъ $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\cdots$, $\varphi_n(x)$ функціи характера функціи $\varphi(x)$.

Разсмотримъ уравненіе:

$$(197)\quad \varphi_1\left(\frac{d}{dx}\right)x^{m_1}y+\varphi_2\left(\frac{d}{dx}\right)x^{m_2}y+\cdots+\varphi_n\left(\frac{d}{dx}\right)x^{m_n}y=0,$$

гдѣ m_1, m_2, $\cdots$, m_n цѣлыя положительныя числа.

Ищемъ функцію y въ формѣ:

$$(198)\quad y=\int\limits_{L_1} e^{ux}\eta\, du,$$

гдѣ L_1 дозволенный путь.

Внесемъ выраженіе (198) для y въ соотношеніе (197). Будемъ имѣть:

$$(199)\quad \int\limits_{L_1}\varphi_1\left(\frac{d}{dx}\right)x^{m_1}e^{ux}\eta\, du+\int\limits_{L_1}\varphi_2\left(\frac{d}{dx}\right)x^{m_2}e^{ux}\eta du+\cdots$$
$$\cdots+\int\limits_{L_1}\varphi_n\left(\frac{d}{dx}\right)x^{m_n}e^{ux}\eta du=0,$$

или:

$$(199')\quad \int\limits_{L_1}\varphi_1\left(\frac{d}{dx}\right)\frac{d^{m_1}e^{ux}}{du^{m_1}}\eta du+\int\limits_{L_1}\varphi_2\left(\frac{d}{dx}\right)\frac{d^{m_2}e^{ux}}{du^{m_2}}\eta\, du+\cdots$$
$$\cdots+\int\limits_{L_1}\varphi_n\left(\frac{d}{dx}\right)\frac{d^{m_n}e^{ux}}{du^{m_n}}\eta du=0.$$

Это соотношеніе, очевидно, можно написать слѣдующимъ образомъ:

$$(200)\quad \int\limits_{L_1}\frac{d^{m_1}\varphi_1(u)e^{ux}}{du^{m_1}}\eta du+\int\limits_{L_1}\frac{d^{m_2}\varphi_2(u)e^{ux}}{du^{m_2}}\eta\, du+\cdots$$
$$\cdots+\int\limits_{L_1}\frac{d^{m_n}\varphi_n(u)e^{ux}}{du^{m_n}}\eta\, du=0.$$

Отсюда послѣ интеграціи по частямъ найдемъ:

$$(201)\quad \int\limits_{L_1}e^{ux}\left[(-1)^{m_1}\varphi_1(u)\frac{d^{m_1}\eta}{du^{m_1}}+(-1)^{m_2}\varphi_2(u)\frac{d^{m_2}\eta}{du^{m_2}}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+(-1)^{m_n}\varphi_n(u)\frac{d^{m_n}\eta}{du^{m_n}}\right]du=0.$$

Выберемъ теперь η такъ, чтобы имѣло мѣсто:

$$(-1)^{m_1}\varphi_1(u)\frac{d^{m_1}\eta}{du^{m_1}}+(-1)^{m_2}\varphi_2(u)\frac{d^{m_2}\eta}{du^{m_2}}+$$
$$\cdots+(-1)^{m_n}\varphi_n(u)\frac{d^{m_n}\eta}{du^{m_n}}=0. \tag{202}$$

Примѣръ I. Положимъ, что дано уравненіе:

$$sn\left(\frac{d}{dx}\right)xy+cs\left(\frac{d}{dx}\right)y=0. \tag{203}$$

Для η имѣемъ условіе:

$$sn\ u\ \frac{d\eta}{du}-cs\ u\ \eta=0. \tag{204}$$

Значитъ, η имѣетъ составъ:

$$\eta=const.\ sn\ u. \tag{205}$$

Искомые интегралы уравненія (203) содержатся въ слѣдующемъ выраженіи:

$$y=const.\int\limits_L e^{ux}\ sn u\ du. \tag{206}$$

Примѣръ II. Пусть будетъ:

$$e^{\frac{d}{dx}}xy+y=0. \tag{207}$$

Для η имѣемъ условіе:

$$e^u\frac{d\eta}{du}=\eta. \tag{208}$$

$$\eta=e^{-e^{-u}}. \tag{209}$$

Значитъ, интегралы уравненія (207) содержатся въ выраженіи:

$$y=\int\limits_\Lambda e^{ux-e^{-u}}du. \tag{210}$$

Положимъ, что функція $\varphi(x,y)$ имѣетъ такое разложеніе:

$$\varphi(x,y)=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\sum_{p=-\infty}^{p=\infty}A_{kp}x^ky^p. \tag{211}$$

Тогда операцію $\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ будемъ опредѣлять такъ:

$$(212) \qquad \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \sum_{p=-\infty}^{p=\infty} A_{kp} \frac{\partial^k}{\partial x^k} \frac{\partial^p}{\partial y^p}.$$

Пусть будутъ $\varphi_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y) \cdots$, $\varphi_p(x,y)$ функціями характера функціи $\varphi(x,y)$.

Разсмотримъ уравненіе:

$$(213) \qquad \sum_{k=0}^{k=p} \varphi_k\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) x^{m_k} y^{n_k} u = 0.$$

Ищемъ функцію u въ формѣ:

$$(214) \qquad u = \\ = \int_{L_1} e^{u_1 x} du_1 \int_{L_2} e^{u_2 y} v\, du_2,$$

гдѣ L_1 и L_2 дозволенные пути.

Будемъ имѣть:

$$(215) \qquad \sum_{k=0}^{k=p} \varphi_k\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) x^{m_k} y^{n_k} \int_{L_1} e^{u_1 x} du_1 \int_{L_2} e^{u_2 y} v\, du_2 = 0,$$

или:

$$(215') \qquad \sum_{k=0}^{k=p} (-1)^{m_k} \int_{L_1} e^{u_1 x} \varphi_k\left(u_1, \frac{\partial}{\partial y}\right) du_1 \int_{L_2} e^{u_2 y} y^{n_k} \frac{\partial^{m_k} v}{\partial u_1^{m_k}} du_2 = 0.$$

Отсюда легко находимъ:

$$(216) \qquad \sum_{k=0}^{k=p} (-1)^{m_k+n_k} \int_{L_1} e^{u_1 x} du_1 \int_{L_2} \varphi_k(u_1, u_2) e^{u_2 y} \frac{\partial^{m_k+n_k} v}{\partial u_1^{m_k} \partial u_2^{n_k}} du_2 = 0.$$

Выберемъ функцію v подъ условіемъ, чтобы имѣло мѣсто:

$$(217) \qquad \sum_{k=0}^{k=p} (-1)^{m_k+n_k} \varphi_k(u_1, u_2) \frac{\partial^{m_k+n_k} v}{\partial u_1^{m_k} \partial u_2^{n_k}} = 0.$$

При такомъ выборѣ v, выраженіе (214) есть интегралъ уравненія (213).

Если наибольшее изъ чиселъ $m_k + n_k$ единица, уравненіе (217) перваго порядка.

Добавленіе къ §§ 1 и 2 главы VI.

Результаты §§ 1 и 2 главы VI получены нами въ предположеніи, что алгебраическія уравненія, отъ которыхъ зависитъ видъ подъинтегральныхъ функцій, имѣютъ всѣ корни различные. Предлагаемый здѣсь пріемъ чуждъ этого недостатка. Замѣтимъ, что пріемъ, о которомъ здѣсь идетъ рѣчь, похожъ на извѣстный методъ Cauchy [1]). Должно однако замѣтить, что это сходство чисто внѣшнее, — по существу же они различны.

§ 1.

Разсмотримъ предварительное обыкновенное линейное уравненіе съ постоянными коэффиціентами однородной формы:

$$f\left(\frac{d}{dx}\right)y = \frac{d^n y}{dx^n} + A_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + A_n y = 0. \tag{1}$$

Ищемъ интегралъ его въ формѣ:

$$y = \int\limits_L e^{ux}\psi(u)du, \tag{2}$$

гдѣ L дозволенный путь.

Внеся это выраженіе для y въ соотношеніе (1), получимъ:

$$f\left(\frac{d}{dx}\right)y = \int\limits_L e^{ux}f(u)\psi(u)\,du = 0. \tag{3}$$

Послѣднее же условіе всегда соблюдается, если $\psi(u)$ имѣетъ составъ:

$$\psi(u) = \frac{l(u)}{f(u)}, \tag{4}$$

гдѣ $l(u)$ произвольная цѣлая алгебраическая функція перемѣннаго u.

---

[1]) „Mémoire sur l'intégration des équations linéaires". Exercices d'Analyse et de Physique mathématique, t. 1. Paris, 1840, p. 53—100. Также многіе его мемуары, указанные во введеніи.

Значитъ, искомыя рѣшенія уравненія (1) содержатся въ слѣдующемъ выраженіи:

(5) $$y = \int_L e^{ux} \frac{l(u)}{f(u)} du.$$

Пусть $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k$ будутъ корнями уравненія

(6) $$f(u) = 0$$

кратности $l_1, l_2, l_3, \cdots, l_k$; такъ что имѣетъ мѣсто:

(7) $$l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_k = n.$$

За L можемъ принять путь, который выходитъ изъ $u = \infty$ въ дозволенномъ направленіи, огибаетъ точки $a_1, a_2, \cdots, a_k$ и, наконецъ, приводитъ въ $u = \infty$ въ томъ же дозволенномъ направленіи. Легко сообразить, что этотъ дозволенный путь эквивалентенъ любому простому замкнутому контуру, содержащему внутри себя точки $a_1, a_2, \cdots, a_k$. Обозначимъ чрезъ Λ какой-либо изъ такихъ контуровъ. Тогда общій интегралъ уравненія (1) можемъ представить такъ:

(8) $$y = \frac{1}{2\pi i} \int_\Lambda e^{ux} \frac{l(u)}{f(u)} du,$$

или, придерживаясь обозначенія Cauchy:

(8′) $$y = \mathcal{E} \frac{e^{ux} l(u)}{f(u)}.$$

Функцію $l(u)$, очевидно, можно считать степени $n-1$. Значитъ,

(9) $$l(u) = l_1(u) = a_0 + a_1 u + \cdots + a_{n-1} u^{n-1}.$$

Послѣ этого соотношеніе (8′) можно написать такъ:

(10) $$y = l_1\left(\frac{d}{dx}\right) \mathcal{E} \frac{e^{ux}}{f(u)}.$$

$\mathcal{E} \frac{e^{ux}}{f(u)}$ есть главная функція Cauchy. Обозначая ее по его примѣру чрезъ $\theta(x)$, будемъ имѣть окончательно:

(10′) $$y = l_1\left(\frac{d}{dx}\right) \theta(x).$$

Легко видѣть, что для $x = 0$ имѣютъ мѣсто:

$$y_{x=0} = a_{n-1};$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = a'_{n-2};$$

. . . . (11)

. . . .

$$\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_{x=0} = a'_0.$$

Постоянныя a_0', $\cdots$, a'_{n-2} легко выражаются чрезъ a_0, a_1, $\cdots$, a_n.

Остановимся теперь на уравненіи:

$$f(D) = U_{x+n} + A_1 U_{x+n-1} + \cdots + A_n u_x = 0, \tag{12}$$

гдѣ A_1, A_2, $\cdots$, A_n постоянныя.

Ищемъ интегралъ этого уравненія въ формѣ:

$$U_x = \int_L v^x \psi(v)\, dv, \tag{13}$$

гдѣ L дозволенный путь.

Послѣ внесенія значенія u_x въ соотношеніе (12), найдемъ:

$$f(D) u_x = \int_L v^x f(v) \psi(v)\, dv = 0. \tag{14}$$

Соотношеніе (14) имѣетъ мѣсто, если $\psi\,(v)$ такого состава:

$$\psi(v) = \frac{\sigma(v)}{f(v)}, \tag{15}$$

гдѣ $\sigma\,(v)$ произвольная цѣлая функція отъ v.

Искомый интегралъ уравненія (12) представится въ формѣ:

$$u_x = \int_L v^x \frac{\sigma(v)}{f(v)}\, dv. \tag{16}$$

За L выберемъ простой замкнутый контуръ, огибающій всѣ нули функціи $f\,(v)$ и не содержащій внутри себя точки $v = 0$.

Общій интегралъ уравненія (12) напишется тогда такъ:

$$u_x = \sum v^x \frac{\sigma(v)}{f(v)}; \tag{17}$$

при чемъ за $\sigma(v)$, очевидно, можно принять полиномъ степени $n-1$:

$$\sigma(v) = \sigma_1(v) = b_0 + b_1 v + \cdots + b_{n-1} v^{n-1}. \tag{18}$$

Соотношеніе (17) можно написать также слѣдующимъ образомъ:

$$u_x = \sigma_1(D)\,\theta_1(x), \tag{19}$$

гдѣ принято:

$$\theta_1(x) = \sum \frac{v^x}{f(v)}. \tag{20}$$

Эту послѣднюю функцію назовемъ главною функціей для уравненія (12).

Легко видѣть, что для $x = 0$ имѣютъ мѣсто:

$$\begin{aligned} &\underset{x=0}{u_x} = b_{n-1};\\ &\underset{x=0}{Du_x} = b'_{n-2};\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &D^{n-1}\underset{x=0}{u_x} = b'_0. \end{aligned} \tag{21}$$

Постоянныя $b'_0, \cdots, b'_{n-2}$ легко выражаются чрезъ $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}$.

§ 2.

Пусть $\varphi(x, y)$ будетъ цѣлой алгебраической функціей степени n; при чемъ коэффиціентъ при y^n единица.

Разсмотримъ уравненіе:

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) u = 0. \tag{22}$$

Будемъ искать интегралъ его въ формѣ:

$$u = \int\limits_{\Lambda_1} e^{u_1 x}\, du_1 \int\limits_{\Lambda_2} e^{u_2 y} \psi(u_1, u_2)\, du_2, \tag{23}$$

гдѣ Λ_1 и Λ_2 суть дозволенные пути.

Послѣ подстановки выраженія (23) для u въ соотношеніе (22), получимъ:

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) u = \int\limits_{\Lambda_1} e^{u_1 x}\, du_1 \int\limits_{\Lambda_2} e^{u_2 y} \varphi(u_1, u_2) \psi(u_1, u_2)\, du_2 = 0. \tag{23'}$$

Послѣднее условіе будетъ соблюдено, если

$$\psi(u_1, u_2) = \frac{l(u_1, u_2)}{\varphi(u_1, u_2)}, \tag{24}$$

гдѣ $l(u_1, u_2)$ совершенно произвольная функція относительно u_1 и произвольная цѣлая функція по отношенію къ u_2.

Значитъ, интеграломъ уравненія (22) будетъ слѣдующее выраженіе:

$$u_x = \int\limits_{\Lambda_1} e^{u_1 x} du_1 \int\limits_{\Lambda_2} e^{u_2 y} \frac{l(u_1, u_2)}{\varphi(u_1, u_2)}\, du_2. \tag{25}$$

Обозначимъ чрезъ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ корни уравненія:

$$\varphi(u_1, u_2) = 0 \tag{26}$$

по отношенію къ u_2, а кратность ихъ соотвѣтственно чрезъ $l_1, l_2, \cdots, l_p$; такъ что

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_p = n. \tag{27}$$

Тогда, не обращая вниманіе на множитель $2\pi i$, функцію (25) можемъ изобразить такъ:

$$u_x = \int\limits_{\Lambda_1} e^{u_1 x} \sum \frac{e^{u_2 y} l(u_1, u_2)}{\varphi(u_1, u_2)}\, du_1. \tag{28}$$

За $l(u_1, u_2)$, очевидно, можно принять функцію степени $n - 1$:

$$l(u_1, u_2) = l_1(u_1, u_2) = \varphi_0(u_1) + \varphi_1(u_1) u_2 + \cdots + \varphi_{n-1}(u_1) u_2^{n-1}, \tag{29}$$

гдѣ $\varphi_0(u_1), \varphi_1(u_1), \cdots, \varphi_{n-1}(u_1)$ произвольныя функціи отъ u_1.

Обозначивъ далѣе чрезъ $\theta(u_1, y)$ выраженіе:

$$\theta(u_1, y) = \sum \frac{e^{u_2 y}}{\varphi(u_1, u_2)}, \tag{30}$$

интегралу (28) дадимъ видъ:

$$u = \int\limits_{\Lambda_1} e^{u_1 x}\varphi_0(u_1)\,\theta(u_1,y)\,du_1 + \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{\Lambda_1} e^{u_1 x}\varphi_1(u)\,\theta(u_1,y)\,du_1 +$$

(31) . . . .

. . . .

$$+\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}\int\limits_{\Lambda_1} e^{u_1 x}\varphi_{n-1}(u_1)\theta(u_1,y)\,du_1,$$

гдѣ дозволенный путь Λ_1 связанъ съ особою точкой функціи $e^{u_1 c}$.

Изъ формулы (31) находимъ:

$$u_{y=0} = \int\limits_{\Lambda} e^{u_1 x}\varphi_{n-1}(u_1)\,du_1;$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=0} = \int\limits_{\Lambda} e^{u_1 x}\varphi'_{n-2}(u_1)\,du_1;$$

(32) . . . .

. . . .

$$\left(\frac{\partial^{n-1}u}{\partial y^{n-1}}\right)_{y=0} = \int\limits_{\Lambda} e^{u_1 x}\varphi'_0(u_1)\,du_1.$$ [1)]

Въ вопросахъ физики весьма важное значеніе имѣетъ умѣнье находить подъинтегральную функцію по заданному интегралу.

Оставляя полную разработку этого вопроса до второй части работы, тутъ ограничимся частнымъ случаемъ, который дастъ понятіе о томъ пріемѣ, которому мы тамъ будемъ слѣдовать.

Отыщемъ функцію $\varphi(u)$, опредѣляемую условіемъ:

(33) $$\int\limits_{\Lambda} e^{ux}\varphi(u)\,du = \vartheta(x);$$

при чемъ $\vartheta(x)$ въ области своей особой точки α характеризуется рядомъ:

(34) $$\vartheta(x) = (x-\alpha)^{\sigma}\sum_{k=-j}^{k=\infty} A_k(x-\alpha)^k.$$

---

1) Принимая во вниманіе, что $\theta(u_1,y)$ есть интегралъ уравненія $\varphi\left(u_1,\frac{\partial}{\partial y}\right)z=0$, легко найти функціи φ_0', $\cdots$, φ'_{n-2} въ зависимости отъ $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1}$ Аналичнымъ образомъ находятся таковыя же функціи, которыя встрѣчаются въ послѣдующемъ.

Замѣтимъ что подъ Λ разумѣемъ путь, связанный исключительно съ существенно особой точкой $u = \infty$ функціи e^{ux} (см. стр. 182).

Пусть

$$\varphi(u) = e^{-\alpha u}\varphi_1(u). \tag{34}$$

Тогда соотношеніе (33) напишется такъ:

$$\int\limits_{\Lambda'} e^{u(x-\alpha)}\varphi_1(u)\,du = \vartheta(x), \tag{35}$$

гдѣ дозволенный путь Λ' того же характера, что и Λ.

Преобразуемъ далѣе интегралъ $\int\limits_{\Lambda'} e^{u(x-\alpha)}\varphi_1(u)\,du$ къ новому перемѣнному интеграціи v, связанному съ прежнимъ посредствомъ соотношенія:

$$u = \frac{v}{x-\alpha}. \tag{36}$$

Будемъ имѣть:

$$\int\limits_{\Lambda'} e^{u(x-\alpha)}\varphi_1(u)\,du = \frac{1}{x-\alpha}\int_{-\infty}^{\overline{(0)}} e^{v}\varphi_1\left(\frac{v}{x-\alpha}\right)dv. \tag{37}$$

Итакъ, должно быть:

$$\int_{-\infty}^{\overline{(0)}} e^{v}\varphi_1\left(\frac{v}{x-\alpha}\right)dv = (x-\alpha)^{\sigma+1}\sum_{k=-j}^{k=\infty} A_k(x-\alpha)^k. \tag{38}$$

Полагаемъ:

$$\varphi_1\left(\frac{v}{x-\alpha}\right) = \left(\frac{x-\alpha}{v}\right)^{\sigma+1}\sum_{k=-j}^{k=\infty} B_k\left(\frac{x-\alpha}{v}\right)^k. \tag{39}$$

Въ силу (39), соотношеніе (38) представится такъ:

$$\begin{gathered}(x-\alpha)^{\sigma+1}\sum_{k=-j}^{k=\infty} B_k(x-\alpha)^k\int_{-\infty}^{\overline{(0)}} e^{v}v^{-\sigma-k-1}\,dv = \\ = (x-\alpha)^{\sigma+1}\sum_{k=-j}^{k=\infty} A_k(x-\alpha)^k.\end{gathered} \tag{40}$$

Отсюда находимъ:

(41)
$$B_k = \frac{A_k}{\int_{-\infty}^{(0)} e^v v^{-\sigma-k-1} dv} = -\frac{e^{-2\pi\sigma i} A_k}{\Gamma(-\sigma-k)}.$$

Здѣсь мы предполагаемъ σ отличнымъ отъ цѣлаго отрицательнаго числа.

Искомая функція $\varphi(u)$ въ области $u=\infty$ имѣетъ такое разложеніе:

(42)
$$\varphi(u) = -e^{-2\pi\sigma i} e^{-\alpha u} u^{-\sigma-1} \sum_{k=-j}^{k=\infty} \frac{A_k u^{-k}}{\Gamma(-\sigma-k)}$$

Приложимъ предыдущіе результаты къ уравненію:

(43)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Имѣемъ:

(44)
$$\theta(u_1, y) = \mathcal{E} \frac{e^{u_2 y}}{u_1^2 + u_2^2} = \frac{sn(u_1 y)}{u_1}.$$

Искомый интегралъ уравненія (43) напишется въ формѣ:

(45)
$$u = \int_{\Lambda_1} e^{u_1 x} \varphi_0(u_1) \frac{sn(u_1 y)}{u_1} du_1 + \int_{\Lambda_1} e^{u_1 x} \varphi_1(u_1)\, cs(u_1 y)\, du_1.$$

Опредѣлимъ теперь $\varphi_0(u_1)$ и $\varphi_1(u_1)$ при условіи, что

(46)
$$u_{y=0} = \int_{\Lambda_1} e^{u_1 x} \varphi_1(u_1)\, du_1 = A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \int_{\Lambda_1} e^{u_1 x} \varphi_0(u_1)\, du_1 = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots = e^x.$$

Подъ Λ_1 разумѣемъ путь, связанный исключительно съ $u=\infty$, какъ въ предыдущемъ случаѣ (путь Λ).

Будемъ имѣть:

$$\varphi_1(u_1)=\frac{i}{2\pi}\left[\frac{A_0}{u_1}+\frac{1.A_1}{u_1^2}+\cdots+\frac{1.2\cdots n A_n}{u_1^{n+1}}\right];$$

$$\varphi_0(u_1)=\frac{i}{2\pi}\left[\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_1^2}+\frac{1}{u_1^3}+\frac{1}{u_1^4}+\cdots+\frac{1}{u_1^k}+\cdots\right]. \tag{47}$$

Пусть $f(x, y, z)$ будетъ цѣлой алгебраической функціей степени n; при чемъ коэффиціентъ при z^n единица.

Разсмотримъ уравненіе:

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) u=0. \tag{48}$$

Ищемъ интегралъ его въ формѣ:

$$u=\int\limits_L e^{u_1 x}\,du_1\int\limits_M e^{u_2 y}\,du_2\int\limits_N e^{u_3 z}\,\psi(u_1,u_2,u_3)\,du_3, \tag{49}$$

гдѣ L, M и N дозволенные пути.

Внеся это выраженіе для u въ уравненіе (48), будемъ имѣть:

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) u=$$

$$=\int\limits_L e^{u_1 x}\,du_1\int\limits_M e^{u_2 y}\,du_2\int\limits_N e^{u_3 z} f(u_1,u_2,u_3)\,\psi(u_1,u_2,u_3)\,du_3=0. \tag{50}$$

Послѣднее соотношеніе на самомъ дѣлѣ будетъ имѣть мѣсто, если $\psi(u_1, u_2, u_3)$ опредѣляется такимъ образомъ:

$$\psi(u_1,u_2,u_3)=\frac{l(u_1,u_2,u_3)}{f(u_1,u_2,u_3)}, \tag{51}$$

гдѣ $l(u_1, u_2, u_3)$ есть произвольная функція u_1 и u_2 и произвольная цѣлая функція u_3.

Функцію $l(u_1, u_2, u_3)$ относительно u_3 можно считать степени $n-1$. Значитъ, можно положить:

$$l(u_1, u_2, u_3) = \varphi_0(u_1, u_2) + \varphi_1(u_1, u_2) u_3 + \cdots + \varphi_{n-1}(u_1, u_2) u_3^{n-1}, \tag{52}$$

гдѣ $\varphi_0(u_1, u_2)$, $\varphi_1(u_1, u_2)$, $\cdots$, $\varphi_{n-1}(u_1, u_2)$ суть произвольныя функціи u_1 и u_2.

Полагая, что

(53) $$\theta(u_1, u_2, z) = \mathcal{E} \frac{e^{u_3 z}}{f(u_1, u_2, u_3)},$$

искомый интегралъ уравненія (48) напишемъ такъ:

$$\int\limits_L e^{u_1 x} du_1 \int\limits_M e^{u_2 y} \varphi_0(u_1, u_2)\, \theta(u_1, u_2, z)\, du_2 +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \int\limits_L e^{u_1 x} du_1 \int\limits_M e^{u_2 y} \varphi_1(u_1, u_2)\, \theta(u_1, u_2, z)\, du_2 +$$

. . . .

(54) . . . .

$$+ \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} \int\limits_L e^{u_1 x} du_1 \int\limits_M e^{u_2 y} \varphi_{n-1}(u_1, u_2)\, \theta(u_1, u_2, z)\, du_2 .$$

Выраженіе (54) даетъ:

$$u_{z=0} = \int\limits_L e^{u_1 x} du_1 \int\limits_M e^{u_2 y} \varphi_{n-1}(u_1, u_2)\, \theta(u_1, u_2, z)\, du_2 ;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0} = \int\limits_L e^{u_1 x} du_1 \int\limits_M e^{u_2 y} \varphi'_{n-2}(u_1, u_2) \theta(u_1, u_2, z)\, du_2;$$

(55) . . . .

. . . .

$$\left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial z^{n-1}}\right)_{z=0} = \int\limits_L e^{u_1 x} du_1 \int\limits_M e^{u_2 y} \varphi'_0(u_1, u_2)\, \theta(u_1, u_2, z)\, du_2.$$

Примѣнимъ предыдущіе результаты къ уравненію:

(55′) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Имѣемъ прежде всего:

$$\theta(u_1, u_2, z) = \sum \frac{e^{u_3 z}}{u_1^2+u_2^2+u_3^2} = \tag{56}$$

$$\frac{sn\,(\sqrt{u_1^2+u_2^2})z}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}}. \tag{57}$$

Функція u представится слѣдующимъ образомъ:

$$u = \int\limits_{L_1} e^{u_1 x}\, du_1 \int\limits_{M_1} e^{u_2 y} \frac{\varphi_0(u_1, u_2)}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}}\, sn\,(\sqrt{u_1^2+u_2^2})\, z\, du_2 + \tag{58}$$

$$+ \int\limits_{L_1} e^{u_1 x}\, du_1 \int\limits_{M_1} e^{u_2 y} \varphi_1(u_1, u_2)\, cs\,(\sqrt{u_1^2+u_2^2})\, z\, du_2.$$

Отсюда находимъ:

$$u_{z=0} = \int\limits_{L_1} e^{u_1 x}\, du_1 \int\limits_{M_1} e^{u_2 y}\, \varphi_1(u_1, u_2)\, du_2;$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_{z=0} = \int\limits_{L_1} e^{u_1 x}\, du_1 \int\limits_{M_1} e^{u_2 y} \varphi_0(u_1, u_2)\, du_2. \tag{58'}$$

Важный вопросъ о нахожденіи подъинтегральныхъ функцій предыдущихъ интеграловъ, если извѣстны самые интегралы, будетъ во всей полнотѣ рѣшенъ нами во второй части нашей работы. Тутъ же мы остановимся на одномъ примѣрѣ.

Положимъ, что въ выраженіи (58) требуется опредѣлить составъ функцій $\varphi_1(u_1, u_2)$ и $\varphi_0(u_1, u_2)$ такъ, чтобы имѣли мѣсто:

$$\int\limits_{L_1} e^{u_1 x}\, du_1 \int\limits_{M_1} e^{u_2 y}\, \varphi_1(u_1, u_2)\, du_2 = e^{x+y}; \tag{59}$$

$$\int\limits_{L_1} e^{u_1 x}\, du_1 \int\limits_{M_1} e^{u_2 y} \varphi_0(u_1, u_2) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \sum_{p=0}^{p=k} A_{kp}\, x^{k-p} y^p.$$

Допустимъ, что дозволенные пути L_1 и M_1 связаны только съ существенно особою точкою ∞ функцій $e^{u_1 x}$ и $e^{u_2 y}$.

Въ виду предыдущихъ изслѣдованій, заключаемъ, что

$$\varphi_1(u_1, u_2) = -\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_1^2}+\frac{1}{u_1^3}+\cdots+\frac{1}{u_1^k}+\cdots\right)$$

$$\Big| \quad \left(\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_2^2}+\frac{1}{u_2^3}+\cdots+\frac{1}{u_3^k}+\cdots\right);$$

(60)

$$\varphi_0(u_1, u_2) = -\frac{1}{4\pi^2}\sum_{k=0}^{k=n}\sum_{p=0}^{p=k}\frac{(k-p)!\,p!\,A_{kp}}{u_1^{k-p+1}\,u_2^{p+1}}.$$

Обозначимъ чрезъ $\varphi(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m)$ цѣлую алгебраическую функцію степени n; при чемъ коэффиціентъ при x_m^n единица.

Возьмемъ уравненіе:

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right) u = 0. \tag{61}$$

Положимъ, что

$$u = \int_L e^{u_1 x_1} du_1 \int_M e^{u_2 y}\, du_2 \cdots \int_R e^{u_m x_m} \psi(u_1, u_2, \cdots, u_m)\, du_m, \tag{62}$$

гдѣ L, M, $\cdots$, R дозволенные пути.

Послѣ подстановки этого выраженія для u въ уравненіе (61) получимъ:

(63)
$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right) u =$$

$$= \int_L e^{u_1 x_1} du_1 \int_M e^{u_2 x_2} du_2 \cdots \int_R e^{u_m x_m} \psi(u_1, u_2, \cdots, u_m)\, \varphi(u_1, \cdots, u_m)\, du_m = 0.$$

Находимъ для $\psi(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ такое выраженіе:

$$u = \int_L e^{u_1 x_1} du_1 \int_M e^{u_2 x_2} du_2 \cdots \int_R e^{u_m x_m} \frac{l(u_1, u_2, \cdots, u_m)}{\varphi(u_1, u_2, \cdots, u_m)}\, du_m, \tag{64}$$

гдѣ $l(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ имѣетъ составъ:

$$l(u_1, u_2, \cdots, u_m) = \varphi_0(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1}) +$$

$$+ \varphi_1(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1})\, u_m + \cdots + \varphi_{n-1}(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1})\, u_m^{n-1}; \tag{65}$$

при чемъ $\varphi_0(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1})$, $\varphi_1(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1})$, $\cdots$, $\varphi_{n-1}(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1})$ произвольныя функціи перемѣнныхъ u_1, u_2, $\cdots$, u_{m-1}.

Если чрезъ $\theta(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1}, x_m)$ обозначимъ:

$$\theta(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1}.) x_m = \sum \frac{e^{u_m x_m}}{\varphi(u_1, u_2, \cdots, u_m)}, \tag{66}$$

то будемъ имѣть:

$$u = \int\limits_{L_1} e^{u_1 x_1} du_1 \int\limits_{M_1} e^{u_2 x_2} du_2 \cdots$$

$$\cdots \int\limits_{N_1} e^{u_{m-1} x_{m-1}} \varphi_0(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1}) \, \theta(u_1, u_2, \cdots, x_m) \, du_{m-1} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_m} \int\limits_{L_1} e^{u_1 x_1} du_1 \int\limits_{M_1} e^{u_2 x_2} du_2 \cdots$$

$$\cdots \int\limits_{N_1} e^{u_{m-1} x_{m-1}} \varphi_1(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1}) \, \theta(u_1, u_2, \cdots, x_m) \, du_m +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{67}$$

$$+ \frac{\partial^{n-1}}{\partial x_m^{\,n-1}} \int\limits_{L_1} e^{u_1 x_1} du_1 \int\limits_{M_1} e^{u_2 x_2} du_2 \cdots$$

$$\cdots \int\limits_{N_1} e^{u_{m-1} x_{m-1}} \varphi_{n-1}(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1}) \, \theta(u_1, u_2, \cdots, x_m) \, du_{m-1} .$$

Изъ этого выраженія для $x_m = 0$ имѣемъ:

$$\underset{x_m=0}{u} = \int\limits_{L_1} e^{u_1 x_1} du_1 \int\limits_{M_1} e^{u_2 x_2} du_2 \cdots$$

$$\cdots \int\limits_{N_1} e^{u_{m-1} x_{m-1}} \varphi_{n-1}(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1}) \, du_{m-1};$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)_{x_m=0} = \int\limits_{L_1} e^{u_1 x_1} du_1 \int\limits_{M_1} e^{u_2 x_2} du_2 \cdots$$

$$\cdots \int\limits_{N_1} e^{u_{m-1} x_{m-1}} \varphi'_{n-2}(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1}) \, du_{m-1};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{68}$$

$$\left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_m{}^{n-1}}\right)_{x_m = n} = \int\limits_{L_1} e^{u_1 x_1} du_1 \int\limits_{M_1} e^{u_2 x_2} du \cdots$$

$$\cdots \int\limits_{N_1} e^{u_{m-1} x_{m-1}} \varphi_0(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1})\, du_{m-1}\,.$$

Какъ частный видъ уравненія (61), разсмотримъ слѣдующее:

(69) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2{}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m{}^2} = 0.$$

Имѣемъ:

$$\theta(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1}, x_m) = \sum \frac{e^{u_m x_m}}{u_1{}^2 + u_2{}^2 + \cdots + u_m{}^2} =$$

(70) $$= \frac{sn\,(\sqrt{u_1{}^2 + u_2{}^2 + \cdots + u^2{}_{m-1}})\, x_m}{\sqrt{u_1{}^2 + u_2{}^2 + \cdots + u^2{}_{m-1}}}\,.$$

Искомый интегралъ уравненія (69) будемъ имѣть въ формѣ:

$$u = \int\limits_{L_1} e^{u_1 x_1} du_1 \int\limits_{M_1} e^{u_2 x_2} du_2 \cdots$$

$$\cdots \int\limits_{N_1} e^{u_{m-1} x_{m-1}} \frac{\varphi_0(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1})}{\sqrt{u_1{}^2 + \cdots + u^2{}_{m-1}}}\, sn\,(\sqrt{u_1{}^2 + \cdots + u^2{}_{m-1}})\, x_m\, du_{m-1} +$$

(71) $$+ \int\limits_{L_1} e^{u_1 x_1} du_1 \int\limits_{M_1} e^{u_2 x_2} du_2 \cdots$$

$$\cdots \int\limits_{N_1} e^{u_{m-1} x_{m-1}} \varphi_1(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1})\, cs(\sqrt{u_1{}^2 + \cdots + u^2{}_{m-1}})\, x_m\, du_{m-1}\,.$$

Отсюда находимъ:

$$u_{x_m = 0} = \int\limits_{L_1} e^{u_1 x_1} du_1 \int\limits_{M_1} e^{u_2 x_2} du_2 \cdots$$

(71') $$\cdots \int\limits_{N_1} e^{u_{m-1} x_{m-1}} \varphi_1(u_1, u_2 \cdots, u_{m-1})\, du_{m-1}\,;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)_{x_m = 0} = \int\limits_{L_1} e^{u_1 x_1} du_1 \int\limits_{M_1} e^{u_2 x_2} du_2 \cdots$$

$$\int\limits_{N_1} e^{u_{m-1} x_{m-1}} \varphi_0(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1})\, du_{m-1}\,.$$

§ 3.

Обозначивъ чрезъ $f(x, y)$ цѣлую алгебраическую функцію степени n съ коэффиціентомъ единица при y^n, разсмотримъ слѣдующее уравненіе въ конечныхъ частныхъ разностяхъ:

$$f(D_x, D_y)\, U_{x,y} = 0. \tag{72}$$

Ищемъ интегралъ его въ формѣ:

$$U_{x,y} = \int\limits_L u_1^x\, du_1 \int\limits_\Lambda u_2^y \varphi(u_1, u_2)\, du_2, \tag{73}$$

гдѣ L и Λ суть дозволенные пути.

Внеся это выраженіе для U_{xy} въ уравненіе (72), получимъ:

$$f(D_x, D_y)\, U_{xy} = \int\limits_L u_1^x\, du_1 \int\limits_\Lambda u_2^y\; \varphi(u_1, u_2) f(u_1, u_2)\, du_2 = 0. \tag{74}$$

Отсюда для $\varphi(u_1, u_2)$ находимъ:

$$\varphi(u_1, u_2) = \frac{\sigma(u_1, u_2)}{f(u_1, u_2)}, \tag{75}$$

гдѣ за $\sigma(u_1, u_2)$ можно принять цѣлую алгебраическую функцію относительно u_2 степени $n - 1$:

$$\sigma(u_1, u_2) = \varphi_0(u_1) + \varphi_1(u_1)\, u_2 + \cdots + \varphi_{n-1}(u_1)\, u_2^{n-1}; \tag{76}$$

при чемъ $\varphi_0(u_1), \varphi_1(u_1), \cdots, \varphi_{n-1}(u_1)$ произвольныя функціи отъ u_1.

Полагая, что

$$\theta_1(u_1, y) = \mathop{\mathcal{E}} \frac{u_2^y}{f(u_1, u_2)}, \tag{77}$$

будемъ имѣть интегралъ уравненія (72) въ формѣ:

$$U_{x,y} = \int\limits_{L_1} u_1^x\, du_1 \int\limits_{\Lambda_1} u_2^y\, \theta_1(u_1, y)\, du_1 +$$

$$+ D_y \int\limits_{L_2} u_1^x\, du_1 \int\limits_{\Lambda_2} u_2^y\, \theta_1(u_1, y)\, du_1 +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{78}$$

$$+D_y^{n-1}\int\limits_{L_n} u_1^x du_1 \int\limits_{\Lambda_n} u_2^y \theta_1(u_1, y)\, du_1.$$

Приложимъ предыдущіе результаты къ уравненію:

(79) $$U_{x+2,y}+U_{x,y+2}=0.$$

Имѣемъ:

(80) $$\theta_1(u_1, y)=\sum \frac{u_2^y}{u_1^2+u_2^2}=\frac{u_1^y\,\delta_1(y)}{u_1};$$

(81) $$U_{x,y}=\delta_1(u)\int\limits_{L_1} u_1^{x+y}\varphi_0(u)\frac{du_1}{u_1}+$$
$$+\delta(y)\int\limits_{L_2} u_1^{x+y}\varphi_1(u_1)\,du_1,$$

или:

(82) $$U_{x,y}=\delta_1(y)\varphi(x+y)+\delta(y)\psi(x+y);$$

(83) $$\delta_1(y)=\frac{i^y-(-i)^y}{2i};\ [1]$$
$$\delta(y)=\frac{i^y+(-i)^y}{2}.$$

Пусть $f(x,y,z)$ будетъ цѣлой алгебраической функціей степени n; при чемъ коэффиціентъ при z^n единица.

Возьмемъ уравненіе:

(84) $$f(D_x, D_y, D_z)\,U_{x,y,z}=0.$$

Ищемъ интегралъ его въ формѣ:

(85) $$U_{x,y,z}=\int\limits_{\Lambda} u_1^x du_1 \int\limits_{M} u_2^y du_2 \int\limits_{N} u_3^z \psi(u_1, u_2, u_3)\, du_3,$$

гдѣ Λ, M и N дозволенные пути.

---

[1]) Функціи $\delta_1(y)$ и $\delta(y)$, $\delta_1'(y)=\dfrac{(1+i)^y-(1-i)^y}{2i}$ и $\delta'(y)=$ $=\dfrac{(1+i)^y+(1-i)^y}{2}$, а также тригонометрическіе sny и csy обладаютъ многими сходными свойствами.

Послѣ подстановки выраженія для $U_{x,y,z}$ въ уравненіе (84) будемъ имѣть:

$$f(D_x, D_y, D_z)\,U_{x,y,z} = \\ = \int\limits_{\Lambda} u_1^x\,du_1 \int\limits_{M} u_2^y\,du_2 \int\limits_{N} u_3^z f(u_1, u_2, u_3)\,\psi(u_1, u_2, u_3)\,du = 0. \tag{86}$$

Для $\psi(u_1, u_2, u_3)$ находимъ:

$$\psi(u_1, u_2, u_3) = \frac{\sigma(u_1, u_2, u_3)}{f(u_1, u_2, u_3)}; \tag{87}$$

при чемъ

$$\sigma(u_1, u_2, u_3) = \varphi_0(u_1, u_2) + \varphi_1(u_1, u_2)\,u_3 + \cdots + \varphi_{n-1}(u_1, u_2)\,u_3^{n-1}, \tag{88}$$

гдѣ $\varphi_0(u_1, u_2)$, $\varphi_1(u_1, u_2), \cdots$, $\varphi_{n-1}(u_1, u_2)$ произвольныя функціи отъ u_1 и u_2.

Полагая, что

$$\theta_1(u_1, u_2, z) = \mathcal{E}\,\frac{u_3^z}{f(u_1, u_2, u_3)}, \tag{89}$$

искомый интегралъ уравненія (84) представимъ въ формѣ:

$$\begin{aligned} U_{x,y,z} = & \int\limits_{\Lambda_1} u_1^x du \int\limits_{M_1} u_2^y \varphi_0(u_1, u_2)\,\theta_1(u_1, u_2, z)\,du_2 + \\ & + D_z \int\limits_{\Lambda_2} u_1^x du_1 \int\limits_{M_2} u_2^y \varphi_1(u_1, u_2)\,\theta_1(u_1, u_2, z)\,du_2 + \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + D_z^{n-1} \int\limits_{\Lambda_n} u_1^x du_1 \int\limits_{M_n} u_2^y \varphi_{n-1}(u_1, u_2)\,\theta_1(u_1, u_2, z)\,du_2. \end{aligned} \tag{90}$$

Приложимъ полученные результаты къ уравненію:

$$U_{x+2,y,z} + U_{x,y+2,z} + U_{x,y,z+2} = 0. \tag{91}$$

Имѣемъ:

$$\theta(u_1, u_2, z) = \mathcal{E}\,\frac{u_3^z}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \delta_1(z)\left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\right)^{z-1}. \tag{92}$$

Искомый интегралъ уравненія (91) будетъ:

$$U_{x,y,z} = \delta_1(z) \int\limits_{\Lambda_1} u_1^x\, du_1 \int\limits_{M_1} u_2^y\, \varphi_0(u_1, u_2) \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\right)^{z-1} du_2 +$$

(93)

$$+ \delta(z) \int\limits_{\Lambda_2} u_1^x\, du_1 \int\limits_{M_2} u^y\, \varphi_1(u_1, u_2) \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\right)^z du_2.$$

Разсмотримъ наконецъ уравненіе:

(94) $$f(D_{x_1}, D_{x_2}, \cdots, D_{x_m})\, U_{x_1, x_2, \cdots, x_m} = 0,$$

гдѣ $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ цѣлая алгебраическая функція степени n; при чемъ коэффиціентъ ея при x_m^n единица.

Обозначая

(95) $$\theta_1(u_1 u_2, \cdots, u_{m-1}, x_m) = \sum \frac{u_m^{x_m}}{f(u_1 u_2, \cdots, u_m)},$$

искомый интегралъ уравненія (94) представимъ такъ:

(96)
$$U_{x_1, x_2, \cdots, x_m} = \int\limits_{\Lambda_1} u_1^{x_1}\, du_1 \cdots$$
$$\cdots \int\limits_{N_1} u_{m-1}^{x_{m-1}} \varphi_0(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1})\, \theta_1(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1}, x_m)\, du_{m-1} +$$
$$+ D_{x_m} \int\limits_{\Lambda_2} u_1^{x_1}\, du_1 \cdots$$
$$\cdots \int\limits_{N_2} u_{m-1}^{x_{m-1}} \varphi_1(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1})\, \theta_1(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1}, x_m)\, du_{m-1} +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ D_{x_m}^{n-1} \int\limits_{\Lambda_n} u_1^{x_1}\, du_1 \cdots$$
$$\cdots \int\limits_{N_n} u_{m-1}^{x_{m-1}} \varphi_{n-1}(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1})\, \theta_1(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1}, x_m)\, du_{m-1}.$$

Прилагая предыдущіе результаты къ уравненію:

(97) $$U_{x_1+2, x_2, \cdots, x_m} + U_{x_1, x_2+2, x_3, \cdots, x_m} + \cdots + U_{x_1, x_2, \cdots, x_m+2} = 0,$$

будемъ имѣть:

$$\theta_1(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1}, x_m) = \sum \frac{u_m^{x_m}}{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_m^2} =$$

$$= \delta_1(x_m)\left(\sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u^2_{m-1}}\right)^{x_m-1}; \tag{98}$$

$$U_{x_1, x_2 \cdots, x_m} = \delta_1(x_m) \int\limits_{\Lambda_1} u_1^{x_1}\, du_1 \cdots$$

$$\cdots \int\limits_{N_1} u_{m-1}^{x_{m-1}} \varphi_0(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1}) \left(\sqrt{u_1^2+\cdots+u^2_{m-1}}\right)^{x_m-1} du_{m-1} +$$

$$+ \delta(x_m) \int\limits_{\Lambda_2} u_1^{x_1}\, du_1 \cdots \tag{99}$$

$$\cdot\cdot \int\limits_{N_2} u_{m-1}^{x_{m-1}} \varphi_1(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1}) \left(\sqrt{u_1^2+\cdots+u^2_{m-1}}\right)^{x_m} du_{m-1}.$$

Въ заключеніе скажемъ, что въ тѣхъ случаяхъ, когда остаются въ силѣ формулы §§ 1 и 2 главы VI (если корни извѣстныхъ алгебраическихъ уравненій различны), эти послѣднія въ сущности совпадаютъ съ тѣми, которыя мы вывели по новому пріему въ настоящемъ параграфѣ и двухъ предшествующихъ.

ВВЕДЕНІЕ.

Идея интегрировать дифференціальныя линейныя уравненія посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ была внесена въ математику впервые Эйлеромъ [1]). Изслѣдованія его въ этомъ направленіи ограничиваются составленіемъ нѣкоторыхъ частныхъ видовъ линейныхъ дифференціальныхъ обыкновенныхъ уравненій 2-го порядка, которымъ удовлетворяютъ интегралы вида:

$$y = \int v(x,u)\, du, \tag{1}$$

гдѣ функція $v(x,u)$ имѣетъ опредѣленный составъ.

Считаемъ важнымъ отмѣтить, что Эйлеръ пользовался интегралами двухъ типовъ:

$$y = P \int e^{Qx} f(x) dx, \tag{2}$$

гдѣ P и Q суть функціи u, а $f(x)$ зависитъ только отъ x, и

$$y = \int P_1 (K + Q_1)^n\, dx; \tag{3}$$

при чемъ P_1 и Q_1 зависитъ только отъ x, а K представляетъ функцію одного u. Какъ частные случаи, въ выраженіяхъ (2) и (3) заключаются интегралы:

$$y = \int e^{ux} f(x)\, dx \tag{4}$$

[1]) Institutiones calculi integralis, vol. II, Petropolis, 1792. p. 230 — 255.

и

$$y = \int (u-x)^n f(x)\, dx. \tag{5}$$

Идею Эйлера съ большимъ успѣхомъ продолжалъ развивать Лапласъ [1]). Принявъ форму опредѣленныхъ интеграловъ, данную Эйлеромъ, этотъ математикъ держался иного плана,—онъ старался не составлять уравненія, но данныя уравненія интегрировать посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ.

Кромѣ того, онъ впервые постарался представить частныя рѣшенія обыкновенныхъ разностныхъ линейныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами въ формѣ:

$$y = \int e^{ux} f(u)\, du, \tag{6}$$

или, что въ сущности то же самое, въ формѣ:

$$y = \int v^x f(v)\, dv. \tag{7}$$

При этомъ онъ обнаружилъ, что интегрированіе всякаго таковаго уравненія при помощи интеграла (7) можетъ быть сведено въ зависимость отъ интегрированія дифференціальнаго линейнаго уравненія также съ раціональными коэффиціентами.

Уравненіе же

$$\begin{aligned} &a y_x + b y_{x+1} + \cdots + q y_{x+n} + \\ &+ x(a' y_x + b' y_{x+1} + \cdots + q' y_{x+n}) = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

гдѣ $a, b, \cdots, q, a', b', \cdots, q'$ постоянныя, такимъ путемъ преобразовано имъ въ дифференціальное линейное уравненіе перваго порядка.

Замѣтимъ также, что Лапласомъ указанъ довольно простой пріемъ для полученія частныхъ рѣшеній разностныхъ линейныхъ уравненій съ постоянными коэффиціентами и со многими независимыми перемѣнными. Признавая за Лапласомъ большую заслугу въ разсматриваемомъ отношеніи, мы должны однако сознаться, что результаты, данные имъ, требуютъ серьезной, критической разработки. Не можемъ не сдѣлать

[1]) Oeuvres complètes, t. VII, Paris, 1886, pp. 84–88, 111–180, 294–308.

тутъ одного замѣчанія. Уравненіе (8) носитъ названіе уравненія Лапласа. Это вполнѣ законно, такъ какъ, хотя Лапласъ заимствовалъ форму интеграла (7) у Эйлера, все же онъ первый далъ способъ интегрировать это уравненіе. Но съ именемъ Лапласа привыкли связывать также уравненіе:

$$(a+a'x)\frac{d^n y}{dx^n}+(b+b'x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+(q+q'x)y=0, \tag{9}$$

гдѣ a, b, $\cdots$, q, a', b', $\cdots$, q' постоянныя.

Хотя процессъ интегрированія уравненіе (9) допускаетъ тотъ же, какъ и уравненіе (6), но въ виду того обстоятельства, что во-первыхъ форма интеграла (6) принадлежитъ Эйлеру, а во-вторыхъ самъ Эйлеръ представилъ интегралъ уравненія

$$u\frac{d^2y}{du^2}-(au-n-\nu-2)\frac{dy}{du}-a(n+1)y=0, \tag{10}$$

гдѣ a, n и ν постоянныя, въ формѣ:

$$y=\int e^{ux}x^n(a-x)^\nu\,dx \tag{11}$$

при условіи, что $\nu+1>0$ и $n+1>0$ [artc. 1036], по нашему мнѣнію справедливѣе было бы называть уравненіе (9) уравненіемъ Эйлера, сохранивъ названіе Лапласовскаго за процессомъ интегрированія его при помощи интеграловъ вида (6).

Мы должны указать тутъ на важную заслугу Лапласа, — онъ пытался распространить идею Эйлера на линейныя дифференціальныя уравненія въ частныхъ производныхъ съ перемѣнными коэффиціентами. Но тутъ онъ ограничился частными видами этихъ уравненій. Такъ, напр., на стр. 294 своей Théorie analytique des probabilités уравненіе:

$$\frac{\partial u}{\partial r'}=2u+2\mu\frac{\partial u}{\partial\mu}+\frac{\partial^2u}{\partial\mu^2} \tag{12}$$

при помощи интеграла

$$u=\int\varphi\, e^{-\mu t}\,dt, \tag{13}$$

гдѣ φ зависитъ только отъ t и r', онъ преобразуетъ въ уравненіе перваго порядка:

(14) $$\frac{\partial\varphi}{\partial r'} = t^2\varphi - 2t\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,.$$

При чемъ предѣлы въ интегралѣ (13) онъ опредѣляетъ изъ условія:

(15) $$t\,\varphi\, e^{-\mu t} = 0.$$

Такимъ путемъ онъ получилъ интегралъ уравненія (12) въ формѣ:

(16) $$u = e^{-\mu^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} ds\, e^{-s^2}\,\Gamma\left(\frac{s-\mu i}{e^{2r'}}\right) + e^{-\mu^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} ds\, e^{-s^2}\,\Pi\left(\frac{s+\mu i}{e^{2r'}}\right),$$

гдѣ Γ и Π произвольныя функціи.

Въ случаѣ дифференціальныхъ линейныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ съ постоянными коэффиціентами идея Эйлера получила блестящее осуществленіе въ трудахъ Cauchy. Этотъ геніальный математикъ рядомъ удивительныхъ мемуаровъ [1]), представленныхъ въ Парижскую Академію Наукъ, создалъ особый методъ интегрировать дифференціальныя линейныя уравненія съ постоянными коэффиціентами (однородныхъ и со второю частью — функціей независимыхъ перемѣнныхъ).

Пользуясь извѣстною формулой Fourier [2]), онъ интегрированіе таковыхъ уравненій въ частныхъ производныхъ сводитъ въ зависимость отъ интегрированія обыкновенныхъ линейныхъ уравненій съ постоянными коэффиціентами. Въ виду общеизвѣстности этого метода, вошед-

---

[1]) Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants. Journal de l'École Polytechnique, t. XII, Paris, 1823. p. 511—692. Mémoire sur l'intégrations des équations linéaires. Exercices d'analyse et de physique mathématique, t. I, Paris, 1840. p. 53—100. Остальные мемуары находятся въ IV, V, VI и VII томахъ его Oeuvres complètes. [Paris. 1881-1885—1888-1892].

[2]) *Riemann.* Partielle Differentialgleichungen. Braunschweig, 1882. s. 94 - 95.

шаго въ лучшіе курсы [1]), мы не станемъ останавливаться тутъ на подробностяхъ. Достоинство метода состоитъ въ томъ, что онъ позволяетъ вполнѣ объинтегрировать многія уравненія физики и механики. Но должно замѣтить, что съ точки зрѣнія чистой науки онъ не можетъ считаться совершеннымъ. Не говоря уже о томъ, что методъ примѣняется лишь въ случаѣ дѣйствительныхъ независимыхъ перемѣнныхъ, мы во многихъ случаяхъ наталкиваемся на противорѣчія, которыя ниспровергаютъ желанные результаты. Далѣе, интегральныя формулы, дающія окончательные результаты, слишкомъ сложны, — число интеграловъ вообще въ два раза больше числа независимыхъ перемѣнныхъ. Однимъ словомъ, считая методъ весьма остроумнымъ въ основахъ, нельзя не согласиться, что онъ требуетъ еще дальнѣйшей разработки, какъ съ точки зрѣнія точности, такъ и простоты.

Одновременно съ Cauchy въ своихъ изслѣдованіяхъ по математической физикѣ опредѣленными интегралами пользовался и Poisson. Но его пріемы отличаются отъ метода Cauchy, — онъ старался общій интегралъ уравненія въ частныхъ производныхъ представить въ видѣ безконечной суммы и уже эту послѣднюю выразить въ формѣ опредѣленнаго интеграла [2]). Такимъ путемъ ему удалось вполнѣ объинтегрировать нѣкоторыя дифференціальныя уравненія со многими независимыми перемѣнными.

Дальнѣйшую разработку методъ опредѣленныхъ интеграловъ получилъ въ трудахъ цѣлаго ряда математиковъ. Прежде всего было обращено вниманіе на двучленныя дифференціальныя уравненія, которыми интересовался Эйлеръ (Inst. cal. integr., cap. X, artc. 1039, 1043, 1046 et 1047).

Исходя изъ представленія рѣшеній уравненія

$$\frac{d^n y}{dx^n} = xy \tag{17}$$

---

[1]) *C. Jordan.* Cours d'Analyse, t. III, Paris, 1896, p. 387. *Laurent.* Traité d'Analyse, t. VI, Paris, 1890, p. 183.

[2]) Mémoire sur l'intégration des équations linéaries aux différences partielles. Journal de l'École Polytechnique, t. XII, Paris, 1823. Suite du mémoire sur les intégrales définies et sur la sommation des séries. Ibidem.

въ видѣ безконечныхъ суммъ, Scherk[1]) даетъ общій интегралъ его въ формѣ:

$$(18)\quad y=\int_0^\infty e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1}}\left[B\psi+B_1\frac{d\psi}{t\,dx}+\cdots+B_{n-1}\frac{1}{t^{n-1}}\frac{d^{n-1}\psi}{dx^{n-1}}\right]dt,$$

гдѣ $B, B_1, \cdots, B_{n-1}$ произвольныя постоянныя, а ψ имѣетъ составъ:

$$(19)\quad \psi = e^{tx}+\rho^2 e^{\rho tx}+\rho^4 e^{\rho^2 tx}+\cdots+\rho^n e^{\rho^n tx};$$

при чемъ $1, \rho, \rho^2, \cdots, \rho^n$ суть корни уравненія:

$$(20)\quad \rho^{n+1}=1.$$

Въ своемъ замѣчаніи[2]) по поводу статьи Scherk'а Jacobi нѣсколько проще пишетъ результаты послѣдняго, а именно:

$$(21)\quad y=\int_0^\infty e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1}}\left[c\,e^{tx}+c_1\,\rho\,e^{\rho tx}+\cdots+c_n\,\rho^n\,e^{\rho^n tx}\right]dt;$$

при чемъ ρ есть первообразный корень уравненія (20), а постоянныя $c, c_1, c_2, \cdots, c_n$ связаны условіемъ:

$$(22)\quad c+c_1+\cdots+c_n=0.$$

Тутъ же Jacobi дѣлаетъ замѣчаніе: если

$$(23)\quad c+c_1+\cdots+c_n=m,$$

то выраженіе (21) оказывается общимъ интеграломъ уравненія

$$(24)\quad \frac{d^n y}{dx^n}=xy+m.$$

Далѣе Kummer[3]) и Lobatto[4]) объинтегрировали посредствомъ однократныхъ опредѣленныхъ интеграловъ уравненіе:

---

[1]) Crelle's Journal, Bd. 10, Berlin, 1833, s. 92—97.

[2]) Bemerkung zu der Abhandlung etc. Ibidem, s. 279.

[3]) Sur l'intégration générale de l'équation de Riccati par des intégrales définies. Crelle's Journal, Bd. XII, 1834.

[4]) Sur l'intégration des équations

$$\frac{d^n y}{dx^n}-xy=0,\quad \frac{d^2y}{dx^2}+a\,bx^n\,y=0$$

par des intégrales définies. Crelle's Journal, Bd. 17, Berlin, 1837.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\,b\,x^n y = 0. \tag{25}$$

При этомъ Kummer слѣдовалъ пріему Scherk'a, — сначала выражалъ интегралы уравненія при помощи безконечныхъ суммъ и этимъ послѣднимъ давалъ потомъ форму опредѣленныхъ интеграловъ; между тѣмъ какъ Lobatto прямо подставлялъ вмѣсто y его интегральное выраженіе и пользовался интеграціей по частямъ.

Въ другой своей статьѣ: „Note sur l'intégration de l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = x^m y \tag{26}$$

par des intégrales définies“ [1]) Kummer впервые проинтегрировалъ уравненіе (26) при условіи, что m цѣлое положительное число, посредствомъ многократныхъ опредѣленныхъ интеграловъ.

Пріемомъ Kummer'a воспользовался S. Spitzer [2]) для объинтегрированія уравненія

$$x^m \frac{d^n y}{dx^n} = \pm y, \tag{27}$$

гдѣ m цѣлое положительное число, большее $2n$.

Укажемъ тутъ на работу Tissot: „Sur un déterminant des l'intégrales définies“ [3]).

Обозначивъ чрезъ A_i интегралъ:

$$A_i = \int_i^{i+1} e^{-x} \frac{(x-a)^{n\,r}}{\varphi(x)}\,dx, \tag{28}$$

гдѣ

$$\varphi(x) = (x-a)^m\,(a_1 - x)^{m_1} \cdots (a_n - x)^{m_n}, \tag{29}$$

---

[1]) Crelle's Journal, Bd. 19.

[2]) Ueber die Integration der Differentialgleichung

$$x^m \frac{d^n y}{dx^n} = \pm y$$

durch bestimmte Integrale, Bd. 57, Berlin, 1860.

[3]) Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. XVII, Paris, 1856.

$$a_0 = a,\ m_0 = m, \tag{29'}$$

авторъ по способу Эйлера составляетъ уравненіе:

$$\sum_{k=0}^{k=n+1} \left[\frac{(k+1)\,\omega^{(k)}(a) - k\,F^{(k+1)}(a)}{\alpha_{k-1}\,\Gamma(k+2)} \frac{d^{n+1-k} A_i}{da^{n+1-k}} \right] = 0; \tag{30}$$

при этомъ

$$\omega(x) = F(x) + F(x)\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \tag{31}$$

$$F(x) = (x-a)(a_1-x)\cdots(a_n-x), \tag{32}$$

$$\alpha_k = (-1)^{n-k}(n-m)(n-1-m)\cdots(k+1-m). \tag{33}$$

Появившаяся въ печати въ 1856 году работа Weiler'a: „Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei, drei, vier und mehr Verändlichen“ [1]) представляетъ солидный, систематичный трудъ по вопросу примѣненія опредѣленныхъ интеграловъ къ интегрированію линейныхъ дифференціальныхъ уравненій. Изслѣдованія автора касаются, какъ линейныхъ уравненій обыкновенныхъ, такъ и уравненій съ частными производными 2-го порядка.

Оставляя въ сторонѣ общіе результаты, изъ которыхъ нѣкоторые не достаточно обоснованы, скажемъ, что ему удалось объинтегрировать нѣсколько частныхъ видовъ уравненій 2-го порядка, коэффиціенты которыхъ суть частные виды алгебраическихъ цѣлыхъ функцій 1-й и 2-й степени. При этомъ авторъ даетъ впервые замѣчательныя преобразованія трактуемыхъ имъ уравненій къ нормальнымъ формамъ, и процессъ интегрированія Лапласа уже примѣняетъ къ этимъ послѣднимъ.

Такъ, напр., уравненія

$$\begin{aligned} &\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{by+c}{1}\frac{dz}{dy} + \frac{fy^2+gy+h}{1}z = 0; \\ &\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{by+c}{y}\frac{dz}{dy} + \frac{fy^2+gy+h}{y^2}z = 0 \end{aligned} \tag{34}$$

онъ приводитъ къ виду:

---

[1]) Crelle's Journal, Bd. 51, Berlin, 1856.

$$y_2 \frac{d^2 z_2}{d y_2{}^2} + (y_2 + c) \frac{d z_2}{d y_2} + \frac{g z_2}{b} = 0, \tag{35}$$

а уравненіе:

$$\frac{d^2 z}{d y^2} + \frac{b y + c}{y(y+a)} \frac{d z}{d y} + \frac{f y^2 + g y + h}{(y+a)^2 y^2} z = 0 \tag{36}$$

къ виду:

$$y_2 (y_2 - 1) \frac{d^2 z_2}{d y_2{}^2} + (b y_2 + c) \frac{d z_2}{d y_2} + f z_2 = 0. \tag{37}$$

Несмотря на достоинства этой работы, мы не можемъ не упрекнуть ея автора въ незнаніи современной ему и предшествующей литературы, касающейся того же самаго предмета. Авторъ упоминаетъ имена только Эйлера и Лапласа, между тѣмъ какъ многіе солидные математики раньше него занимались разработкой подобныхъ же задачъ. Не подлежитъ сомнѣнію, что въ случаѣ обыкновенныхъ уравненій результаты, полученные Tissot, общѣе результатовъ Weiler'а.

Интегрированіемъ уравненія (37) въ формѣ:

$$x(1-x)\, y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\, y' - \alpha\beta y = 0, \tag{38}$$

посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ, какъ видно изъ словъ Heine, еще раньше Weiler'а занимался Jacobi [1]).

Этотъ математикъ значительно глубже Weiler'а проникалъ въ природу разсматриваемаго уравненія. При этомъ онъ съ замѣчательнымъ искусствомъ обходилъ трудности, которыя зависѣли отъ неудачнаго выбора путей интеграціи.

Изъ послѣдующихъ ученыхъ честь дальнѣйшей разработки идеи Эйлера принадлежитъ L. Pochhammer'у.

Этотъ математикъ задался цѣлью построить такое линейное уравненіе n-го порядка, интегралы котораго обладали бы свойствами, аналогичными свойствамъ интеграловъ гипергеометрическаго уравненія Гаусса, и которое при $n = 2$ обращалось бы въ это послѣднее.

---

[1]) „Untersuchungen über die Differentialgleichungen der hypergeometrischen Reihe". Crelle's Journal Bd. 56, 1859.

Въ своей работѣ: „Ueber hypergeometrische Functionen n-ter Ordnung" [1]) онъ даетъ такое уравненіе:

$$
\begin{aligned}
& \varphi(x)\frac{d^n y}{dx^n} - \Big[(\lambda-n)_1\,\varphi'(x)+\psi(x)\Big]\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots \\
(39)\qquad & \cdots + (-1)^{n-k}\,[(\lambda-k-1)_{n-k}\,\varphi^{(n-k)}(x) + \\
& + (\lambda-k-1)_{n-k-1}\,\psi^{(n-k-1)}(x)]\,\frac{d^k y}{dx^k} + \cdots \\
& \cdots + (-1)^n\,[(\lambda-1)_n\,\varphi^{(n)}(x)+(\lambda-1)_{n-1}\,\psi^{(n-1)}(x)]\,y = 0,
\end{aligned}
$$

гдѣ

$$
(40)\qquad \varphi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n),
$$

$$
(41)\qquad \psi(x) = \frac{b_1}{x-a_1} + \frac{b_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{b_n}{x-a_n}.
$$

Интегралы этого уравненія авторъ представляетъ въ формѣ:

$$
(42)\qquad y_{\nu\mu} = \int_{a_\mu}^{a_\nu} (u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda_1-1}\,du;
$$

$$
(43)\qquad y_\nu = \int_{a_\nu}^{x} (u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda_1-1}\,du.
$$

Большая заслуга L. Pochhammer'a, что онъ старался изслѣдовать аналитическія свойства функцій (42) и (43) непосредственно, не прибѣгая къ ихъ разложенію въ безконечныя суммы, какъ это дѣлали его предшественники.

По поводу этой статьи Фуксомъ [2]) сдѣланы были три возраженія. Одно изъ нихъ было опровергнуто самимъ Pochhammer'омъ въ статьѣ: „Ueber die Relationen zwischen hypergeometrischen Integralen n-ter Ordnung" [3]).

---

[1]) Crelle's Journal, Bd. 71, Berlin, 1869.

[2]) „Bemerkungen zu der Abhandlung über die hypergeometrische Functionen etc." Crelle's Journal, Bd. 72.

[3]) Crelle's Journal, Bd. 73.

Что же касается до двухъ другихъ возраженій, то они остаются по нашему мнѣнію во всей силѣ. Одно изъ нихъ изобличаетъ недостаточную строгость въ изысканіи представленія функціи (42) въ области точки a_k, гдѣ k отлично отъ μ и ν.

Наконецъ, Фуксъ упрекнулъ Pochhammer'а за то, что тотъ умалчиваетъ про работу Tissot, въ которой, какъ мы видѣли, даются аналогичные результаты. Хотя въ своей статьѣ: „Ueber die Relationen etc.", о которой у насъ только что была рѣчь, Pochhammer старается убѣдить, что результаты его и Tissot неоднородны, но съ приведенными тамъ доводами никакъ нельзя согласиться, — уравненіе Tissot общѣе его уравненія.

Мы уже отмѣтили новое направленіе въ развитіи метода опредѣленныхъ интеграловъ, — это изслѣдованіе аналитическихъ свойствъ интеграловъ при помощи самой интегральной формы, безъ предварительнаго разложенія интеграловъ въ безконечныя суммы.

Этого направленія Pochhammer старался по большей части держаться и въ послѣдующихъ своихъ произведеніяхъ. Особенно надо тутъ отмѣтить его работу: „Ueber eine Klasse von Functionen einer complexen Variablen, welche die Form bestimmter Integrale haben" [1]).

Въ ней онъ изслѣдуетъ аналитическія свойства интеграловъ:

$$S(x) = \int_g^h (w-x)^\lambda f(w)\, dw; \tag{44}$$

$$T(x) = \int_g^x (w-x)^\lambda f(w)\, dw, \tag{45}$$

гдѣ g, h и λ суть постоянныя.

Эта работа въ печати появилась въ 1889 году. Написана же она была авторомъ еще въ 1886 году и явилась какъ бы введеніемъ въ его трактатъ: „Ueber die Differentialgleichung der allgemeinen hypergeometrischen Reiche mit zwei endlichen singulären Puncten" [2]).

---

[1]) Crelle's Journal, Bd. 104, Berlin, 1889.
[2]) Crelle's Journal, Bd. 102, Berlin, 1888.

Эта работа по своему содержанію тѣсно примыкаетъ къ трудамъ Clausen'a [1]), Thomae [2]) и Goursat [3]). Въ ней авторъ представляетъ въ формѣ опредѣленныхъ многократныхъ интеграловъ рѣшенія уравненія:

$$x^{n-1}(x-1)\frac{d^ny}{dx^n}+x^{n-2}(a_1x-b_1)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots \tag{46}$$

$$\cdots+x(a_{n-2}x-b_{n-2})\frac{d^2y}{dx^2}+(a_{n-1}x-b_{n-1})\frac{dy}{dx}+a_ny=0,$$

гдѣ a и b суть постоянныя, а также частныхъ видовъ его для $n=3$ и $n=4$. Авторъ обнаруживаетъ, что для каждой изъ особыхъ точекъ: 0, 1 и ∞ существуетъ система n главныхъ интеграловъ (n— —кратныхъ интеграловъ), обладающихъ свойствами, аналогичными свойствамъ гипергеометрическихъ функцій уравненія Гаусса.

Работа однако не лишена и недостатковъ. Размѣры нашего введенія не позволяютъ намъ войти въ подробное разсужденіе по этому поводу. Но мы укажемъ одну неточность, которая должна была необходимо оказаться, въ виду исходной точки автора и тѣхъ путей интеграціи, которыми онъ пользуется.

Въ концѣ § 1 авторъ главные интегралы уравненія

$$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2}+[(\alpha+\beta+1)x-\rho]\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y=0 \tag{47}$$

представляетъ въ формѣ:

$$\int_0^1\Phi(u,x)\,du,\ \int_0^x\Phi(u,x)\,du \tag{48}$$

для $x=0$:

---

[1]) Crelle's Journal, Bd. 3, s. 89 und 92.

[2]) „Ueber die höheren hypergeometrischen Reihen etc." Math. Ann., Bd. 2, 1870. „Ueber die Functionen etc." Crelle's Journal, Bd. 87, 1879.

[3]) Mémoire sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur". Ann. de l'École Normale, sér. II, t. XII. „Sur une classe d'intégrales doubles". Acta Math., Bd. V, 1884.

$$\int_0^{\infty} \Phi(u,x)\,du, \int_1^x \Phi(u,x)\,du \tag{49}$$

для $x = 1$;

$$\int_0^1 \Phi(u,x)\,du, \int_{\infty}^x \Phi(u,x)\,du \tag{50}$$

для $x = \infty$,

гдѣ положено:

$$\Phi(u,x) = (u-x)^{-\beta}\, u^{\beta-\rho}\, (u-1)^{\rho-\alpha-1}. \tag{51}$$

Ошибка состоитъ въ томъ, что авторъ предполагаетъ одновременное существованіе интеграловъ каждой изъ группъ (48), (49) и (50); между тѣмъ какъ предполагаемыя имъ при этомъ условія:

$$\beta-\rho+1>0,\ \rho-\alpha>0,\ \alpha>0,\ \beta+1<0, \tag{52}$$

очевидно, не могутъ быть совмѣстны. Эта неточность отразилась во всѣхъ его послѣдующихъ изслѣдованіяхъ цитируемой статьи.

Въ тѣсной связи съ предыдущей работой находится статья Pochhammer'а: „Ueber drei lineare Differentialgleichungen vierter Ordnung" [1]). Въ ней авторъ составляетъ три линейныхъ уравненія четвертаго порядка, частныя рѣшенія которыхъ могутъ быть представлены въ формѣ многократныхъ опредѣленныхъ интеграловъ. Изъ нихъ первыя два исключительно принадлежатъ ему; но послѣднее было не новостью въ литературѣ, — какъ и самъ авторъ сознается, его трактовалъ уже Thomae [2]).

Большинство предыдущихъ изслѣдованій страдаетъ однимъ общимъ недостаткомъ, интегралы, частныя рѣшенія уравненій, имѣютъ смыслъ не при всѣхъ значеніяхъ постоянныхъ, входящихъ въ подъинтегральныя функціи. Этотъ недостатокъ, разумѣется, объясняется неудачнымъ выборомъ путей интеграціи,—за таковые въ большинствѣ случаевъ принимались простыя линіи, идущія отъ одной особой точки подъинтегральной функціи до другой.

---

[1]) Crelle's Journal, Bd. 104, 1889.

[2]) „Ueber eine Function, welche einer linearen Differential—und Differenzengleichung vierter Ordnung Genüge leistet". Halle a S. 1875, Nebert.

Замѣтимъ, что такими же путями пользовались также и другіе математики, о которыхъ у насъ еще не было рѣчи.

Прежде всего отмѣтимъ работу Goursat: „Sur une classe des fonctions représentées par des intégrales définies“ [1]). Въ ней авторъ занимается изученіемъ интеграла вида:

$$\int_g^h (v-v_1)^{\lambda_1-1}(v-v_2)^{\lambda_2-1}\cdots(v-v_k)^{\lambda_k-1}\,dv, \tag{53}$$

гдѣ $v_1, v_2, \cdots, v_k$ суть нѣкоторыя функціи x, далѣе $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ постоянныя, а g и λ представляютъ какія-либо двѣ изъ функцій $v_1, v_2, \cdots, v_k$.

Интегралы (53) явились значительнымъ обобщеніемъ тѣхъ опредѣленныхъ интеграловъ, которые изучались предшественниками. Свойства функцій вида (53) Goursat изучаетъ по пріему, выясненному Hermite'омъ въ его письмѣ къ Mittag-Leffler'у [2]). Goursat указываетъ также способъ составленія дифференціальнаго линейнаго уравненія, которому удовлетворяютъ интегралы (53). При всѣхъ своихъ достоинствахъ, работа Goursat страдаетъ нѣкоторыми недостатками. Всѣ они разъяснены въ работѣ П. А. Некрасова: „Линейныя дифференціальныя уравненія, интегрируемыя посредствомъ интеграловъ“, о которой мы еще будемъ говорить.

Къ разсматриваемому періоду слѣдуетъ отнести также работы русскаго ученаго А. В. Лѣтникова. Изъ нихъ мы укажемъ тѣ, которыя касаются интегрированія дифференціальныхъ линейныхъ уравненій.

Этотъ ученый задавался цѣлью примѣнить къ нѣкоторымъ дифференціальнымъ линейнымъ уравненіямъ особый способъ — дифференцированіе съ произвольнымъ указателемъ, основы котораго изложены имъ въ его двухъ диссертаціяхъ: „Теорія дифференцированія съ произвольнымъ указателемъ“ [3]) и „О рѣшеніи обратныхъ задачъ, зависящихъ отъ интеграловъ вида $\int_a^x (x-u)^{p-1} f(u)\,du$“ [4]).

---

[1]) Acta Mathematica, 2 : 1, Berlin, Stockholm, Paris, 1883.

[2]) Crelle's Journal, Bd. 91, Berlin, 1881, s. 54—78.

[3]) Мат. Сборн., т. 3, Москва, 1868.

[4]) Мат. Сборн., т. 7, Москва, 1874.

Уклоняясь отъ сужденія вообще объ этомъ методѣ, замѣтимъ, что въ приложеніи къ дифференціальнымъ уравненіямъ онъ представляетъ старый способъ опредѣленныхъ интеграловъ при новой символистикѣ. Съ помощью дифференцированія съ произвольнымъ указателемъ А. В. Лѣтникову удалось изыскать въ разныхъ случаяхъ частныя рѣшенія уравненія:

$$(x-a)(x-b)\frac{d^2y}{du^2}+(c+hx)\frac{dy}{dx}+ky=0. \text{ [1]} \tag{54}$$

Но должно согласиться, что, замѣнивъ символъ $[D^\rho f(x)]_a^x$ его интегральнымъ выраженіемъ и слѣдуя идеѣ Лагранжа [2]), можно было бы получить всѣ результаты, данные авторомъ. То же самое надо сказать и о двухъ его посмертныхъ статьяхъ: „Объ интегрированіи уравненія:

$$(a_n+b_n x)\frac{d^ny}{dx^n}+(a_{n-1}+b_{n-1}x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots$$
$$\cdots+(a_0+b_0x)y=0\text{“ [3])}$$

и „О гипергеометрическихъ функціяхъ высшаго порядка“ [4]). Должно однако замѣтить что авторъ указалъ новый путь для примѣненія опредѣленныхъ интеграловъ къ дифференціальнымъ уравненіямъ,—кромѣ процесса Лапласа для той же цѣли можетъ служить также процессъ Лагранжа. Кромѣ того, получены нѣкоторыя примѣчательныя рѣшенія, которыхъ не встрѣчаемъ въ работахъ предшествовавшихъ ему ученыхъ.

Недостатки указанныхъ работъ, зависящіе отъ неудачнаго выбора путей интеграціи, были устранены C. Jordan'омъ [5]). Этотъ математикъ объинтегрировалъ уравненіе Эйлера, а также уравненіе, представляющее обобщеніе уравненій L. Pochhammer'a и Tissot, при помощи опредѣленныхъ интеграловъ, которые, благодаря особенности криволи-

---

[1]) „О рѣшеніи обратныхъ задачъ и пр.“, стр. 115.

[2]) *Riemann.* Partielle Differentialgleichungen etc. Braunschweig, 1882, стр. 104.

[3]) Мат. Сборн., т. 14. Москва, 1888.

[4]) Ibidem.

[5]) Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, Vol. III, 1896, p. 240—276.

нейныхъ путей интеграціи, имѣютъ смыслъ при всѣхъ значеніяхъ постоянныхъ, входящихъ въ подъинтегральныя функціи. Пути эти принадлежатъ къ числу тѣхъ, которые мы въ своей работѣ называемъ дозволенными. Мы должны однако замѣтить, что честь введенія дозволенныхъ путей въ интегралахъ, выражающихъ рѣшенія линейныхъ уравненій, не вполнѣ принадлежитъ C. Jordan'у,— еще Riemann пользовался таковыми путями въ своей работѣ: ,,Sur le développement du quotient de deux séries hypergéométriques en fraction continue infinie" [1]), воспроизведенной Schwarz'емъ.

Идея Римана-Жордана получила широкое развитіе въ трудахъ русскаго ученаго П. А. Некрасова. Рядъ изслѣдованій его въ этомъ направленіи начинается работой: ,,Общее дифференцированіе" [2]). Въ ней авторъ, пользуясь криволинейными путями, полагаетъ широкія основанія методу, которымъ интересовались многіе математики, какъ, напр.: Лейбницъ, Яковъ и Иванъ Бернулли, Эйлеръ, Лапласъ, Фурье, Ліувилль, Лежандръ, Келландъ, С. Робертсъ, Грюнвальдъ, А. В. Лѣтниковъ и Н. Я. Сонинъ. Свои изслѣдованія авторъ облекаетъ въ такую форму, что представилась полная возможность примѣнять методъ къ интегрированію линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, коэффиціенты которыхъ суть раціональныя функціи независимаго комплекснаго перемѣннаго. Это наилучшимъ образомъ доказано имъ въ работѣ: ,,Приложеніе общаго дифференцированія къ уравненію вида $\Sigma(a_s+b_s x)\, x^s D^s y = 0$" [3]).

Послѣднее уравненіе интересовало математиковъ еще со временъ Эйлера. Эйлеръ разсматривалъ частный случай его, а именно, когда оно 2-го порядка [Inst. cal. integr., caput. x, artc. 1028, 1033, 1035]. Уравненіе, которое интегрировалъ Pochhammer [4]) при помощи многократныхъ интеграловъ, можетъ быть получено изъ уравненія $\Sigma(a_s+b_s x)\, x^s D^s y = 0$ при помощи подстановокъ:

$$x = \frac{1}{\xi}, \qquad y = \xi^{\lambda} w(\xi). \tag{55}$$

---

[1]) Oeuvres mathématiques de Riemann, traduites par L. Laugel. Paris, 1898, p. 374.

[2]) Мат. Сборн., т. 14, Москва, 1888.

[3]) Ibidem.

[4]) Crelle's Journal, Bd. 102.

Уравненіе $\Sigma(a_s+b_s x)x^s D^s y=0$ П. А. Некрасовъ изслѣдовалъ во всѣхъ деталяхъ, и смѣло можемъ утверждать, что никто такъ глубоко не проникалъ въ природу этого уравненія, какъ авторъ „Приложенія общаго дифференцированія и пр.". Вмѣстѣ съ тѣмъ ясно обнаружилось, какимъ могучимъ орудіемъ можетъ служить методъ опредѣленныхъ интеграловъ, если къ нему прилагаетъ стараніе искусный математикъ.

Далѣе, въ своей работѣ: „Приложеніе общаго дифференцированія къ задачѣ о приведеніи многократныхъ интеграловъ (въ связи съ интегрированіемъ уравненія Лапласа)" [1], авторъ, пользуясь криволинейными путями, даетъ замѣчательныя формулы приведенія многократныхъ интеграловъ. Рядъ этихъ изслѣдованій П. А. Некрасовъ заканчиваетъ своей работой: „Линейныя дифференціальныя уравненія, интегрируемыя посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ. [Москва, 1890] [2]. Объ этой работѣ намъ придется говорить въ своихъ изслѣдованіяхъ; поэтому тутъ мы ограничимся лишь общими замѣчаніями. Не подлежитъ сомнѣнію, что авторъ написалъ ее, какъ подъ вліяніемъ своихъ предшествующихъ трудовъ, такъ и статьи Goursat, о которой у насъ уже была рѣчь. Свои изслѣдованія онъ связываетъ съ интеграломъ, который представляетъ значительное обобщеніе интеграла Goursat. Это обобщеніе двоякаго рода. Во-первыхъ, подъинтегральная функція въ интегралѣ П. А. Некрасова отличается отъ таковой же функціи Goursat на показательную функцію; во-вторыхъ, авторъ пользуется путями, которые по нашей терминологіи суть дозволенные. Замѣтимъ при этомъ, что, хотя пути интеграціи по формѣ мало чѣмъ отличаются отъ путей C. Jordan'а, но между ними есть также и разница, — пути интеграціи у Павла Алексѣевича связаны съ перемѣнными точками. Авторомъ указаны два способа составленія дифференціальнаго линейнаго уравненія, которому удовлетворяютъ его интегралы. Но что особенно замѣчательно въ его работѣ, такъ этой совершенно новый способъ изыскапія аналитическихъ свойствъ опредѣленныхъ интеграловъ, — особыхъ точекъ, коэффиціентовъ обхода и пр. Благодаря этому, вполнѣ выяснилось, что методъ опредѣленныхъ интеграловъ можетъ быть разсматриваемъ какъ

---

[1]) Мат. Сборн., т. 14, Москва, 1888.

[2]) Переводъ этой статьи на нѣмецкомъ языкѣ помѣщенъ въ 38 томѣ Math. Ann.

самостоятельный способъ интегрированія дифференціальныхъ уравненій, который во многихъ случаяхъ способенъ дать болѣе полное, болѣе простое и изящное рѣшеніе вопроса сравнительно съ методомъ безконечныхъ рядовъ.

Начиная съ 1890 года, появляются въ печати статьи L. Pochhammer'a, гдѣ этотъ математикъ, повидимому совершенно не зная про работы C. Jordan'a и П. А. Некрасова, пользуется Римано-Жордановскими путями интеграціи.

Сюда относится прежде всего его работа: „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf“ [1]). Въ ней авторъ изслѣдуетъ аналитическія свойства интеграла $\int\limits_L f(u)\,du$, гдѣ L есть путь съ двойнымъ обходомъ.

Замѣтимъ, что функція $f(u)$ въ области любой своей особой точки способна къ такому представленію:

$$f(u) = (u-a)^q f_1(u)\,, \tag{56}$$

гдѣ $f_1(u)$ голоморфна въ области точки $u=a$, — иначе, придерживаясь терминологіи П. А. Некрасова [2]), функція $f(u)$ класса $(q, 0)$.

Въ концѣ статьи авторъ пользуется дозволенными путями для интегрированія гипергеометрическаго уравненія Гаусса.

Въ томъ же году Pochhammer издалъ статью: „Zur Theorie der Euler'schen Integrale“ [3]), гдѣ онъ, пользуясь криволинейными путями, полагаетъ широкія основанія Эйлеровымъ интеграламъ, — эти интегралы имѣютъ смыслъ при произвольномъ значеніи ихъ параметровъ. Замѣтимъ однако, что эта работа представляетъ дальнѣйшее развитіе идеи Hankel'я [4]) и Bigler'a [5]).

Результатами своей статьи Pochhammer пользуется для разложенія интеграловъ гипергеометрическаго уравненія Гаусса въ области ихъ особыхъ точекъ.

---

[1]) Math. Ann., Bd. 35, 1890.

[2]) Общее дифференцированіе, стр. 53.

[3]) Math. Ann., Bd. 35, 1890.

[4]) Die Euler'schen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Arguments. Schlömilch's Zeitsch. für Math. und Phys., Jahrgang 9, 1864.

[5]) Ueber Gammafunctionen mit beliebigem Parameter. Crelle's Journal, Bd. 102, 1887.

Въ послѣдующихъ своихъ двухъ работахъ: „Ueber die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten" [1]) и „Ueber einige besondere Fälle der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten" [2]) частныя рѣшенія дифференціальнаго линейнаго уравненія 2-го порядка съ цѣлыми линейными коэффиціентами Pochhammer даетъ въ формѣ опредѣленныхъ интеграловъ, взятыхъ по дозволеннымъ путямъ. При этомъ онъ, по примѣру Weiler'а [3]) и O. Schlömilch'а [4]), изслѣдуемое уравненіе приводитъ къ слѣдующимъ тремъ видамъ (при разныхъ условіяхъ относительно его коэффиціентовъ):

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(a_1x+b_1)\frac{dy}{dx}+(a_2x+b_2)\,y=0;$$

$$x\frac{d^2y}{dx}=(x-\rho)\frac{dy}{dx}+\alpha y; \tag{57}$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\rho\frac{dy}{dx}-y=0,$$

гдѣ a, b, ρ и α постоянныя, а потомъ уже интегрируетъ каждое изъ нихъ въ отдѣльности.

Далѣе, въ своей статьѣ: „Ueber eine binomische lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung" [5]) Pochhammer представляетъ частныя рѣшенія уравненія (26) при помощи многократныхъ интеграловъ, взятыхъ по дозволеннымъ путямъ. Благодаря новымъ путямъ интеграціи, авторъ своимъ изслѣдованіямъ придалъ большую полноту и общность, чѣмъ это мы видимъ въ работахъ по тому же вопросу Kummer'а. Слѣдуетъ упомянуть также статью „Ueber eine Classe von Integralen mit geschlössenen Integrationscurven" [6]).

---

[1]) Math. Ann., Bd. 36, Leipzig, 1890.

[2]) Math. Ann., Bd. 38, Leipzig, 1891.

[3]) Integration der linearen Differentialgleichungen etc. S. 123—129.

[4]) Compendium der höheren Analysis. Bd. II, Braunschweig, 1895, S. 523—531.

[5]) Math. Ann., Bd. 38, Leipzig, 1891.

[6]) Math. Ann., Bd. 37, Leipzig, 1890.

Въ ней авторъ изслѣдуетъ свойства того интеграла, изученіемъ котораго онъ занимался въ статьѣ: „Ueber eine Classe von Functionen einer complexen Variablen, welche die Form bestimmter Integrale haben“, при новомъ условіи, что пути интеграціи суть пути съ двойными обходами.

Къ тому же времени принадлежитъ работа Pochhammer'a: „Ueber die Tissot'sche Differentialgleichung“ [1]), гдѣ онъ представляетъ рѣшенія уравненія Tissot въ формѣ опредѣленныхъ интеграловъ, взятыхъ по криволинейнымъ путямъ.

Заслуживаютъ также вниманіе двѣ статьи того же автора: „Ueber eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit einem endlichen singulären Puncte“ [2]) и „Ueber die Reduction der Differentiagleichung der Reihe $F(\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n; x)$“ [3]). Въ первой изъ нихъ авторъ, прибѣгая къ криволинейнымъ путямъ, интегрируетъ посредствомъ многократныхъ интеграловъ уравненіе:

$$
\begin{gathered}
x^{n-1}\frac{d^n y}{dx^n} = x^{n-2} Q_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + x^{n-3} Q_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots \\
\cdots + x\, Q_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q_1(x)\frac{dy}{dx} + Q_0(x)\, y,
\end{gathered}
\tag{58}
$$

гдѣ $Q_{n-1}(x)$, $Q_{n-2}(x)$, $\cdots$, $Q_0(x)$ суть цѣлыя линейныя функціи.

Что же касается до второй статьи, то авторъ пользуется въ ней интеграломъ:

$$
y = \int_g^h e^{-\frac{x}{t}}\, T(t)\, dt
\tag{59}
$$

для пониженія порядка уравненія

$$
\begin{gathered}
x^{n-1}\frac{d^n y}{dx^n} + L_1 x^{n-2}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + L_{n-2}\, x\frac{d^2y}{dx^2} + \\
+ L_{n-1}\frac{dy}{dx} - y = 0,
\end{gathered}
\tag{60}
$$

гдѣ L_1, L_2, $\cdots$, L_{n-1} постоянныя.

---

[1]) Math. Ann., Bd. 37, Leipzig, 1890.

[2]) Crelle's Journal, Bd. 108, Berlin, 1891.

[3]) Crelle's Journal, Bd. 110, Berlin. 1892.

Въ тѣсной связи съ работами Pochhammer'а находится статья Graf'а: „Beiträge zur Auflösung von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten sowie von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, denen gewisse bestimmte Integrale genügen" [1]). Въ ней авторомъ представлены частныя рѣшенія нѣкоторыхъ частныхъ видовъ дифференціальныхъ линейныхъ уравненій 2-го порядка въ формѣ опредѣленныхъ интеграловъ, взятыхъ по дозволеннымъ путямъ.

Въ послѣднее время интегрированіемъ дифференціальныхъ линейныхъ уравненій посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ занимались Schlesinger, Pincherle и Hj. Mellin. Schlesinger этому вопросу посвятилъ двѣ статьи: „Ueber die Integration linearer homogener Differentialgleichungen durch Quadraturen" [2]) и „Zur Theorie der Euler'schen Transformirten einer homogenen Differentialgleichung der Fuchs'schen Klasse" [3]). Первая изъ этихъ работъ была написана авторомъ подъ вліяніемъ изученія изслѣдованія Poincaré: „Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies" [4]). Въ ней онъ занимался преобразованіемъ однихъ дифференціальныхъ линейныхъ уравненій однородной формы съ раціональными коэффиціентами въ таковыя же другія — при помощи выраженія:

$$y = \int_L (u-x)^{\lambda-1} f(u)\, du, \tag{61}$$

гдѣ L есть, согласно нашей терминологіи, дозволенный путь. При этомъ авторомъ даны интересныя соотношенія между періодами интеграловъ вида (61).

Во второй своей работѣ Schlesinger изслѣдовалъ въ томъ же направленіи уравненія Фуксовскаго класса. Въ своемъ письмѣ къ Schlesinger'у Pincherle [5]) дѣлаетъ указаніе, какъ довольно длинныя его вычисленія можно значительно облегчить введеніемъ особой операціи

---

1) Math. Ann., Bd. 45, Leipzig, 1894.

2) Crelle's Journal, Bd. 116, 1896.

3) Crelle's Journal, Bd. 117, 1897.

4) American Journal, vol. VII, 1884.

5) „Sur la transformée d'Euler". Crelle's Journal, Bd. 119, 1898.

A_s, которая въ частности совпадаетъ съ символомъ D^r общаго дифференцированія.

Что же касается до Hj. Mellin'a, то методомъ опредѣленныхъ интеграловъ онъ сталъ интересоваться еще въ 1886 году. Подъ вліяніемъ статьи Pincherle'я: „Sopra una transformatione delle equazioni differenziali lineari alle differenze, e viceversa" [1]), гдѣ этотъ послѣдній пользуется интеграломъ вида

$$y = \int_g^h x^s f(s)\, ds \tag{62}$$

для преобразованія дифференціальныхъ линейныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами въ разностныя линейныя уравненія также съ раціональными коэффиціентами, Hj. Mellin написалъ изслѣдованіе: „Ueber einen Zusammenhang zwischen gewissen linearen Differential-und Differenzengleichungen" [2]). Въ ней авторъ пользуется интеграломъ

$$U_z = \int_0^a y\, x^{z-1}\, dx, \tag{63}$$

гдѣ a нѣкоторое постоянное, для преобразованія линейныхъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами въ таковыя же разностныя. Между прочимъ онъ впервые обнаружилъ, что уравненіе $\Sigma\,(a_s + b_s x)\, x^s\, D^s y = 0$ при помощи интеграла (63) можетъ быть преобразовано въ линейное однородное разностное уравненіе 1-го перваго порядка съ раціональными коэффиціентами.

Появившаяся въ печати въ 1895 г. работа Mellin'a: „Om definita integraler, hwilka för obergränsadt växande värden etc." [3]) представляетъ продолженіе предыдущаго его изслѣдованія. Въ ней авторъ изыскиваетъ тѣ дифференціальныя уравненія, которымъ удовлетворяютъ интегралы вида:

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(z-a_1)\,\Gamma(z-a_2)\cdots\Gamma(z-a_m)}{\Gamma(z-b_1)\,\Gamma(z-b_2)\cdots\Gamma(z-b_n)}\, x^{-z}\, dz. \tag{64}$$

---

[1]) Rend. della R. Ist. Lomb. Serie II, vol. XIX.

[2]) Acta Mathematica, 9 : 1. Berlin, Stockholm, Paris, 1886.

[3]) Acta Societatis Sc. Fennicae, t. XX, 1895.

Въ числѣ таковыхъ уравненій оказывается и (64')

$$\Sigma\,(a_s + b_s x)\, x^s D^s y = 0.$$

Замѣтимъ, что нѣкоторыя изъ интеграловъ вида (64) изслѣдовались еще Pincherle'емъ въ его статьѣ: „Sulle funzione ipergeometriche generalizzate" [1]).

Въ своей статьѣ: „Ueber gewisse durch bestimmte Integrale vermittelte Beziehungen zwischen linearen Differenzialgleichungen mit rationalen Coefficienten" [2]) авторъ пользуется интегралами вида

$$y = \int_L \psi(x-t)\, \varphi(t)\, dt \tag{65}$$

и

$$\eta = \int_L \chi(xt)\, \varphi(t)\, dt, \tag{66}$$

гдѣ $\psi(x-t)$, $\chi(xt)$ и $\varphi(t)$ суть интегралы нѣкоторыхъ дифференціальныхъ линейныхъ уравненій, для преобразованія однихъ дифференціальныхъ линейныхъ обыкновенныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами въ таковыя же другія.

Далѣе въ своемъ изслѣдованіи: „Zur Theorie zweier allgemeinen Klassen bestimmter Integrale" [3]) Mellin преобразовываетъ линейныя однородныя уравненія въ частныхъ конечныхъ разностяхъ съ раціональными коэффиціентами въ дифференціальныя линейныя уравненія въ частныхъ производныхъ также съ раціональными коэффиціентами при помощи интеграловъ, которые въ случаѣ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ имѣютъ видъ:

$$\int_{(x)} \int_{(y)} \Phi(x, y)\, x^{u-1}\, y^{v-1}\, dx\, dy. \tag{67}$$

Обратный переходъ, — отъ дифференціальныхъ уравненій къ разностнымъ, — онъ выполняетъ при помощи интеграловъ, которые въ случаѣ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ имѣютъ форму:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{(u)} \int_{(v)} F(u, v)\, x^{-u}\, y^{-v}\, du\, dv. \tag{68}$$

---

[1]) Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. IV, fasc. 12—13, 1888.

[2]) Acta Societatis Sc. Fennicae, t. XXI, 1896.

[3]) Acta Societatis Sc. Fennicae, t. XXII, 1897.

Замѣтимъ, что интегралъ (67) представляетъ простое обобщеніе интеграла Эйлера (7), а выраженіе (68) интеграла Pincherle'я (62) [1].

Рядъ своихъ изслѣдованій по вопросу о примѣненіи опредѣленныхъ интеграловъ къ линейнымъ дифференціальнымъ и разностнымъ уравненіямъ Mellin закончилъ двумя работами: „Ueber die Integration partieller linearer Differentialgleichungen durch vielfache Integrale“ [2]) и „Ueber die Integration simultaner linearer Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale“ [3]).

Въ первой изъ нихъ авторъ занимается преобразованіемъ однихъ дифференціальныхъ линейныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ однородной формы съ раціональными коэффиціентами въ другія таковыя же при помощи выраженій, которыя для двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y имѣютъ видъ:

$$U = \int\limits_{(u_1)} \int\limits_{(u_2)} e^{u_1 x + u_2 y}\, \Phi(u_1, u_2)\, du_2\, du_1 \tag{69}$$

и

$$U = \int\limits_{(u_1)} \int\limits_{(u_1)} (u_1 - x)^{\lambda_2 - 1}\, (u_2 - y)^{\lambda_2 - 1}\, \Phi(u_1, u_2)\, du_2\, du_1. \tag{70}$$

Относительно этой работы сдѣлаемъ слѣдующія замѣчанія. Интегралы (69) и (70) являются простымъ обобщеніемъ интеграловъ (4) и (5) Эйлера.

Какъ мы знаемъ, честь примѣненія метода опредѣленныхъ интеграловъ къ дифференціальнымъ линейнымъ уравненіямъ въ частныхъ производныхъ съ перемѣнными коэффиціентами принадлежитъ Лапласу, а потомъ Weiler'у; между тѣмъ какъ авторъ, не упоминая именъ этихъ математиковъ, всецѣло приписываетъ заслугу въ этомъ отношеніи себѣ. Наконецъ, къ объектамъ изслѣдованія авторъ отнесся слишкомъ

---

[1]) Должно замѣтить, что интеграломъ вида (62) для другихъ цѣлей раньше Pincherle'я пользовался Риманъ въ своей статьѣ: „Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée“. Oeuvres mathématiques de Riemann, traduites par L. Laugel. Paris, 1898, p. 163.

[2]) Acta Mathematica, Bd. 22, Berlin, Stockholm, Paris, 1899.

[3]) Ibidem.

формально,—указаны широкія условія, которымъ должны удовлетворять пути интеграціи, но не выяснена природа таковыхъ путей, вслѣдствіе чего нельзя судить объ области годности тѣхъ многократныхъ интеграловъ, которые представляютъ результаты его изслѣдованій.

То же самое надо сказать и о второй статьѣ Mellin'а.

Настоящая работа посвящена дальнѣйшей разработкѣ метода опредѣленныхъ интеграловъ. Она состоитъ изъ шести главъ.

Глава I. Здѣсь мы, по примѣру Pochhammer'а, занимаемся изученіемъ двухъ интеграловъ, которые, съ точки зрѣнія путей интеграціи, представляютъ обобщеніе извѣстныхъ интеграловъ Эйлера. При изложеніи однако мы не слѣдуемъ Pochhammer'у. При этомъ нами выведены нѣкоторыя формулы, которыя не встрѣчаются у Pochhammer'а. Къ предварительному изученію нѣкоторыхъ свойствъ этихъ интеграловъ насъ побудили двѣ причины. Въ концѣ этой главы даны нами уравненія въ конечныхъ разностяхъ, интегрируемыя при помощи функцій, зависящихъ отъ $\overline{\Gamma}(x)$ и $\overline{E}(x,y)$.

Далѣе функціи $\overline{\Gamma}(x)$ и $\overline{E}(x,y)$ имѣютъ большое значеніе при разложеніи въ безконечныя суммы нѣкоторыхъ функцій, которыя изслѣдуются нами въ послѣдующихъ главахъ.

Глава II. Эта глава посвящена изученію гипергеометрическихъ интеграловъ, представляющихъ съ точки зрѣнія путей интеграціи обобщеніе гипергеометрическихъ интеграловъ Pochhammer'а. Отсутствіе въ литературѣ детальнаго изслѣдованія этихъ интеграловъ въ предлагаемой формѣ побудило насъ подробно остановиться на изысканіи аналитическихъ ихъ свойствъ. Далѣе, мы даемъ простой пріемъ построенія гипергеометрическаго уравненія Pochhammer'а. При этомъ получается одно интегральное соотношеніе, которое одновременно служитъ источникомъ происхожденія, какъ уравненія гипергеометрическаго, такъ и разностнаго уравненія Лапласа одного и того же порядка. Этимъ раскрывается тѣснѣйшая связь между этими уравненіями. Результаты, получаемые нами при этомъ, позволяютъ намъ разрѣшить уравненіе Лапласа (при условіи, что корни извѣстнаго полинома простые) посредствомъ опредѣленныхъ однократныхъ интеграловъ при помощи только алгебраическихъ дѣйствій.

Глава III. Въ этой главѣ мы изучаемъ интегралы вида:

$$(71)\qquad z = \int_L (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-x_1)^{\lambda_1-1} \cdots (u-x_m)^{\lambda_m-1}\, du,$$

которые, съ точки зрѣнія числа независимыхъ перемѣнныхъ и путей интеграціи, представляютъ обобщеніе гипергеометрическихъ интеграловъ Pochhammer'а. Замѣтимъ, что подобные интегралы въ такой формѣ еще никѣмъ не были изучаемы.

Picard'у [1]) принадлежитъ изысканіе нѣкоторыхъ свойствъ интеграла:

$$(72)\qquad \int_g^h (u-a_1)^{b_1-1} (u-a_2)^{b_2-1} (u-x)^{\lambda_1-1} (u-y)^{\lambda_2-1}\, du,$$

гдѣ a_1, a_2, b_1, b_2, λ_1, и λ_2 постоянныя, а g и h представляютъ какія-либо особыя точки подъинтегральной функціи. Замѣтимъ, что интегралы Picard'а (72) имѣютъ смыслъ только при извѣстныхъ ограниченіяхъ, налагаемыхъ на показатели b_1, b_2, λ_1 и λ_2 подъинтегральной функціи, между тѣмъ какъ наши интегралы, благодаря особаго рода выбору путей интеграціи, имѣютъ смыслъ независимо отъ значеній показателей подъинтегральной функціи. Интегралы настоящей главы мы стараемся изучить такъ же подробно, какъ это выполнено въ предыдущей главѣ по отношенію къ гипергеометрическимъ интеграламъ. Простымъ путемъ находимъ полную систему $\frac{m(m+1)}{2}$ дифференціальныхъ линейныхъ уравненій съ частными производными, которымъ удовлетворяютъ интегралы (71). При этомъ и тутъ получается одно интегральное соотношеніе, которое является источникомъ происхожденія не только этихъ дифференціальныхъ уравненій, но также и линейныхъ уравненій въ частныхъ конечныхъ разностяхъ, которымъ удовлетворяютъ интегралы вида (71), если въ нихъ считать x_1, x_2, $\cdots$, x_m постоянными, а λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_m независимыми перемѣнными. Значитъ, мы находимъ такимъ путемъ тѣсную связь между этими двумя группами уравненій, принадлежащихъ къ разнымъ вѣтвямъ анализа.

---

[1]) „Sur les fonctions de deux variables indépendantes analogues aux fonctions modulaires". Ann. de l'École Normale, 1881. „Fonctions hyperfuchsiennes". Ann. de l'École Normale, t. II, 1883.

Между прочимъ мы получаемъ тутъ одно линейное уравненіе 2-го порядка Монжской формы, полный интегралъ котораго представляется въ довольно интересной формѣ

Глава IV. Эта глава посвящена изученію интеграловъ вида:

$$y = \int_L e^W (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-\alpha_1)^{\lambda_1-1} \cdots \\ \cdots (u-\alpha_m)^{\lambda_m-1} (u-x)^{\lambda-1}\, du, \tag{73}$$

гдѣ W есть раціональная функція отъ u, не содержащая x, а L есть одинъ изъ дозволенныхъ путей. При помощи такихъ выраженій, какъ извѣстно, C. Jordan объинтегрировалъ свое уравненіе, о которомъ у насъ уже была рѣчь. Намъ принадлежитъ подробное изслѣдованіе аналитическихъ свойствъ этихъ интеграловъ. Далѣе, мы находимъ одно интегральное соотношеніе, изъ котораго легко получается, какъ уравненіе C. Jordan'а, такъ и разностное уравненіе Лапласа (болѣе общее, чѣмъ таковое же уравненіе второй главы).

Результатами, добытыми при этомъ, пользуемся для интегрированія разностнаго уравненія Лапласа (въ случаѣ, когда извѣстный полиномъ имѣетъ кратные корни) посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ только при помощи однѣхъ алгебраическихъ операцій.

Въ концѣ главы изучаемъ интегралы вида:

$$\int_L e^W (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-\alpha_1)^{d_1-1} \cdots (u-\alpha_e)^{d_e-1} (u-x_1)^{\lambda_1-1} \cdots \\ \cdots (u-x_m)^{\lambda_m-1}\, du, \tag{74}$$

гдѣ L какой-либо дозволенный путь.

При этомъ находимъ систему $\frac{m(m+1}{2}$ дифференціальныхъ линейныхъ уравненій съ частными производными, которымъ эти интегралы удовлетворяютъ, а также систему такого же числа линейныхъ уравненій въ частныхъ конечныхъ разностяхъ, которымъ удовлетворяютъ интегралы (74), если тамъ $x_1, x_2, \cdots, x_m$ постоянныя, а $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ независимыя перемѣнныя. Между прочимъ получаются три нелинейныя дифференціальныя уравненія 2-го порядка Монжскаго типа, полные интегралы которыхъ выражаются въ изящной формѣ.

Глава V. Въ началѣ этой главы мы изучаемъ аналитическія свойства интеграловъ, которые представляютъ широкое обобщеніе интеграловъ, изслѣдованныхъ нами въ предыдущихъ главахъ. Результаты этихъ изслѣдованій представили намъ основаніе примѣнить методъ опредѣленныхъ интеграловъ къ преобразованію однихъ дифференціальныхъ линейныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами въ другія таковыя же и при томъ посредствомъ процессовъ Лапласа и Лагранжа.

Пользуясь тѣми же процессами, мы преобразовываемъ линейныя разностныя уравненія съ раціональными коэффиціентами въ таковыя же дифференціальныя и наоборотъ. Тутъ же интегрируются въ окончательной формѣ нѣкоторыя разностныя уравненія. Линейныя смѣшанныя уравненія съ раціональными коэффиціентами преобразуются нами въ дифференціальныя также линейныя; при чемъ таковыя уравненія съ цѣлыми линейными коэффиціентами интегрируются нами въ окончательной формѣ при помощи однократныхъ опредѣленныхъ интеграловъ. Тутъ же указаны линейныя разностныя уравненія съ нераціональными коэффиціентами, которыя при помощи опредѣленныхъ интеграловъ приводятся къ дифференціальнымъ линейнымъ уравненіямъ съ раціональными коэффиціентами, и въ одномъ случаѣ таковыя уравненія интегрируются въ окончательной формѣ при помощи однократныхъ опредѣленныхъ интеграловъ.

Подобно Mellin'у, мы занимаемся интегрированіемъ посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ совмѣстныхъ дифференціальныхъ линейныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами; но тутъ предпочли мы итти инымъ путемъ, который по нашему мнѣнію опредѣленнѣе. Здѣсь же выясняется польза примѣненія опредѣленныхъ интеграловъ при интегрированіи совокупныхъ системъ разностныхъ и смѣшанныхъ линейныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами, а также системы одного типа линейныхъ разностныхъ уравненій съ нераціональными коэффиціентами.

Въ концѣ главы изыскиваются полныя системы уравненій съ частными производными и уравненій съ частными конечными разностями, которымъ удовлетворяютъ интегралы вида:

$$\int_L (u-x_1)^{\lambda_1-1} \cdots (u-x_m)^{\lambda_m-1} f(u)\, du. \tag{75}$$

Глава VI. Въ этой главѣ мы стараемся впервые обнаружить пользу дозволенныхъ путей при интегрированіи линейныхъ уравненій разныхъ типовъ (дифференціальныхъ, разностныхъ, смѣшанныхъ, особаго вида функціональныхъ и т. д.) со многими независимыми перемѣнными посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ. Не исчерпавъ вполнѣ вопроса въ этомъ отношеніи, мы все-же надѣемся, что достигли новыхъ результатовъ, достойныхъ вниманія математиковъ.

Въ заключеніе скажемъ, что настоящая работа представляетъ введеніе въ другую работу, въ которой надѣемся при помощи излагаемыхъ пріемовъ глубже проникнуть въ природу уравненій.

ОПЕЧАТКИ.

Стр.	*Строк.*	*Напечатано:*	*Должно быть:*
6	9 снизу	(01)	(10)
7	1 „ (направо)	$\bar{E}(a+m, b)$	$\bar{F}(a+m-1, b)$
29	9 „	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n+1)}{2}$
30	13 „	растяженный	растяжимый
31	13 сверху	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$
46		§ 5	§ 6
63	15 „	$\frac{d\eta^{k-1}}{dx^{k-2}}$	$\frac{d^{k-1}\eta}{dx^{k-1}}$
89	17 „	$e^{-2\pi(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k)}$	$e^{-2\pi(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k)i}$
111	2, 4 и 5 сверху	$[(\overline{\alpha'}\ \overline{\alpha''}\ \overline{\alpha'}\ \overline{\alpha''})]$	$[(\alpha'\ \alpha''\ \overline{\alpha'}\ \overline{\alpha''})]$
113	6 снизу	Напечатано: $\int_c^{(a_1\ a_m\ \overline{a_1}\ \overline{a_m})} (u-a_1)^{b_1-1} \dots (u-\alpha_m)^{\varepsilon_m-1}\, du$	Должно быть: $\int_c^{(a_1\ \alpha_m\ \overline{a_1}\ \overline{\alpha_m}} (u-a_1)^{b_1-1} \dots (u-\alpha_m)^{\varepsilon_m-1}\, du$
120	4 сверху	$\theta_p(u)$	$\theta_q(u)$
129	6 и 7 сверху	$e^{2\pi\lambda_q i}$	$e^{2\pi\lambda i}$
„	9 сверху	$(x-\alpha_q)^{\lambda_q}$	$(x-\alpha_q)^{\lambda}$
„	12 „	$e^{-2\pi\lambda_q i}$	$e^{-2\pi\lambda i}$

Стр.	*Строк.*	*Напечатано:*	*Должно быть:*
148	6 сверху	весьма	—
185	9 „	a_1	—
188	2 „	$e^{\frac{x}{u}}$	$e^{\frac{x}{v}}$
200	10 и 13 сверху	$e^{Z\xi}$	$e^{z\xi}$
„	13 сверху	$\frac{d}{dz}$	$\frac{df}{dz}$
245	6 „	$(1-\lambda_2)$	$(1-\lambda_1)$
246	5 „	(u_2-x_2)	$f(u_2-x_2)$
251	3 „	послѣ интеграціи по частямъ	—
298	2 „	$\varphi_0(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1})$	$\varphi_0'(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1})$