ИЗВѢСТІЯ

ВАРШАВСКАГО

ПОЛИТЕХНИЧЕСКАГО ИНСТИТУТА

ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II.

ВЫПУСКЪ I.—1901 г.

ВАРШАВА.

ВЪ ТИПОГРАФІИ ВАРШАВСКАГО УЧЕБНАГО ОКРУГА.
Краковское-Предмѣстье № 3.

1901.

Печатано по опредѣленію Совѣта Варшавскаго Политехническаго Института Императора Николая II.

Директоръ *А. Лагоріо.*

СОДЕРЖАНІЕ.

Ученый и учебный отдѣлы.

Редакторъ *И. И. Иванюковъ.*

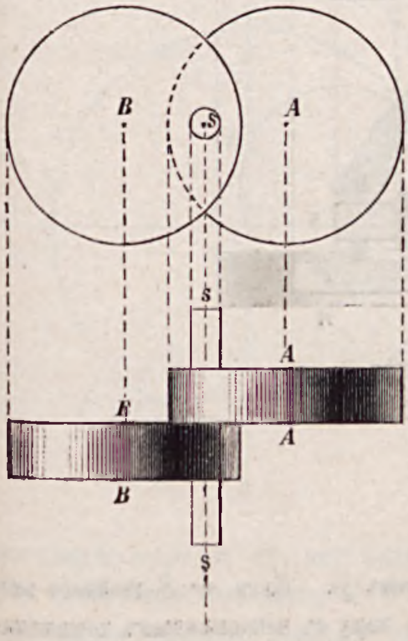
УЧЕНЫЙ И УЧЕБНЫЙ ОТДѢЛЫ.

Примѣненіе двойнаго эксцентрика къ передачѣ вращенія.

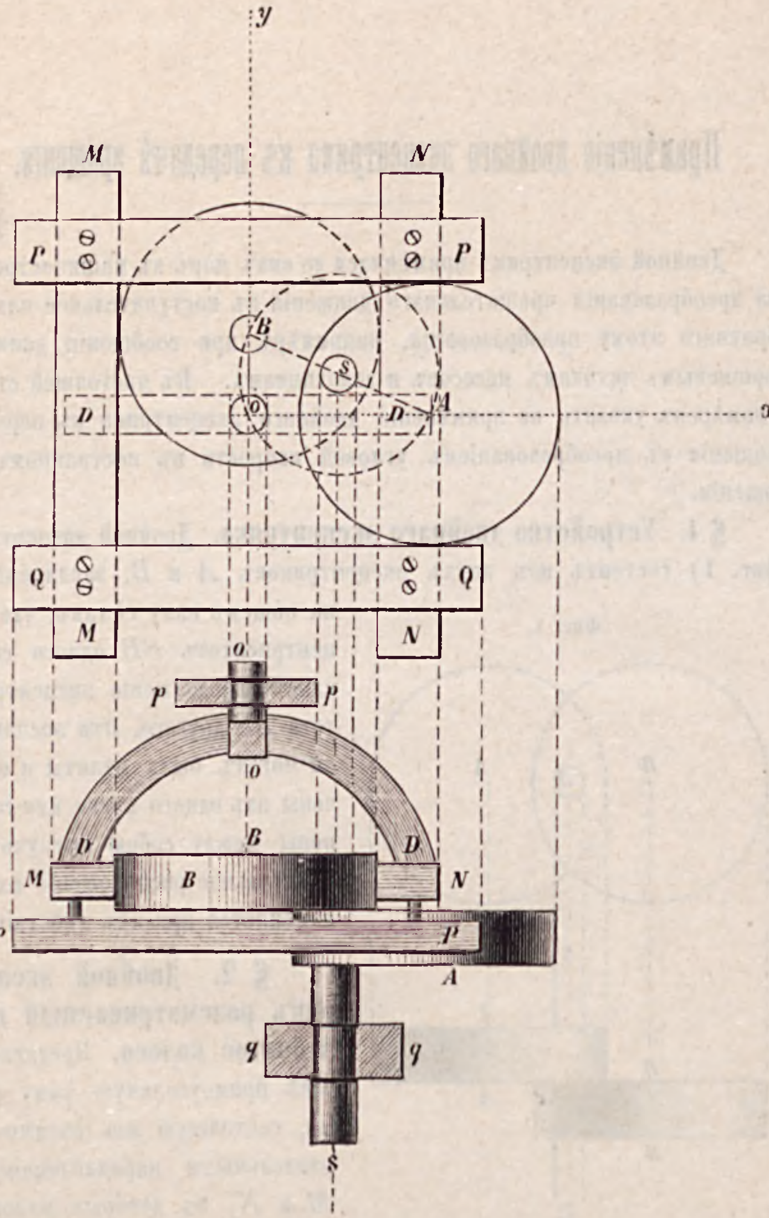
Двойной эксцентрикъ примѣнялся до сихъ поръ въ машиностроеніи для преобразованія вращательнаго движенія въ поступательное или для обратнаго этому преобразованія, напримѣръ при сообщеніи движенія поршневымъ штокамъ насосовъ и золотникамъ. Въ настоящей статьѣ я намѣренъ указать на примѣненіе двойнаго эксцентрика къ передачѣ вращенія съ преобразованіемъ угловой скорости въ постоянномъ отношеніи.

§ 1. Устройство двойнаго эксцентрика. Двойной эксцентрикъ (фиг. 1) состоитъ изъ двухъ эксцентриковъ A и B, заклиненныхъ на общемъ валу S такъ, что эксцентриситетъ SB одного составляетъ продолженіе эксцентриситета AS другого. Эти эксцентрики могутъ быть отлиты и выточены изъ одного куска или соединены между собою наглухо: относительное расположеніе ихъ не измѣняется при ихъ дѣйствіи.

Фиг. 1.



§ 2. Двойной эксцентрикъ разсматриваемый какъ зубчатое колесо. Представимъ себѣ прямоугольную раму (фиг. 2), состоящую изъ взаимно параллельныхъ параллелепипедовъ M и N, на которые наложены два другіе взаимно-параллельные параллелепипеда P и Q. Эти бруски скрѣплены между собою въ неизмѣняемую раму, отъ которой идетъ дуга D, насаженная наглухо на валъ O, составляющій вращательную

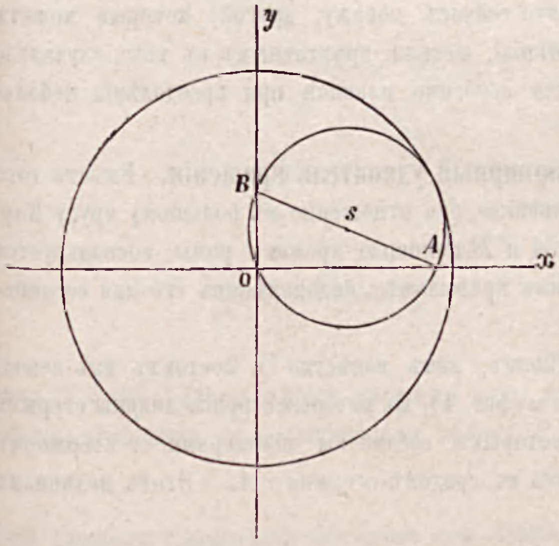


Фиг. 2.

пару съ неподвижнымъ подшипникомъ p. Валъ же S двойного эксцентрика составляетъ вращательную пару съ неподвижнымъ подшипникомъ q. Двойной эксцентрикъ AB вложенъ въ раму такъ, что одинъ изъ его круговъ касается кромокъ брусковъ P и Q, тогда какъ другой кругъ двойнаго эксцентрика касается кромокъ брусковъ M и N. Я сейчасъ постараюсь показать, что такимъ механизмомъ передается вращеніе отъ вала O къ валу S (или обратно) и при томъ такъ, что угловая скорость вала S вдвое болѣе угловой скорости вала O.

Дѣйствительно: при неподвижности рамы, и въ отсутствіи подшипника q точка A можетъ ходить только по прямой x точка-же B по прямой y. Слѣдовательно прямая AB, при неподвижности рамы, можетъ ходить своими концами по взаимно-перпендикулярнымъ прямымъ x и y пересѣкающимся въ точкѣ o. Итакъ, при неподвижности рамы, прямая AB совершаетъ хорошо извѣстное кинематикамъ *эллиптическое* движеніе. Но эллиптическое движеніе достигается, какъ извѣстно, также и катаньемъ круга (фиг. 3) внутри другаго вдвое большаго круга (круги Кардана). Если большой кругъ Кардана неподвиженъ, а концы діаметра малаго круга ходятъ по прямымъ, то малый кругъ, катясь внутри большаго, совершаетъ эллиптическое движеніе. Если же круги Кардана снабжены зубцами, и неподвижными сдѣланы ихъ центры, то между большимъ и малымъ кругомъ передача такова, что угловая скорость малаго круга вдвое болѣе угловой скорости большаго. Такъ какъ наша рама съ двойнымъ эксцентрикомъ (фиг. 2) кинематически тождественна съ кругами Кардана, то при неподвижности точекъ O и S (проэкціи осей валовъ O и S) передача будетъ именно такова, что угловая скорость двойнаго эксцентрика (представителя діаметра

Фиг. 3.



AB малаго круга Кардана) будетъ вдвое болѣе угловой скорости рамы, представительницы большаго круга Кардана или, лучше сказать, соединеннаго съ нимъ (фиг. 3) креста xoy.

Двойной эксцентрикъ нашего механизма можно разсматривать какъ зубчатое колесо [1]) съ начальною окружностью, описанною изъ S радіусомъ $SA = SB$ и съ двумя зубцами, имѣющими форму цилиндра A и цилиндра B. Эти зубцы имѣютъ здѣсь круговые профили какъ цѣвки. Рама можетъ быть разсматриваема какъ зубчатое колесо съ начальною окружностью описанною изъ O радіусомъ равнымъ AB и тоже съ двумя зубцами. Одинъ зубецъ представляется парою кромокъ брусьевъ P и Q; другой есть пара кромокъ брусьевъ M и N. Здѣсь профиль каждаго зубца есть пара взаимно параллельныхъ прямыхъ. Начальная окружность эксцентрика представляетъ собою малый, а начальная окружность рамы большой Кардановъ кругъ, и эти окружности, какъ во всякихъ правильныхъ зубчатыхъ колесахъ, катятся одна по другой.

Кривая зацѣпленія въ этомъ механизмѣ имѣетъ довольно сложное очертаніе и треніе скольженія въ немъ большое; вслѣдствіе чего онъ представляетъ болѣе теоретическій интересъ. Но изъ этого механизма можно вывести, какъ я это сейчасъ покажу, другой, который можетъ оказаться, по моему мнѣнію, весьма практичнымъ въ тѣхъ случаяхъ, когда требуется передача особенно плавная при преодолѣніи небольшихъ сопротивленій.

§ 3. Точный шарнирный удвоитель вращенія. Вмѣсто того чтобы сообщать прямолинейное (по отношенію къ большому кругу Кардана) движеніе точкамъ A и B помощью кромокъ рамы, воспользуется извѣстнымъ Чебышевскимъ прямиломъ, видоизмѣнивъ его для соединенія съ эксцентрикомъ.

Чебышевскій механизмъ, какъ извѣстно [2]), состоитъ изъ неподвижныхъ шарнировъ p и u (фиг. 4), къ которымъ присоединены стержни pq и uv, точки v и q которыхъ соединены шарнирами со стержнемъ vA, при чемъ q находится въ срединѣ стержня vA. Этотъ механизмъ

---

[1]) Круги Кардана не изображены на фиг. 2, но на фиг. 3 они изображены съ тѣми же буквами, которыя имѣются въ соотвѣтственныхъ мѣстахъ фиг. 2-ой.

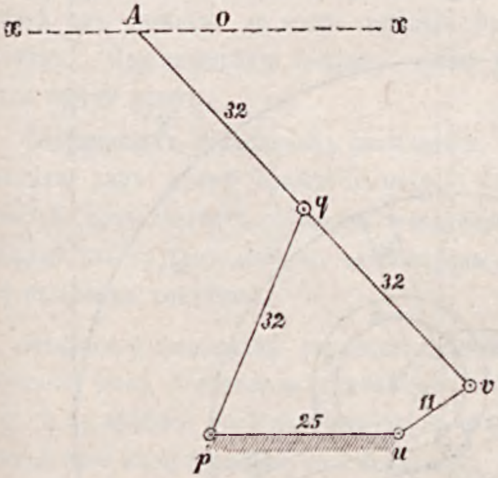
[2]) *Чебышевъ.* О простѣйшей суставчатой системѣ, доставляю-

ведетъ точку A по линіи настолько мало уклоняющейся отъ прямой, что, практически говоря, этотъ механизмъ точнѣе теоретически точныхъ прямилъ Hart'a и Peaucellier. Размѣры его указаны на фиг. 4.

Измѣнимъ механизмъ Чебышева тѣмъ, что разовьемъ конецъ стержня vA въ хомутъ эксцентрика, такъ чтобы A было въ центрѣ кольца этого хомута. Два такіе измѣненные механизма Чебышева показаны на (фиг. 5), гдѣ хомутъ одного изъ нихъ огибаетъ кругъ A, а хомутъ другого — кругъ B двойнаго эксцентрика, заклиненнаго на валу S.

Неподвижные шарниры двухъ измѣненныхъ Чебышевскихъ механизмовъ устроимъ на дисковомъ кольцѣ M (фиг. 5) съ такимъ разсчетомъ, чтобы, при неподвижности этого кольца, центры A и B хомутовъ чертили взаимно-перпендикулярные діаметры ox и oy кольца. Насадивъ хомуты измѣненныхъ Чебышевскихъ механизмовъ на круги A и B двойнаго эксцентрика и расположивъ такимъ образомъ всѣ части такъ, какъ это показано на (фиг. 5) въ двухъ проэкціяхъ, получимъ механизмъ, передающій вращеніе съ вала P на валъ Q (или обратно) такъ, что угловая с к о р о с т ь вала Q вдвое болѣе угловой скорости вала P. Неподвижный станъ (Steg) механизма съ подшипниками валовъ P и Q обозначенъ буквою

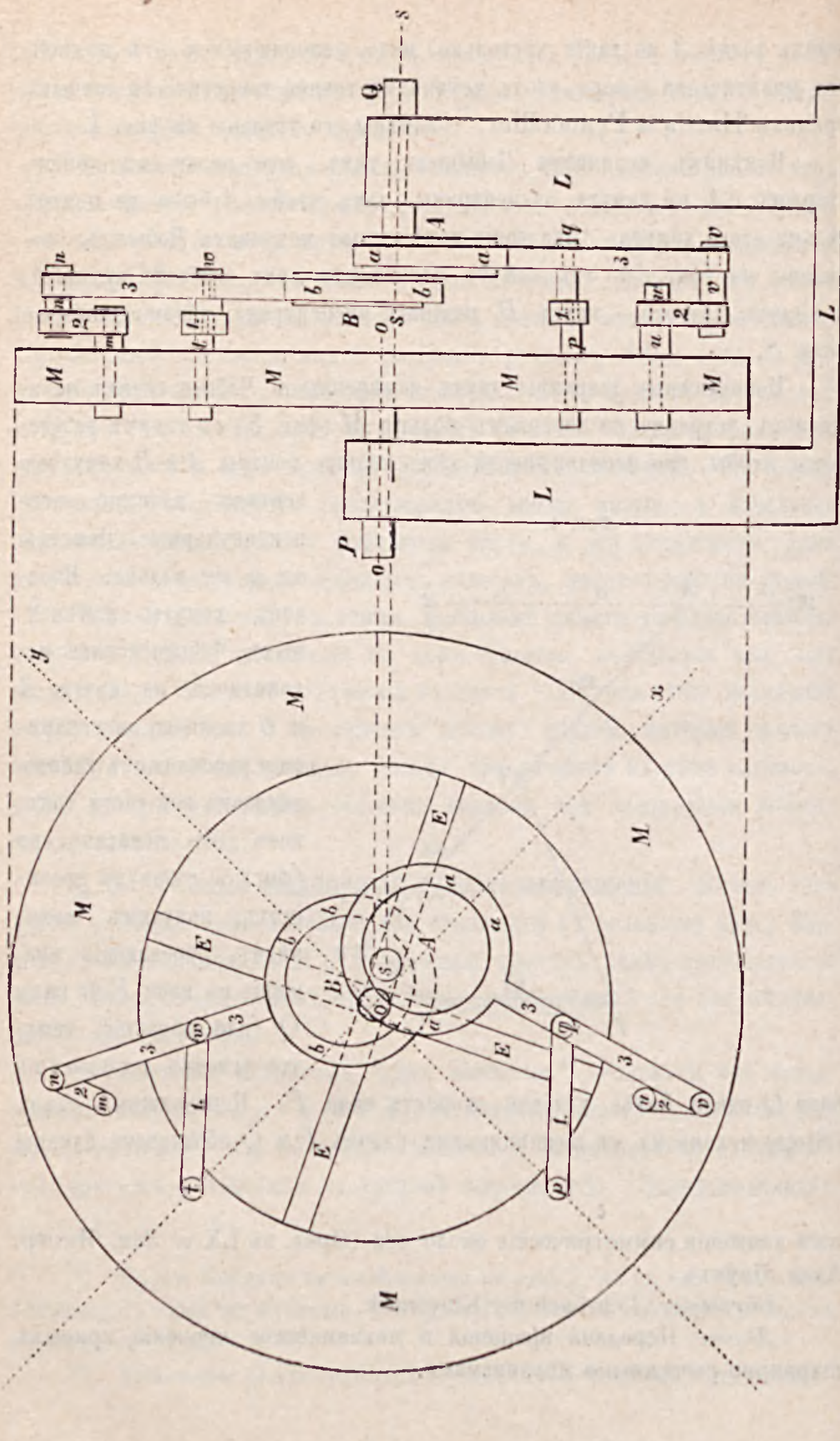
Фиг. 4.



щей движенія симметрическія около оси (Прил. къ LX т. Зап. Импер. Акад. Наукъ).

Burmester. Lehrbuch der Kinematik.

Делоне. Передача вращенія и механическое черченіе кривыхъ шарнирно-рычажными механизмами.



Фиг. 5.

L и показанъ только на боковомъ видѣ. Если бы желательно было получить теоретически точный удвоитель, то стоило-бы только механизмы Чебышева замѣнить механизмами Hart'a или Peaucellier. Но практически это не давало-бы большей точности, благодаря большей сложности теоретически точныхъ прямилъ сравнительно съ прямиломъ Чебышева.

Механизмъ (фиг. 5) представляетъ собою единственную пока (на сколько мнѣ извѣстно) твердую передачу вращенія, безъ мертвыхъ точекъ, *безъ тренія скольженія*, съ однимъ только треніемъ цапфъ, дающую *удвоеніе числа оборотовъ съ точнымъ удвоеніемъ скорости.* Недостатокъ его заключается въ перекашиваніи болтовъ, потому что стержни механизма размѣщены въ разныхъ плоскостяхъ. Поэтому онъ будетъ мало изнашиваться только при преодолѣніи сравнительно небольшихъ сопротивленій. Но при большемъ развитіи конструкціи его деталей онъ можетъ, по моему мнѣнію, принести пользу во многихъ случаяхъ. Перекашиваніе болтовъ можно устранить удлиненіемъ трущихся частей цапфъ.

Шарнирнымъ механизмомъ называется такой, въ которомъ нѣтъ никакихъ паръ кромѣ вращательныхъ. Слѣдовательно и описанный удвоитель представляетъ собою чисто шарнирный механизмъ, такъ какъ и каждый изъ круговъ двойнаго эксцентрика составляетъ вращательную пару съ своимъ хомутомъ.

Вопросъ о шарнирной передачѣ вращенія съ увеличеніемъ числа оборотовъ былъ поставленъ покойнымъ Чебышевымъ, если не въ печати, то по крайней мѣрѣ экспозиціею на выставкѣ въ Чикаго того замѣчательнаго изобрѣтеннаго имъ механизма, который, хотя и обладалъ 8-ю мертвыми положеніями, но давалъ удвоеніе или учетвереніе числа оборотовъ, смотря по способу выхода изъ мертвой точки.

Найдетъ ли настоящій удвоитель примѣненіе въ практикѣ, это покажетъ будущее. Во всякомъ случаѣ онъ представляетъ собою рѣшеніе кинематическаго вопроса объ устройствѣ точнаго *шарнирнаго* удвоителя вращенія безъ мертвыхъ положеній, потому что, если Чебышевское прямило не можетъ быть признано точнымъ, то достаточно въ нашемъ механизмѣ замѣнить прямила Чебышева прямилами Hart'a, чтобы получить теоретически точный удвоитель.

Съ прямилами Чебышева механизмъ имѣетъ 8 — съ прямилами же Hart'а 12 подвижныхъ частей.

§ 4. Два замѣчательныхъ обращенія точнаго шарнирнаго удвоителя. Механизмъ, описанный въ предыдущемъ параграфѣ, поставленъ на звено L или, что тоже самое, — на звено OS, гдѣ O и S суть проложенія осей валовъ P и Q на плоскость параллельную диску.

Припоминая, что теорія этого механизма совпадаетъ съ теоріею круговъ Кардана заключаемъ слѣдующее:

1) Если поставить эту кинематическую цѣпь на дискъ (дискъ сдѣлаемъ неподвижнымъ) служащій представителемъ большаго Карданова круга, то получимъ систему, въ которой эксцентрикъ (представитель малаго Карданова круга) совершаетъ эллиптическое движеніе. Получимъ *эллипсографъ*.

2) Если поставимъ нашу кинематическую цѣпь на двойной эксцентрикъ (сдѣлаемъ неподвижнымъ только двойной эксцентрикъ), то получимъ механизмъ, въ которомъ дискъ совершаетъ антиэллиптическое движеніе. Получимъ, смотря по той или другой системѣ деталей, или *улиткографъ* для улитокъ Паскаля, или патронъ для точенія эллиптическихъ контуровъ.

§ 5. Начала на которыхъ основана кинематическая цѣпь точнаго шарнирнаго удвоителя. Не трудно видѣть, что устройство точнаго шарнирнаго удвоителя (фиг. 5) основано на трехъ началахъ: 1) круги Кардана, 2) Чебышевскія прямила, 3) установленный профессоромъ Францемъ Рёло принципъ расширенія цапфъ.

Третье изъ этихъ началъ выражается въ нашемъ механизмѣ тѣмъ, что цапфы, ведущіяся Чебышевскими механизмами по прямымъ, развиты въ круги двойнаго эксцентрика AB.

Н. Делоне.

3 февраля 1901 г.

Значеніе интенсивной обработки почвы и другихъ пріемовъ земледѣльческой техники.

Цѣль настоящаго изложенія: — выяснитъ то доступное человѣку помощью тѣхъ или иныхъ средствъ и способовъ воздѣйствіе на почву, при которомъ урожайность культивируемыхъ на ней растеній становится болѣе надежной и постоянной.

Для изложенія предмета трактуемой статьи мы стремились собрать по возможности весь матеріалъ, разбросанный по частямъ въ сельскохозяйственной литературѣ и относящійся къ механической и химической обработкѣ почвы, къ значенію процессовъ въ ней происходящихъ и съ ней связанныхъ.

По выясненіи значенія интенсивной обработки почвы и описаніи идеи устройства орудій, успѣшно производящихъ надъ ней эти операціи, мы остановили вниманіе надъ разсмотрѣніемъ способовъ веденія хозяйства въ Россіи, указали на причины влекущія за собой частые неурожаи, а также и на мѣры, направленныя къ устраненію этихъ нежелательныхъ явленій.

Задача настоящаго популярно-научнаго изложенія — ознакомить читателя со значеніемъ каждаго пріема земледѣльческой техники, взаимодѣйствіемъ силъ и веществъ природы, міровымъ процессомъ кругообращенія вещества и ролью низшихъ микроорганизмовъ въ этомъ сложномъ процессѣ, на которомъ основано земледѣліе.

Возможные въ статьѣ недостатки по причинѣ сложности интересующаго насъ предмета, требующаго полнаго и всесторонняго освѣщенія, будучи указаны читателемъ, будутъ приняты нами съ большой благодарностью.

ВВЕДЕНІЕ.

Исторія сельскаго хозяйства начинается съ того времени, когда человѣкъ перемѣнилъ кочующій образъ жизни на осѣдлый.

Перемѣна образа жизни не могла произойти быстро, она совершалась и совершается по настоящее время медленно, постепенно съ ростомъ народонаселенія и цивилизаціи.

Пока населеніе земного шара еще рѣдкое, просторъ нетронутыхъ земель очень великъ и распахиваются лучшіе участки земли — до тѣхъ поръ человѣкъ ведетъ кочующій образъ жизни. Избравъ для воздѣлыванія растеній наиболѣе плодородную, дѣвственную землю, онъ обработываетъ ее до тѣхъ поръ, пока она перестанетъ давать хорошіе сборы; затѣмъ этотъ клочекъ земли забрасывается и вмѣсто него обработывается новый, еще не паханный участокъ.

Но народонаселеніе прогрессивно увеличивается, все болѣе и болѣе плодородныя земли разработываются и наступаетъ въ концѣ концовъ такое время, когда человѣку приходится обращаться къ менѣе плодороднымъ участкамъ или обработывать прежде богатыя, но уже болѣе или менѣе истощенныя почвы, которыя не въ состояніи дать при той же затратѣ труда и капитала того изобилія плодовъ, что давали раньше.

Съ ростомъ народонаселенія земля пріобрѣтаетъ цѣнность, а по мѣрѣ возрастанія цѣнъ на землю все болѣе распространяется интенсивная система хозяйства, которая выражается въ большей затратѣ труда и капитала на единицу площади земли, предназначенной подъ культуру растеній.

При интенсивномъ веденіи хозяйства пользованіе древними несовершенными орудіями не находитъ себѣ мѣста, требуются новыя, сберегающія время, силу, улучшающія качество работы и способствующія повышенію урожайности растеній.

Наступаетъ время, когда наукѣ ставятся на разрѣшеніе жизненные вопросы о пропитаніи прогрессивно возрастающаго населенія земного шара. Въ теченіе цѣлаго ряда вѣковъ производятся наблюденія, изслѣдованія, основываются и крѣпнутъ сельско-хозяйственныя науки, а съ ними вмѣстѣ и сельско-хозяйственная промышленность; являются спеціальныя школы, постепенно возникая въ различныхъ государствахъ, а также и другія учрежденія, предназначенныя служить интересамъ сельско-хозяйственной промышленности, какъ опытныя поля, опытныя станціи и проч.

Прогрессу сельскаго хозяйства несомнѣнно много способствовали поднятіе умственнаго развитія населенія всѣхъ странъ и громадные успѣхи другихъ отраслей промышленности, особенно же развитіе машиностроенія и устройство усовершенствованныхъ путей сообщенія.

Сельское хозяйство.

Смыслъ выраженія „сельское хозяйство“ нужно понимать какъ одинъ изъ видовъ добывающей промышленности имѣющей цѣлью доставленіе населенію предметовъ самыхъ насущныхъ, первой необходимости.

Эти продукты органическаго происхожденія человѣкъ, пользуясь законами природы, получаетъ на счетъ минеральныхъ веществъ почвы. Для этой цѣли въ его распоряженіи необходимый матеріалъ и силы природы, которыми онъ такъ или иначе пользуется; и чѣмъ онъ болѣе цивилизованъ, тѣмъ разумнѣе его пользованіе дарами природы.

Для поддержанія своего существованія онъ обращается къ тѣмъ растеніямъ и сѣменамъ, которыя ему давно извѣстны и размножаетъ ихъ.

Очень часто сельское хозяйство отождествляютъ съ земледѣліемъ. Принятая терминологія неправильна, такъ какъ земледѣліе составляетъ одинъ только видъ сельскаго хозяйства; но ужъ изъ одного этого неправильнаго отождествленія видно какую роль въ сельскомъ хозяйствѣ играетъ земледѣліе.

Земледѣліемъ или растеніеводствомъ называютъ именно разведеніе и воспитаніе растеній; строго говоря одно земледѣліе даетъ возможность рѣшить задачу сельско-хозяйственнаго производства; но съ цѣлью достигнуть еще большаго разнообразія органическихъ продуктовъ,—нѣкоторою частью растительныхъ произведеній почвы сельскій хозяинъ скармливаетъ домашнихъ животныхъ, благодаря чему онъ получаетъ разнообразные животные продукты.

Пользуясь веществами и силами природы, разсѣянными въ атмосферѣ и почвѣ, для достиженія своей основной цѣли сельскій хозяинъ приводитъ въ извѣстное взаимодѣйствіе эти силы и вещества, на что затрачиваетъ опредѣленную работу, трудъ.

Пока неизучено основательно взаимодѣйствіе силъ и веществъ природы и естественныя науки стоятъ на низкомъ уровнѣ развитія,—до тѣхъ поръ человѣкъ всякое проявленіе мощи природы со всѣми слѣдствіями, вытекающими изъ этого дѣйствія, приписываетъ явленіямъ стихійнымъ или по меньшей мѣрѣ случайнымъ.

Съ развитіемъ же наукъ и распространеніемъ образованія его умственный горизонтъ расширяется, случайныхъ явленій для него становится меньше и ближе имъ познаются соотношенія причинъ и слѣдствій.

Образованіе почвы.

Прежде всего человѣку приходится познать объектъ своей обработки, почву, которой онъ во всѣ времена удѣлялъ больше всего вниманія и на которую въ настоящее время удается сильнѣе всего влiять.

Первичныя горныя породы, разрушаясь подъ дѣйствіемъ различныхъ процессовъ, даютъ матеріалъ къ образованію рыхлаго поверхностнаго слоя земной коры, именуемаго почвой.

Всѣ процессы, играющіе роль разрушенія этихъ породъ, сводятся къ вывѣтриванію горныхъ породъ, перемѣщенію образующихся обломковъ и, наконецъ, накопленію органическихъ веществъ.

Процессъ вывѣтриванія горныхъ породъ заключается въ разрушеніи ихъ физическими и химическими агентами.

Неодинаковое сжатіе и расширеніе входящихъ въ составъ первичныхъ горныхъ породъ частей — вслѣдствіе колебаній температуры вызываютъ появленіе трещинъ; вода въ капельно-жидкомъ своемъ состояніи, попавъ въ эти трещины и превратившись при опредѣленной температурѣ въ ледъ, содѣйствуетъ дальнѣйшему разрушенію горныхъ породъ своимъ стремленіемъ занять большій объемъ. Этому стремленію, выражающемуся опредѣленной силой, препятствуетъ сила сцѣпленія частицъ этой породы. Если сила замерзшей воды беретъ перевѣсъ надъ силою сцѣпленія частицъ горныхъ породъ, то разрушеніе идетъ дальше.

Отвалившіяся массы подъ силою собственной тяжести или подъ дѣйствіемъ падающей съ высотъ воды, способствующей ихъ перемѣщенію, движутся съ треніемъ и ударами при скатываніи съ высотъ и разбиваются на меньшіе объемы.

Но вода не является однимъ только физическимъ агентомъ разрушенія, она проявляетъ и химическія свойства, ведущія къ дальнѣйшему разрушенію горныхъ породъ. Частью растворяя, частью разлагая, даже очень прочные селикаты, вода, хотя и очень медленно, но все же успѣшно идетъ къ цѣли. Растворенная въ водѣ углекислота также является однимъ изъ химическихъ агентовъ въ процессѣ вывѣтриванія.

На разрушеніе горныхъ породъ оказываютъ вліяніе также и кислородъ воздуха, вызывающій окисленіе нѣкоторыхъ составныхъ частей горныхъ породъ и тѣмъ дающій толчекъ къ дальнѣйшему разрушенію каменистыхъ массъ.

Корни растеній въ процессѣ вывѣтриванія не остаются безучастными; внѣдренные въ трещины каменистыхъ массъ, они кислотными своими выдѣленіями оказываютъ сильное дѣйствіе на минералы.

Образованные обломки горныхъ породъ уносятся текущею водой все дальше и дальше отъ мѣста первоначальнаго своего происхожденія; болѣе крупныя массы отстаютъ отъ общаго движенія и располагаются ближе къ каменистымъ породамъ, а болѣе мелкіе обломки и легкія частицы, повинуясь силѣ теченія воды, уносятся значительно далѣе.

Но скорость теченія воды не вездѣ одинакова; въ иныхъ мѣстахъ она такъ не велика, что возможны осажденія очень мелкихъ частицъ, унесенныхъ водой;—этому осажденію обязаны вторичныя или наносныя почвы, въ противоположность первичнымъ, остающимся на томъ мѣстѣ, гдѣ путемъ вывѣтриванія произошло ихъ образованіе.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ въ роли перемѣстителя частицъ отъ мѣста ихъ отпаденія часто участвуетъ и вѣтеръ.

Само собой разумѣется, что заключенные въ нѣдрахъ горныхъ породъ различные элементы при упомянутыхъ процессахъ переносятся и въ почву; но, смотря по породѣ, изъ которой почва образовалась, и по условіямъ ея образованія содержаніе этихъ элементовъ можетъ значительно измѣняться какъ въ качественномъ, такъ, главнымъ образомъ и въ количественномъ отношеніяхъ.

Подъ вліяніемъ жизнедѣятельности растеній, которыя являются только позже на образовавшейся почвѣ, въ ней появляются органическія составныя части.

Укоренившіяся въ почвѣ растенія для условія своего произростанія требуютъ содержанія въ почвѣ минеральныхъ веществъ; при развитіи этихъ растеній образуются органическія вещества, которые по отмираніи растеній переходятъ въ почву, подвергаются въ ней процессу разложенія (гуммификаціи) и въ результатѣ превращаются въ перегной—органическую массу почвы.

Процессъ гуммификаціи представляетъ собою постепенное окисленіе сложныхъ органическихъ веществъ, попадающихъ въ почву, подъ вліяніемъ тепла, влажности, кислорода воздуха и жизнедѣятельности нѣкоторыхъ бактерій.

При этомъ процессѣ органическія вещества постепенно обѣдняются водородомъ и кислородомъ и становятся богаче углеродомъ.

Образованіе насчетъ отмершей растительности полуразложившіеся органическіе остатки не заключаютъ уже слѣдовъ организованнаго строенія и представляютъ болѣе или менѣе сложную смѣсь органическихъ соединеній; эта смѣсь носитъ названіе перегноя или гуммуса.

Отношеніе гуммуса къ веществамъ почвы выражается усиленіемъ процесса вывѣтриванія, раствореніемъ трудно растворимыхъ соединеній, перемѣщеніемъ ихъ въ почвенномъ слоѣ; съ другой стороны значеніе перегноя въ почвѣ, еще болѣе важное, заключается въ огромномъ его вліяніи на цѣлый рядъ физическихъ свойствъ почвы;—усиленіе нагрѣванія почвъ, сообщеніе рыхлости связнымъ почвамъ, связности рыхлымъ и проч.

Истощеніе почвы.

По наиболѣе распространенному опредѣленію почвою называютъ верхній рыхлый слой земной коры, служащій главнымъ мѣстомъ укорененія растеній, и иногда почву неправильно называютъ пахатнымъ слоемъ, т. е. слоемъ, подвергающимся механической обработкѣ. Такое отождествленіе допустимо тогда, когда обработка почвы распространяется на величину глубины почвы; обыкновенно же почву обрабатываютъ или не на полную глубину, или въ другихъ случаяхъ находятъ нужнымъ обработку распространять и надъ подпочву, т. е. на слой, залегающій вслѣдъ за почвой.

Въ рѣдкихъ случаяхъ можно провести границу между почвою и подпочвой; обыкновенно, какъ это и естественно, между ними существуетъ переходный слой, представляющій смѣсь частицъ того и другого слоя.

Почва по отношенію къ растеніямъ является не только мѣстомъ для ихъ укорененія, она также, благодаря содержанію минеральныхъ веществъ, даетъ пищу растеніямъ.

Для своего развитія растенія нуждаются въ цѣломъ рядѣ условій: имъ необходимы для жизни питательныя вещества, которыя должны находиться въ почвѣ (соединенія азота, фосфорная кислота, соли калія и пр.), въ атмосферномъ воздухѣ (кислородъ, углекислота), вода въ капельно-жидкомъ состояніи, извѣстная температура и, наконецъ, солнечный свѣтъ.

Если одного изъ этихъ необходимыхъ для растеній условій не оказывается въ наличности, то нарушается нормальное развитіе, появляются уродливости, наступаетъ болѣзненное состояніе растительныхъ организмовъ, и при полномъ отсутствіи недостающаго условія, (напр. воды въ сухой почвѣ, солнечнаго свѣта въ темномъ мѣстѣ) растенія въ заключеніе погибаютъ.

Если одно изъ необходимыхъ условій оказывается въ количествѣ меньшемъ, чѣмъ того требуетъ растеніе, то въ этомъ случаѣ развитіе растенія задерживается, а сила развитія растенія опредѣляется именно этимъ недостающимъ условіемъ.

Какъ мы уже упомянули, растенія для правильнаго своего роста требуютъ содержанія въ почвѣ соединеній азота.

Горныя же породы, изъ которыхъ образовались почвы, заключая въ изобиліи кремнеземъ, глиноземъ и др., въ небольшомъ количествѣ сѣру, фосфоръ и др., вовсе не содержатъ существенно важнаго элемента для питанія растеній, — азота. Непосредственно изъ воздуха растенія азота не могутъ получить.

Какимъ же образомъ тѣмъ не менѣе растенія получаютъ этотъ важный элементъ? Здѣсь мы ознакомимся со свойствомъ нѣкоторыхъ растеній, могущихъ обходиться безъ готоваго запаса азотистыхъ соединенiй въ почвѣ. Накопленiю азотистыхъ соединенiй въ почвѣ способствуютъ нѣкоторыя растенiя, какъ напр. мотыльковыя, которыя своимъ произростанiемъ обязаны главнымъ образомъ микробамъ, размножающимся въ ихъ корняхъ.

Эти микробы играютъ важную роль передачи азота воздуха, физiологически переработаннаго ими въ громадные запасы азотистыхъ соединенiй, тѣмъ растенiямъ, которыя дали имъ прiютъ.

Отмирая эти растенiя вносили собой въ почву для питанiя слѣдующаго поколѣнiя недостававшiя ей соединенiя.

Связный азотъ органическихъ веществъ представляетъ для растенiй неудобоусвояемую пищу; только благодаря мирiадамъ микроорганизмовъ, своей жизнедѣятельностью перерабатывающихъ эти вещества, въ заключенiе можетъ получиться азотъ въ удобоусвояемыхъ формахъ.

Въ этомъ отношенiи важнымъ является нитрифицирующiй микроорганизмъ, который превращаетъ связный азотъ органическихъ веществъ въ азотно-кислыя соли, которыя уже прямо могутъ усвоиваться растенiями.

Жизнедѣятельность нитрифицирующаго микроорганизма требуетъ опредѣленныхъ условiй: влаги, тепла и доступа воздуха.

Какимъ образомъ можно создатъ благопрiятныя для его жизни условiя мы увидимъ когда рѣчь коснется механической обработки почвы.

При наличности всѣхъ требуемыхъ условiй дѣятельность этихъ микроорганизмовъ достигаетъ высшаго предѣла, а при отсутствiи хотя одного изъ факторовъ, дѣятельность ихъ доходитъ до минимума.

Отсюда не трудно понять почему наши черноземныя почвы, заключающiя всѣ необходимыя для питанiя растенiй элементы, почвы богатыя, не въ состоянiи дать хорошихъ урожаевъ; въ этомъ случаѣ причину плохого произростанiя растенiй нужно видѣть въ отсутствiи достаточнаго количества влаги, необходимой не только для питанiя растенiй, но и для жизнедѣятельности микроорганизмовъ съ ихъ химико-бiологическими процессами, способствующими образованiю удобоусвояемыхъ растенiями соединенiй.

Пользуясь приведеннымъ примѣромъ, можно провести различiе между богатствомъ и плодородiемъ почвъ. Богатыми почвами, къ числу которыхъ нужно отнести и черноземныя, считаютъ такiя, которыя заключаютъ въ себѣ большой запасъ полезныхъ для растенiй веществъ, хотя бы и въ состояніи недоступномъ для немедленнаго усвоенія растеніями, и обладаютъ прочими свойствами, благопріятными для растеній.

При правильной обработкѣ этихъ почвъ, при благопріятныхъ климатическихъ условіяхъ и при раціональной культурѣ разводимыхъ на этихъ почвахъ растеній, онѣ оказываются плодородными и урожайными.

Такимъ образомъ богатство почвы является основаніемъ для полученія хорошихъ урожаевъ, плодородіе обусловливаетъ превращеніе факторовъ богатства въ состояніе, при которомъ возможно немедленное ихъ дѣйствіе и, наконецъ, урожайность, какъ результатъ воздѣлыванія растеній, зависящій не только отъ почвъ и умѣлой техники, но также и отъ случайныхъ атмосферическихъ перемѣнъ.

Въ противоположность плодороднымъ почвамъ различаютъ почвы истощенныя.

Въ обширномъ смыслѣ истощенными почвами называютъ такія, на которыхъ вообще наблюдается уменьшеніе плодородія, сопровождаемое пониженіемъ доставляемыхъ землею урожаевъ; причина истощенія почвъ лежитъ въ обѣдненіи почвы нѣкоторыми питательными матеріалами, необходимыми для нормальнаго развитія растеній.

Иногда, говоря объ истощеніи почвы, имѣютъ въ виду уменьшеніе содержанія въ ней минеральныхъ веществъ, которыя, будучи усвоены растеніями, вмѣстѣ съ жатвой уносятся съ поля. Чаще всего наблюдается истощеніе почвы относительно азота, фосфорной кислоты и кали, такъ какъ эти вещества поглощаются растеніями изъ почвы въ большомъ сравнительно количествѣ.

Въ этомъ убѣждаетъ насъ химическій анализъ, показывающій относительно какихъ веществъ и въ какой степени растенія истощаютъ почву.

Мы раньше видѣли, что мотыльковыя могутъ произростать на почвѣ лишенной азота; изъ наблюденій надъ злаками выяснилось, что жизнь ихъ при отсутствіи запаса азота въ почвѣ—невозможна.

Въ этомъ случаѣ злаки являются азото-потребительными въ отличіе отъ азото-собирателей (мотыльковыхъ), обогащающихъ почву азотомъ благодаря вышеупомянутому химико-біологическому процессу микроорганизмовъ.

Существуютъ нѣкоторыя растенія истощающія землю преимущественно относительно фосфорной кислоты и т. д.

По глубинѣ распространенія корней въ почвѣ различаютъ растенія мелкоукореняющіяся, истощающія почву на небольшую глубину, отъ глубокоукореняющихся растеній, которыя распространяютъ свои корни на значительную глубину и получаютъ большее количество питательныхъ веществъ изъ почвы и потому сильнѣе ее истощающія.

Каждое растеніе предъявляетъ по отношенію къ почвѣ свои требованія; истощившись для однихъ растеній, почва можетъ оказаться вполнѣ пригодной для другихъ и дать вполнѣ высокій урожай продуктовъ.

На этихъ наблюденіяхъ, оказавшихъ великую услугу сельскому хозяйству, основанъ плодосмѣнъ.

Изучивъ свойства растеній, проявляемыхъ по отношенію къ почвѣ, ихъ предъявляемыя къ ней требованія, опредѣливъ количество и родъ потребляемыхъ для ихъ произростанія минеральныхъ веществъ, не трудно устроить также чередованіе культивируемыхъ растеній, при которомъ вещества почвы будутъ наиболѣе раціонально использованы, и при которомъ урожай каждаго растенія будетъ наиболѣе высокій.

Мы видѣли раньше, что рядомъ съ истощающими почву растеніями стоятъ и обогащающія ее; къ послѣднимъ относятся такія, которыя, не смотря на то, что поглощаютъ нѣкоторое количество минеральныхъ веществъ изъ почвы тѣмъ не менѣе улучшаютъ ея химическія свойства, такъ какъ обильные корневые остатки, не уносимые съ поля, своимъ разложеніемъ даютъ богатый матеріалъ для другого рода растеній, потребляющихъ тѣ минеральные соли, которыя для нихъ припасли ихъ предшественники.

Число сѣвооборотовъ безконечно велико и выборъ правильнаго сѣвооборота при данной системѣ хозяйства можетъ быть весьма широкъ. Обыкновенно чередованіе идетъ такимъ образомъ, что мелкоукореняющіяся растенія слѣдуютъ за глубокоукореняющимися; обогащающія почву азотомъ мотыльковыя растенія уступаютъ мѣсто злакамъ; по отношенію къ потребности растеній въ водѣ и ихъ изсушающему дѣйствію на почву, ставятъ ихъ въ слѣдующій рядъ, переходя отъ болѣе требовательныхъ къ менѣе требовательнымъ,—напр. такъ;—табакъ, картофель, овесъ, просо.

Укажемъ еще на одно достоинство плодосмѣна.

Плодосмѣнъ является также однимъ изъ могучихъ средствъ въ борьбѣ съ вредными насѣкомыми.

Постоянная смѣна растеній и разнообразіе пріемовъ культуры лишаетъ насѣкомыхъ возможности приспособиться къ измѣнчивымъ условіямъ, чего не можетъ быть при культурѣ однихъ и тѣхъ же растеній.

Удобреніе.

Заслуга плодосмѣна несомнѣнна, но все же онъ не рѣшаетъ вопроса объ истощеніи земли. Изъ года въ годъ для поддержанія своего существованія человѣкъ увозитъ съ поля жатву, а вмѣстѣ съ ней и тѣ минеральныя вещества, которыя шли изъ почвы на образованів растеній.

Такое пользованіе плодами безъ отдачи почвѣ взятаго количества минеральныхъ веществъ не можетъ идти очень продолжительно. Наступитъ такой годъ, когда земля откажется возвратить тѣ сѣмена, которыя ей ввѣрили.

Средствомъ противодѣйствія истощенію почвы, слѣдовательно, поддержанія ея плодородія на извѣстной высотѣ, должно быть удобреніе.

Подъ удобреніемъ понимаютъ одинъ изъ пріемовъ періодической обработки почвы, при которомъ въ нее, смотря по системѣ хозяйства, вносятся тѣ или другія вещества въ формѣ хотя бы и не сейчасъ усвояемой растеніями.

Изъ питательныхъ для растеній веществъ соотвѣтственно особенно малому содержанію ихъ въ почвѣ и выдающейся потребности въ нихъ растеній наиболѣе важное удобрительное значеніе имѣютъ азотъ, фосфорная кислота и кали, менѣе важны известь, магнезія и др.

Удобрительныя вещества кромѣ прямого своего назначенія въ пищу растеніямъ важны въ томъ еще отношеніи, что вліяютъ на измѣненіе физическихъ и химическихъ свойствъ почвы.

Удобреніе, внесенное въ почву, ускоряетъ процессъ разложенія минеральныхъ и органическихъ почвенныхъ веществъ, переводитъ ихъ въ удобоусвояемую растеніями форму, повышаетъ количество содержимой въ почвѣ влаги, сообщаетъ рыхлымъ почвамъ большую связность и связнымъ—рыхлость.

Родъ удобреній весьма различенъ, а употребленіе того или другого рода удобренія находится въ связи съ культивировкой желаемыхъ растеній.

Послѣ навоза большое распространеніе себѣ находятъ искуственные туки, представляющіе собою болѣе или менѣе концентрированное удобреніе.

Количество разсѣваемыхъ туковъ на единицу площади земли сравнительно небольшое, поэтому разсѣвъ такихъ удобреній, равномѣрное ихъ распредѣленіе въ почвѣ представляется дѣломъ не легкимъ; ручной посѣвъ такихъ искусственныхъ удобреній не находитъ себѣ мѣста.

Сравнительно небольшое количество порошкообразныхъ удобреній, требуемыхъ единицей площади земли, дороговизна ихъ и опасность, связанная съ превышеніемъ предѣла требуемаго количества удобреній по отношенію къ урожайности растеній, все вмѣстѣ говоритъ въ пользу спеціальнаго разсѣва туковъ.

Изъ искусственныхъ туковъ наиболѣе извѣстно костяное удобреніе.

Кости, благодаря высокому содержанію фосфорной кислоты, а также отчасти и содержанію азота, съ большимъ успѣхомъ употребляются въ качествѣ удобрительнаго вещества,

Прежде чѣмъ ввести кости въ почву имъ даютъ такое состояніе, въ какомъ онѣ могутъ быть использованы растеніями. Съ этой цѣлью ихъ обрабатываютъ такъ или иначе.

Одинъ изъ способовъ слѣдующій: на костеобжигательныхъ заводахъ кости подвергаются сперва выпариванію; при этой операціи изъ костей выдѣляется жиръ, выплывающій на поверхность и счерпываемый. Костяной жиръ находитъ себѣ широкое примѣненіе въ техникѣ, какъ смазочный матеріалъ.

Затѣмъ кости помѣщаются въ замкнутый котелъ гдѣ и подвергаются подъ давленіемъ 2—4 атмосферъ дѣйствію водяныхъ паровъ.

При послѣдующемъ охлажденіи кости становятся настолько хрупкими, что безъ труда измельчаются въ муку. Такъ получается паренная костяная мука, идущая на удобреніе.

Существуетъ еще и другой способъ обработки костей съ цѣлью полученія суперфосфатовъ, при которомъ сырыя кости подвергаются дѣйствію сѣрной кислоты. Нерастворимая въ водѣ фосфорно-кальціевая соль костей переходитъ частью въ растворимое состояніе, а равно и органическое азотистое вещество костей подвергается нѣкоторому измѣненію; такимъ образомъ какъ фосфорная кислота, такъ и азотъ становятся при этомъ легче усвояемыми растительными корнями.

Въ настоящее время костяной суперфосфатъ вытѣсненъ болѣе дешевою и не менѣе дѣйствительною въ удобрительномъ смыслѣ пареной костяной мукой.

Примѣнительно къ этимъ наиболѣе распространеннымъ удобрительнымъ веществамъ существуетъ цѣлый рядъ сѣялокъ, равномѣрно разбрасывающихъ опредѣленное количество этихъ веществъ на единицѣ площади земли.

Механическая обработка почвы.

Удобреніе, или процессъ внесенія въ почву недостающихъ растеніямъ питательныхъ веществъ въ томъ или другомъ видѣ для цѣлей выращиванія этихъ растеній,—относится къ химической обработкѣ почвы.

Не менѣе важную роль въ процессѣ выращиванія растеній играетъ и механическая обработка почвы, обыкновенно сопровождающая химическую. Механическая обработка почвы состоитъ въ непосредственномъ измѣненіи только физическихъ свойствъ обрабатываемаго почвеннаго слоя.

Она направлена главнымъ образомъ на подготовку почвы подъ посѣвъ сѣмянъ растеній.

Для этой весьма важной цѣли служитъ цѣлый рядъ орудій, выполняющихъ ту или другую функцію.

Какимъ условіямъ должна удовлетворять почва, чтобы можно было ее назвать готовою къ посѣву сѣмянъ или, какъ говорятъ „спѣлою"?

Послѣ очистки отъ камней, пней и корневищъ поле должно быть лишено сорныхъ травъ.

Сорныя травы или правильнѣе сорныя растенія бываютъ всевозможныхъ видовъ; къ нимъ относятся также нѣкоторыя культурныя растенія, которыя развиваются на извѣстной площади помимо воли хозяина.

Занимая мѣсто, на которомъ могли бы развиваться культивируемыя растенія, эта сорная растительность приноситъ вредъ еще въ томъ отношеніи, что отнимаетъ отъ развивающихся рядомъ культурныхъ растеній пищу, влагу и свѣтъ; вноситъ своимъ присутствіемъ лишнюю работу, идущую на отдѣленіе ея отъ культурныхъ растеній; вліяетъ на качество урожая, внося элементъ совершенно негодный, вредный.

Каждая ссорная растительность имѣетъ свойственныя ей особенности, которыя такъ или иначе вредно отзываются на ростѣ культурныхъ растеній.

Нѣкоторыя изъ нихъ обвиваютъ отдѣльныя воздѣлываемыя растенія или ихъ группы, стягиваютъ ихъ къ землѣ и губятъ, не давая никакой возможности вырваться изъ неволи.

Свойство другихъ сорныхъ растеній таково: присосавшись къ культурнымъ, они извлекаютъ изъ нихъ соки и доводятъ ихъ до окончательной гибели (паразитныя сорныя травы).

Наконецъ, нѣкоторыя сорныя травы являются благопріятными для развитія извѣстныхъ грибковъ, вызывающихъ заболѣваніе культурныхъ растеній.

Если же къ этимъ особенностямъ присоединить присущую всѣмъ сорнымъ травамъ удивительную способность быстро размножаться и прочно держаться на разъ занятомъ мѣстѣ, благодаря чрезвычайной жизненности ихъ органовъ, то будетъ понятенъ тотъ значительный вредъ, который онѣ въ состояніи причинить хозяйству.

На Западѣ, гдѣ растенія не ведутъ такой ожесточенной борьбы изъ за влаги, какъ у насъ, тѣмъ не менѣе знаютъ, какъ неблагопріятно отражается на урожаѣ засореніе полей. Такъ, по изслѣдованіямъ Мюнхенскаго профессора Вольни (Wollny), урожай ржи на засоренномъ полѣ былъ втрое ниже, чѣмъ на чистомъ, кукурузы (зерна) въ 9 разъ, картофеля втрое и свекловицы въ 17 разъ ниже, чѣмъ на полѣ безъ сорныхъ травъ.

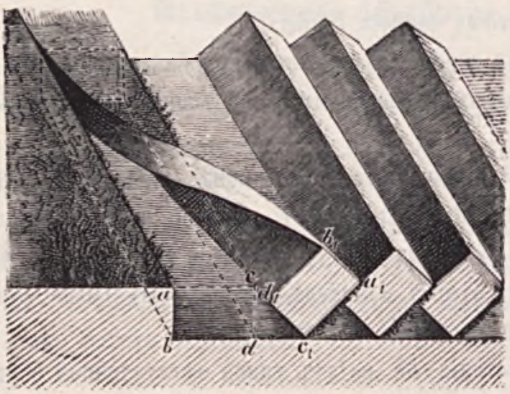
Вотъ почему на уничтоженіе сорной растительности должны быть направлены всѣ усилія сельскаго хозяина; средствъ же уничтоженія этого бича урожайности въ его распоряженіи много.

Задача истребленія сорной растительности на поляхъ обыкновенно рѣшается побочно при механической обработкѣ почвы, какъ вспашка, бороньба и при уходѣ за культивируемыми растеніями, — какъ мотыженіе.

Въ роли орудій обрабатывающихъ почву, участвуютъ плуги, экстирпаторы, бороны, катки, ручныя и конныя мотыги и пр. Почти всѣ сельско-хозяйственныя орудія сооруженныя служить тѣмъ или другимъ цѣлямъ (о чемъ будетъ сказано ниже) выполняютъ кромѣ того важную работу уничтоженія сорной растительности.

До принятія сѣмянъ пахотный слой подвергается слѣдующимъ операціямъ: оборачиванію, разрыхленію и размѣшиванію его. Всѣ эти операціи въ одно время съ той или другой степенью успѣшности совершаетъ плугъ.

Наблюденія надъ работой плуга на тяжелой почвѣ позволяютъ составить слѣдующій чертежъ. По мѣрѣ движенія плуга впередъ ножъ его, служащій рѣзцомъ, рѣжетъ землю по вертикальному направленію на глубину ab. Вслѣдъ за ножемъ лемехъ плуга срѣзываетъ полосу отъ материка по горизонтальному направленію bd. Вслѣдствіе движенія плуга впередъ, отрѣзанная полоса переходитъ съ лемеха, на отвалъ, которымъ отрѣзанный пластъ $acbd$ переворачивается по винтообразному направленію, при чемъ кантомъ c_1 обернутая полоса опирается на материкъ, а кантомъ a_1 прислоняется къ раньше обернутому пласту, такимъ образомъ, что большая часть низовой стороны d_1b_1 и вся сторона b_1a_1 пласта подвержена дѣйствію вывѣтриванія. Такое положеніе перевернутаго пласта, при которомъ наибольшая часть его подвержена дѣйствію атмосферы, достигается лишь въ томъ случаѣ, если ширина bd отрѣзываемаго пласта равна 1,414 толщины ab.



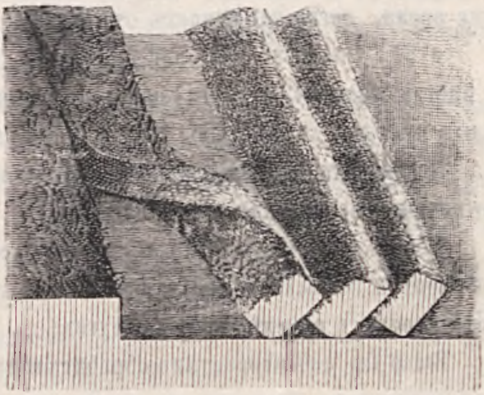
Подобное строгое кантованіе пластовъ получается при вспашкѣ тяжелыхъ почвъ; на почвахъ менѣе тяжелыхъ гребни не такъ отчетливы по причинѣ сыпучести почвы.

Сообразно различнымъ свойствамъ почвы, для успѣшнаго выполненія плугомъ оборачиванія и отваливанія употребляются отвалы различной формы и длины, отличающіеся также и своей работой. Такъ, для почвъ тяжелыхъ, связныхъ, необходимымъ условіемъ при пахапіи является правильное оборачиваніе и отваливаніе къ предшествовавшему пласту. Такая работа выполняется успѣшно лишь винтовымъ отваломъ оборачивающимъ пластъ въ видѣ длинной ленты по винтовой линіи; таковыми отвалами снабжены всѣ англійскіе плуги, построенные для тяжелыхъ почвъ. На почвахъ же легкихъ супесчаныхъ и песчаныхъ, не поддающихся оборачиванію, вслѣдствіе своей расыпчатости, задача отвала менѣе сложна и состоитъ въ дробленіи и разрыхленіи пласта.

Отвалъ такимъ образомъ является одной изъ самыхъ существенныхъ частей плуга. По формѣ отвала главнымъ образомъ и различаются плуги, отъ него въ значительной степени и зависитъ качество производимой плугомъ работы.

Различаютъ плуги винтовые или оборачивающіе и цилиндрическіе или рыхлящіе, послѣдніе извѣстны подъ названіемъ рухадло. Названіе свое плугъ получаетъ отъ формы своего отвала.

Чѣмъ длиннѣе отвалъ у винтовыхъ плуговъ тѣмъ менѣе крошится и ломается пластъ, тѣмъ правильнѣе послѣдній отваливается; при короткомъ отвалѣ пластъ болѣе или менѣе сильно надламывается, крошится и работа такого плуга по своему качеству въ большей или меньшей степени подходитъ къ работѣ плуговъ съ цилиндрическимъ отваломъ.



Видъ пласта, отваленнаго плугомъ съ короткимъ отваломъ.

Чѣмъ короче, или другими словами, чѣмъ круче отвалъ тѣмъ для болѣе легкихъ почвъ предназначенъ плугъ, обладающій этимъ отваломъ. Самый крутой отвалъ встрѣчается въ плугахъ типа рухадло, извѣстныхъ еще подъ именемъ богемскихъ плуговъ, предназначенныхъ для самыхъ легкихъ почвъ. На очень легкихъ почвахъ рѣзецъ становится излишнимъ и его обыкновенно въ богемскихъ плугахъ не бываетъ.

Изъ вышесказаннаго видно, что универсальнаго плуга не можетъ быть. При выборѣ плуга непремѣнно нужно считаться съ родомъ почвы.

Какъ бы почвы ни казались различными, всѣ онѣ состоятъ изъ 4-хъ главныхъ составныхъ частей: песку, глины, извести и перегноя.

Различаютъ слѣдующія роды почвъ:

1. Глинистая и суглинистая, если въ почвѣ содержится отъ 35 до 60% глины, а остальное песокъ и очень немного извести и перегноя. Такія почвы самыя твердыя и вязкія.

2. Песчаная, если въ почвѣ находится до 70% песку, супесчаная или глинисто-песчаная—содержитъ отъ 10 до 30% и песчано-глинистая—отъ 10 до 20% глины. Такія почвы называются средними.

3. Хрящевыя—заключаютъ въ себѣ не болѣе 10% глины, 5% извести и перегноя, а остальное песокъ или камешки различной величины. Такія почвы рыхлы, но мало урожайны.

4. Известковыя,—если содержитъ до 20% извести.

5. Мергельная,—въ которой глина, известь и песокъ почти поровну смѣшаны между собой.

6. Черноземная—рыхлая, мягкая, черная земля, въ которой находится отъ 5 до 20% перегноя.

7. Подзолистая, состоящая какъ бы изъ пыли, на столько мелкаго кремневаго песку сѣраго цвѣта, какъ и глинистыя почвы. Эта почва тоже вязка, легко заплываетъ отъ дождей и затѣмъ засыхаетъ коркою.

и 8. Солончаковая, или солянцы—безплодная почва, встрѣчается иногда мѣстами, а иногда занимаетъ большія пространства, образуя цѣлыя пустыни съ твердою, какъ камень, поверхностью.

Подзолистыя и солончаковыя безплодны, а лучшія по плодородію—это почвы—мергельная и черноземная.

Почвы европейско-русской равнины крайне разнообразны, поэтому и обработка годныхъ къ воздѣлыванію растеній почвъ для каждой мѣстности требуетъ опредѣленныхъ плуговъ,

Было бы неблагоразумно обрабатывать тяжелую почву плугомъ съ цилиндрическимъ отваломъ или легкую почву винтовымъ.

При работѣ цилиндрическаго отвала въ связныхъ почвахъ, срѣзанный рѣзцомъ и лемехомъ пластъ не оборачивается, какъ это происходитъ при винтовомъ отвалѣ, а лишь подымается вверхъ съ небольшимъ оборотомъ, пока не соскользнетъ съ отвала.

Должное оборачиваніе въ данномъ случаѣ не достигнуто, крошеніе же почвы на столько значительно, что пластъ не выдержавъ его, обрывается и отваливается обратно въ борозду, причемъ получается неудовлетворительная работа плуга.

Точно также нельзя одобрить работу винтоваго плуга на легкихъ почвахъ. При этой работѣ наблюдается слѣдующее явленіе: приподнятый лемехомъ пластъ и переданный винтовому отвалу движется не по полной его поверхности, а только по передней части. Сползаніе пласта съ отвала начинается еще въ тотъ моментъ, когда пластъ всей своей поверхностью налегаетъ на отвалъ; какъ только онъ попадетъ на мѣсто, наклоненіе котораго превосходитъ уголъ тренія почвы, тотчасъ начинается сползаніе пласта.

Кромѣ того винтовой отвалъ требуетъ большой тяги; при тяжелыхъ почвахъ нельзя избѣжать большой тяги, но при легкихъ почвахъ можно съ крутымъ отваломъ довольствоваться значительно меньшею тягою, тогда какъ длинный винтовой отвалъ и на легкой почвѣ потребовалъ бы большую тягу и работу производилъ бы не правильно. Наоборотъ, рухадло на тяжелой почвѣ можетъ совсѣмъ не пойти.

Отсюда ясна полнѣйшая нецѣлесообразность употребленія винтоваго отвала на легкихъ почвахъ.

Неудачнымъ выборомъ плуга вполнѣ объясняется то гоненіе на сельско-хозяйственныя орудія вообще, которое выразилось въ Россіи въ періодъ проведенія крестьянской реформы.

До освобожденія крестьянъ основаніе хозяйства составляла эксплоатація дарового труда при относительно ничтожной стоимости земли. Распредѣленіе дарового труда на возможно большее пространство дешевой земли съ цѣлью полученія большей массы продуктовъ составляло въ то время главную задачу хозяина-помѣщика. Богатство измѣрялось тогда количествомъ труда (числомъ крѣпостныхъ душъ), которымъ располагалъ помѣщикъ, а доходность предпріятія опредѣлялась абсолютнымъ количествомъ продуктовъ, которое онъ могъ поставлять на рынокъ.

Незначительная естественная производительность земли при ничтожныхъ издержкахъ хозяйства давала возможность помѣщику пользоваться прибылью.

Съ уничтоженіемъ крѣпостнаго права наступаетъ новая эра и для земледѣлія.

Трудъ съ возвращеніемъ ему экономическихъ правъ пріобрѣтаетъ цѣнность, въ иныхъ мѣстностяхъ довольно высокую.

Начинается перемѣщеніе центра тяжести сельско-хозяйственнаго производства въ сторону повышенія производительныхъ силъ земли.

Съ особенной силой пробуждается у хозяевъ сознаніе въ необходимости машинъ и орудій съ освобожденіемъ того обязательнаго труда, который тормозилъ ихъ распространеніе.

Спѣшность въ пріобрѣтеніи заграничныхъ машинъ, незнакомство рабочихъ и земледѣльцевъ съ условіями предъявляемыми ими для успѣшности своихъ дѣйствій; въ иныхъ случаяхъ незнаніе того, какой родъ орудій и для какой цѣли предназначенъ—все вмѣстѣ взятое достаточно поясняетъ какъ неудачно проявляли свои дѣйствія эти машины.

Если прибавить къ сказанному то затрудненіе, которое было связано съ починкою иностранныхъ машинъ на русскихъ заводахъ и дорогую стоимость составленія новыхъ моделей для этой цѣли, то будетъ понятенъ незаслуженный укоръ, брошенный хозяевами всѣмъ сельско-хозяйственнымъ машинамъ.

Вслѣдствіе разочарованія хозяевъ наступаютъ тяжелые годы для сельско-хозяйственнаго машиностроенія. Но опытъ и знаніе съ одной стороны и цѣнность труда съ другой шагъ за шагомъ отвоевали правильный и постоянно возрастающій спросъ на усовершенствованныя сельско-хозяйственныя машины.

Какъ это не грустно, но у многихъ хозяевъ еще и по настоящее время сохранилось предубѣжденіе противъ сельско-хозяйственныхъ машинъ...

Возвращаемся теперь къ работѣ плуга и значенію тѣхъ операцій, которыя онъ производитъ надъ пластами почвы.

Какъ мы видѣли, обработанный плугомъ пластъ подвергается одновременно тремъ операціямъ, выполняемымъ съ той или другой степенью совершенства, смотря по роду почвы и конструкціи самого плуга,—а именно: оборачиванію, разрыхленію и размѣшиванію его.

Оборачиваніемъ пахотнаго слоя и тѣмъ самымъ сообщеніемъ почвѣ волнистаго вида, мы подвергаемъ наибольшую поверхность почвы возможно полному дѣйствію атмосферы. Въ этомъ случаѣ кислородъ воздуха дѣйствуетъ на большую поверхность почвы, а потому въ большихъ размѣрахъ происходитъ разложеніе органическихъ веществъ, при чемъ образуется гумусъ, а отношеніе его къ веществамъ почвы, какъ сказано выше, выражается усиленіемъ процесса вывѣтриванія, раствореніемъ трудно-растворимыхъ соединеній и проч.

Оборачиваніемъ почвы истребляютъ сорную растительность, которая разлагаясь дастъ почвѣ питательныя для культурныхъ растеній вещества.

Оборачиваніемъ достигается также перемѣщеніе частицъ почвеннаго слоя; верхнія попадаютъ внизъ, а нижнія выводятся наружу. При этомъ процессѣ мало использованная нижняя часть пахатнаго слоя мѣняетъ свое мѣсто и можетъ поэтому дать растеніямъ болѣе питательныхъ веществъ, чѣмъ верхній уже использованный растеніями слой.

Разрыхленіемъ почвы мы достигаемъ наибольшаго проникновенія въ нее воздуха и воды, столь необходимыхъ для жизни растеній, и кромѣ того предоставляемъ свободное развитіе нѣжнымъ корневымъ мочкамъ, играющимъ роль проводниковъ изъ почвы питательныхъ для растеній веществъ.

Значеніе для растеній воздуха, проникающаго въ почву.

Свойство обработанной, рыхлой почвы, въ которой частица отъ частицы отстоитъ на такомъ разстояніи, что возможенъ непрерывный обмѣнъ почвеннаго и атмосфернаго воздуха, является по отношенію къ растеніямъ очень цѣннымъ. Кислородъ воздуха необходимъ для дыханія корней, клубней и другихъ подземныхъ органовъ растеній.

Дыханіе растеній состоитъ, какъ извѣстно изъ физіологіи растеній, въ поглощеніи кислорода воздуха и выдѣленіи углекислоты. Углекислота при этомъ процессѣ образуется на-счетъ поглощеннаго кислорода и сгораемаго органическаго вещества.

Воздухъ въ почвахъ, неподвергнувшихся механической обработкѣ и, слѣдовательно, недопускающихъ непрерывнаго обмѣна его съ атмосфернымъ, значительно отличается по своему химическому составу отъ атмосфернаго воздуха.

Въ силу происходящихъ въ почвѣ процессовъ окисленія органическихъ веществъ почвенный воздухъ все болѣе и болѣе обѣдняется кислородомъ и обогащается углекислотою. Кромѣ того кислородъ воздуха необходимъ какъ важный участникъ во многихъ процессахъ, совершающихся въ почвѣ, —вывѣтриванія минераловъ, гуммификація и др.

Значеніе воды для растеній и почвенная влага.

Рыхлая, механически обработанная почва проявляетъ очень цѣнныя свойства по отношенію къ атмосфернымъ осадкамъ, безъ которыхъ жизнь растеній невозможна.

Отъ момента проростанія сѣмени до окончательнаго своего созрѣванія однолѣтнія растенія и, вообще, до конца своей жизни—многолѣтнія—потребляютъ весьма значительное количество воды, которая высасывается ихъ корнями изъ почвы, движется чрезъ весь организмъ растенія и испаряется надземными частями, преимущественно листьями.

Вода даетъ первый толчекъ къ жизни растенія, вызывая проростаніе сѣмени, участвуетъ во все время развитія растенія, являясь вмѣстѣ съ веществами почвы питательнымъ матеріаломъ, а какъ вспомогательное средство играетъ роль растворителя различныхъ соединеній, вслѣдствіе чего и вызываетъ ихъ взаимо-дѣйствіе въ организмѣ растенія.

Не всѣ растенія одинаково требовательны по отношенію къ влагѣ; нѣкоторыя изъ нихъ какъ просо, менѣе требовательны, и могутъ мириться съ засухами, другія же, какъ свекловица, производящія большую массу органическаго вещества, являются и болѣе требовательными по отношенію къ содержанію влаги въ почвѣ.

Изъ физіологіи растеній извѣстно, что чѣмъ большую массу органическаго вещества растенія производятъ, тѣмъ больше требуютъ воды для своего развитія.

Для образованія одной вѣсовой части сухого вещества надземныхъ частей растенія необходимо затратить отъ 300 до 700 частей воды.

Такъ какъ минеральную пищу корни растеній могутъ поглощать изъ почвы безъ вреда для себя лишь въ видѣ слабыхъ растворовъ, то и въ этомъ случаѣ непремѣннымъ агентомъ является вода, разбавляющая концентрированные растворы.

Указавъ на ту важную роль, какую играетъ вода въ жизни растеній, опишемъ и тотъ путь какимъ нужно идти сельскому хозяину, чтобы наилучшимъ образомъ собрать и экономно расходовать цѣнную атмосферную влагу.

Потребность растеній въ водѣ и значительная испарительная ихъ способность, имѣющая слѣдствіемъ сильное изсушеніе почвы, заставляетъ думать о томъ, какъ нужно поступить съ почвой, чтобы задержать неравномѣрно въ теченіе года выпадающіе осадки.

Механическая обработка почвы, направленная между прочимъ на то, чтобы придать ей состояніе рыхлости на разную глубину, смотря по роду культивируемыхъ растеній, можетъ считаться въ этомъ отношеніи могущественнымъ средствомъ. Плотныя почвы, у которыхъ частицы такъ близко отстоятъ одна отъ другой, что проникновеніе атмосферной воды затруднительно, по своей плохой проводимости не могутъ считаться годными для культуры растеній.

Почва должна быть механически обработана съ цѣлью приданія ей состоянія рыхлости на такую глубину, чтобы атмосферная влага могла проникнуть въ почву и не могла бы, считаясь съ топографическими особенностями мѣстности, стекать въ нижележащія мѣста.

Время, въ которое всего лучше произвести вспашку поля, несомнѣнно имѣетъ большое значеніе для растеній.

При осенней обработкѣ почвы мы задержимъ въ ней всѣ атмосферные осадки, выпадающіе осенью, зимой и весной.

Волнистый видъ вспаханнаго поля, происходящій отъ образуемыхъ плугомъ гребней, можетъ оказать нѣкоторое вліяніе на увеличеніе содержанія влаги въ почвѣ, если направленіе пластовъ будетъ идти не вдоль, а поперекъ склоновъ; въ этомъ случаѣ стремящаяся скатиться вода будетъ задержана упомянутыми гребнями, а затѣмъ поглощена почвой.

Эти гребни до наступленія теплаго времени не подвергаются выравниванію, съ появленіемъ же весеннихъ суховѣевъ, когда желательно по возможности уменьшить поверхность испаренія почвы, волнистый видъ ея помощью особыхъ орудій, боронъ, уничтожаютъ и придаютъ почвѣ ровную поверхность; совмѣстно съ выравниваніемъ поля и разбиваніемъ гребней уничтожаются и тѣ пути, по которымъ шла проникшая въ почву атмосферная вода: съ уничтоженіемъ этихъ ходовъ уменьшится и испарительная способность почвы.

Здѣсь будетъ умѣстно указать на способность разрыхленной почвы задерживать въ капиллярныхъ промежуткахъ между ея частицами большее или меньшее количество капельно-жидкой воды.

Эта характерная способность почвы по стольку важна для растеній, поскольку имъ необходима влага.

Лишись почва способности удерживать въ капиллярахъ влагу, не было бы растительности, не было бы органической жизни.

Не всѣ почвы въ одинаковомъ количествѣ задерживаютъ влагу; въ этомъ убѣждаетъ насъ цѣлый рядъ опытовъ, для производства которыхъ не требуется сложныхъ приборовъ.

Если почву въ сосудѣ облить избыткомъ воды, то влагою заполнятся всѣ промежутки между почвенными частицами.

Если дать свободно стечь той водѣ, которая прошла сквозь толщу испытуемой почвы и взвѣсить почву съ прочно удерживаемой ею водой, то происшедшее при этомъ опытѣ увеличеніе вѣса сухой почвы, выражающее ея влаго-емкость, покажетъ характеръ задерживательной способности данной почвы.

Изъ опытовъ стало извѣстнымъ, что съ увеличеніемъ содержанія въ почвахъ перегноя и глины и съ уменьшеніемъ содержанія песчаныхъ частицъ — увеличивается и влагоемкость почвы.

Само собой разумѣется, что чѣмъ значительнѣе влагоемкость почвы, тѣмъ вообще большій запасъ влаги можетъ въ ней скопиться на счетъ метеорной воды для пользы растительности въ періодъ засухъ.

Мы выяснили ту роль, какую играетъ влага въ жизни растеній, указали также на опредѣленное количество воды потребляемой растеніями для нормальнаго ихъ роста; теперь, какъ намъ кажется, было бы не безынтересно выяснить вліяніе на растеніе какъ недостатка воды въ почвѣ, такъ и его излишка.

При всѣхъ прочихъ благопріятныхъ условіяхъ для полнаго развитія растеній, урожайность растеній находится въ зависимости отъ величины запасовъ влаги и прямо ей пропорціональна.

При отсутствіи достаточнаго для роскошнаго роста растеній количества влаги въ почвѣ, происходящей или по причинѣ неумѣлости пользованія атмосферной влагой (плохая и не своевременная обработка почвы), или же по причинѣ климатическихъ условій мѣстности,—ростъ растеній идетъ неправильно, не нормально.

Такъ напримѣръ, засуха въ періодъ роста злаковъ въ трубку сопровождается полученіемъ короткой соломы, во время же образованія зерна вызываетъ его щуплость и малый урожай.

Выросшее при недостаткѣ влаги въ почвѣ, растеніе на видъ представляется слабымъ, тощимъ; малѣйшаго вреднаго влiянiя достаточно, чтобы его окончательно погубить.

По скольку растенiя страдаютъ отъ недостатка воды, по стольку же избытокъ воды въ почвѣ вредно влiяетъ на ростъ растенiя.

Излишняя или стоячая вода—особенно въ низменныхъ мѣстахъ — препятствуетъ или замедляетъ доступъ и влiянiе атмосфернаго воздуха на процессъ вывѣтриванiя и разложенiя органическихъ и неорганическихъ веществъ, образуя вредныя кислоты, вызываетъ гнiенiе корней, и, слѣдовательно, гибель растенiя.

Средствомъ осушенiя почвъ, страдающихъ отъ избытка влажности, служитъ, такъ называемый, дренажъ, или закрытыя каналы, въ которыхъ собирается излишекъ воды и отводится далѣе въ пониженный пунктъ мѣстности: рѣчку, прудъ или оврагъ.

Сырыя почвы, пресыщенныя водой, познаются легко даже по одному внѣшнему виду; почвы меньшей влажности по количеству содержимой въ нихъ влаги опредѣляются обыкновенно на ощупь. Такимъ образомъ различаютъ: 1) почвы сухiя, влажность которыхъ вовсе не ощущается, и самое большее онѣ ограничиваются содержанiемъ гигроскопической воды, т. е. поглощенной почвой изъ насыщеннаго водяными парами пространства; 2) почвы потныя, влажность которыхъ ощущается пальцами, неувлажняемыми, однако, при соприкосновенiи съ ними; въ потныхъ почвахъ сверхъ поглощенной изъ насыщеннаго водяными парами пространства влаги въ количествѣ соотвѣтствующемъ наибольшей гигроскопичности почвы (влаги имбибицiонной) заключается также нѣкоторое количество капиллярной воды, 3) влажныя почвы содержатъ большую часть капиллярной воды, которая увлажняетъ руку при соприкосновенiи ея съ почвой.

Для сельскаго хозяина наиболѣе желательны влажныя почвы, какъ вообще, такъ и въ каждый данный моментъ.

Размѣшиванiе пахатнаго слоя.

Третья операцiя, которой подвергается почва при обработкѣ ея плугомъ—это размѣшиванiе пахатнаго слоя.

Процессомъ размѣшиванiя мы достигаемъ наиболѣе равномѣрное распредѣленiе разложившихся органическихъ и минеральныхъ веществъ по всему обработанному слою.

Построить плугъ, выполняющій одинаково хорошо три упомянутыхъ операціи: 1) оборачиваніе пахатнаго слоя, 2) разрыхленіе и 3) размѣшиваніе его въ настоящее время считается невозможнымъ.

Отъ плуга хорошей конструкціи требуется главнымъ образомъ хорошее оборачиваніе пахатнаго слоя съ значительнымъ разрыхленіемъ его; остальной же процессъ размѣшиванія выполняютъ другія орудія, о которыхъ будетъ упомянуто далѣе.

Разрыхленіе почвы можетъ быть достигнуто также и другими орудіями, но тогда оно будетъ лишь поверхностнымъ, а не тѣмъ глубокимъ разрыхленіемъ почвы, которое, какъ сейчасъ увидимъ, имѣетъ столь много преимуществъ передъ обработкой почвы на незначительную глубину.

По тѣмъ предѣламъ, въ которыхъ колеблется глубина вспашки, можно различать 1) мелкую на глубину не болѣе 3 вершковъ, 2) обыкновенную—на глубину не болѣе 4 вершк. и 3) глубокую до 12 вершк.

Паровая культура почвы.

Обработка почвы на большую глубину производится плугами, приводимыми въ дѣйствіе паровой силой.

Широкое примѣненіе пара въ техникѣ, какъ двигающей силы, нашло себѣ мѣсто также во всѣхъ большихъ хозяйствахъ Запада для интенсивной обработки почвы.

Пользованію живой силой при пахотѣ на значительную глубину поставленъ извѣстный предѣлъ, дальше котораго припряганіе большого числа животныхъ становится безполезнымъ или дастъ слагаемую ничтожную въ сравненіи съ дѣйствительной силой животнаго.

Преимущества паровой культуры передъ обработкой почвы мелкоразрыхляющими орудіями—весьма значительны.

Хозяйства съ паровой культурой почвы всегда пользуются болѣе постоянными, надежными и значительно лучшими урожаями растеній.

Важнѣйшія преимущества паровой вспашки.

1) Паровая обработка земли дѣлаетъ возможною такую глубокую культуру ея, какая невозможна при пользованіи упряжной силой.

Тамъ гдѣ требуется приступить къ значительному углубленію пахотного слоя—введеніе паровыхъ плуговъ сопровождается блестящими результатами.

Распространяемая на значительную глубину вспашка придаетъ почвѣ равномѣрную рыхлость, что даетъ возможность растительнымъ корнямъ свободно развиваться въ этой средѣ и получать въ изобиліи питательный матеріялъ.

Обработанная паровымъ плугомъ почва, благодаря глубокому рыхленію, значительно дольше сохраняетъ влагу, столь потребную въ періоды засухъ; увеличеніе же содержанія влаги въ почвѣ получается благодаря болѣе глубокому разрыхленному слою, сквозь который легко проникаетъ метеорная влага и въ немъ задерживается.

Въ сырые годы также глубоко разрыхленная земля скорѣе пропускаетъ вглубъ излишекъ своей влаги, которая вслѣдствіе этого не вредитъ растеніямъ.

Такимъ образомъ перемѣщеніе влаги сверху внизъ или на оборотъ, вызываемое атмосферными перемѣнами и постоянно регулируемое почвой, съ увеличеніемъ толщины разрыхленнаго слоя, можетъ совершаться въ болѣе широкихъ размѣрахъ; это перемѣщеніе влаги въ почвѣ важно въ томъ смыслѣ, что непозволяетъ пахатному слою ни слишкомъ высыхать, ни слишкомъ сырѣть, а потому значительно ослабляетъ тѣ рѣзкія воздѣйствія на почву, которыя оказываютъ перемѣнныя атмосферныя явленія.

2. Обработка почвы упряжными животными имѣетъ еще одинъ недостатокъ, который при паровой культурѣ совершенно устраненъ.

Широкія копыта животныхъ, силой которыхъ пользуются при обработкѣ почвы, придавливаютъ и уплотняютъ почву, на которой въ результатѣ получаются неравномѣрно распредѣленныя разрыхленныя и уплотненныя мѣста,—этимъ обстоятельствомъ въ значительной степени ослабляется значеніе разрыхленной почвы.

Въ какой степени вредно отзывается это утаптываніе почвы можно видѣть изъ слѣдующаго примѣра.

Четыре вола, запряженные въ плугъ, проводя борозды шириною въ 0,3—0,35 mt. на гектарѣ дѣлаютъ 360000 слѣдовъ, что соотвѣтствуетъ 36 слѣдамъ на 1 квадр. метрѣ. Такое значительное утаптываніе почвы тяжелыми упряжными животными имѣетъ своимъ слѣдствіемъ то, противъ чего направлено дѣйствіе плуга; такимъ образомъ его работа до нѣкоторой степени парализуется.

3. Паровая вспашка удлиняетъ періодъ развитія растеній на полѣ и производство сельско-хозяйственныхъ работъ.

Весною и поздней осенью, когда избытокъ влаги въ почвѣ дѣлаетъ невозможною ея обработку упряжными орудіями, паровой плугъ нерѣдко можетъ еще работать.

Равнымъ образомъ паровой плугъ, устраняя животную силу и не требуя наличности большого числа людей; можетъ работать и въ то время, сейчасъ же послѣ уборки хлѣбовъ, когда въ рабочихъ чувствуется недостатокъ. Подъемъ же поля ранней осенью имѣетъ то преимущество, что даетъ возможность собрать большее количество воды на счетъ атмосферныхъ осадковъ.

4. Введеніемъ паровыхъ плуговъ можно обходиться значительно меньшимъ числомъ упряжныхъ животныхъ.

Выяснимъ эту мысль на примѣрѣ.

Среднюю паровую производительность парового плуга примемъ только въ 3 гектара, производительность же упряжнаго въ $^1/_3$ гектара.

Вспашка опредѣленной площади поля потребуетъ для замѣны 1 парового плуга — 9 обыкновенныхъ плуговъ по четыре вола для каждаго. Считая перемѣну животной силы одинъ разъ въ день, не трудно видѣть, что производительность 1 парового плуга равнется производительности 9 упряжнымъ плугамъ, приводимыхъ въ дѣйствіе по очереди 72 волами.

Не только число упряжныхъ животныхъ фигурируетъ въ этомъ дѣлѣ, здѣсь играетъ также роль и качество работы того или другого плуга; вспахать поле упряжною силою съ такимъ совершенствомъ какое доступно паровому плугу — нельзя и думать.

Если мы на время отклонимся отъ преслѣдуемой нами цѣли, то увидимъ еще одну слабую сторону пользованія животной силой, обусловливаемую хозяйственными соображеніями.

Животныя при запряжкѣ ихъ въ плугъ въ теченіе нѣсколькихъ мѣсяцевъ, не смотря на интенсивное кормленіе, съ трудомъ увеличиваются въ вѣсѣ, между тѣмъ какъ оставаясь въ хлѣву, они успѣваютъ хорошо откормиться, вслѣдствіе чего цѣнность ихъ значительно повышается.

Бороньба и ея значеніе.

Съ наступленіемъ весны, приподнятая плугомъ почва съ образованными гребнями подвергается процессу выравниванія съ цѣлью подготовки ея посѣвъ сѣмянъ; орудія, участвующія при этомъ, носятъ названіе боронъ и катковъ.

Съ уничтоженіемъ гребней при этомъ процессѣ происходитъ уменьщеніе испарительной поверхности почвы, уничтоженіе капилляровъ, слѣдовательно, и достиженіе сбереженія почвенной влаги.

При боронованіи ударами желѣзныхъ зубьевъ борона разбиваетъ земляныя глыбы и комья, чѣмъ способствуетъ дальнѣйшему (но уже поверхностному) разрыхленію и перемѣшиванію почвы.

Играя роль орудія съ поверхностнымъ рыхленіемъ почвы, борона находитъ примѣненіе также и для защиты всходовъ и ухода за взрослыми растеніями.

Образуемая на пашнѣ послѣ сильныхъ ливней кора не позволяетъ росткамъ выбиться на дневную поверхность; чтобы уничтожить эту кору достаточно работы одной бороны.

Бороною нерѣдко перемѣшиваются съ почвою и прикрываются землею туки и посѣвныя сѣмена—при мелкой задѣлкѣ ихъ въ почвѣ.

Весьма важное значеніе имѣетъ борона при истребленіи сорныхъ травъ; съ этой цѣлью боронуютъ почву по истеченіи нѣкотораго времени послѣ ея обработки плугомъ, когда сорныя травы зазеленѣютъ, или еще до вспашки боронуютъ жнивье съ цѣлью ускорить проростаніе сорныхъ сѣмянъ, и послѣдующей затѣмъ за боронованіемъ вспашкой успѣшно истребляютъ развившіеся ростки.

Всего успѣшнѣе идетъ боронованіе при средней влажности почвъ.

Боронованіе весьма влажной почвы приноситъ скорѣе вредъ чѣмъ пользу, такъ какъ почва не разрыхляется, а размазывается и кромѣ того происходитъ при этомъ вредное утаптываніе лошадьми и людьми сырой земли.

Сухая же и плотная почва недостаточно совершенно разрыхляется бороной и цѣль боронованія поэтому не достигается.

Наконецъ, боронованіе слишкомъ сухой и легкой почвы сопровождается распыленіемъ ея и поэтому не должно имѣть мѣста.

Вообще этотъ пріемъ нужно производить во время, иначе работа бороны или сведется къ нулю или окажетъ даже вредъ.

Съ цѣлью достиженія возможно лучшихъ результатовъ боронованіе выполняется обыкновенно на крестъ. Прошедшія сквозь пространство между зубьями комья земли при одномъ боронованіи съ большимъ вѣроятіемъ попадутъ при послѣдующемъ перекрестномъ боронованіи подъ ударное дѣйствіе тѣхъ же зубьевъ.

Катокъ и его значеніе.

Роль выравнивателя почвы въ земледѣліи играетъ также и катокъ. Образъ дѣйствія его чрезвычайно простъ, но эффектъ имъ достигаемый значительный, почему въ раціональномъ хозяйствѣ онъ имѣетъ широкое примѣненіе.

Онъ дѣйствуетъ на почву своимъ вѣсомъ; при этомъ онъ давитъ, раздробляетъ свободно лежащія глыбки, комья земли и уплотняетъ поверхностный слой пашни.

Твердыя и плотныя глыбки, неподдающіяся дѣйствію бороны, подвергаются давящему и раздробляющему дѣйствію катка.

Не подвергнувшія раздробленію земляныя глыбки, вдавливаются каткомъ въ почву и въ ней, впитывая влагу, становятся менѣе плотными.

Съ большимъ успѣхомъ катокъ ломаетъ твердую кору, очень часто образуемую на многихъ почвахъ и препятствующую проникновенію дождевой воды вглубь почвы и выходу всходовъ изъ земли, отчего подъ корою съ растеніями происходитъ явленіе задушенія.

Уплотняющимъ дѣйствіемъ катка пользуются для уничтоженія существующихъ въ почвѣ пустотъ, при чемъ устраняется вредное осѣданіе пашни.

Уплотненіе почвы катками особенно сильно вліяетъ на поднятіе влаги на поверхность почвы.

Увеличеніе влагоподъемной силы почвы, всегда имѣющее мѣсто при каткованіи, не всегда полезно. Примѣненіе катка съ той или другой цѣлью должно производиться во время, и по тщательномъ соображеніи вѣса катка, чтобы не черезчуръ уплотнить почву, иначе дѣйствіе его можетъ оказать явный вредъ.

По выполненіи посѣва поле укатывается съ цѣлью придавливанія сѣмянъ къ землѣ а также и перемѣщенія влаги къ поверхности почвы; такое перемѣщеніе влаги къ сѣменамъ благопріятствуетъ ихъ разбуханію и проростанію.

Концентрированіе влаги въ поверхностномъ слоѣ всѣхъ рыхлыхъ почвъ съ малой водоемкостью и значительною порозностью весною и осенью можетъ быть полезно, такъ какъ усиленнаго высыханія почвъ въ эти времена года не происходитъ по причинѣ отсутствія засухъ; напротивъ, въ лѣтнія засухи укатываніе названныхъ почвъ можетъ принести огромный вредъ.

Въ силу тѣхъ же соображеній осеннее и весеннее укатываніе почвъ тяжелыхъ, страдающихъ отъ избытка сырости, можетъ быть весьма вреднымъ, лѣтнее же, способствующее ихъ высыханію—весьма полезнымъ.

Катковаціе должно производиться только на такихъ почвахъ, которыя успѣли настолько обсохнуть, что не пристаютъ къ катку.

Обработка имъ почвъ, излишне влажныхъ, легко влечетъ за собою образованіе на поверхности очень опасной коры.

При разравниваніи почвъ не ограничиваются однимъ укатываніемъ; этотъ процессъ повторяютъ два и болѣе разъ, иногда перемежая его съ процессомъ боронованія.

Выравнивающее дѣйствіе катка допускаетъ болѣе удобную и правильную работу различныхъ орудій: сѣялокъ, маркеровъ, а впослѣдствіи также жатвенныхъ машинъ и даже обыкновенной косы. Выравнивающимъ дѣйствіемъ катка пользуются также для цѣли покрытія довольно ровнымъ и легкимъ слоемъ земли мелкихъ сѣмянъ, не выносящихъ сколько нибудь значительнаго прикрытія землею.

Попутно катки заравниваютъ кротовины, уничтожаютъ различныхъ животныхъ—враговъ растительности.

Посѣвъ.

Послѣ процесса выравниванія почвы приступаютъ къ посѣву, причемъ въ почву вносятся сѣмена или плоды растеній съ цѣлью ихъ разведенія.

Для своего проростанія сѣмена требуютъ опредѣленныхъ внѣшнихъ условій: надлежащей температуры, доступа влажности и присутствіе свободнаго кислорода.

Послѣднимъ двумъ условіямъ удовлетворяетъ раціональная обработка почвы, время же посѣвовъ тѣхъ или другихъ сѣмянъ каждый опытный хозяинъ опредѣляетъ всегда почти безошибочно. Вообще же слишкомъ рано весной и слишкомъ поздно осенью сѣять неудобно.

Различаютъ посѣвы: разбросный, рядовой и гнѣздовый.

При разбросномъ посѣвѣ высѣваемыя сѣмена первоначально распредѣляются по поверхности почвы и затѣмъ особо задѣлываются, прикрываясь землею при помощи различныхъ орудій (плуга, бороны, катка и др.), выполняющихъ эту задѣлку на большую или меньшую глубину.

При рядовомъ посѣвѣ производится одинаково—глубокая задѣлка сѣмянъ въ параллельныхъ равноотстоящихъ рядахъ, при чемъ разстояніе между сѣменами въ ряду различны.

Гнѣздовый посѣвъ характеризуется не только задѣлкой сѣмянъ на одинаковую глубину, но и тѣмъ, что разстояніе между отдѣльными сѣменами въ ряду вездѣ одинаковое и строго опредѣленное.

Культурное достоинство каждаго изъ этихъ трехъ способовъ посѣва не одинаково. Самымъ совершеннымъ способомъ посѣва нужно признать гнѣздовой за его важное достоинство, заключающееся въ строго-математическомъ распредѣленіи сѣмянъ; самымъ несовершеннымъ является—разбросный.

Рядовой и гнѣздовой посѣвы производятся сѣялками; разбросный же посѣвъ бываетъ ручной и машинный.

Ручной посѣвъ самый нераціональный изъ всѣхъ посѣвовъ; но не смотря на это, нерѣдко можно встрѣтить хозяйства, въ которыхъ онъ примѣняется.

Прельщаясь тѣмъ, что ручной посѣвъ дешевле машиннаго, хозяева, вводя его въ своихъ хозяйствахъ, въ тоже время пытаются доказать, что ручной посѣвъ нисколько не хуже посѣва, производимаго разбросными сѣялками. Но въ этомъ утвержденіи сказывается рутина и вѣковыя привычки, съ которыми такъ трудно бороться.

Какъ бы ни была велика опытность сѣятеля, все таки разбросать рукой сѣмена равномѣрно по поверхности поля—невозможно; затрудненіе увеличивается при посѣвахъ въ вѣтреную погоду, а у насъ въ большинствѣ случаевъ вѣтры именно и дуютъ въ то время, когда должно произвести посѣвъ.

Ручной посѣвъ характеризуется неправильнымъ распредѣленіемъ сѣмянъ по обсѣменяемой площади (мѣстами слишкомъ тѣсное собраніе сѣмянъ, мѣстами слишкомъ рѣдкое). (Это неравномѣрное распредѣленіе сѣмянъ имѣетъ крупные недостатки.

Тѣ мѣста, гдѣ сѣмена разбросаны рѣдко, при болѣе разумномъ пользованіи ими могли бы служить опорой для большаго числа растеній; другія же—съ густымъ расположеніемъ сѣмянъ не въ состояніи дать хорошихъ урожаевъ, такъ какъ при густомъ посѣвѣ происходитъ вылеганіе растеній и другія вредныя для нихъ явленія.

Вылеганіе растеній состоитъ въ томъ, что растенія (хлѣба) пригибаются къ землѣ, ложатся, отчасти перепутываясь между собою, теряютъ возможность нормально развиваться и въ заключеніе даютъ меньшій и худшій по качеству урожай, чѣмъ растенія не полегшія.

При этомъ растенія не могутъ одеревенѣть надлежащимъ образомъ и получить нормальное развитіе.

При ручномъ посѣвѣ невозможно посѣять опредѣленное количество сѣмянъ на опредѣленной площади, что съ большимъ успѣхомъ можно совершить, имѣя разбросную сѣялку; поэтому ручной посѣвъ или не все допускаемое для единицы площади количество сѣмянъ израсходуетъ или же въ худшемъ случаѣ произведетъ перерасходъ ихъ.

Общій недостатокъ, присущій разбросному посѣву, совершаемому вручную или сѣялками, заключается въ томъ, что разбросной посѣвъ требуетъ для задѣлки сѣмянъ въ почвѣ работу нѣкоторыхъ орудій, которыя не въ состояніи распредѣлить ихъ въ почвѣ на одинаковую глубину.

Плугъ задѣлываетъ нѣкоторыя сѣмена на столько глубоко, что пробиться росткамъ сѣмени наружу нѣтъ возможности, отчего оно гибнетъ; послѣ бороны много сѣмянъ остается незадѣланными и выклевываются птицами; частое же боронованіе по засѣянному полю съ цѣлью углубленія ихъ въ почву—даетъ еще худшіе результаты, такъ какъ при этомъ все новыя сѣмена то задѣлываются слишкомъ глубоко, то выбрасываются бороною на поверхность почвы.

Неодинаково-глубокая задѣлка сѣмянъ, какъ слѣдствіе разбросного посѣва и послѣдующей работы орудій, вызываетъ недружные всходы засѣянныхъ растеній со всѣми дурными слѣдствіями.

Недружные всходы вызываютъ неодновременное созрѣваніе растепій (хлѣбовъ); это явленіе сельскому хозяину причиняетъ большой вредъ, такъ какъ во время жатвы съ поля приходится увозить какъ несозрѣвшія растенія, такъ и тѣ, которыя успѣли уже осыпаться. Принимая же во вниманіе свойство нѣкоторыхъ растеній быстро осыпаться тотчасъ по созрѣваніи, не трудно видѣть какой убытокъ въ состояніи причинить земледѣльцу неодновременное созрѣваніе растеній.

Рядовымъ посѣвомъ уничтожаются многіе недостатки, присущіе разбросному.

Рядовой посѣвъ производится слѣдующимъ образомъ. Рядовыя сѣялки помощью острыхъ сошниковъ проводятъ въ почвѣ бороздки, отстоящія на равномъ разстояніи другъ отъ друга (разстояніе это въ нѣкоторыхъ сѣялкахъ можно регулировать); одновременно съ работой этихъ сошниковъ изъ посѣвныхъ аппаратовъ черезъ сѣмяпроводы устремляется сѣмя къ бороздкамъ; размѣстившись на вполнѣ опредѣленную глубину (также регулируемую нажатіемъ сошниковъ къ почвѣ помощью гиръ), сѣмена тотчасъ же прикрываются землею, благодаря особому устройству рабочей поверхности упомянутыхъ сошниковъ.

Такимъ образомъ вмѣстѣ съ посѣвомъ сѣмянъ рядовая сѣялка ихъ и задѣлываетъ на одинаковую глубину, почему не требуетъ другихъ орудій, которыя, задѣлывая сѣмена, въ то же время переворачиваютъ землю, и, слѣдовательно, сушатъ ее болѣе или менѣе значительно.

Примѣненіе рядовыхъ сѣялокъ тамъ, гдѣ чувствуется недостатокъ во влагѣ (явленіе частое въ Россіи) было бы весьма полезнымъ, такъ какъ при пользованіи ими можетъ быть достигнуто сбереженіе влаги.

Въ особенности сильно сохнетъ почва при задѣлкѣ хлѣбовъ сохами весною, ибо въ это время дуютъ особенно сухіе вѣтры.

Особенность рядового посѣва, заключающаяся въ распредѣленіи растеній параллельными рядами, допускаетъ обработку междурядій специальными орудіями, предназначенными для ухода за растеніями въ періодъ ихъ роста (ручныя и конныя мотыги и др.).

Рядовыя сѣялки, наконецъ, сберегаютъ до 25% сѣмянъ,—это обстоятельство весьма важное при посѣвѣ большихъ площадей, такъ какъ сбереженія нѣсколькихъ лѣтъ выкупаютъ стоимость самой сѣялки.

Не смотря на достоинства рядовыхъ сѣялокъ распространеніе ихъ въ Россіи крайне незначительно. За исключеніемъ весьма малаго числа хозяйствъ, гдѣ можно видѣть рядовыя сѣялки, большинство хозяевъ производятъ посѣвы разбросными сѣялками и ручнымъ способомъ.

Не говоря уже про несовершенство ручного посѣва и всѣ отъ него истекающіе убытки для земледѣльца, укажемъ еще на одинъ недостатокъ этого примитивнаго способа посѣва—на его сравнительно не спорую работу.

Въ то время, когда искусный сѣятель при ручномъ посѣвѣ можетъ обсѣменить въ день 3—4 десятины, при чемъ для задѣлки потребуется еще одинъ рабочій при двухъ лошадяхъ, рядовая сѣялка при 2 рабочихъ и 2-хъ лошадяхъ въ состояніи обсѣменить и задѣлать въ то же время отъ 5 до 6 десятинъ и болѣе.

Принимая же во вниманіе то обстоятельство, что ручной посѣвъ требуетъ благопріятной погоды, между тѣмъ какъ рядовой можетъ происходить во всякую, а также и климатическія условія Россіи, недопускающія запаздыванія съ посѣвомъ,—будетъ понятно какой посѣвъ возьметъ верхъ.

Въ сѣверныхъ губерніяхъ Россіи приходится торопиться весенними посѣвами, чтобы при краткости тамъ лѣтняго періода, дать растеніямъ достаточно времени для полнаго созрѣванія. На югѣ же, не смотря на болѣе продолжительное лѣто, достаточное для вегетаціоннаго періода растеній, все таки приходится спѣшить съ посѣвами, что-бы растенія имѣли возможность воспользоваться для первоначальнаго своего развитія возможно большимъ количествомъ влаги.

Наиболѣе совершеннымъ способомъ посѣва сѣмянъ нужно признать гнѣздовый, при которомъ сѣмена или группы сѣмянъ распредѣляются въ правильные ряды съ опредѣленнымъ разстояніемъ между сѣменами или группами ихъ.

До нѣкоторой степени при рядовомъ посѣвѣ растенія могутъ тѣснить другъ друга, такъ какъ распредѣленіе ихъ въ каждомъ ряду не правильное; этотъ недостатокъ устраненъ при гнѣздовомъ посѣвѣ, гдѣ для каждаго растенія предопредѣляется необходимое для свободнаго его развитія площадка земли.

При рядовомъ посѣвѣ вызывается явленіе тѣсненія растеній; чтобы дать просторъ для развитія нѣкоторымъ изъ нихъ, выдергиваютъ другія; такимъ образомъ происходитъ нѣкоторая потеря сѣмянъ, не имѣющая мѣста при гнѣздовомъ посѣвѣ.

Исходя изъ того положенія, что каждое растеніе для правильнаго своего роста требуетъ кромѣ другихъ условій опредѣленной площади земли и, зная, что гнѣздовый посѣвъ съ математической точностью въ состояніи удовлетворить этому условію, должно признать этотъ способъ посѣва самымъ совершеннымъ изъ всѣхъ извѣстныхъ.

Принимая во вниманіе вышеизложенное, казалось бы необходимымъ употреблять только гнѣздовыя сѣялки, какъ наиболѣе отвѣчающія цѣлямъ посѣва; въ дѣйствительности же приходится считаться съ механизмомъ посѣвного аппарата, недоведеннаго еще до совершенства распредѣленія сѣмянъ при какихъ угодно малыхъ разстояніяхъ между ними.

До настоящаго времени гнѣздовыя сѣялки примѣнялись тамъ, гдѣ разсѣвались сѣмена растеній, каждый экземпляръ которыхъ требовалъ для свободнаго своего развитія довольно значительной площадки, какъ напримѣръ, свекла, кукуруза и др.

Въ виду важныхъ преимуществъ гнѣздоваго посѣва появленіе гнѣздовыхъ сѣялокъ для посѣва хлѣбовъ были бы весьма желательны.

Кромѣ упомянутыхъ сѣялокъ существуютъ еще такъ называемые универсальныя сѣялки, предназначенныя къ посѣву смѣшанныхъ сѣмянъ.

Всего чаще до настоящаго времени употребляются смѣшанные посѣвы кормовыхъ травъ, затѣмъ нѣкоторыхъ растеній, воздѣлываемыхъ ради сѣмянъ, а въ новѣйшее время также смѣшанные посѣвы разныхъ сортовъ одного растенія (особенно хлѣбовъ). Опытъ показываетъ, что смѣшанные посѣвы лучше чистыхъ обезпечиваютъ урожай; урожайность растеній въ этомъ случаѣ является слѣдствіемъ неодинаковыхъ требованій различныхъ растеній, которыя они предъявляютъ по отношеніи къ почвѣ; а потому и понятно, что смѣшанные посѣвы допускаютъ лучшее использованіе веществъ почвы.

Одинъ изъ смѣшанныхъ посѣвовъ, именуемый покровнымъ, въ земледѣліи очень часто употребляется; состоитъ онъ въ томъ, что опредѣленныя сѣмена растенія высѣваютъ одновременно съ сѣменами другого растенія; послѣднія, какъ быстро развивающіяся, должны опередить и быть убраны въ то время, когда начинается лишь болѣе интенсивное развитіе подпокровнаго растенія.

Такой посѣвъ даетъ возможность лучше использовать почву, такъ какъ медленно развивающееся растеніе укрѣпляется въ то время, когда земля эксплоатируется другимъ посѣвомъ.

Въ другихъ случаяхъ покровное растеніе даетъ возможность надежнѣе развиваться слабымъ всходамъ подъ его защитой, что особенно важно, именно для медленно развивающихся всходовъ.

Для цѣлей смѣшаннаго посѣва хлѣбовъ и кормовыхъ травъ соединяютъ съ рядовой сѣялкой посѣвной ящикъ разбросной сѣялки для травъ.

Этотъ комбинированный способъ во многихъ отношеніяхъ можетъ считаться вполнѣ выгоднымъ, такъ какъ не приходится послѣ рядового посѣва производить особо посѣвъ разбросный.

Желая наиболѣе совершенно использовать искусственныя туки, въ послѣднее время стали строить сѣялки комбинированной системы; работа ихъ характеризуется тѣмъ, что одновременно съ высѣваемыми ею сѣменами въ почву вносятся удобрительныя туки; этой операціей достигается тѣсное соприкосновеніе удобрительныхъ веществъ съ корнями растеній, чѣмъ обусловливается и лучшее ихъ питаніе; кромѣ того, не требуется отдѣльнаго задѣлыванія удобрительныхъ веществъ спеціальными орудіями.

Приспособленія для такого совмѣстнаго разсѣва сѣмянъ и удобреній имѣются при нѣкоторыхъ рядовыхъ сѣялкахъ.

Существуетъ также цѣлый рядъ сѣялокъ, предназначенныхъ спеціально для разсѣва удобреній.

Количество расходящихся въ Россіи сѣялокъ этого рода съ каждымъ годомъ увеличивается, а столь широкое ихъ распространеніе объясняется стремленіемъ нашихъ хозяевъ къ замѣнѣ хлѣвнаго назоза болѣе концентрированными удобрительными веществами, какъ—суперфосфатъ и фосфоритная мука.

Произвести равномѣрный разбросъ этихъ удобреній дѣло невозможное даже для самыхъ искусныхъ сѣятелей.

Если качество ручного посѣва сѣмянъ въ смыслѣ равномѣрности распредѣленія ихъ на опредѣленной площади находится въ зависимости отъ силы теченія воздуха, то равномѣрный разсѣвъ болѣе мелкаго вещества, туковъ, является совершенно невозможнымъ, такъ какъ ужъ малѣйшій вѣтеръ оказываетъ свое вліяніе.

Примѣняя то, что сказано было о недостаткѣ ручного посѣва сѣмяпъ, можно сдѣлать такое заключеніе:—ручное разбрасываніе порошкообразныхъ удобреній пріемъ несовершенный, медленный и дорогой.

Несравненно больше преимуществъ представляетъ машинный разбросный и рядовой способы разсѣва удобреній.

При машинномъ способѣ разсѣва удобреній является возможнымъ: 1) нѣкоторое уменьшеніе количества разсѣваемаго удобренія, 2) болѣе равномѣрное распредѣленіе, 3) меньшая зависимость отъ погоды, 4) ускореніе работы.

Работа съ сѣялками для удобрительныхъ туковъ, вообще, болѣе затруднительна нежели работа съ сѣялками для сѣмянъ, что объясняется мучнистостью этихъ удобреній и легкой ихъ измѣняемостью отъ влажности воздуха (скучиваніе въ ящикѣ и слипаніе).

Сѣялки всѣхъ системъ, предназначенныя какъ для чистаго, такъ и для смѣшаннаго посѣва для правильнаго своего дѣйствія требуютъ тщательной обработки почвы.

Уклонъ почвы и скорость движенія сѣялокъ новѣйшихъ системъ нисколько не вліяетъ па количество разсѣваемыхъ сѣмянъ и удобреній.

Сторонники разбросnаго посѣва указываютъ между прочимъ па одинъ недостатокъ рядовыхъ сѣялокъ и признаютъ ихъ полную негодность. Дѣло вотъ въ чемъ.

Образуемая послѣ сильныхъ дождей кора обыкновенно разбивается вслѣдствіе своей сухости трещинами, при рядовомъ посѣвѣ нерѣдко идущими параллельно рядомъ.

Такое параллельное растрескиваніе происходитъ въ тѣхъ случаяхъ, когда междурядія широки и растенія въ рядахъ растутъ часто, образуя тѣснымъ своимъ единеніемъ въ почвѣ какъ бы изолированный слой, и влечетъ за собой вредныя для растеній послѣдствія.

Растрескиваніе почвы вызываетъ отрываніе корневыхъ мочекъ, отчего растенія развиваются несравненно хуже.

Противникамъ рядового посѣва, недостаточно разобравшимся въ этомъ явленіи, достаточно этого факта, чтобы вывести заключеніе о вредѣ рядоваго посѣва, и, слѣдовательно негодности сѣялокъ, конструкція которыхъ вырабатывалась десятками лѣтъ.

Не оспаривая этого явленія, мы тѣмъ не менѣе не можемъ согласиться съ поспѣшнымъ заключеніемъ о негодности рядовыхъ сѣялокъ.

Въ данномъ случаѣ всего необходимѣе изыскать мѣры борьбы съ этимъ нежелательнымъ явленіемъ; въ нашемъ же распоряженіи имѣются вполнѣ дѣйствительныя мѣры.

Напримѣръ, весьма полезно послѣ рядового посѣва пройти бороною или кольцевымъ каткомъ поперекъ посѣва, чтобы выровнять образовавшіяся во время задѣлыванія сѣмянъ грядки, способствующія появленію трещинъ вдоль рядовъ.

Кромѣ того во время роста растеній, если междурядія позволяютъ, необходимо произвести разрыхленіе почвы между растеніями.

Если же обработку междурядій не производятъ, то растрескиваніе почвы можно устранить менѣе частымъ заключеніемъ сѣмянъ въ ряду и узкими между рядіями.

Пріемы и орудія, употребляемыя при уходѣ за растеніями.

Съ появленіемъ ростковъ посѣянныхъ сѣмянъ не прекращается работа земледѣльца, на его обязанности лежитъ охрана молодого растеньица отъ неблагопріятныхъ условій; трудъ его долженъ быть направленъ на то, чтобы поставить растеніе въ возможность роскошно рости во весь періодъ произростанія до полнаго его созрѣванія.

Пріемы употребляемыя при уходѣ за растеніями, преслѣдуютъ ту или иную цѣль, и каждый пріемъ сопровождается спеціальными орудіями, носящими названіе: мотыгъ, окучника, полольника и др.

Опишемъ значеніе каждаго пріема въ отдѣльности.

Мотыженіе.

Лишь только обозначатся ряды растеній, приступаютъ къ мотыженію. Этотъ процессъ заключается въ томъ, что при помощи весьма несложнаго орудія (состоящаго изъ желѣзной насадки,налопатника, расположенной къ деревянному обуху подъ угломъ, близкимъ къ прямому), именуемаго мотыгой, производятъ разрыхленіе земли въ промежуткахъ между растеніями.

Мотыженье возможно поэтому только послѣ рядового и гнѣздового посѣвовъ.

Благодаря разрыхленію почвы, произведенному мотыгой, облегчается проникновеніе въ почву воды и воздуха, слѣдовательно, растенія обезпечиваются влагою и кислородомъ, а также усиливается процессъ вывѣтриванія, обезпечивающій растенія минеральными солями.

Далѣе, благодаря разрыхленію почвы, облегчается развитіе растительныхъ корней, которые легче распространяются въ почвѣ.

При этомъ процессѣ уничтожается сорная растительность, занимающая промежуточныя между культурными растеніями мѣста.

Въ силу всѣхъ этихъ причинъ растеніе развивается подъ вліяніемъ мотыженія роскошно и получаетъ способность противостоять неблагопріятнымъ условіямъ.

Иногда къ мотыженію приступаютъ даже ранѣе появленія ростковъ высѣяннаго растенія, такъ бываетъ при культурѣ растеній съ медленно развивающимися всходами. Такъ какъ ряды посѣвовъ могутъ быть затеряны, то пользуются при этомъ слѣдующимъ способомъ.

Вмѣстѣ съ сѣменами разводимаго растенія высѣваютъ и др. сѣмена, но значительно быстрѣе проростающія, благодаря чему ряды посѣва обозначаются раньше появленія главныхъ всходовъ,—теперь уже можно приступить къ мотыженію, не рискуя повредить непробившимся на дневную поверхность растеніямъ.

Для обработки большихъ площадей и при посѣвѣ широкими рядами употребляются конныя мотыги, такъ какъ работа ими идетъ много успѣшнѣе.

При мотыженіи вручную, работникъ движется такимъ образомъ, что оставляетъ разрыхленную почву передъ собою; отсюда и является недостатокъ этого способа мотыженія, такъ какъ почва сначала уплотняется утаптываніемъ ногами работника, а затѣмъ уже разрыхляется. Уплотнивъ почву, рабочій не въ состояніи измельчить ее ручной мотыгой равномѣрно, при этомъ всегда на поверхности междурядій будетъ довольно значительное количество неразмельченныхъ комьевъ, что понижаетъ качество работы. Въ конныхъ мотыгахъ этотъ недостатокъ если не уничтожается совершенно; то значительно ослабляется.

Мотыженіе растеній производятъ нѣсколько разъ. Первое производится обыкновенно на незначительную глубину и имѣетъ, главнымъ образомъ, цѣлью подрѣзываніе сорной растительности, второе мотыженіе уже болѣе глубокое,—при чемъ, кромѣ извлеченія сорной растительности имѣется въ виду болѣе тщательное разрыхленіе почвы, а иногда и легкое окучиваніе растеній.

Въ сырую, дождливую погоду, мотыженіе не должно быть допускаемо, потому что при немъ легко образуются крупныя комья.

Послѣ дождей легко высыхающія почвы мотыжатся тотчасъ же, чтобы разрыхленіемъ поверхностнаго слоя задержать высушиваніе почвы; труднѣе же высыхающія, напр. глинистыя—только по прошествіи болѣе продолжительнаго времени, чтобы дать имъ нѣсколько подсохнуть.

За вторымъ мотыженіемъ, смотря по растенію, погодѣ, разростанію сорныхъ травъ и состоянію почвы, слѣдуетъ еще одно, два и даже три новыхъ мотыженія, раздѣляемыхъ извѣстными промежутками.

Два, слѣдующихъ одно за другимъ, мотыженія рекомендуется производить, начиная съ разныхъ концовъ поля, чтобы сдѣлать разрыхленіе почвы болѣе равномѣрнымъ.

Если при пользованіи рядовой сѣялкой ряды получились правильные, то при конномъ мотыженіи работа идетъ быстро; въ такомъ случаѣ работникъ сосредоточиваетъ свое вниманіе на одномъ какомъ нибудь рядѣ, зная, что всѣ ножи мотыги разрыхляющіе почву, будутъ работать правильно.

Существуютъ орудія выполняющія мотыженіе совмѣстно съ окучиваніемъ растеній.

Окучиваніе растеній заключается въ томъ, что сильно разрыхленную землю приваливаютъ къ растеніямъ.

При рядовой культурѣ при этомъ образуются гребни, идущіе по рядамъ растеній.

Цѣль, преслѣдуемая окучиваніемъ бываетъ разная: иногда приваливаютъ къ растеніямъ землю чтобы сообщить имъ большую устойчивость (для нѣкоторыхъ высокоростущихъ растеній это является необходимымъ), въ другихъ случаяхъ имѣется въ виду предоставить для пользованія растеній большее количество питательныхъ веществъ, накопляющихся въ хорошо разрыхленной, провѣтриваемой землѣ, приваливаемой къ растенію; прикрытіе нижнихъ частей растеній вліяетъ на характеръ дальнѣйшаго развитія—напр. у кукурузы послѣ этого вызывается образованіе боковыхъ корней, у картофеля послѣ окучиванія обильнѣе развиваются боковые подземные побѣги, несущіе клубни, на сахарную свекловицу прикрытіе землею выдающейся головки вліяетъ въ томъ отношеніи, что количественное содержаніе сахара въ свекловицѣ значительно повышается.

Необходимо всегда имѣть въ виду тѣ слѣдствія, которыя влечетъ за собой окучиваніе по отношенію къ влажности почвы, чтобы знать, какое состояніе почвы всего лучше благопріятствуетъ этому пріему.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда желаютъ уменьшить влажность сырой и тяжелой почвы, окучиваніе можетъ оказать великую услугу, въ виду того, что съ гребней стекаютъ выпадающіе атмосферные осадки, гребни легче провѣтриваются, а также вслѣдствіе увеличенія поверхности испаренія почвы.

Если же почва легкая, окучиваніе растеній, произведенное не во время, становится не только не полезнымъ, но иногда весьма вреднымъ.

Цѣня всѣ достоинства окучиванія и видя въ немъ необходимость, нераціонально было бы производить этотъ процессъ съ сухими и легкими почвами въ сухую погоду и поздно лѣтомъ.

По мѣрѣ развитія надземныхъ частей растенія (широкія листья) испареніе почвенной влаги значительно замедляется, вслѣдствіе оттѣненія почвы этими частями растеній. Оттѣненіе почвы растеніями, подвергшимися окучиванію, очень важно въ томъ смыслѣ, что идетъ на встрѣчу усиленному испаренію почвенной влаги по причинѣ образованія при окучиваніи гребней.

Орудіе, при помощи котораго производится окучиваніе растеній, носитъ названіе окучника; онъ напоминаетъ собою плугъ и по особенностямъ своего устройства можетъ быть названъ двукрылымъ плугомъ. Окучникъ можно встрѣтить во всякомъ даже некрупномъ хозяйствѣ.

Работа его заключается въ томъ, что онъ подрѣзаетъ почву въ горизонтальномъ направленіи, оборачиваетъ ее при своемъ движеніи и распредѣляетъ ее въ гребни, поровну направо и налѣво. Окучиваніемъ уничтожается сорная растительность.

При уходѣ за озимыми хлѣбами въ иныхъ случаяхъ приходится пользоваться катками или тяжелыми боронами. Укажемъ на эти случаи.

Наиболѣе важные изъ нашихъ хлѣбовъ пшеница и рожь являются въ видѣ сортовъ частью озимыхъ, частью яровыхъ.

Различія между озимыми и яровыми хлѣбами незначительны, обыкновенно при достаточно благопріятныхъ условіяхъ озимые сорта по сравненіи со сходными съ ними яровыми представляются болѣе урожайными и даютъ болѣе крупное зерно; рѣзкаго же морфологическаго отличія между ними указать совершенно невозможно.

Озимые сорта хлѣбовъ засѣиваются до зимы (въ концѣ лѣта или осенью), при чемъ они, пріостановившись въ своемъ развитіи по наступленіи холодовъ, вновь оживаютъ весною, совершаютъ большую часть своего развитія въ этомъ новомъ году ихъ жизни, лѣтомъ вполнѣ созрѣваютъ и приносятъ плоды. Хотя озимыя хлѣба весь циклъ развитія совершаютъ въ 2 періода, принадлежащихъ двумъ отдѣльнымъ годамъ, все же это растенія, собственно, однолѣтнія, потому что все ихъ развитіе совершается въ срокъ короче одного года.

Посѣвъ яровыхъ хлѣбовъ производится весною, лѣтомъ они приносятъ плоды.

Характеръ озимыхъ и яровыхъ хлѣбовъ выражается въ неодинаковыхъ требованіяхъ относительно времени посѣва; выработался же онъ подъ вліяніемъ климатическихъ условій.

Обыкновенно ярь, высѣянная до зимы, вполнѣ или большей частью вымерзаетъ въ это время года, а озимь, посѣянная весною, не успѣваетъ развиться и дать въ этомъ году колосьевъ.

Очевидно, что эти сорта хлѣбовъ, воздѣлываясь долгое время, въ концѣ концовъ приспособились къ опредѣленнымъ климатическимъ условіямъ и не могутъ произростать при иныхъ.

Гибель озимыхъ посѣвовъ нерѣдко происходитъ оттого, что падающій на нихъ толстымъ слоемъ снѣгъ или замерзающая надъ ними въ видѣ ледяной коры вода, лишаютъ вегетирующія еще растенія воздуха, необходимаго имъ для дыханія.

Если снѣгъ падаетъ послѣ наступленія морозовъ на замерзшую землю, то вреда онъ не причиняетъ, потому что при этихъ условіяхъ жизненные процессы въ растеніяхъ уже прекратились. Напротивъ, снѣгъ, выпадающій осенью до морозовъ или весною, когда послѣ нѣсколькихъ дней оттепели растительность пробуждается—причиняетъ озимымъ посѣвамъ громадный вредъ.

Тоже слѣдуетъ сказать и относительно ледяной коры, весною покрывающей посѣвы; послѣдніе подъ нею нагрѣваются солнцемъ, растительность пробуждается, начинаетъ поглощать въ большомъ количествѣ кислородъ воздуха при дыханіи и въ заключеніе, вслѣдствіе истощенія запаса кислорода въ закрытомъ ледяною корою пространствѣ, погибаетъ какъ бы отъ задушенія. Послѣ отмиранія растеній въ подобныхъ случаяхъ начинается процессъ разложенія ихъ массы, сопровождающійся совершеннымъ измѣненіемъ ея, при этомъ происходитъ пожелтѣніе, побуреніе, загниваніе растеній и т. д.

Причиною выпрѣванія посѣвовъ является ледяная кора, на разрушеніе которой и должны быть направлены усилія сельскаго хозяина.

Орудія, которыя съ большимъ успѣхомъ могли бы выполнить эту операцію, намъ уже извѣстны—это катки и тяжелыя бороны.

Выяснивъ всѣ важные процессы, происходящіе въ почвѣ, указавъ на роль ихъ по отношенію къ физіологическимъ явленіямъ растеній, а также на тѣ пріемы, помощью которыхъ можно создать наилучшія условія для жизни культивируемыхъ растеній—не лишнимъ считаемъ, для большей наглядности, собрать по частямъ всѣ достоинства интенсивной обработки почвы и изложить ихъ въ краткой формѣ.

Значеніе интенсивной обработки почвы.

Механическая обработка почвы принадлежитъ вмѣстѣ съ химической ея обработкой, т. е. удобреніемъ, къ числу періодическихъ пріемовъ, направленныхъ къ улучшенію почвы, предназначенной для культурныхъ растеній.

Она состоитъ въ непосредственномъ измѣненіи только физическихъ свойствъ обрабатываемаго почвеннаго слоя (въ посредственномъ же въ зависимости отъ измѣненія физическаго состоянія—также и химическаго состава) и направлена главнымъ образомъ на сообщеніе почвѣ рыхлости на разную глубину (мелкая и глубокая обработка почвы, углубленіе почвеннаго слоя); вмѣстѣ съ этимъ механическою обработкою почвы достигается перемѣщеніе ея частицъ, перемѣшиваемыхъ между собою и съ посторонними вносимыми въ почву веществами (удобренія, сѣмена).

Въ зависимости отъ измѣненія степени рыхлости почвы подъ вліяніемъ ея механической обработки вызывается также болѣе или менѣе сильное измѣненіе отношенія обработанной почвы къ водѣ и воздуху. Разрыхленная почва допускаетъ свободное проникновеніе въ нее воздуха и воды; кислородъ почвеннаго воздуха идетъ на дыханіе подземныхъ частей растенія и участвуетъ въ процессахъ совершающихъ въ почвѣ, какъ то, вывѣтриваніе минераловъ, гуммификація, нитрификація и др.

Почвенная влага вызываетъ проростаніе сѣмянъ; вмѣстѣ съ веществами почвы является питательнымъ для растеній матеріаломъ, разбавляетъ находящіеся въ почвѣ концентрированные растворы, вредные для корней растеній; необходима для жизнедѣятельности микроорганизмовъ, участвующихъ въ процессахъ гуммификаціи, нитрификаціи и др.; почвенная влага своимъ участіемъ дѣлаетъ возможнымъ воспріятіе минеральной пищи корнями растеній.

Разрыхленная почва представляетъ среду благопріятную для свободнаго распространенія растительныхъ корней.

Механическая обработка почвы попутно или даже въ видѣ главной своей цѣли уничтожаетъ сорную растительность.

Обработка почвы плугомъ придаетъ ей волнистый видъ отъ образуемыхъ гребней, которые задерживаютъ метеорные осадки и даютъ время почвѣ поглотить ихъ; гребни, увеличивая поверхность почвы усиливаютъ процессъ вывѣтриванія, гуммификаціи и проч.

Выравниваніемъ гребней уменьшаютъ испарительную поверхность почвы. По желанію механической обработкой высушиваютъ сырыя почвы (избытокъ воды вреденъ для растеній) и достигаютъ перемѣщенія влаги изъ нижнихъ слоевъ къ верхнимъ (влага для проростанія сѣмянъ). При механической обработкѣ почвы уничтожаются враги растительности. Наконецъ, механическая обработка допускаетъ работу усовершенствованныхъ сѣялокъ и машинъ для уборки урожаевъ, какъ то жатокъ, косилокъ и др,

Мы указали на цѣлый рядъ орудій, предназначенныхъ для обработки почвы, на машины, выполняющія посѣвъ сѣмянъ и разсѣвъ удобреній, а также и на орудія, требуемыя въ хозяйствѣ при уходѣ за культивируемыми растеніями; кромѣ этихъ машинъ и орудій существуетъ много другихъ, употребляемыхъ при уборкѣ покосовъ, хлѣбовъ и при выдѣлкѣ зерна для рынка и сѣва. Останавливаться на ихъ конструктивныхъ особенностяхъ мы не будемъ, такъ какъ это не входитъ въ предѣлъ настоящей статьи, указать же на причины, въ силу которыхъ машинный трудъ вытѣсняетъ постепенно и съ большой силой ручную работу,—считаемъ не лишнимъ.

Сельско-хозяйственныя машины и орудія назначены для раздѣленія физическаго труда человѣка; при этомъ чѣмъ совершеннѣе орудіе или машина, и, слѣдовательно, выше ихъ производительность, тѣмъ меньше работы остается на долю ручнаго труда. Эта оказываемая машинами помощь человѣку и направленная на удовлетвореніе его физическихъ потребностей имѣетъ еще и то важное значеніе, что предоставляетъ въ распоряженіе человѣка много времени для удовлетворенія его умственныхъ и нравственныхъ потребностей.

Кромѣ большей производительности цѣнностей въ единицу времени машинная работа беретъ еще перевѣсъ надъ ручной по причинѣ ея правильности и чистоты.

Зерна колосьевъ полнѣе выбиваются барабаномъ молотилки, чѣмъ цѣпами; при цѣпной молотьбѣ остается зерна въ колосьяхъ до 4% и больше, а при машинной не болѣе 2%. Сѣялкой можно достигнуть большей равномѣрности распредѣленія сѣмянъ на опредѣленной площади, чѣмъ при ручномъ разбросѣ.

Необходимость примѣненія сельско-хозяйственныхъ машинъ вызывается часто нѣкоторыми мѣстными экономическими или климатическими условіями.

Характерная особенность климата Россіи—это продолжительность зимы и сравнительная краткость лѣта, заставляющая земледѣльца сосредоточивать почти всѣ сельско-хозяйственныя работы въ какихъ-нибудь 4—5 мѣсяцевъ; климатическія особенности нашей страны поэтому обусловливаютъ тѣ или другіе виды растеній, способъ ихъ культуры и предопредѣляютъ періодъ вегетаціи культивируемыхъ растеній.

Отсюда вполнѣ понятна наблюдаемая при выполненіи полевыхъ работъ спѣшность.

Въ мѣстностяхъ, страдающихъ отъ засухъ, приходится спѣшить весенними посѣвами, чтобы растенія могли воспользоваться весенней влагой,—здѣсь необходимы сѣялки.

Машинный посѣвъ благодаря быстротѣ работы удлиняетъ кромѣ того періодъ роста растеній, что для сѣвера Россіи, гдѣ нужно торопиться посѣвами, чтобы дать растеніямъ время созрѣть до наступленія осеннихъ морозковъ, составляетъ немаловажную его особенность.

Въ такой же мѣрѣ на удлиненіе періода роста растеній вліяетъ быстрая уборка хлѣбовъ съ поля по созрѣваніи ихъ, такъ какъ допускаетъ немедленную обработку почвы для посѣвовъ озимыхъ хлѣбовъ.

Своевременная уборка хлѣбовъ и немедленная обработка почвы позволяютъ полнѣе собрать выпадающіе атмосферные осадки, въ которыхъ чувствуется во многихъ мѣстахъ недостатокъ. Уборкой хлѣбовъ необходимо торопиться еще и потому, что всякое промедленіе можетъ быть причиною огромныхъ потерь, какъ отъ загниванія скошеннаго корма, такъ и отъ выпаденія значительнаго количества зеренъ перестоявшаго хлѣба.

Въ виду весьма большого спроса на рабочія руки въ самую горячую, по истинѣ называемую „страдною", пору уборки хлѣбовъ, поденная плата рабочимъ такъ сильно повышается, что нѣкоторыя хозяева находили болѣе убыточнымъ пользоваться ихъ работой, чѣмъ оставить хлѣба неубранными съ поля и предоставить имъ осыпаться и гнить.

Чтобы видѣть до какихъ баснословныхъ размѣровъ доходила поденная плата рабочимъ въ степныхъ губерніяхъ, стоитъ сдѣлать извлеченіе изъ оффиціальныхъ источниковъ.

По оффиціальнымъ даннымъ заработная плата въ 4-хъ Новороссійскихъ губерніяхъ, въ которыхъ чувствуется сильный недостатокъ въ земледѣльческихъ рабочихъ, колеблется въ невѣроятныхъ размѣрахъ отъ 30 коп. до 3—4 руб. и болѣе въ день.

Примѣненіе косилокъ и жатокъ во время уборки хлѣбовъ сдѣлало бы большую экономію въ расходахъ по хозяйству.

На сколько такая замѣна оказалась много выгоднѣе видно хотя бы изъ слѣдующаго примѣра: косилка запряженная парою сильныхъ лошадей при одномъ рабочемъ можетъ при благопріятныхъ условіяхъ исполнить работу равную работамъ 7—10 хорошихъ косарей.

Считаясь съ климатическими особенностями Россіи, необходимо возможно скорѣе обмолотить хлѣбъ, отсортировать зерно и доставить его на пристани рѣкъ и въ порты до замерзанія тѣхъ и другихъ, чтобы воспользоваться дешевыми путями сообщеній; окончить же обмолотъ къ надлежащему сроку возможно только при употребленіи молотилокъ.

Вотъ въ общихъ характерныхъ чертахъ причины, по которымъ каждая машина со свойственными ей особенностями и преимуществами вытѣсняетъ ручной трудъ.

Послѣдствія вытекающія отъ замѣны ручного труда сельско-хозяйственными машинами не только не являются чѣмъ то враждебнымъ для рабочихъ, но, наоборотъ, въ нѣкоторой степени дѣлаютъ существованіе рабочихъ болѣе обезпеченнымъ; благодаря выполненію машинами многихъ работъ въ хозяйствѣ въ періоды усиленной дѣятельности его, устраняется чрезмѣрный притокъ рабочихъ въ извѣстный раіонъ въ одно время, когда нѣсколько позже большинство ихъ не можетъ найти для себя никакихъ занятій.

Самую главную роль при обработкѣ почвы, какъ мы видѣли, играетъ плугъ и ужъ имъ однимъ въ достаточной степени рѣшается вопросъ объ урожайности культивируемыхъ растеній.

Можно удивляться этому могущественному орудію, плугу, выполняющему всѣ наиболѣе важныя операціи въ дѣлѣ увеличенія производительности почвы, можно поражаться его несложнымъ устройствомъ и совершеннымъ его дѣйствіемъ, но въ такой же степени должно насъ поражать и то, что до сихъ поръ въ многихъ мѣстахъ Россіи обработка почвы производится не плугомъ, а первобытными орудіями, сохранившимися по настоящее время—сохой, сабаномъ и др.

Эти явленія характеристичны. Рядомъ съ желѣзными дорогами, телефонами, съ самыми послѣдними техническими усовершенствованіями и съ самой изысканной европейской роскошью приходится встрѣчаться съ явленіями, которыя переносятъ васъ вдругъ въ другой совсѣмъ необразованный міръ. Эти явленія похожи на остатки отдаленныхъ періодовъ культуры, какъ бы торчащихъ изъ поверхностныхъ наслоеній новѣйшей цивилизаціи.

Всѣ усовершенствованія техники, коснувшіяся всякаго другого производства, прошли мимо самаго важнаго для Россіи, дающаго пропитаніе и средства къ жизни большинству ея населенія—производства хлѣба.

Соха, предназначенная выполнять ту же работу что и плугъ, выполняетъ ее крайне несовершенно.

Отличаясь отъ плуга своей легкостью, неустойчивостью, соха въ то же время плохимъ отрѣзываніемъ, скорѣй отодвиганіемъ пласта (не прямоугольной формы) и дурнымъ отваливаніемъ его, производитъ, правильнѣе, поверхностное разрыхленіе почвы, чѣмъ ея обработку, какъ это принято понимать сторонниками раціональнаго земледѣлія.

Крупные недостатки сохи вполнѣ оправдываютъ то гоненіе, которому она въ новѣйшее время подвергается.

Подобно дѣйствію сохи необходимо признать столь же несовершенную работу распространеннаго въ крестьянскихъ хозяйствахъ бороны „смыкъ". Будучи выполнена изъ дерева, она является очень легкой и слабой для раздробленія глыбокъ и комьевъ земли. Съ чувствомъ грусти слѣдишь за ея плохой работой или, вѣрнѣе, прыганіемъ черезъ комья, чѣмъ ихъ разбиваніемъ.

А между тѣмъ, не смотря на несовершенство этихъ орудій, какія обширныя пространства Россіи обработываются ими, и какъ сильно страдаетъ земледѣліе отъ этого нераціональнаго способа обработки почвы. Чему какъ не этому поверхностному разрыхленію обязаны такъ часто посѣщающіе земледѣльцевъ неурожаи, вредно отзывающіяся на ихъ экономическомъ благосостояніи.

Статистическія данныя всего краснорѣчивѣе говорятъ о слѣдствіяхъ подобной обработки почвы, если сравнить урожайность полей Россіи и другихъ государствъ, гдѣ существуетъ интенсивная обработка почвы. Они гласятъ, что по урожайности хлѣба, выражающейся въ среднемъ сборѣ съ десятины, Россія стоитъ ниже Соединенныхъ Штатовъ и всѣхъ главныхъ государствъ Европы: съ десятины земли въ ней собирается въ $1\frac{1}{2}$ раза меньше хлѣба, чѣмъ въ Австро-Венгріи, въ 2 раза меньше чѣмъ въ Соединенныхъ Штатахъ, Германіи и Франціи и втрое меньше чѣмъ въ Англіи.

Не будемъ пока мечтать о такой высокой урожайности хлѣба, какой пользуется Англія, а допустимъ что урожайность русскихъ полей будетъ увеличена только на 1 четверть съ десятины, что соотвѣтствуетъ увеличенію числа зеренъ въ колосѣ только на одно зерно, тогда такое повышеніе дало бы народному хозяйству прибавку хлѣба слишкомъ въ 500 милліоновъ пудовъ. Сумма, которая обращаетъ на себя вниманіе!

Тѣ же статистическія свѣдѣнія показываютъ до какихъ невѣроятныхъ размѣровъ доходятъ колебанія урожаевъ въ Россіи по отдѣльнымъ годамъ въ ту и другую сторону отъ среднихъ.

Въ то время, когда колебанія урожаевъ у нашихъ западныхъ сосѣдей въ сторону пониженія отъ средняго не превышаетъ 10% и въ сторону повышенія—27%, въ Россіи эти колебанія отклоняются отъ среднихъ на сто и болѣе %.

Эти рѣзкія колебанія урожайности въ Россіи въ достаточной степени освѣщаютъ фактъ неприспособленности русскаго хозяйства къ климатическимъ условіямъ.

Россія заключаетъ въ своихъ предѣлахъ весьма обширныя, богатыя черноземомъ почвы, могущія конкурировать съ американскими преріями и венгерскими пустами по своему богатству питательными веществами, тѣмъ не менѣе въ виду неприспособленности хозяйствъ къ мѣстнымъ условіямъ сборъ съ нихъ хлѣба сравнительно незначительный.

Извѣстная по своему плодородію черноземная полоса, составляющая болѣе $^1/_5$ всего пространства Европейской Россіи и производящая $^2/_3$ всего хлѣба, получаемаго въ Россіи,—страдаетъ отъ недостатка почвенной влаги.

Въ виду этого въ послѣднее время весьма настойчиво высказывается взглядъ на то, чтобы всѣ усилія земледѣльцевъ этихъ мѣстностей были направлены на повышеніе содержанія въ почвѣ влаги на счетъ атмосферныхъ осадковъ, которые перепадаютъ неправильно (то ливни, то засухи) и часто даже скупо.

Какую высокую услугу оказала бы интенсивная обработка почвы этихъ мѣстностей и тотъ запасъ, сберегаемый на случай засухъ, влаги, который въ состояніи оказать могущественное свое воздѣйствіе на урожайность растеній, умирающихъ отъ жажды.

Извѣстная каждому земледѣльцу черноземной полосы поговорка „будетъ дождь—будетъ и хлѣбъ" показываетъ какъ высоко цѣнится влага и какъ разумно нужно ею пользоваться.

Вообще замѣчено, что величина урожаевъ въ Россіи прямо пропорціональна количеству атмосферныхъ осадковъ, выпадающихъ въ теченіи года, а особенно весною и въ началѣ лѣта.

Особенно сильно страдаетъ отъ засухъ юго-восточная часть Россіи; такъ въ самой хлѣбородной губ. Самарской, засухи причиняли часто полный неурожай и голодъ.

Вотъ какія причины вызываютъ эти печальныя слѣдствія.

Мелкообработанный слой почвы не въ состояніи вмѣстить всей выпадающей осенью и образуемой отъ таянія снѣговъ ранней весной влаги и продолжительно хранить ее, что, какъ мы видѣли, доступно глубоко обработанному слою.

Значительная часть метеорныхъ осадковъ при поверхностномъ разрыхленіи почвы частью стекаютъ съ поверхности, не впитавшись въ плотный подпахатный слой, частью же обращаются въ пары и улетаютъ, такимъ образомъ животворящая влага пропадаетъ непроизводительно.

Неурожаи хлѣбовъ въ Россіи весьма сильно отражаются на матеріальномъ благосостояніи земледѣльцевъ, вызывая бѣдность ихъ, а иногда и нищенство.

Отъ плохого урожая уменьшается спросъ на всѣ фабричныя и заводскія издѣлія, главными потребителями которыхъ являются тѣ же земледѣльцы; застой въ торговлѣ вызываетъ застой въ промышленности.

Неурожаи отзываются вредно на исправности поступленія государственныхъ налоговъ по причинѣ несостоятельности земледѣльцевъ, разоренныхъ неурожаемъ.

Торговля съ внѣшними государствами сокращается, такъ какъ количество земледѣльческихъ продуктовъ падаетъ, а они то и служатъ предметами мѣны для Россіи.

Уменьшеніе количества земледѣльческихъ продуктовъ ведетъ также къ сокращенію перемѣщенія ихъ по желѣзнымъ дорогамъ, отчего доходъ государства отъ эксплоатаціи этихъ дорогъ понижается. Расходы государства между тѣмъ въ неурожайные годы значительно повышаются.

Такимъ образомъ благосостояніе Россіи, страны преимущественно земледѣльческой (сельскимъ хозяйствомъ занимаются 80% всего населенія), находится въ прямой зависимости отъ состоянія земледѣлія, доходъ отъ котораго далего превышаетъ доходы всѣхъ нашихъ фабрикъ и заводовъ.

Не смотря на то, что Россія занимаетъ первое мѣсто между всѣми европейскими государствами и второе между внѣ европейскими, послѣ Соединенныхъ Штатовъ, по абсолютному количеству собираемаго хлѣба, тѣмъ не менѣе среднее количество хлѣба приходящееся на долю каждаго жителя является недостаточнымъ для удовлетворенія потребностей въ хлѣбной пищѣ.

Средней нормой для каждаго жителя считается количество хлѣба въ размѣрѣ 13—14 пудовъ; въ Россіи же на каждаго жителя хлѣба приходится значительно меньше.

Средній за пятилѣтіе съ 1894 по 1898 г. общій валовой сборъ зерновыхъ хлѣбовъ въ Европейской и Азіатской Россіи составлялъ около 3,237 милліоновъ пудовъ.

На обсѣменіе полей изъ этого количества ушло около 800 милл. пудовъ, на кормъ скоту (овесъ) — 460 мил. пудовъ, до 40 милл. пуд. употреблено на винокуреніе и около 20 мил. пуд. на пивовареніе, наконецъ, количество хлѣба, вывезеннаго за границу въ среднемъ за то же пятилѣтіе (1894—1898) составляло 534 мил. пуд.; полученный остатокъ въ размѣрѣ 1,383 мил. пудовъ шелъ на удовлетвореніе потребностей въ хлѣбной пищѣ внутри Россіи.

Принимая населеніе Россіи только въ 115 мил. душъ, легко видно, что на каждаго жителя безъ различія возраста и состоянія, приходится въ годъ только 12 пудовъ хлѣба, что ниже нормальнаго 13—14 пудовъ въ годъ.

Вывозъ хлѣба за границу въ количествѣ 534 мил. пуд., что составляетъ 25% чистаго сбора, еще не свидѣтельствуетъ о нормальномъ питаніи крестьянъ.

Дефицитъ, получающійся отъ чрезмѣрнаго вывоза хлѣба заграницу требуется покрыть, и русскій крестьянинъ принужденъ прибѣгать къ подмѣсямъ въ хлѣбу въ родѣ отрубей и лебеды.

Урожайность хлѣбовъ въ Россіи при болѣе интенсивной обработкѣ почвы не только бы пополнило недохватъ въ нормальномъ потребленіи хлѣба, но позволило бы также увеличить вывозъ его заграницу въ значительно большемъ количествѣ, чѣмъ онъ теперь вывозится.

Истощенныя крестьянскія хозяйства, въ которыя входятъ болѣе половины всѣхъ земель Россіи, находящихся въ частномъ владѣніи, не въ состояніи ввести у себя интенсивную культуру растеній, требующую болѣе или менѣе значительныхъ издержекъ.

Видя бѣдственное положеніе крестьянъ, раззоренность ихъ хозяйствъ и причины, препятствующія введенію у нихъ раціональнаго земледѣлія, правительство и общество постоянно изыскиваютъ средства и идутъ къ цѣли улучшенія ихъ положенія.

На путь улучшенія крестьянскаго хозяйства прежде всего выступило земство, и тамъ, гдѣ оно систематически твердою рукою взялось за воспособленіе крестьянству, тамъ крестьянское хозяйство хотя и медленно, все же вѣрнымъ путемъ шло къ улучшенію.

Не располагая достаточными матеріальными средствами для широкаго распространенія въ крестьянской средѣ теоретическихъ и практическихъ знаній по сельскому хозяйству, эти общества при посредствѣ земледѣльческихъ кружковъ распространяютъ свои дѣйствія на маленькіе районы.

Замѣчательно распространеніе паровыхъ молотилокъ въ Рязанской губерніи. Сельское общество покупаетъ молотилку и локомобилъ; само обмолачивается и затѣмъ даетъ молотилку въ наемъ сосѣдямъ, или обмолачиваетъ ихъ хлѣбъ за плату; вслѣдствіе этого затраченный на покупку капиталъ быстро возвращается.

Въ Самарской губерніи наблюдаются теперь отрадныя явленія, гдѣ проявляютъ свое вліяніе цѣлые десятки сельско-хозяйственныхъ кружковъ; ихъ дѣятельность, выразившаяся въ устройствѣ выставокъ, учрежденіи складовъ сельско-хозяйственныхъ машинъ и орудій съ отдачей ихъ на прокатъ, введеніемъ многопольнаго хозяйства и проч., въ достаточной степени указываетъ на ихъ жизнеспособность.

Всѣ эти факты изъ дѣятельности земледѣльческихъ кружковъ, проявляющихъ сочувствіе къ меньшей братіи и энергично направляющихся къ столь благородной цѣли улучшенія ихъ положенія, даютъ полное основаніе надѣяться, что задача повышенія экономическаго уровня крестьянъ значительно облегчится.

Преподаватель Института *В. Рофе.*

$$k = 1,\ m = 1,\ s_1 = 1;$$
$$a_1 = \alpha + \delta_1; \tag{51}$$
$$\alpha_1 = \alpha + \delta_2.$$

Что же касается до $R(\alpha)$, то составъ его опредѣляется изъ формулъ (31) и (32). Изъ послѣдней формулы ясно, что $Q_p(u) = -\beta_1'$. Формула (31) даетъ:

$$R(\alpha) = -\beta_1'(\alpha - a_1) + b_1(\alpha - \alpha_1)^2 + (\lambda_1 + 1)(\alpha - a_1)(\alpha - \alpha_1). \tag{52}$$

Въ виду (52), соотношенія (49′) направо напишутся такъ:

$$(\lambda_1 + 1)(\alpha - a_1)(\alpha - \alpha_1) + b_1(\alpha - \alpha_1)^2 - \beta_1'(\alpha - a_1) = \frac{A_1}{B_3};$$
$$(\lambda_1 + 1)(\alpha - a_1 + \alpha - \alpha_1) + 2b_1(\alpha - \alpha_1) - \beta_1' = \frac{A_2}{B_3};$$
$$\lambda_1 + b_1 + 1 = \frac{A_3}{B_3}. \tag{53}$$

Въ виду двухъ послѣднихъ равенствъ (51), имѣемъ:

$$(\lambda_1 + 1)\delta_1\delta_2 + b_1\delta_2^2 + \beta_1'\delta_1 = \frac{A_1}{B_3};$$
$$(\lambda_1 + 1)(\delta_1 + \delta_2) + 2b_1\delta_2 + \beta_1' = -\frac{A_2}{B_3};$$
$$\lambda_1 + b_1 + 1 = \frac{A_3}{B_3}. \tag{53′}$$

Изъ этихъ послѣднихъ уравненій легко находятся λ_1, b_1 и β_1'. Тогда интегралы уравненія (46) напишутся въ формѣ:

$$U_x = \int_L e^{\frac{\beta_1'}{u - \alpha - \delta_1}} (u - \alpha - \delta_1)^{b_1 - 1}(u - \alpha - \delta_2)^{\lambda_1 - 1}(u - \alpha)^{x - 1}\, du, \tag{54}$$

или, полагая, что

$$v = u - \alpha, \tag{55}$$

имѣемъ:

$$U_x = \int_{L'} e^{\frac{\beta_1'}{v - \delta_1}} (v - \delta_1)^{b_1 - 1}(v - \delta_2)^{\lambda_1 - 1} v^{x - 1}\, dv, \tag{56}$$

гдѣ L' есть отображеніе пути L на плоскости перемѣннаго v.

Въ случаѣ, если λ_1 и b_1, опредѣляемыя уравненіями (53′), не представляютъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, нашъ методъ даетъ полный интегралъ уравненія (46).

Теперь ясно, какъ надо поступать въ общемъ случаѣ, если коэффиціентъ B_n отличенъ отъ нуля.

Сопоставляя уравненія (43′) [послѣ замѣны z чрезъ x] съ (45), находимъ:

$$\frac{Q(\alpha)}{B_0}=\frac{Q'(\alpha)}{B_1}=\cdots=\frac{Q^{(n)}(\alpha)}{1.2\cdots n\,B_n}=$$

$$(57)\qquad =\frac{R(\alpha)}{A_1}=\frac{R'(\alpha)}{A_2}=\cdots=\frac{R^{(n-1)}(\alpha)}{1.2\cdots(n-1)\,A_n}=\lambda,$$

или:

$$(57')\qquad \begin{array}{l|l}
Q(\alpha)=B_0\lambda; & R(\alpha)=A_1\lambda;\\
Q'(\alpha)=B_1\lambda; & R'(\alpha)=A_2\lambda;\\
Q''(\alpha)=1.2\,B_2\lambda; & R''(\alpha)=1.2\,A_3\lambda;\\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\\
Q^{(n)}(\alpha)=1.2\cdots n\,B_n\lambda & R^{(n-1)}(\alpha)=1.2\cdots(n-1)\,A_n\lambda.
\end{array}$$

$Q(\alpha)$ есть полиномъ степени n, а $R(\alpha)$ полиномъ степени $n-1$. Ясно, что $\theta_q(u)=\mathrm{const}$.

Изъ послѣдняго соотношенія (57′) налѣво, въ виду состава функціи $Q(\alpha)$, слѣдуетъ, что

$$(58)\qquad \lambda=\frac{1}{B_n}.$$

Тогда имѣемъ:

$$Q(\alpha)+\frac{(z-\alpha)}{1}Q'(\alpha)+\cdots+\frac{Q^{(n)}(\alpha)}{1.2\cdots n}(z-\alpha)^n=$$

$$(59)\qquad =\frac{B_0}{B_n}+(z-\alpha)\frac{B_1}{B_n}+\frac{(z-\alpha)^2}{B_n}B_2+\cdots+(z-\alpha)^n,$$

или:

$$(59')\qquad Q(z)=\frac{B_0}{B_n}+(z-\alpha)\frac{B_1}{B_n}+(z-\alpha)^2\frac{B_2}{B_n}+\cdots+(z-\alpha)^n.$$

Положимъ, что:

$$B_n z^n + B_{n-1} z^{n-1} + \cdots + B_0 =$$

$$= B_n (z - \delta_1) \cdots (z - \delta_l)(z - \gamma_1)^{\rho_1} \cdots (z - \gamma_\sigma)^{\rho_\sigma}. \qquad (60)$$

Изъ соотношеній (59′) и (60), принимая во вниманіе составъ $Q(z)$, находимъ:

$$k = l, \ m = \sigma; \ s_1 = \rho_1 - 1, \ \cdots, \ s_m = \rho_\sigma - 1;$$

$$a_1 = \alpha + \delta_1, \ \cdots, \ a_k = \alpha + \delta_l; \ \alpha_1 = \alpha + \gamma_1, \ \cdots, \ \alpha_m = \alpha + \gamma_\sigma. \qquad (61)$$

Остается теперь найти $b_1, b_2, \cdots, b_l, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\sigma$ и β. Для этой цѣли служатъ уравненія (57′) направо. Но мы тутъ ограничимся только указаніемъ, въ какомъ порядкѣ должны быть производимы вычисленія. Предварительно надо замѣнить $R(\alpha), R'(\alpha), \cdots, R^{(n-1)}(\alpha)$ выраженіемъ (31) и его производными. При чемъ въ разсматриваемомъ случаѣ $\theta'_q(u) = 0$. Въ полученныхъ такимъ образомъ n соотношеніяхъ придется замѣнить $\lambda, a_1, a_2, \cdots, \alpha_1, \cdots, \alpha_m, s_1, s_2, \cdots, s_m$ ихъ значеніями по формуламъ (61) и (58). Тогда и получимъ n линейныхъ и неоднородныхъ уравненій, откуда безъ труда опредѣляются искомыя количества.

Нашъ методъ даетъ намъ возможность объинтегрировать уравненіе (45) также и въ томъ случаѣ, когда нѣсколько изъ коэффиціентовъ $B_n, B_{n-1}, B_{n-2}, \cdots$ по порядку нули. Выяснимъ это на уравненіи:

$$B_0 x U_x + (A_1 + B_1 x) U_{x+1} + (A_2 + B_2 x) U_{x+2} +$$

$$+ (A_3 + B_3 x) U_{x+3} + A_4 U_{x+4} = 0. \qquad (62)$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ полиномы $Q(\alpha)$ и $R(\alpha)$ оба третьей степени, а

$$\theta_q(u) = A_0 u + A_1. \qquad (63)$$

Уравненія, служащія для опредѣленія искомыхъ количествъ, слѣдующія:

$$(64)\qquad \begin{array}{l|l} Q(\alpha) = \lambda B_0; & R(\alpha) = A_1\lambda; \\ Q'(\alpha) = \lambda B_1; & R'(\alpha) = A_2\lambda; \\ Q''(\alpha) = 1.2\,\lambda B_2; & R''(\alpha) = 1.2\,\lambda A_3; \\ Q'''(\alpha) = 1.2.3\,\lambda B_3. & R'''(\alpha) = 1.2.3\,\lambda A_4. \end{array}$$

Изъ послѣдняго уравненія (64) налѣво находимъ:

$$(65)\qquad \lambda = \frac{1}{B_3}.$$

Изъ соотношенія (64) имѣемъ:

$$(66)\qquad Q(z) = \frac{B_0}{B_3} + \frac{B_1}{B_3}(z-\alpha) + \frac{B_2}{B_3}(z-\alpha)^2 + (z-\alpha)^3.$$

Если составъ $B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3$ есть (47), то равенство (66) напишется такъ:

$$(66')\qquad Q(z) = (z-\alpha-\delta_1)(z-\alpha-\delta_2)^2.$$

Изъ соотношенія (66′) приходимъ къ равенствамъ (51). Что же касается до состава функціи $R(u)$, то она въ разсматриваемомъ случаѣ напишется такъ:

$$R(\alpha) =$$
$$= A_0(\alpha-a_1)(\alpha-\alpha_1)^2 + b_1(\alpha-\alpha_1)^2 + (\lambda_1+1)(\alpha-a_1)(\alpha-\alpha_1) -$$
$$(67)\qquad -\beta_1'(\alpha-a_1).$$

Въ виду выраженія (67) для $R(\alpha)$ и равенствъ (65) и (51), уравненія (64) направо напишутся такъ:

$$(68)\qquad \begin{aligned} &-A_0\,\delta_1\,\delta_2^2 + b_1\,\delta_2^2 + (\lambda_1+1)\,\delta_1\,\delta_2 + \beta_1'\,\delta_1 = \frac{A_1}{B_3}; \\ &\delta_2 A_0(\delta_2+2\delta_1) - 2b_1\delta_2 - (\lambda_1+1)(\delta_1+\delta_2) - \beta_1' = \frac{A_2}{B_3}; \\ &-A_0(\delta_1+2\delta_2) + b_1 + (\lambda_1+1) = \frac{A_3}{B_3}; \\ &A_0 = \frac{A_4}{B_3}. \end{aligned}$$

Изъ этихъ уравненій легко опредѣляются количества: A_0, b_1, λ_1 и β_1'.

Искомый интегралъ уравненія (62) напишется въ формѣ:

$$U_x = \tag{69}$$

$$= C \int_L e^{A_0 u + \frac{\beta_1'}{u-\alpha-\delta_2}} (u-\alpha-\delta_1)^{b_1-1} (u-\alpha-\delta_2)^{\lambda_1-1} (u-\alpha)^{x-1} du,$$

или:

$$U_x = C \int_{L'} e^{A_0 v + \frac{\beta_1'}{v-\delta_2}} (v-\delta_1)^{b_1-1} (v-\delta_2)^{\lambda_1-1} v^{x-1} dv. \tag{69'}$$

Этотъ простой случай достаточно говоритъ намъ, какъ надо поступать тогда, когда въ общемъ уравненіи (45) отсутствуютъ коэффиціенты B_n, B_{n-1}, B_{k-2}, $\cdots$, B_{n-k+1}. Въ разсматриваемомъ случаѣ функція $Q(u)$ представляетъ полиномъ степени $n-k$, а $R(\alpha)$ полиномъ степени $n-1$. Что же касается до $\theta_q(\alpha)$, то это есть многочленъ степени k:

$$\theta_q(u) = A_0 u^k + A_1 u^{k-1} + \cdots + A_k. \tag{70}$$

Уравненія, служащія для опредѣленія искомыхъ количествъ, таковы:

$$\left.\begin{array}{l|l}
Q(\alpha) = \lambda B_0; & R(\alpha) = \lambda A_1; \\
Q'(\alpha) = \lambda B_1; & R'(\alpha) = \lambda A_2; \\
Q''(\alpha) = 1.2\lambda B_2; & R''(\alpha) = 1.2\lambda A_3; \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
Q^{(n-k)}(\alpha) = 1.2\cdots(n-k) B_{n-k}. & R^{(n-1)}(\alpha) = 1.2\cdots(n-1)\lambda A_n
\end{array}\right. \tag{71}$$

Изъ послѣдняго уравненія (71) налѣво имѣемъ:

$$\lambda = \frac{1}{B_{n-k}}. \tag{72}$$

Принимая во вниманіе это значеніе λ, изъ соотношеній (71) находимъ:

$$(73)\quad Q(z)=\frac{B_0}{B_{n-k}}+\frac{B_1}{B_{n-k}}(z-\alpha)+\frac{B_2}{B_{n-k}}(z-\alpha)^2+\cdots+(z-\alpha)^{n-k}.$$

Если положимъ, что

$$B_0+B_1 z+\cdots+B_{n-k}\,z^{n-k}=$$

$$(74)\qquad =B_{n-k}(z-\delta_1)\cdots(z-\delta_\mu)(z-\gamma_1)^{\rho_1}\cdots(z-\gamma_\nu)^{\rho_\nu},$$

то имѣемъ:

$$(\alpha-a_1)\cdots(\alpha-a_k)(\alpha-\alpha_1)^{s_1+1}\cdots(\alpha-\alpha_m)^{s_m+1}=$$

$$(75)\qquad =(z-\delta_1-\alpha)\cdots(z-\delta_\mu-\alpha)(z-\gamma_1-\alpha)^{\rho_1}\cdots(z-\gamma_\nu-\alpha)^{\rho_\nu}.$$

Отсюда получаемъ:

$$k=\mu,\ m=\nu;\ s_1=\rho_1-1,\ s_2=\rho_2-1,\ \cdots,\ s_m=\rho_\nu-1;$$

$$(76)\qquad a_1=\alpha+\delta_1,\ \cdots,\ a_k=\alpha+\delta_\mu;\ \alpha_1=\alpha+\gamma_1,\ \cdots\ \alpha_m=\alpha+\gamma_\nu.$$

Остальныя неизвѣстныя количества легко опредѣлятся изъ n уравненій (71) направо. Останавливаться на этомъ мы не станемъ.

Въ заключеніе настоящаго параграфа разсмотримъ случай, когда нѣкоторыя изъ показателей $b_1, b_2, \cdots, b_k, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ подъинтегральной функціи въ интегралѣ (42) суть цѣлыя положительныя числа. Очевидно, что такой интегралъ содержится въ слѣдующемъ:

$$(77)\qquad V_z=\int_L \Phi(u)\,(u-\alpha)^{z-1}\,\theta_r(u)\,du,$$

гдѣ $\theta_r(u)$ есть алгебраическій многочленъ степени k относительно u, коэффиціенты котораго суть произвольныя функціи z, а $\Phi(u)$ имѣетъ составъ:

$$\Phi(u)=$$

$$(78)\qquad =e^{W}(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_{k'})^{b_{k'}-1}(u-\alpha_1)^{\lambda_1-1}\cdots(u-\alpha_{m'})^{\lambda_{m'}-1}.$$

Обозначимъ далѣе чрезъ W_z интегралъ:

$$(79)\qquad W_z=\int_L \Phi(u)\,(u-\alpha)^{z-1}\,du.$$

Тогда по способу, выясненному въ концѣ § 9 главы II, безъ труда находимъ:

$$V_z = Q_0 W_z + Q_1 W_{z+1} + Q_2 W_{z+2} + \cdots + Q_{n-1} W_{z+n-1}, \tag{80}$$

гдѣ $Q_0, Q_1, \cdots, Q_{n-1}$ суть извѣстныя функціи перемѣннаго z.

Формула (80) даетъ возможность найти линейное уравненіе въ конечныхъ разностяхъ, которому удовлетворяетъ функція V_z. Порядокъ его тотъ же, какъ уравненія для W_z.

§ 5.

Обобщеніемъ интеграла (1) служитъ:

$$V = \\ = \int_L e^W (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-\alpha_1)^{d_1-1} \cdots \\ \cdots (u-\alpha_e)^{d_e-1} (u-x_1)^{\lambda_1-1} \cdots (u-x_m)^{\lambda_m-1}\, du. \tag{81}$$

Замѣтимъ, что W имѣетъ составъ (2), а $x_1, x_2, \cdots, x_m$ принимаются за перемѣнныя.

На первыхъ порахъ количества $b_1, b_2, \cdots, b_k, d_1, d_2, \cdots, d_e, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ будемъ считать отличными отъ цѣлыхъ чиселъ или нуля; тому же ограниченію пусть будетъ подчиняться и сумма ихъ. Къ числу дозволенныхъ путей прежде всего принадлежатъ пути съ двойными обходами, огибающіе особыя точки: $a_1, a_2, \cdots, a_k, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_e, x_1, x_2, \cdots, x_m$ подъинтегральной функціи:

$$\vartheta(u) = e^W (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-\alpha_1)^{d_1-1} \cdots \\ \cdots (u-\alpha_e)^{d_e-1} (u-x_1)^{\lambda_1-1} \cdots (u-x_m)^{\lambda_m-1}. \tag{82}$$

Но этими путями не исчерпываются дозволенные пути интеграціи въ интегралѣ (81). Сюда надо присоединить еще тѣ, которые были указаны нами въ § 1. Разсужденіями, одинаковыми съ тѣми, которыми мы пользовались въ § 1 главы III и въ § 1 настоящей главы, убѣждаемся, что за основные интегралы можно принять слѣдующую группу:

$$[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})],\ \cdots,\ [(a_1\, a_k\, \overline{a_1}\, \overline{a_k})],\ [(a_1\, \alpha_1\, \overline{a_1}\, \overline{\alpha_1})],\ \cdots,$$

$$\cdots,\ [(a_1\, x_1\, \overline{a_1}\, \overline{x_1})],\ \cdots,\ [(a_1\, x_m\, \overline{a_1}\, \overline{x_m})];$$

$$[(a_1\, \alpha_1\, \overline{a_1}\, \overline{\alpha_1})],\ [(01)]_{\alpha_1},\ [(12)]_{\alpha_1},\ \cdots,\ [(s_1-10)]_{\alpha_1};$$

. . . .

. . . .

$$[(a_1\, \alpha_m\, \overline{a_1}\, \overline{\alpha_m})],\ [(01)]_{\alpha_m},\ [(12)]_{\alpha_m},\ \cdots,\ [(s_m-10)]_{\alpha_m};$$

(83) $$[(01)]_{\infty},\ [(12)]_{\infty},\ \cdots,\ [(q-10)]_{\infty}.$$

Кромѣ (83), возможны еще и иныя основныя системы интеграловъ. Но выписывать ихъ не считаемъ нужнымъ.

Приступая къ изслѣдованію измѣняемости основныхъ интеграловъ (83) въ зависимости отъ непрерывнаго перемѣщенія $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m$ въ плоскости перемѣннаго u, мы не станемъ останавливаться съ этой цѣлью на тѣхъ изъ нихъ, въ которыхъ пути интеграціи суть пути съ двойными обходами,— такое изслѣдованіе въ сущности дано нами въ §§ 2 и 3 главы III. Мы ограничимся разсмотрѣніемъ въ этомъ отношеніи лишь остальныхъ изъ интеграловъ (83). Но и изъ этихъ послѣднихъ достаточно объизслѣдовать только $[(kl)]_{\alpha_q}$ и $[(kl)]_{\infty}$.

Пріемомъ, изложеннымъ въ § 2 главы III, убѣждаемся, что особыми точками интеграла $[(kl)]_{\alpha_q}$ могутъ быть лишь такія совокупности $(x_1\, x_2 \cdots x_m)$, гдѣ оказываются между $x_1, x_2, \cdots, x_m$ совпавшія или другъ съ другомъ, или же съ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu, a_1, a_2, \cdots, a_k$ и ∞. Но легко удостовѣриться, что не всѣ такія точки суть особыя для разсматриваемаго интеграла. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ въ плоскости u особую конечную точку функціи $\theta(u)$, отличную отъ α_q, напр.: α'. Допустимъ, что перемѣнное x_1 совершило обходъ въ положительномъ направленіи около α' (стержень x_1 около стержня α'), между тѣмъ какъ остальныя перемѣнныя или сохраняютъ постоянныя значенія, или перемѣщаются какъ-либо въ плоскости u, не совершая однако обходовъ около особыхъ точекъ $\vartheta(u)$. Очевидно, что подъинтегральная функція въ концѣ движенія не измѣнитъ своего первоначальнаго значенія:

(84) $$\vartheta(c) = \vartheta_0(c).$$

Съ другой стороны путь интеграціи въ интегралѣ $[(kl)]_{\alpha_q}$ или останется безъ перемѣны, или же претерпитъ консервативную деформацію. Изъ этого слѣдуетъ, что въ концѣ вышеуказаннаго обхода разсматриваемый интегралъ сохранитъ свою аналитическую форму. Тотъ же результатъ будетъ имѣть мѣсто, если нѣсколько изъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \cdots, x_m$ совершатъ одновременно въ любыхъ направленіяхъ обходы около α'. Отсюда заключаемъ, что въ области всякой точки $(x_1\, x_2 \cdots x_m)$, гдѣ одно или нѣсколько изъ количествъ $x_1\, x_2, \cdots, x_m$ совпадаютъ съ α' и, слѣдовательно, съ любою изъ точекъ $a_1, a_2, \cdots, \alpha_e$, кромѣ α_q, интегралъ $[(kl)]_{\alpha_q}$ представляетъ функцію однозначную. Далѣе, безъ труда убѣждаемся, что для такой точки функція $[(kl)]_{\alpha_q}$ конечна, непрерывна и имѣетъ опредѣленныя конечныя первыя частныя производныя по $x_1, x_2, \cdots, x_m$. Все это подтверждаетъ, что всякая такая точка является простою для $[(kl)]_{\alpha_q}$.

Разсматривая каждое изъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m$ въ данный моментъ какъ неподвижную точку, мы, очевидно, будемъ имѣть дѣло со случаемъ, только что разобраннымъ.

Итакъ, всякая точка $(x_1, x_2 \cdots x_m)$, гдѣ возможно совпаденіе количествъ $x_1, x_2, \cdots, x_m$ только между собою и съ $a_1, a_2, \cdots, a_k, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{q-1}, \alpha_{q+1}, \cdots, \alpha_e$, оказывается простою точкой интеграла $[(kl)]_{\alpha_q}$.

Остается теперь разсмотрѣть такія точки $(x_1\, x_2 \cdots x_m)$, гдѣ одно или нѣсколько изъ перемѣнныхъ совпадаютъ съ α_q и ∞. Для изслѣдованія характера такихъ точекъ поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Пусть перемѣнное x_1 совершитъ обходъ въ положительномъ направленіи около точки α_q. Тогда окажется слѣдующее. Путь интеграціи $(kl)_{\alpha_q}$ останется безъ перемѣны; но начальное значеніе функціи $\vartheta(u)$ будетъ $e^{2\pi\lambda_1 i}\,\vartheta_0(c)$. Въ виду этого, интегралъ $[(kl)]_{\alpha_q}$ преобразуется въ $e^{2\pi\lambda_1 i}\,[(kl)]_{\alpha_q}$.

Легко видѣть, что, если перемѣнныя $x_1, x_2, \cdots, x_k$ одновременно совершатъ обходъ въ положительномъ направленіи около α_q, то интегралъ $[(kl)]_{\alpha_q}$ преобразуется въ $e^{2\pi(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k)i}\,[(kl)]_{\alpha_q}$.

Итакъ, совокупность $(x_1\, x_2 \cdots x_m)$, гдѣ одно или нѣсколько изъ количествъ $x_1, x_2, x_3 \cdots, x_m$ совпадаетъ съ α_q, представляетъ особую точку $[(kl)]_{\alpha_q}$. Точки $(x_1\, x_2 \cdots x_m)$, гдѣ одно или большее число изъ $x_1, x_2, \cdots, x_m$ совпадаетъ съ ∞, являются также особыми для разсматриваемаго интеграла. Въ самомъ дѣлѣ, если x_1 совершитъ полный обходъ около $u=\infty$ въ положительномъ направленіи, то интегралъ приметъ форму $e^{-2\pi\lambda_1 i}[(kl)]_{\alpha_q}$. Если же перемѣнныя $x_1, x_2, \cdots, x_k$ совершатъ въ томъ же направленіи около ∞ полные обходы, то интересующій насъ интегралъ приметъ множитель $e^{-2\pi(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k)i}$. Въ силу послѣднихъ результатовъ, мы можемъ заключить, что особыми точками для интеграла $[(kl)]_\infty$ оказываются обязательно такія системы $(x_1\, x_2\, x_3 \cdots x_m)$, гдѣ одно или нѣсколько изъ количествъ $x_1, x_2 \cdots, x_m$ совпадаютъ съ ∞.

Для окончательнаго уясненія характера этихъ особыхъ точекъ, намъ осталось еще найти въ ихъ области представленія интересующихъ насъ интеграловъ. Мы начнемъ съ интеграла $[(kl)]_{\alpha_q}$.

Имѣемъ:

$$[(kl)]_{\alpha_q}=\int_L \vartheta_1(u)(u-x)^{\lambda_1-1}\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-1}\,du=$$

$$=(-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m-m}(x_1-\alpha_q)^{\lambda_1-1}\cdots$$

$$(x_m-\alpha_q)^{\lambda_m-1}\int_L\vartheta_1(u)\left(1-\frac{u-\alpha_q}{x_1-\alpha_q}\right)^{\lambda_1-1}\cdots\cdots\left(1-\frac{u-\alpha_q}{x_m-\alpha_q}\right)^{\lambda_m-1}du=$$

$$=(-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m-m}(x_1-\alpha_q)^{\lambda_1-1}\cdots$$

$$\cdots(x_m-\alpha_q)^{\lambda_m-1}\left[\int_L\vartheta_1(u)du-\Lambda_1\int_L\vartheta_1(u)(u-\alpha_q)\,du+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+(-1)^l\Lambda_l\int_L\vartheta_1(u)(u-\alpha_q)^l\,du+\cdots\right], \tag{85}$$

гдѣ положено:

$$\Lambda_l=\frac{[\lambda_1-1]_l}{(x_1-\alpha_q)^l}+\frac{[\lambda_2-1]_l}{(x_2-\alpha_q)^l}+\cdots+\frac{[\lambda_m-1]_l}{(x_m-\alpha_q)^l}+ \tag{86}$$

$$+\frac{[\lambda_1-1]_{l-1}\,[\lambda_2-1]_1}{(x_1-\alpha_q)^{l-1}\,(x_2-\alpha_q)}+\cdots+\frac{[\lambda_{m-1}-1]_{l-1}\,[\lambda_m-1]_1}{(x_{m-1}-\alpha_q)^{l-1}\,(x_m-\alpha_q)}+$$

. . . .

. . . .

$$\left|\frac{u-\alpha_q}{x_1-\alpha_q}\right|<1;\quad \left|\frac{u-\alpha_q}{x_2-\alpha_q}\right|<1,\ \cdots,\quad \left|\frac{u-\alpha_q}{x_m-\alpha_q}\right|<1. \tag{87}$$

Полагая, что

$$\Phi_q(l)=(-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m+l-m}\,\Lambda_l\int_L \vartheta_1(u)\,(u-\alpha_q)^l\,du, \tag{88}$$

соотношеніе (85) представимъ въ формѣ:

$$[(kl)]_{\alpha_q}=(x_1-\alpha_q)^{\lambda_1-1}(x_2-\alpha_q)^{\lambda_2-1}\cdots(x_m-\alpha_q)^{\lambda_m-1}\,[\Phi_q(0)+$$

$$+\ \Phi_q(1)+\Phi_q(2)+\cdots+\Phi_q(l)+\cdots]. \tag{89}$$

Далѣе имѣемъ:

$$[(kl)]_{\alpha_q}=(-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m-m}\,x_1^{\lambda_1-1}\,x_2^{\lambda_2-1}\cdots$$

$$\cdots x_m^{\lambda_m-1}\int_L \vartheta_1(u)\left(1-\frac{u}{x_1}\right)^{\lambda_1-1}\left(1-\frac{u}{x_2}\right)^{\lambda_2-1}\cdots\cdots\left(1-\frac{u}{x_m}\right)^{\lambda_m-1}du=$$

$$=(-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m-m}\,x_1^{\lambda_1-1}\,x_2^{\lambda_2-1}\cdots$$

$$\cdots x_m^{\lambda_m-1}\left[\int_L \vartheta_1(u)\,du-\Lambda_1'\int_L u\,\vartheta_1(u)\,du+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+(-1)^l\,\Lambda_l'\int_L u^l\,\vartheta_1(u)\,du+\cdots\right]. \tag{90}$$

При этомъ положено:

$$\left|\frac{u}{x_1}\right|<1,\quad \left|\frac{u}{x_2}\right|<1,\ \cdots,\quad \left|\frac{u}{x_m}\right|<1; \tag{91}$$

$$\Lambda_l'=\frac{[\lambda_1-1]_l}{x_1^{\,l}}+\frac{[\lambda_2-1]_l}{x_2^{\,l}}+\cdots+\frac{[\lambda_m-1]_l}{x_m^{\,l}}+$$

$$+\ \frac{[\lambda_1-1]_{l-1}\,[\lambda_2-1]_1}{x_1^{\,l-1}\,x_2}+\cdots+\frac{[\lambda_{m-1}-1]_{l-1}\,[\lambda_m-1]_1}{x_{m-1}^{\,l-1}\,x_m} \tag{92}$$

. . . .

. . . .

Пусть

$$\Phi'_q(l) = (-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m+l-m}\,\Lambda'_l \int\limits_{L} u^l \vartheta_1(u)\,du. \tag{93}$$

Тогда получимъ:

$$[(kl)]_{\alpha_q} = x_1^{\lambda_1-1}\, x_2^{\lambda_2-1} \cdots x_m^{\lambda_m-1}\, [\Phi'_q(0)+\Phi'_q(1)+\Phi'_q(2)+\cdots$$
$$\cdots + \Phi'_q(l) + \cdots]. \tag{94}$$

Остается теперь найти разложеніе интеграла $[(kl)]_\infty$ для весьма конечныхъ $x_1, x_2, \cdots, x_m$.

Имѣемъ:

$$[(kl)]_\infty = \int\limits_{L_1} u^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m-m}\,\vartheta_1(u) \left(1-\frac{x_1}{u}\right)^{\lambda_1-1} \cdots\cdots \left(1-\frac{x_m}{u}\right)^{\lambda_m-1} du =$$
(95)
$$= \int\limits_{L_1} u^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m-m}\,\vartheta_1(u)\,du - D_1 \int\limits_{L_1} u^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m-m-1}\,\vartheta_1(u)\,du + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^l D \int\limits_{L_1} u^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m-l-m}\,\vartheta_1(u)\,du + \cdots,$$

гдѣ принято:

$$D_l = [\lambda_1-1]_l\, x_1^{\,l} + \cdots + [\lambda_m-1]_l\, x_m^{\,l} +$$
$$+ [\lambda_1-1]_{l-1}\, [\lambda_2-1]_1\; x_1^{\,l-1} x_2 + \cdots \tag{96}$$
$$\cdots + [\lambda_{m-1}-1]_{l-1}\, [\lambda_m-1]_1\, x_{m-1}^{l-1}\, x_m +$$

. . . .

При этомъ предполагаются условія, противоположныя (91).

Соединяя вмѣстѣ результаты настоящаго параграфа, приходимъ къ слѣдующему выводу: При всевозможныхъ перемѣщеніяхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \cdots, x_m$ въ плоскости u, интегралы системы (83) и, слѣдовательно, любой дозволенный интегралъ мѣняютъ вообще свой аналитическій видъ; при этомъ новыя аналитическія выраженія ихъ могутъ быть всегда представлены линейными и однородными формулами съ постоянными коэффиціентами отъ интеграловъ (83).

§ 6.

Въ этомъ параграфѣ займемся изысканіемъ полной системы дифференціальныхъ линейныхъ уравненій, которымъ удовлетворяютъ дозволенные интегралы вида (81). Прежде всего въ числѣ искомыхъ уравненій, какъ легко сообразить, оказываются $\frac{m(m-1)}{2}$ уравненій:

$$(x_i-x_j)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_j}+(\lambda_j-1)\frac{\partial u}{\partial x_i}+(1-\lambda_i)\frac{\partial u}{\partial x_j}=0, \tag{97}$$

которыя были даны нами въ § 5 главы III.

Обозначивъ далѣе чрезъ n слѣдующее число:

$$n=q+k+(s_1+1)+(s_2+1)+\cdots+(s_e+1), \tag{98}$$

разсмотримъ функцію:

$$G(u)=e^W(u-a_1)^{b_1}\cdots(u-a_k)^{b_k}(u-\alpha_1)^{d_1+s_1}\cdots \tag{99}$$

$$(u-\alpha_e)^{d_e+s_e}(u-x_1)^{\lambda_1-n}(u-x_2)^{\lambda_2-1}\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-1}.$$

Взявъ отъ $g(u)$ производную по u, послѣ надлежащихъ преобразованій получимъ:

$$\frac{dg(u)}{du}$$

$$=e^W(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}(u-\alpha_1)^{d_1-1}\cdots$$

$$\cdots(u-\alpha_e)^{d_e-1}(u-x_1)^{\lambda_1-n-1}(u-x_2)^{\lambda_2-2}\cdots[M(u)(u-x_1)\cdots$$

$$\cdots(u-x_m)+(\lambda_1-n)\chi(x_1)(u-x_2)\cdots(u-x_m)+$$

$$+(\lambda_2-1)\chi(x_2)(u-x_1)(u-x_3)\cdots(u-x_m)+\cdots$$

$$\cdots+(\lambda_m-1)\chi(x_m)(u-x_1)\cdots(u-x_{m-1})]. \tag{99}$$

При этомъ принято:

(100) $$\chi(u) = (u-a_1)\cdots(u-a_k)(u-\alpha_1)^{s_1+1}\cdots(u-\alpha_e)^{s_e+1};$$

$$M(u) =$$

$$= \theta'_q(u)(u-a_1)\cdots(u-a_k)(u-\alpha_1)^{s_1+1}\cdots(u-\alpha_e)^{s_e+1} +$$

$$Q_p(u)(u-a_1)\cdots(u-a_k)+b_1(u-a_2)\cdots(u-a_k)(u-\alpha_1)^{s_1+1}\cdots$$

$$\cdots(u-\alpha_e)^{s_e+1}+\cdots+(d_1+s_1)(u-a_1)\cdots(u-a_k)(u-\alpha_1)^{s_1}\cdots$$

$$\cdots(u-\alpha_e)^{s_e+1}+\cdots+(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m-n-m+1)(u-a_1)\cdots$$

$$\cdots(u-a_{k-1})(u-\alpha_1)^{s_1+1}\cdots(u-\alpha_e)^{s_e+1}+(u-a_1)\cdots$$

$$\cdots(u-a_{k-2})(u-\alpha_1)^{s_1+1}\cdots$$

(101) $$\cdots(u-\alpha_e)^{s_e+1}[(\lambda_1-n)(x_1-a_k)+(\lambda_2-1)(x_2-a_k)+\cdots]$$

. . . .

. . . .

$$+(u-\alpha_1)^{s_1+1}\cdots(u-\alpha_e)^{s_e+1}[(\lambda_1-n)(x_1-a_k)\cdots$$

$$\cdots(x_1-a_2)+(\lambda_2-1)(x_2-a_k)\cdots(x_2-a_2)+\cdots]$$

$$+(u-\alpha_1)^{s_1}(u-\alpha_2)^{s_2+1}\cdots(u-\alpha_e)^{s_e+1}[(\lambda_1-n)(x_1-a_k)\cdots$$

$$\cdots(x_1-a_1)+(\lambda_2-1)(x_2-a_k)\cdots(x_2-a_1)+\cdots]+$$

. . . .

. . . .

$$+(\lambda_1-n)(x_1-a_k)\cdots(x_1-a_1)(x_1-\alpha_1)^{s_1}\cdots(x_1-\alpha_e)^{s_e+1}+$$

$$+(\lambda_2-1)(x_2-a_k)\cdots(x_2-a_1)(x_2-\alpha_1)^{s_1+1}\cdots(x_2-\alpha_e)^{s_e+1}+\cdots.$$

$M(u)$, значитъ, представляетъ полиномъ степени $n-1$ относительно u.

Принимая во вниманіе формулу:

(102) $$M(u) = M(x_1)+\frac{u-x_1}{1}M'(x_1)+\cdots+\frac{(u-x_1)^{n-1}}{1\cdot2\cdots(n-1)}M^{(n-1)}(x_1),$$

соотношенію (99) дадимъ слѣдующій видъ:

$$\frac{dg(u)}{du} =$$

$$= e^{W}(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-x_1)^{\lambda_1-n-1}(u-x_2)^{\lambda_2-2}\cdots\Big[M(x_1)(u-x_1)\cdots$$

$$\cdots(u-x_m)+\frac{M'(x_1)}{1}(u-x_1)^2\cdots(u-x_m)+$$

$$+\frac{M''(x_1)}{1\cdot 2}(u-x_1)^3(u-x_2)\cdots(u-x_m)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{M^{(n-1)}(x_1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}(u-x_1)^n(u-x_2)\cdots(u-x_m)+$$

$$+(\lambda_1-n)\chi(x_1)(u-x_2)\cdots(u-x_m)+$$

$$+(\lambda_2-1)\chi(x_2)(u-x_1)(u-x_3)\cdots(u-x_m)+\cdots$$

$$+(\lambda_m-\ )\chi(x_m)(u-x_1)\cdots(u-x_{m-1})\Big]. \tag{103}$$

Умноживъ обѣ части соотношенія (103) на du и произведя интеграцію по дозволенному пути L, будемъ имѣть:

$$(\lambda_1-n)\chi(x_1)\int\limits_L e^{W}(u-a)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}\cdots$$

$$\cdots(u-x_1)^{\lambda_1-n-1}(u-x_2)^{\lambda_2-1}(u-x_m)^{\lambda_m-1}\cdots du+$$

$$+(\lambda_2-1)\chi(x_2)\int\limits_L e^{W}(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}\cdots$$

$$\cdots(u-x_1)^{\lambda_1-n}(u-x_2)^{\lambda_2-2}(u-x_3)^{\lambda_3-1}\cdots du+$$

. . . .

. . . .

$$+(\lambda_m-1)\chi(x_m)\int\limits_L e^{W}(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}\cdots$$

$$\cdots(u-x_1)^{\lambda_1-n}(u-x_2)^{\lambda_2-1}\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-2}du+$$

$$+M(x_1)\int\limits_L e^{W}(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}\cdots$$

$$\cdots(u-x_1)^{\lambda_1-n}(u-x_2)^{\lambda_2-1}\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-1}du+$$

$$+\frac{M'(x_1)}{1}\int\limits_L e^W (u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}\cdots$$

$$(u-x_1)^{\lambda_1-n+1}(u-x_2)^{\lambda_2-1}\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-1}\,du+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{M^{(n-1)}(x_1)}{1\cdot2\cdots(n-1)}\int\limits_L e^W (u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}\cdots$$

(104) $$\cdots(u-x_1)^{\lambda_1-1}(u-x_2)^{\lambda_2-1}\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-1}\,du=0.$$

Изъ этого соотношенія находимъ уравненіе, которому удовлетворяетъ функція V (81):

$$\chi(x_1)\frac{\partial^n V}{\partial x_1^{\,n}}+\chi(x_2)\frac{\partial^n V}{\partial x_1^{\,n-1}\partial x_2}+\cdots+\chi(x_m)\frac{\partial^n V}{\partial x_1^{\,n-1}\partial x_m}-$$

$$-M(x_1)\frac{\partial^{n-1}V}{\partial x_1^{\,n-1}}+(\lambda_1-n+1)\frac{M'(x_1)}{1}\frac{\partial^{n-2}V}{\partial x_1^{\,n-2}}-\cdots$$

(105) $$\cdots+(-1)^n(\lambda_1-1)_{n-1}\frac{M^{(n-1)}(x_1)}{1\cdot2\cdots(n-1)}V=0.$$

Изъ уравненія (105) получается еще $m-1$ новыхъ послѣ взаимнаго перемѣщенія λ_1 и λ_2, x_1 и x_2; λ_1 и λ_3, x_1 и x_3; $\cdots$; λ_1 и λ_m, x_1 и x_m. Эти m уравненій, вмѣстѣ съ $\frac{m(m-1)}{2}$ уравненіями (97), составляютъ полную систему уравненій, которымъ удовлетворяютъ дозволенные интегралы (81). При этомъ полный интегралъ этой системы напишется въ формѣ:

$$V=C_1[(a_1\,a_2\,\overline{a_1}\,\overline{a_2})]+\cdots+C_k[(a_1\,\alpha_1\,\overline{a_1}\,\overline{\alpha_1})]+\cdots$$

(106) $$\cdots+B_1[(a_1\,x_1\,\overline{a_1}\,\overline{x_1})]+\cdots+B_m[(a_1\,x_m\,\overline{a_1}\,\overline{x_m})]+$$

$$+D_1[(01)]_{\alpha_1}+D_2[(12)]_{\alpha_1}+\cdots+D_{s_1}[(s_1-10)]_{\alpha_1}+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$K_1[(01)]_\infty+K_2[(12)]_\infty+\cdots+K_q[(q-10)]_\infty,$$

гдѣ C, B, D, $\cdots$, K суть произвольныя постоянныя.

Для случая $m=2$, полагая $x_1=x$ и $x_2=y$, будемъ имѣть систему трехъ уравненій:

$$\chi_1(x)\frac{\partial^n V}{\partial x^n}+\chi_1(y)\frac{\partial^n V}{\partial x^{n-1}\partial y}-M_1(x)\frac{\partial^{n-1} V}{\partial x^{n-1}}+$$

$$+(\lambda_1-n+1)\frac{M_1'(x)}{1}\frac{\partial^{n-2} V}{\partial x^{n-2}}-\cdots$$

$$\cdots+(-1)^n(\lambda_1-1)_{n-1}\frac{M_1^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}V=0;$$

$$\chi_1(y)\frac{\partial^n V}{\partial y^n}+\chi_1(x)\frac{\partial^n V}{\partial x\,\partial y^{n-1}}-M_2(y)\frac{\partial^{n-1} V}{\partial y^{n-1}}+$$

$$+(\lambda_2-n+1)\frac{M_2'(y)}{1}\frac{\partial^{n-2} V}{\partial y^{n-2}}-\cdots$$

$$\cdots+(-1)^n(\lambda_2-1)_{n-1}\frac{M_2^{(n-1)}(y)}{(n-1)!}V=0;$$

$$(x-y)\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}+(\lambda_2-1)\frac{\partial V}{\partial x}+(1-\lambda_1)\frac{\partial V}{\partial y}=0. \qquad (107)$$

Здѣсь $\chi_1(u)$ есть $\chi(u)$, а $M_1(u)$ есть $M(u)$ при настоящихъ условіяхъ; что же касается до $M_2(u)$, то эта функція получается изъ $M_1(u)$ послѣ взаимнаго перемѣщенія λ_1 и λ_2, x и y.

Интеграломъ этихъ уравненій будетъ:

$$V=\int_L e^W(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-\alpha_1)^{d_1-1}\cdots(u-x)^{\lambda_1-1}(u-y)^{\lambda_2-1}\,du. \qquad (108)$$

Интересны нѣкоторые частные виды уравненій (107). Пусть прежде всего:

$$\begin{aligned} q=k=d_1=d_2=\cdots=d_e=1;\\ s_1+1=s_2+1=\cdots=s_e+1=0. \end{aligned} \qquad (109)$$

Уравненія (107) тогда представятся въ формѣ:

$$(x-a_1)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+(y-a_1)\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}-[A_0(x-a_1)+b_1+\lambda_1+\lambda_2-3]\frac{\partial V}{\partial x}+$$

$$+(\lambda_1-1)A_0V=0;$$

$$(y-a_1)\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+(x-a_1)\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}-[A_0(y-a_1)+b_1+\lambda_1+\lambda_2-3]\frac{\partial V}{\partial y}+$$

(110)
$$+(\lambda_2-1)A_0V=0;$$

$$(x-y)\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}+(\lambda_2-1)\frac{\partial V}{\partial x}+(1-\lambda_1)\frac{\partial V}{\partial y}=0.$$

Полный ихъ интегралъ можно написать въ формѣ:

$$V=C_1\int_{j\infty}^{(a_1)}e^{A_0u}(u-a_1)^{b_1-1}(u-x)^{\lambda_1-1}(u-y)^{\lambda_2-1}du+$$

$$+C_2\int_{c}^{(a_1\,x\,\overline{a_1}\,\overline{x})}e^{A_0u}(u-a_1)^{b_1-1}(u-x)^{\lambda_1-1}(u-y)^{\lambda_2-1}du+$$

(111)
$$+C_3\int_{c}^{(a_1\,y\,\overline{a_1}\,\overline{y})}e^{A_0u}(u-a_1)^{b_1-1}(u-x)^{\lambda_1-1}(u-y)^{\lambda_2-1}du,$$

гдѣ чрезъ j обозначенъ знакъ, противоположный тому, который при себѣ имѣетъ дѣйствительная часть A_0, а C_1, C_2 и C_3 суть произвольныя постоянныя.

Обозначимъ далѣе чрезъ Z слѣдующую функцію:

(112)
$$Z=\frac{V_1}{V_2}=\frac{C_1\int_{j\infty}^{(a_1)}e^{A_0u}\dots(u-y)^{\lambda_2-1}du+C_2\int_{c}^{(a_1\,x\,\overline{a_1}\,\overline{x})}e^{A_0u}\dots(u-y)^{\lambda_2-1}du+C_3\int_{c}^{(a_1\,y\,\overline{a_1}\,\overline{y})}e^{A_0u}\dots(u-y)^{\lambda_2-1}du}{D_1\int_{j\infty}^{(a_1)}e^{A_0u}\dots(u-y)^{\lambda_2-1}du+D_2\int_{c}^{(a_1\,x\,\overline{a_1}\,\overline{x})}e^{A_0u}\dots(u-y)^{\lambda_2-1}du+C_3\int_{c}^{(a_1\,y\,\overline{a_1}\,\overline{y})}e^{A_0u}\dots(u-y)^{\lambda_2-1}du},$$

Если теперь положимъ:

$$\Lambda_1 = (x-a_1)\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + (y-a_1)\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y} -$$

$$- [A_0(x-a_1)+b_1+\lambda_1+\lambda_2-3]\frac{\partial Z}{\partial x};$$

$$\Lambda_2 = (y-a_1)\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + (x-a_1)\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y} -$$

$$- [A_0(y-a_1)+b_1+\lambda_1+\lambda_2-3]\frac{\partial Z}{\partial y}; \tag{113}$$

$$\Lambda_3 = (x-y)\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y} + (\lambda_2-1)\frac{\partial Z}{\partial x} + (1-\lambda_1)\frac{\partial Z}{\partial y},$$

то безъ труда найдемъ уравненіе, для котораго функція (112) представляетъ полный интегралъ:

$$\left[(x-a_1)\frac{\partial Z}{\partial x} + (y-a_1)\frac{\partial Z}{\partial y}\right]^2 \Lambda_3 - (x-y)\left[(y-a_1)\Lambda_1\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + (x-a_1)\Lambda_2\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2\right] = 0. \tag{114}$$

Очевидно, что это уравненіе принадлежитъ къ извѣстному классу уравненій Монжа.

Другой частный видъ уравненій (107) получимъ, полагая:

$$\begin{aligned} q &= 2,\ d_1 = d_2 = \cdots = d_e = 1; \\ k &= s_1+1 = \cdots = s_e+1 = 0. \end{aligned} \tag{115}$$

Тогда будемъ имѣть:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} - (2A_0 x + A_1)\frac{\partial V}{\partial x} + 2A_0(\lambda_1-1)V = 0;$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} - (2A_0 y + A_1)\frac{\partial V}{\partial y} + 2A_0(\lambda_2-1)V = 0; \tag{116}$$

$$(x-y)\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} + (\lambda_2-1)\frac{\partial V}{\partial x} + (1-\lambda_1)\frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

Полный интегралъ этихъ уравненій можно представить такъ:

$$V = C_1 \int\limits_{L_1} e^{A_0u^2+A_1u}(u-x)^{\lambda_1-1}(u-y)^{\lambda_2-1}\,du +$$

$$+ C_2 \int\limits_{L_2} e^{A_0u^2+A_1u}(u-x)^{\lambda_1-1}(u-y)^{\lambda_2-1}\,du +$$

$$+ C_3 \int\limits_{L_3} e^{A_0u^2+A_1u}(u-x)^{\lambda_1-1}(u-y)^{\lambda_2-1}\,du. \tag{117}$$

гдѣ L_1, L_2, и L_3 суть:

$$L_1 = (01)_{\infty},\quad L_2 = (\overset{0}{\breve{x}})_{\infty},\quad L_3 = (\overset{0}{\breve{y}})_{\infty}. \tag{118}$$

Замѣтимъ, что подъ $(\overset{0}{\breve{x}})_{\infty}$ разумѣемъ путь, выходящій изъ ∞ внутри дозволеннаго угла o и приводящій въ ∞ внутри того же угла, обогнувъ точку x.

Обозначимъ далѣе чрезъ Y слѣдующую функцію:

$$Y = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\begin{gathered} C_1 \int\limits_{L_1} e^{A_0u^2+A_1u}(u-x)^{\lambda_1-1}(u-y)^{\lambda_2-1}\,du + \\ + C_2 \int\limits_{L_2} e^{A_0u^2+A_1u}(u-x)^{\lambda_1-1}(u-y)^{\lambda_2-1}\,du + \\ + C_3 \int\limits_{L_3} e^{A_0u^2+A_1u}\ldots(u-y)^{\lambda_2-1}\,du \end{gathered}}{\begin{gathered} D_1 \int\limits_{L_1} e^{A_0u^2+A_1u}(u-x)^{\lambda_1-1}(u-y)^{\lambda_2-1}\,du + \\ + D_2 \int\limits_{L_2} e^{A_0u^2+A_1u}(u-x)^{\lambda_1-1}(u-y)^{\lambda_2-1}\,du + \\ + C_3 \int\limits_{L_3} e^{A_0u^2+A_1u}\ldots(u-y)^{\lambda_2-1}\,du \end{gathered}}, \tag{119}$$

гдѣ C и D суть произвольныя постоянныя.

Положимъ далѣе:

$$\left.\begin{aligned}
M_1 &= \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} - (2A_0 x + A_1)\frac{\partial Y}{\partial x};\\
M_2 &= \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} - (2A_0 y + A_1)\frac{\partial Y}{\partial y};\\
M_3 &= (x-y)\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} + (\lambda_2 - 1)\frac{\partial Y}{\partial x} + (1-\lambda_1)\frac{\partial Y}{\partial y}.
\end{aligned}\right\} \qquad (120)$$

Легко тогда найти слѣдующее уравненіе, которому удовлетворяетъ функція (119):

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 M_3 - (x-y)\left[\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 M_1 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 M_2\right] = 0. \qquad (121)$$

Это уравненіе Монжскаго вида. Функція (119) можетъ быть названа полнымъ его интеграломъ.

Не лишенъ интереса также частный случай уравненій (107), соотвѣтствующій:

$$\left.\begin{aligned}
&q = 0,\ s_1 = 1,\ s_2 + 1 = s_3 + 1 = \cdots = s_e + 1 = 0;\\
&b_1 = b_2 = \cdots = b_k = d_2 = \cdots = d_e = 1.
\end{aligned}\right\} \qquad (122)$$

Уравненія (107) принимаютъ видъ:

$$\begin{gathered}
(x-\alpha_1)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (y-\alpha_1)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \\
[\beta_1' - (d_1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 - 4)(x-\alpha_1) - (\lambda_2 - 1)(y-\alpha_1)]\frac{\partial V}{\partial x} + \\
+ (\lambda_1 - 1)(d_1 + \lambda_1 + \lambda_2 - 2) V = 0;\\
(y-\alpha_1)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + (x-\alpha_1)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \\
+ [\beta_1' - (d_1 + 2\lambda_2 + \lambda_1 - 4)(y-\alpha_1) - (\lambda_1 - 1)(x-\alpha_1)]\frac{\partial V}{\partial y} + \\
+ (\lambda_2 - 1)(d_1 + \lambda_1 + \lambda_2 - 2) V = 0;
\end{gathered} \qquad (123)$$

$$(x-y)\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}+(\lambda_2-1)\frac{\partial V}{\partial x}+(1-\lambda_1)\frac{\partial V}{\partial y}=0.$$

Полный интегралъ такой системы напишется въ формѣ:

$$V=C_1\int\limits_{L'_1} e^{\frac{\beta'_1}{u-\alpha_1}}(u-\alpha_1)^{d_1-1}(u-x)^{\lambda_1-1}(u-y)^{\lambda_1-1}\,du+$$

$$+C_2\int\limits_{L'_2} e^{\frac{\beta'_1}{u-\alpha_1}}(u-\alpha_1)^{d_1-1}(u-x)^{\lambda_1-1}(u-y)^{\lambda_2-1}\,du+$$

(124)

$$+C_3\int\limits_{L'_3} e^{\frac{\beta'_1}{u-\alpha_1}}(u-\alpha_1)^{d_1-1}(u-x)^{\lambda_1-1}(u-y)^{\lambda_2-1}\,du,$$

гдѣ принято:

(125) $$L'_1=(00)_{\alpha_1},\; L'_2=(\alpha_1\; x\; \overline{\alpha_1}\; \overline{x}),\; L'_3=(\alpha_1\; y\; \overline{\alpha_1}\; \overline{y}).$$

Обозначимъ далѣе чрезъ Z_1 слѣдующую функцію:

(126)

$$Z_1=\frac{C_1\int\limits_{L'_1} e^{\frac{\beta'_1}{u-\alpha_1}}\dots(u-y)^{\lambda_2-1}\,du+}{D_1\int\limits_{L'_1} e^{\frac{\beta'_1}{u-\alpha_1}}\dots(u-y)^{\lambda_2-1}\,du+}$$

$$\frac{+C_2\int\limits_{L'_2} e^{\frac{\beta'_1}{u-\alpha_1}}\dots(u-y)^{\lambda_2-1}\,du+C_3\int\limits_{L'_3} e^{\frac{\beta'_1}{u-\alpha_1}}\dots(u-y)^{\lambda_2-1}\,du}{+D_2\int\limits_{L'_2} e^{\frac{\beta'_1}{u-\alpha_1}}\dots(u-y)^{\lambda_2-1}\,du+D_2\int\limits_{L'_3} e^{\frac{\beta'_1}{u-\alpha_1}}\dots(u-y)^{\lambda_2-1}\,du},$$

а чрезъ Δ_1, Δ_2 и Δ_3 выраженія:

$$\Delta_1=(x-\alpha_1)^2\frac{\partial^2 Z_1}{\partial x^2}+(y-\alpha_1)^2\frac{\partial^2 Z_1}{\partial x\,\partial y}+$$

$$[\beta'_1-(d_1+2\lambda_1+\lambda_2-4)(x-\alpha_1)+(\lambda_1-1)(y-\alpha_1)]\frac{\partial Z_1}{\partial x};$$

$$\Delta_2 = (y-\alpha_1)^2 \frac{\partial^2 Z_1}{\partial y^2} + (x-\alpha)^2 \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x\, \partial y} +$$

$$+ [\beta_1' - (d_1 + 2\lambda_2 + \lambda_1 - 2)(y-\alpha_1) + (\lambda_2 - 1)(x-\alpha_1)] \frac{\partial Z_1}{\partial y};$$

$$\Delta_3 = (x-y) \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x\, \partial y} + (\lambda_2 - 1) \frac{\partial Z_1}{\partial x} + (1-\lambda_1) \frac{\partial Z_1}{\partial y}; \qquad (127)$$

Z_1 служитъ полнымъ интеграломъ уравненія Монжскаго типа:

$$\left[(x-\alpha_1)^2 \frac{\partial Z_1}{\partial x} + (y-\alpha_1)^2 \frac{\partial Z_1}{\partial y}\right]^2 \Delta_3 - (x-y)\left[(x-\alpha_1)^2 \left(\frac{\partial Z_1}{\partial x}\right)^2 \Delta_2 + \right.$$

$$\left. + (y-\alpha_1)^2 \left(\frac{\partial Z_1}{\partial y}\right)^2 \Delta_1 \right] = 0. \qquad (128)$$

Результаты, добытые нами въ настоящемъ параграфѣ, относятся также и къ тѣмъ случаямъ, когда нѣкоторыя изъ количествъ $b_1, b_2, \cdots, b_k, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m, d_1, d_2, \cdots, d_e$ суть цѣлыя отрицательныя числа или нули. Случаи же, когда нѣкоторые изъ этихъ показателей суть цѣлыя положительныя числа, содержатся въ слѣдующемъ интегралѣ:

$$V_1 = \int_L e^W (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-\alpha_1)^{d_1-1} \cdots$$

$$\cdots (u-\alpha_e)^{d_e-1} (u-x_1)^{\lambda_1-1} \cdots (u-x_m)^{\lambda_m-1} \theta_\nu(u)\, du, \qquad (129)$$

гдѣ $\theta_\nu(u)$ есть полиномъ степени ν, коэффиціенты котораго суть нѣкоторыя функціи перемѣнныхъ $x_1, x_2, \cdots, x_m$.

Обозначимъ чрезъ V_2 функцію:

$$V_2 = \int_L e^W (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-\alpha_1)^{d_1-1} \cdots$$

$$(u-\alpha_e)^{d_e-1} (u-x_1)^{\lambda_1-1} \cdots (u-x_m)^{\lambda_m-1}\, du. \qquad (130)$$

Тогда убѣдимся по пріему § 8 главы II въ справедливости соотношенія:

$$V_1 = P_0 V_2 + P_1 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \cdots + P_m \frac{\partial V_2}{\partial x_m} +$$

$$+ K_1 \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_1^2} + K_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_1\, \partial x_2} + \cdots +$$

. . . .

$$+ W_1 \frac{\partial^{n-1} V_2}{\partial x_1^{n-1}} + W_2 \frac{\partial^{n-1} V_2}{\partial x_1^{n-2} \partial x_2} + \cdots + W_l \frac{\partial^{n-1} V_2}{\partial x_m^{n-1}}. \tag{131}$$

Формула (131) обнаруживаетъ, что и функція V_1 удовлетворяетъ также системѣ $\frac{m(m+1)}{2}$ уравненій, которую легко получить изъ системы уравненій для V_2.

Въ заключеніе этого параграфа, воспользуемся соотношеніемъ (104) для вывода m уравненій въ конечныхъ частныхъ разностяхъ. Для этой цѣли положимъ въ немъ:

$$x_1 = \beta_1,\ x_2 = \beta_2,\ \cdots,\ x_m = \beta_m;$$

$$\lambda_1 - n = z_1,\ \lambda_2 - n = z_2,\ \cdots,\ \lambda_m - n = z_m. \tag{132}$$

Въ виду этихъ равенствъ, соотношеніе (104) напишется въ формѣ:

$$z_1 \chi(\beta_1) \int_L e^W (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-\alpha_1)^{d_1-1} \cdots$$
$$\cdots (u-\beta_1)^{z_1-1} (u-\beta_2)^{z_2+n-1} \cdots (u-\beta_m)^{z_m+n-1}\, du +$$
$$+ (z_2+n-1)\, \chi(\beta_2) \int_L e^W (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-\alpha_1)^{d_1-1} \cdots$$
$$\cdots (u-\beta_1)^{z_1} (u-\beta_2)^{z_2+n-2} (u-\beta_3)^{z_3+n-1} \cdots du +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ (z_m+n-1)\, \chi(\beta_m) \int_L e^W (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} \cdots$$
$$\cdots (u-\beta_1)^{z_1} \cdots (u-\beta_m)^{z_m+n-2}\, du +$$
$$+ M_2(\beta_1) \int_L e^W (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} \cdots (u-\beta_1)^{z_1} (u-\beta_2)^{z_2+n-1} \cdots du +$$
$$+ M_2'(\beta_1) \int_L e^W (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-\beta_1)^{z_1+1} (u-\beta_2)^{z_2+n-1} \cdots$$
$$\cdots (u-\beta_m)^{z_m+n-1}\, du +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{133}$$

$$+\frac{M_2^{(n-1)}(\beta_1)}{1.2\ldots(n-1)}\int\limits_L e^W (u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}(u-\alpha_1)^{d_1-1}\cdots$$

$$\cdots(u-\beta_1)^{z_1+n-1}\cdots(u-\beta_m)^{z_m+n-1}\,du=0.$$

Замѣтимъ, что $M_2(u)$ есть $M(u)$ послѣ замѣны въ немъ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ чрезъ $z_1, z_2, \cdots, z_m$, а $x_1, x_2, \cdots, x_m$ чрезъ $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ по формуламъ (132).

Полагая, что:

$$U_{z_1, z_2, \cdots, z_m}=\int\limits_L e^W (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_k)^{b_k-1}(u-\alpha_1)^{d_1-1}\cdots$$

$$\cdots(u-\beta_1)^{z_1-1}\cdots(u-\beta_m)^{z_m-1}\,du, \tag{134}$$

соотношеніе (133) представимъ въ формѣ.

$$z_1\chi(\beta_1)\,U_{z_1, z_2+n, \cdots, z_m+n}+(z_2+n-1)\chi(\beta_2)\,U_{z_1+1, z_2+n-1, z_3+n, \cdots}+\cdots$$

$$\cdots+(z_m+n-1)\chi(\beta_m)\,U_{z_1+1, z_2+n, \cdots, z_m+n-1}+$$

$$+M_2(\beta_1)\,U_{z_1+1, z_2+n, \cdots, z_m+n}+\frac{M_2'(\beta_1)}{1}\,U_{z_1+2, z_2+n, \cdots, z_m+n}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{M_2^{(n-1)}(\beta_1)}{1.2\ldots(n-1)}\,U_{z_1+n, z_2+n, \cdots, z_m+n}=0. \tag{135}$$

Изъ этого уравненія получатся еще $m-1$ новыхъ послѣ взаимнаго перемѣщенія количествъ: z_1 и z_2, β_1 и β_2; z_1 и z_3, β_1 и β_3; $\cdots$; z_1 и z_m, β_1 и β_m.

Эти послѣднія уравненія, вмѣстѣ съ соотношеніями (99) предыдущей главы, составляютъ полную систему $\frac{m(m+1)}{2}$ уравненій, которымъ удовлетворяютъ дозволенные интегралы вида (134). Легко написать полный интегралъ такой системы.

§ 7.

Въ предыдущихъ главахъ нами данъ новый методъ образованія нѣкоторыхъ дифференціальныхъ и разностныхъ уравненій, интегрируемыхъ посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ. Этотъ методъ приводитъ къ весьма общему способу преобразованія уравненій *). На выводѣ этого послѣдняго мы и остановимся теперь.

Остановимся прежде всего на соотношеніи (99) главы II. Легко сообразить, что его можно представить слѣдующимъ образомъ:

$$(136)\qquad \varphi(u)(u-x)\,\frac{dg(u)}{du} = [\psi(u)(u-x)+(\lambda-n)\varphi(u)]\,g(u),$$

гдѣ принято:

$$\varphi(u) = (u-a_1)(u-a_2)\cdots(u-a_n);$$

$$\psi(u) = b_1(u-a_2)\cdots(u-a_n) + \cdots + b_n(u-a_1)\cdots(u-a_{n-1});$$

$$(137)\qquad g(u) = (u-a_1)^{b_1}(u-a_2)^{b_2}\cdots(u-a_n)^{b_n}(u-x)^{\lambda-n}.$$

Замѣнимъ въ формулахъ (136) и (137) количества $b_1, b_2, \cdots, b_n$ и λ послѣдовательно чрезъ $b_1-1,\ b_2-1, \cdots, b_n-1$ и $\lambda-1$; будемъ имѣть:

$$\varphi(u) = (u-a_1)(u-a_2)\cdots(u-a_n);$$

$$\psi_1(u) = (b_1-1)(u-a_2)\cdots(u-a_n) + \cdots + (b_n-1)(u-a_1)\cdots(u-a_{n-1});$$

$$(138)\qquad g_1(u) = (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\cdots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-n-1}.$$

Что же касается до уравненія (136), то оно напишется такъ:

$$(139)\qquad \varphi(u)(u-x)\,\frac{dg_1(u)}{du} = [\psi_1(u-x) + (\lambda-n-1)\varphi(u)]\,g_1(u).$$

Умноживъ обѣ части этого уравненія на du и взявъ отъ полученнаго результата интегралъ по дозволенному пути L, получимъ:

$$(140)\qquad \int\limits_L \varphi(u)(u-x)\,\frac{dg_1(u)}{du}\,du = \int\limits_L [\psi_1(u)(u-x)+(\lambda-n-1)\varphi(u)]\,g_1(u)\,du.$$

При помощи интеграціи по частямъ послѣднему соотношенію дадимъ видъ:

---

*) Аналогичнымъ методомъ пользовался еще Лагранжъ въ Miscellanea Taurinensia, tomus III. 1762—1765. p. 182.

$$\sum_{k=0}^{k=n} \left[\frac{\psi^{(k-1)}(x)}{1.2...(k-1)} + \right. \tag{141}$$

$$\left. + (\lambda-n) \frac{\varphi^{(k)}(x)}{1.2...k} \right] \int_L (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_n)^{b_n-1} (u-x)^{\lambda-n+k-1} du = 0.$$

Такимъ образомъ мы пришли къ соотношенію (102) главы II, изъ котораго весьма просто находится гипергеометрическое уравненіе, а также уравненіе въ конечныхъ разностяхъ той же главы.

Уравненіе (139) можетъ быть представлено въ другой формѣ, которая для нашихъ цѣлей имѣетъ важное значеніе.

Полагаемъ:

$$g_1(u) = Z(u-x)^{\lambda-n-1}, \tag{142}$$

гдѣ Z имѣетъ составъ:

$$Z = (u-a_1)^{b_1-1} (u-a_2)^{b_2-1} \cdots (u-a_n)^{b_n-1}. \tag{142'}$$

Тогда уравненіе (139) приметъ форму:

$$\varphi(u)(u-x)^{\lambda-n} \frac{dZ}{du} = \psi_1(u)(u-x)^{\lambda-n} Z, \tag{143}$$

или послѣ сокращенія на $(u-x)^{\lambda-n}$:

$$\varphi(u) \frac{dZ}{du} = \psi_1(u) Z. \tag{144}$$

Такимъ образомъ уравненіе L. Pochhammer'а получается изъ уравненія (144) при помощи преобразованія:

$$y = \int_L (u-x)^{\lambda-1} Z\, du. \tag{145}$$

Аналогичнымъ путемъ уравненіе въ конечныхъ разностяхъ главы II получается изъ (144) посредствомъ преобразованія:

$$U_z = \int_L (u-\alpha)^{z-1} Z\, du. \tag{146}$$

Оперируя подобнымъ же образомъ надъ соотношеніемъ (30) главы IV, приходимъ къ выводу, что уравненіе C. Jordan'а получается изъ уравненія:

(147) $$Q(u)\,\frac{dZ_1}{du} = R_1(u)\,Z_1,$$

гдѣ $R_1(u)$ есть $R(u)$ послѣ замѣны въ этомъ послѣднемъ полиномѣ $b_1, b_2, \cdots, \lambda_m$ и λ соотвѣтственно чрезъ $b_1-1, b_2-1, \cdots, \lambda_m-1$ и $\lambda-1$, при помощи преобразованія:

(148) $$y_1 = \int_L (u-x)^{\lambda-1}\,Z_1\,du.$$

Изъ того же уравненія (147) получается и уравненіе (43) главы IV посредствомъ преобразованія:

(149) $$U_z = \int_L (u-\alpha)^{z-1}\,Z_1\,du.$$

Такимъ образомъ выяснена тѣснѣйшая связь между уравненіями L. Pochhamer'a, Tissot и Jordan'a съ одной стороны и линейнымъ разностнымъ уравненіемъ съ линейными коэффиціентами съ другой.

Изъ того же уравненія посредствомъ преобразованій:

(150) $$U_1 = \int_L (u-x_1)^{\lambda_1-1}\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-1}\,Z_1\,du$$

и

(151) $$U_{z_1, z_2, \cdots, z_m} = \int_L (u-\alpha_1)^{z_1-1}\cdots(u-\alpha_m)^{z_m-1}\,Z_1\,du$$

получаются тѣ полныя системы дифференціальныхъ и разностныхъ уравненій, которыя были найдены нами въ предыдущемъ параграфѣ.

Въ заключеніе примѣнимъ результаты настоящаго параграфа къ интегрированію уравненія:

(152) $$(A_0+B_0x)\,U_x+(A_1+B_1x)\,U_{x+1}+\cdots+(A_n+B_nx)\,U_{x+n}=0.$$

Мы знаемъ, что интегралъ его можетъ быть представленъ въ формѣ:

(153) $$U_x = \int_L v^{x-1} f(v)\,dv,$$

гдѣ $f(v)$ есть интегралъ нѣкотораго дифференціальнаго линейнаго однороднаго уравненія перваго порядка съ раціональными коэффиціентами.

Внеся выраженіе (153) въ уравненіе (152), будемъ имѣть:

$$(A_0+B_0x)\int\limits_L v^{x-1} f(v)\,dv + (A_1+B_1x)\int\limits_L v^x f(v)\,dv + \\ \cdots + (A_n+B_nx)\int\limits_L v^{x+n-1} f(v)\,dv = 0. \tag{154}$$

Интеграціей по частямъ это соотношеніе преобразуемъ въ слѣдующее:

$$\int\limits_L v^{x-1} f(v)\Big\{v\,(B_0+B_1v+B_2v^2+\cdots+B_nv^n)\,\frac{dlg\,f(v)}{dv} - \\ - [A_0+(A_1-B_1)\,v+(A_2-2B_2)\,v^2+\cdots+(A_n-nB_n)\,v^n]\Big\}\,dv = 0. \tag{155}$$

Выберемъ $f(v)$ такъ, чтобы имѣло мѣсто:

$$v\,(B_0+B_1v+\cdots+B_nv^n)\,\frac{dlg\,f(v)}{dv} = A_0+(A_1-B_1)\,v+\cdots \\ \cdots+(A_n-nB_n)\,v^n. \tag{156}$$

Будемъ различать два случая: 1) корни полинома $B_0+B_1v+\cdots$ $\cdots+B_nv^n$ ($B_0\gtrless 0$) различны и 2) этотъ полиномъ содержитъ кратные корни.

Предположимъ, что въ первомъ случаѣ:

$$B_0+B_1v+B_2v^2+\cdots+B_nv^n = B_n\,(v-\delta_1)\cdots(v-\delta_n). \tag{157}$$

Тогда уравненіе (157) можно представить въ формѣ:

$$\frac{dlg\,f(v)}{dv} = \frac{\mu_0}{v} + \frac{\mu_1}{v-\delta_1} + \frac{\mu_2}{v-\delta_2} + \cdots + \frac{\mu_n}{v-\delta_n}, \tag{158}$$

гдѣ μ_0, μ_1, $\cdots$, μ_n извѣстныя постоянныя.

Общій интегралъ уравненія (158) есть:

$$f(v) = \text{Const.}\; v^{\mu_0}(v-\delta_1)^{\mu_1}(v-\delta_2)^{\mu_2}\cdots(v-\delta_n)^{\mu_n}. \tag{159}$$

Искомые интегралы уравненія (152) напишутся въ формѣ:

$$U_x = C\int\limits_L v^{\mu_0+x-1}(v-\delta_1)^{\mu_1}(v-\delta_2)^{\mu_2}\cdots(v-\delta_n)^{\mu_n}\,dv, \tag{160}$$

гдѣ C есть произвольное постоянное или произвольная періодическая функція съ періодомъ единица.

Допустимъ во вторыхъ, что интересующій насъ полиномъ имѣетъ составъ:

(161) $$B_0+B_1v+B_2v^2+\cdots+B_nv^n = B_n(v-\delta_1)^{l_1}(v-\delta_2)^{l_2}\cdots(v-\delta_k)^{l_k},$$

гдѣ принято:

(162) $$l_1+l_2+\cdots+l_k = n.$$

Въ этомъ случаѣ уравненіе (156) напишется такъ:

$$\frac{d\lg f(v)}{dv} = \frac{\rho}{v} + \frac{\alpha_{l_1}}{(v-\delta_1)^{l_1}} + \frac{\alpha_{l_1-1}}{(v-\delta_1)^{l_1-1}} + \cdots + \frac{\alpha_1}{v-\delta_1} +$$

$$+ \frac{\beta_{l_2}}{(v-\delta_2)^{l_2}} + \frac{\beta_{l_2-1}}{(v-\delta_2)^{l_2-1}} + \cdots + \frac{\beta_1}{v-\delta_2} +$$

. . . .

(163) . . . .

$$+ \frac{\lambda_{l_k}}{(v-\delta_k)^{l_k}} + \frac{\lambda_{l_k-1}}{(v-\delta_k)^{l_k-1}} + \cdots + \frac{\lambda_1}{v-\delta_k}.$$

Общій интегралъ этого уравненія представится такъ:

(164) $$f(v) = \text{Const. } e^{W_1}v^{\rho}(v-\delta_1)^{\alpha_1}(v-\delta_2)^{\beta_1}\cdots(v-\delta_k)^{\lambda_1},$$

гдѣ положено:

$$W_1 = -\frac{\alpha_{l_1}}{(l_1-1)(v-\delta_1)^{l_1-1}} - \frac{\alpha_{l_1-1}}{(l_1-2)(v-\delta_1)^{l_1-2}} - \cdots - \frac{\alpha_2}{v-\delta_1} -$$

. . . .

(165) . . . .

$$-\frac{\lambda_k}{(l_k-1)(v-\delta_k)^{l_k-1}} - \frac{\lambda_{l_k-1}}{(l_k-2)(v-\delta_k)^{l_k-2}} - \cdots - \frac{\lambda_2}{v-\delta_k}.$$

Искомые интегралы уравненія (152) заключаются въ выраженіи:

(166) $$U_x = C\int_L e^{W_1}v^{\rho+x-1}(v-\delta_1)^{\alpha_1}(v-\delta_2)^{\beta_1}\cdots(v-\delta_k)^{\lambda_1}\,dv.$$

§ 8.

Въ этомъ параграфѣ мы остановимся нѣсколько на тѣхъ уравненіяхъ, которыя разсматривались E. Goursat[1]) и П. А. Некрасовымъ[2]). Намъ достаточно ограничиться случаемъ уравненій, служившихъ предметомъ изслѣдованій русскаго ученаго, такъ какъ уравненія, разсмотрѣнныя имъ, представляютъ значительное обобщеніе уравненій Goursat.

Предварительно найдемъ уравненіе, которому удовлетворяетъ функція П. А. Некрасова:

$$f(z) = \left\{ \begin{array}{l} (z-z_1)^{\lambda_1-1}(z-z_2)^{\lambda_2-1}\ldots(z-z_k)^{\lambda_k-1} \\ \times (z-\xi)^{a-1} e^{\frac{u_1}{z-\xi}+\frac{u_2}{(z-\xi)^2}+\cdots+\frac{u_p}{(z-\xi)^p}} + \\ \times (z-\eta)^{b-1} e^{\frac{v_1}{z-\eta}+\frac{v_2}{(z-\eta)^2}+\cdots+\frac{v_q}{(z-\eta)^q}} + \\ \times (z-\zeta)^{c-1} e^{\frac{w_1}{z-\zeta}+\frac{w_2}{(z-\zeta)^2}+\cdots+\frac{w_r}{(z-\zeta)^r}} \end{array} \right. \qquad (167)$$

. . . .

Возьмемъ производную по z отъ этого выраженія. Будемъ имѣть:

$$\frac{df}{dz}$$

$$= f \left\{ \frac{\lambda_1-1}{z-z_1} + \frac{\lambda_2-1}{z-z_2} + \cdots + \frac{\lambda_k-1}{z-z_k} + \frac{a-1}{z-\xi} + \frac{b-1}{z-\eta} + \cdots \right.$$

$$- \frac{u_1}{(z-\xi)^2} - \frac{2u_2}{(z-\xi)^3} - \ldots - \frac{pu_p}{(z-\xi)^{p+1}} -$$

$$- \frac{v_1}{(z-\eta)^2} - \frac{2v_2}{(z-\eta)^3} - \ldots - \frac{qv_q}{(z-\eta)^{q+1}} - \qquad (168)$$

$$\left. - \frac{w_1}{(z-\zeta)^2} - \frac{2w_2}{(z-\zeta)^3} - \ldots - \frac{rw_r}{(z-\zeta)^{r+1}} \ldots \right\}$$

---

[1]) „Sur une classe des fonctions représentées par des intégrales définies". Acta Mathematica, 2 : 1. Berlin. Stockholm. Paris. 1883.

[2]) „Дифференціальныя линейныя уравненія и пр.".

Полагая далѣе:

(169) $$n = k-1+(p+1)+(q+1)+(r+1)+\cdots;$$

(170) $$\chi_n(z) = (z-z_2)(z-z_3)\cdots(z-z_k)(z-\xi)^{p+1}(z-\eta)^{q+1}(z-\zeta)^{r+1}\cdots;$$

$$\chi_{n-1}(z) = (\lambda_2-1)(z-z_3)\cdots(z-z_k)(z-\xi)^{p+1}(z-\eta)^{q+1}(z-\zeta)^{r+1}\cdots+$$

. . . .

. . . .

$$+(\lambda_k-1)(z-z_2)\cdots(z-z_{k-1})(z-\xi)^{p+1}(z-\eta)^{q+1})(z-\zeta)^{r+1}\cdots$$

$$+(a-1)(z-z_2)\cdots(z-z_k)(z-\xi)^{p}(z-\eta)^{q+1}(z-\zeta)^{r+1}\cdots+$$

(171) $$+(b-1)(z-z_2)\cdots(z-z_k)(z-\xi)^{p+1}(z-\eta)^{q}(z-\zeta)^{r+1}\cdots$$

. . . .

. . . . ,

будемъ имѣть:

(172) $$(z-z_1)\chi_n(z)\frac{df(z)}{dz} = [(\lambda_1-1)\chi_n(z)+(z-z_1)\chi_{n-1}(z)]f(z).$$

Внеся въ уравненіи (172), вмѣсто λ_1, λ_1-n, получимъ:

(173) $$(z-z_1)\chi_n(z)\frac{df_1(z)}{dz} = [(\lambda_1-n-1)\chi_n(z)+(z-z_1)\chi_{n-1}(z)]f_1(z),$$

гдѣ $f_1(z)$ есть $f(z)$ послѣ замѣны въ этой послѣдней функціи λ_1 чрезъ λ_1-n.

Умноживъ теперь обѣ части соотношенія (173) на du и взявъ отъ полученнаго результата интегралъ по дозволенному пути L (въ смыслѣ П. А. Некрасова), найдемъ:

$$\int_L (z-z_1)\chi_n(z)\frac{df_1(z)}{dz}\,dz =$$

(174) $$= \int_L [(\lambda_1-n-1)\chi_n(z) + (z-z_1)\chi_{n-1}(z)]\,f_1(z)\,dz.$$

При помощи интеграціи по частямъ получаемъ:

(175) $$\int_L [(\chi_n'(z)+\chi_{n-1}(z))(z-z_1)+(\lambda_1-n)\chi_n(z)]f_1(z)\,dz = 0.$$

Пусть

$$\chi_n'(z)+\chi_{n-1}(z)=\theta(z);$$

$$\chi_n(z)=\vartheta(z). \tag{176}$$

Тогда соотношеніе (175) можно написать въ формѣ:

$$\int\limits_L \Big[\theta(z)\,(z-z_1)+(\lambda_1-n)\,\vartheta(z)\Big] f_1(z)\,dz=0, \tag{177}$$

или

$$\sum_{k=0}^{k=n}\left[\frac{\theta^{(k-1)}(z_1)}{(k-1)!}+(\lambda_1-n)\frac{\vartheta^{(k)}(z_1)}{k!}\right]\int\limits_L f_1(z)\,(z-z_1)^k\,dz=0. \tag{177'}$$

Полагая

$$y=\int\limits_L f\,dz, \tag{178}$$

соотношенію (177′) можно дать форму:

$$\sum_{k=0}^{k=n}\left[\frac{(-1)^k}{(\lambda_1-1)_{n-k}}\left[\frac{\theta^{(k-1)}(z_1)}{(k-1)!}+(\lambda_1-n)\frac{\vartheta^{(k)}(z_1)}{k!}\right]\frac{\partial^{n-k}y}{\partial z_1^{\,n-k}}=0. \tag{179}$$

Остается теперь только найти выраженія для $\frac{\partial y}{\partial z_1}, \frac{\partial^2 y}{\partial z_1^{\,2}}, \ldots, \frac{\partial^n y}{\partial z_1^{\,n}}$ въ зависимости отъ $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$ и внести ихъ въ соотношеніе (179); тогда мы получимъ то дифференціальное уравненіе, на которое сдѣлалъ указаніе П. А. Некрасовъ въ своей работѣ. Насъ интересуетъ тутъ то обстоятельство, что это уравненіе получается съ помощью указаннаго преобразованія изъ уравненія линейнаго перваго порядка (173), коэффиціенты котораго, будучи раціональными функціями отъ u, могутъ быть любыми функціями перемѣннаго x.

Полагаемъ далѣе:

$$f_1(z)=(z-z_1)^{\lambda_1-n-1}f_2(z). \tag{180}$$

Внеся это выраженіе для $f_1(z)$ въ уравненіе (173), будемъ имѣть:

$$\chi_n(z)\,(z-z_1)^{\lambda_1-n}\frac{df_2}{dz}=\chi_{n-1}(z)\,(z-z_1)^{\lambda_1-n}f_2(z), \tag{181}$$

или по сокращеніи на $(z-z_1)^{\lambda_1-n}$:

$$\chi_n(z)\frac{df_2}{dz}=\chi_{n-1}(z)f_2(z). \tag{182}$$

Мы приходимъ такимъ образомъ къ выводу, что на классъ дифференціальныхъ уравненій, изысканіемъ которыхъ занимались E. Goursat и П. А. Некрасовъ, надо смотрѣть какъ на уравненія, получающіяся изъ уравненій вида (182) послѣ слѣдующаго ряда операцій: умноженія на $(z-z_1)^{\lambda_1-n}\,du$, интеграціи по дозволенному пути L и, наконецъ, замѣны частныхъ производныхъ $\frac{\partial y}{\partial z_1}, \frac{\partial^2 y}{\partial z_1^2}, \cdots, \frac{\partial^n y}{\partial z_1^n}$ ихъ выраженіями въ зависимости отъ $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}$. При этомъ, интегралы искомыхъ уравненій выражаются такъ:

$$y=\int_L (z-z_1)^{\lambda_1-1} f_2(z)\,dz. \tag{183}$$

ГЛАВА V.

Свойства интеграловъ $\int\limits_L (u-x)^{\lambda-1} f(u)\,du$,

$\int\limits_L (u-x_1)^{\lambda_1-1}(u-x_2)^{\lambda_2-1}\ldots(u-x_m)^{\lambda_m-1}f(u)\,du$, $\int\limits_L e^{\frac{x}{u}} f(u)\,du$,

$\int\limits_L u^{x-1}f(u)\,du$ и $\int\limits_L (u-\alpha_1)^{x_1-1}(u-\alpha_2)^{x_2-1}\ldots(u-\alpha_m)^{x_m-1}f(u)\,du$.

Преобразованія дифференціальныхъ линейныхъ уравненій однородной формы съ раціональными коэффиціентами другъ въ друга при помощи интеграла $\int\limits_L (u-x)^{\lambda-1}f(u)\,du$. Сведеніе линейныхъ разностныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами къ дифференціальнымъ линейнымъ уравненіямъ; интегрированіе въ окончательной формѣ нѣкоторыхъ изъ нихъ.

Приложеніе метода опредѣленныхъ интеграловъ къ совокупнымъ системамъ дифференціальныхъ и разностныхъ линейныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами. Сведеніе смѣшанныхъ линейныхъ уравненій къ линейнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ.

Примѣненіе метода опредѣленныхъ интеграловъ къ интегрированію нѣкоторыхъ линейныхъ обыкновенныхъ разностныхъ уравненій, коэффиціенты которыхъ зависятъ отъ трансцендентныхъ и числовыхъ функцій.

Полная система дифференціальныхъ линейныхъ уравненій съ частными производными, частные интегралы которыхъ выражаются въ формѣ:

$$\int_L (u-x_1)^{\lambda_1-1}(u-x_2)^{\lambda_2-1}\dots(u-x_m)^{\lambda_m-1}f(u)\,du.$$

Полная система линейныхъ уравненій съ конечными частными разностями, частные интегралы которыхъ выражаются въ формѣ

$$\int_L (u-\alpha_1)^{x_1-1}(u-\alpha_2)^{x_2-1}\dots(u-\alpha_m)^{x_m-1}f(u)\,du.$$

§ 1.

Два послѣдніе параграфа обнаруживаютъ, что расмотрѣнныя до сихъ поръ уравненія суть преобразованія [Die Euler'sche Transformirte — по терминологіи Schlesinger'а[1]) и la transformée d'Euler — по Pincherle'ю[2])] дифференціальныхъ линейныхъ уравненій перваго порядка съ раціональными коэффиціентами при помощи:

$$y=\int_L (u-x)^{\lambda-1}\,\eta(u)\,du;$$

$$Y=\int_L (u-x_1)^{\lambda_1-1}\,(u-x_2)^{\lambda_2-1}\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-1}\eta(u)\,du;$$

$$u_x=\int_L (u-\alpha)^{x-1}\,\eta(u)\,du; \tag{1}$$

---

[1]) „Ueber die Integration linearer homogenen Differentialgleichungen durch Quadraturen". Crelle's Journal, Bd. 116, 1896. s. 97—132. „Zur Theorie der Eulerschen Transformirten einer homogenen linearen Differentialgleichung der Fuchss'chen Klasse". Ibidem, Bd. 117, 1897. s. 148—167.

[2]) „Sur la transformée d'Euler". Crelle's Journal, Bd. 119, 1898. p. 347—349.

$$U_{x_1, x_2, \cdots, x_m} = \int\limits_L (u-\alpha_1)^{x_1-1}(u-\alpha_2)^{x_2-1} \cdots (u-\alpha_m)^{x_m-1}\,\eta(u)\,du,$$

гдѣ $\eta(u)$ есть интегралъ преобразуемаго уравненія.

Для полученія болѣе общихъ результатовъ намъ надо предварительно заняться изученіемъ интеграловъ:

$$v = \int\limits_L (u-x)^{\lambda_1-1} f(u)\,du;$$

$$V = \int\limits_L (u-x_1)^{\lambda_1-1} \cdots (u-x_m)^{\lambda_m-1} f(u)\,du;$$

(2) $$u_x = \int\limits_L (u-\alpha)^{x-1} f(u)\,du;$$

$$U_{x_1, x_2, \cdots, x_m} = \int\limits_L (u-\alpha_1)^{x_1-1} \cdots (u-x_m)^{x_m-1} f(u)\,du,$$

гдѣ $f(u)$ какая-либо функція перемѣннаго u съ изолированными особыми точками. Предварительно остановимся на изслѣдованіи свойствъ перваго изъ интеграловъ (2). При выборѣ путей L, мы должны имѣть въ виду требованія, указанныя въ § 1 главы II-й. Искомыми путями прежде всего будутъ пути съ двойными обходами, огибающіе особыя точки подъинтегральной функціи. Если же составъ послѣдней таковъ, что указанные только-что пути не исчерпываютъ дозволенныхъ путей въ плоскости перемѣннаго u, то тогда придется прибѣгнуть и къ инымъ путямъ, какъ, напр., выясненнымъ нами въ § 1 главы IV, или тѣмъ, которыми пользовались Pincherle [1]) и Hj. Mellin [2]).

Обѣщаясь представить подробную разработку дозволенныхъ путей во 2-й части своей работы, здѣсь мы изучимъ интересующій насъ интегралъ въ предположеніи, что L суть пути съ двойными обходами. Обозначимъ неподвижныя особыя точки подъинтегральной функціи чрезъ $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ и ∞.

---

[1]) „Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate". Rend. della R. Accad. dei Lincei. Vol. IV, fasc. 12—13, 1888.

[2]) „Om definita integraler, hvilka för obegränsadt växande-värden ect." Acta Societatis Fennicae, t. XX, 1895. p. 3—39.

Допустимъ, что каждая изъ этихъ послѣднихъ такого характера, что, послѣ обхода около нея перемѣннаго u въ томъ или другомъ направленіи, функція $f(u)$ (соб. опредѣленная ея вѣтвь) мѣняетъ свое аналитическое выраженіе; при чемъ, порядокъ обходовъ около двухъ ея особыхъ точекъ не вліяетъ на ея окончательное значеніе.

Будемъ теперь, какъ и раньше, придерживаться обозначенія:

$$\int_c^{(a_\mu\, a_\nu\, \overline{a_\mu}\, \overline{a_\nu})} (u-x)^{\lambda-1} f(u)\, du = [(a_\mu\, a_\nu\, \overline{a_\mu}\, \overline{a_\nu})]. \tag{3}$$

При этомъ мы предполагаемъ, что $(u-x)^{\lambda-1} f(u)$ есть опредѣленная вѣтвь подъинтегральной функціи, а именно, то ея аналитическое выраженіе, которое для $u=c$ принимаетъ опредѣленную величину (при опредѣленномъ значеніи x):

$$(c-x)^{\lambda-1} f(c) = \varphi_0(c). \tag{4}$$

Интегралъ (3), въ виду извѣстной теоремы Cauchy, (при постоянномъ x) не зависитъ отъ начала c. Поэтому значеніе интеграла сохраняется, если точка c перемѣщается въ плоскости перемѣннаго u, не встрѣчая на своемъ пути особыхъ точекъ функціи:

$$\varphi(u) = (u-x)^{\lambda-1} f(u). \tag{5}$$

Замѣтимъ, что, при этомъ, надо имѣть въ виду относительно начальнаго значенія $\varphi(u)$ для новаго положенія c тѣ предостереженія, о которыхъ говорилось въ § 1 главы II, когда шла рѣчь о гипергеометрическихъ интегралахъ. Интегралы вида (3) [интегралы, взятые по простымъ путямъ съ двойными обходами] подѣлимъ на двѣ категоріи,— во-первыхъ, интегралы, гдѣ пути интеграціи огибаютъ неподвижныя особыя точки (неподвижные стержни) подъинтегральной функціи и, во-вторыхъ, интегралы вида $[(a_\mu\, x\, \overline{a_\mu}\, \overline{x})]$. Изъ интеграловъ первой категоріи, очевидно, достаточно ограничиться подробнымъ изслѣдованіемъ $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$.

Легко видѣть, какъ и въ случаѣ интеграловъ, изученныхъ нами въ предыдущихъ главахъ, что всякая точка плоскости перемѣннаго u, не совпадающая съ $a_1, a_2, \cdots, a_n$ и ∞, оказывается обыкновенной точкой интеграла $[a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$.

Разсмотримъ далѣе какую либо изъ точекъ: $a_3, a_4, \cdots, a_n$, напр.: a_3. Пусть перемѣнное x въ плоскости u совершило въ какомъ-нибудь направленіи обходъ около a_3 (стержень x около стержня a_3). При этомъ предполагаемъ, что замкнутый путь, описанный перемѣннымъ x, не содержитъ внутри себя иныхъ особыхъ точекъ подъинтегральной функціи, кромѣ a_3. Тогда произойдетъ слѣдующее. Функція $\varphi(u)$ не измѣнитъ своего аналитическаго выраженія. Что же касается до пути интеграціи въ $[(a_1\, a_2\, \bar{a}_1\, \bar{a}_2)]$, то онъ или совершенно не измѣнится, или же претерпитъ консервативную деформацію. Отсюда въ правѣ заключить, что интегралъ $[(a_1\, a_2\, \bar{a}_1\, \bar{a}_2)]$ въ области a_3 представляютъ функцію однозначную перемѣннаго x. Далѣе, безъ труда убѣждаемся, что для точки a_3 этотъ интегралъ конеченъ и имѣетъ опредѣленную производную. Это же равносильно тому, что $[a_1\, a_2\, \bar{a}_1\, \bar{a}_2)]$ въ области a_3 и, слѣдовательно, въ области любой изъ точекъ $a_3, a_4, a_5, \cdots, a_n$ представляютъ функцію голоморфную. Итакъ, всякая точка плоскости перемѣннаго u, не совпадающая съ a_1, a_2 и ∞, оказывается простою точкой разсматриваемаго интеграла.

Остановимъ теперь свое вниманіе на точкѣ a_1. Положимъ, что перемѣнное x совершило обходъ около a_1 въ положительномъ направленіи. Тогда путь (a_1) преобразуется въ A, а (x) въ X (см. черт. (8)), и интегралъ $[(a_1\, a_2\, \bar{a}_1\, \bar{a}_2)]$ обратится въ $[A\, a_2\, \bar{A}\, \bar{a}_2)]$. При этомъ, путь A эквивалентенъ $(x\, a_1\, \bar{x})$. Раскрывая символъ $[(A\, a_2\, \bar{A}\, \bar{a}_2)]$, будемъ имѣть:

$$[(A\, a_2\, \bar{A}\, \bar{a}_2)] =$$

$$(6) \quad = \int\limits_c^{(A)} (u-x)^{\lambda-1}[f(u)-f_2(u)]\,du - \int\limits_c^{(a_1)} (u-x)^{\lambda-1}[f(u)-f_1(u)]\,du,$$

гдѣ $f_1(u)$ есть значеніе $f(u)$ послѣ обхода перемѣннаго u около точки a_2 въ положительномъ направленіи.

Легко далѣе обнаружить, что

$$\int\limits_c^{(A)} (u-x)^{\lambda-1}[f(u)-f_2(u)]\,du = \int\limits_c^{(x)} (u-x)^{\lambda-1}[(f(u)-f_2(u))-$$

$$(7) \quad -(f_1(u)-f_{12}(u))]\,du +$$

$$+\, e^{\pi\lambda i}\int\limits_c^{(a_1)} (u-x)^{\lambda-1}\,[f(u)-f_2(u)]\,du.$$

Замѣтимъ, что $f_1(u)$ есть $f(u)$ послѣ обхода перемѣннымъ u точки a_1 въ положительномъ направленіи, а $f_{12}(u)$ представляетъ ту же функцію $f(u)$ въ концѣ обхода этимъ перемѣннымъ точекъ a_1 и a_2 въ таковомъ же направленіи.

Внеся выраженіе (7) въ соотношеніе (6), получимъ:

$$[(A\ a_2\ \overline{A}\ \overline{a_2})] =$$

$$= \int\limits_c^{(a_1\ a_2\ \overline{a_1}\ \overline{a_1})} (u-x)^{\lambda-1} f(u)\, du - \int\limits_c^{(a_1\ x\ \overline{a_1}\ \overline{x})} (u-x)^{\lambda-1} [f(u)-f_2(u)]\, du. \tag{8}$$

Къ аналогичному выводу мы пришли бы, если бы допустили, что перемѣнное u совершило обходъ около точки a_1 въ отрицательномъ направленіи. Пусть теперь x совершитъ обходъ въ положительномъ направленіи около точки a_2. Тогда интегралъ $[(a_1\ a_2\ \overline{a_1}\ \overline{a_2})]$ преобразуется въ $[(a_1\ A'\ \overline{a_1}\ \overline{A'})]$.

Это же послѣднее выраженіе въ раскрытой формѣ напишется:

$$[(a_1\ A'\ \overline{a_1}\ \overline{A'})] =$$

$$= \int\limits_c^{(a_1\ a_2\ \overline{a_1}\ \overline{a_1})} (u-x)^{\lambda-1} f(u)\, du + \int\limits_c^{(a_1\ x\ \overline{a_1}\ \overline{x})} (u-x)^{\lambda-1} [f(u)-f_1(u)]\, du, \tag{9}$$

гдѣ $f_1(u)$ есть $f(u)$ послѣ обхода перемѣннаго u около a_1 въ положительномъ направленіи.

Если же x обогнетъ $u = \infty$ въ положительномъ направленіи, то, очевидно, интегралъ $[(a_1\ a_2\ \overline{a_1}\ \overline{a_2})]$ преобразуется въ $e^{-2\pi\lambda i}\ [(a_1\ a_2\ \overline{a_1}\ \overline{a_2})]$. Предыдущій анализъ приводитъ насъ къ заключенію, что единственными особыми точками интеграла $[(a_1\ a_2\ \overline{a_1}\ \overline{a_2})]$ служатъ a_1, a_2 и ∞. Не требуетъ особаго изслѣдованія въ этомъ направленіи интегралъ $[(a_1\ \infty\ \overline{a_1}\ \overline{\infty})]$, — особыми точками его служатъ a_1 и ∞.

Изъ интеграловъ второй категоріи мы остановимся лишь на интегралѣ $[(a_1\ x\ \overline{a_1}\ \overline{x})]$. Разсмотримъ какую-либо особую точку функціи $f(u)$, напр.: a_2. Предположимъ, что перемѣнное x совершило обходъ въ положительномъ направленіи около точки a_2. Послѣ обхода контуръ (x) приметъ положеніе X (см. черт. 10), эквивалентнаго:

$$X = (a_2\ x\ \overline{a_2}). \tag{10}$$

Интегралъ $[(a_1\ x\ \overline{a_1}\ \overline{x})]$, слѣдовательно, приметъ новую вѣтвь $[(a_1\ X\ \overline{a_1}\ \overline{X})]$, которая можетъ быть выражена слѣдующимъ образомъ:

$$[(a_1 X \overline{a_1}\ \overline{X})] =$$

$$(11)\qquad = (1-e^{2\pi\lambda i}) \int\limits_c^{(a_1)} (u-x)^{\lambda-1} f(u)\, du - \int\limits_c^{(X)} u-x)^{\lambda-1} [f(u)-f_1(u)]\, du.$$

Далѣе, имѣемъ:

$$\int\limits_c^{(X)} (u-x)^{\lambda-1} [f(u)-f_1(u)]\, du = (1-e^{2\pi\lambda i}) \int\limits_c^{(a_1)} (u-x)^{\lambda-1} [f(u)-f_1(u)]\, du +$$

$$(12)\qquad + \int\limits_c^{(x)} (u-x)^{\lambda-1} [f_2(u)-f_{12}(u)]\, du.$$

Въ виду формулы (12), соотношенію (11) дадимъ видъ:

$$[(a_1 X \overline{a_1}\ X)] =$$

$$(13)\qquad = \int\limits_c^{(a_1\, x\, \overline{a_1}\, \overline{x})} (u-x)^{\lambda-1} f(u)\, du - \int\limits_c^{(a_1\, x\, \overline{a_2}\, \overline{x})} (u-x)^{\lambda-1} [f(u)-f_1(u)]\, du.$$

Положимъ теперь, что перемѣнное x совершило обходъ въ положительномъ направленіи около точки a_1. Тогда разсматриваемый интегралъ приметъ новое аналитическое выраженіе $[(A\ X\ \overline{A}\ \overline{X})]$ (см. черт. 11), которое въ раскрытой формѣ напишется такъ:

$$[(A\ X\ \overline{A}\ \overline{X})] =$$

$$(14)\qquad = (1-e^{2\pi\lambda i}) \int\limits_c^{(A)} (u-x)^{\lambda-1} f(u)\, du - \int\limits_c^{(X)} (u-x)^{\lambda-}\ [f(u)-f_1(u)]\, du.$$

Но имѣемъ:

$$(15)\qquad \int\limits_c^{(A)} (u-x)^{\lambda-1} f(u) = \int\limits_c^{(a_1)} (u-x)^{\lambda-1} f(u)\, du - \int\limits_c^{(a_1\, x\, \overline{a_1}\, \overline{x})} (u-x)^{\lambda-1} f(u)\, du,$$

$$\int\limits_c^{(X)} (u-x)^{\lambda-1} [f(u)-f_1(u)]\, du =$$

$$(16)\qquad = \int\limits_c^{(x)} (u-x)^{\lambda-1} [f(u)-f_1(u)]\, du + e^{2\pi\lambda i} \int\limits_c^{(a_1\, x\, \overline{a_1}\, \overline{x})} (u-x)^{\lambda-1} [f(u)-f_1(u)]\, du.$$

На основаніи формулъ (15) и (16) соотношеніе (14) представится слѣдующимъ образомъ:

$$[(A\ X\ \overline{A}\ \overline{X})] = e^{2\pi\lambda i} \int\limits_{c}^{(a_1\ x\ \overline{a_1}\ \overline{x})} (u-x)^{\lambda-1} f_1(u)\, du. \tag{17}$$

Изъ предыдущаго мы заключаемъ, что особыми точками интеграла $[(a_1\ x\ \overline{a_1}\ \overline{x})]$ служатъ: a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n и ∞.

Добытые нами результаты позволяютъ намъ сдѣлать слѣдующій выводъ: любой изъ интеграловъ, взятыхъ по простому пути съ двойнымъ обходомъ, послѣ всевозможныхъ перемѣщеній перемѣннаго x въ плоскости u можетъ быть представленъ линейной и однородной формулою съ постоянными коэффиціентами отъ интеграловъ по тѣмъ же путямъ, подъинтегральныя функціи которыхъ представляютъ различныя вѣтви функціи $\varphi(u)$ (5).

Легко теперь обнаружить, что интегралы вида $[(a_\mu\ a_\nu\ \overline{a_\mu}\ \overline{a_\nu})]$ могутъ быть выражены чрезъ интегралы вида $[(a_\mu\ x\ \overline{a_\mu}\ \overline{x})]$. Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$[(a_\mu\ a_\nu\ \overline{a_\mu}\ \overline{a_\nu})] =$$

$$= \int\limits_{c}^{(a_\mu)} (u-x)^{\lambda-1} [f(u)-f_\nu(u)]\, du - \int\limits_{c}^{(a_\nu)} (u-x)^{\lambda-1} [f(u)-f_\mu(u)] du, \tag{18}$$

гдѣ $f_\nu(u)$ есть $f(u)$ послѣ обхода перемѣннымъ u точки a_ν въ положительномъ направленіи.

Далѣе, имѣемъ:

$$(1-e^{2\pi\lambda i}) \int\limits_{c}^{(a_\nu)} (u-x)^{\lambda-1} f(u)\, du = \int\limits_{c}^{(a_\nu\ x\ \overline{a_\nu}\ \overline{x})} (u-x)^{\lambda-1} f(u)\, du +$$

$$+ \int\limits_{c}^{(x)} (u-x)^{\lambda-1} [f(u)-f_\nu(u)]\, du; \tag{19}$$

$$(1-e^{2\pi\lambda i}) \int\limits_{c}^{(a_\mu)} (u-x)^{\lambda-1} f(u) = \int\limits_{c}^{(a_\mu\ x\ \overline{a_\mu}\ \overline{x})} (u-x)^{\lambda-1} f(u)\, du +$$

$$+ \int\limits_{c}^{(x)} (u-x)^{\lambda-1} [f(u)-f_\mu(u)]\, du. \tag{20}$$

Въ виду формулъ (19) и (20), изъ (18) находимъ:

$$[(a_\mu\, a_\nu\, \overline{a_\mu}\, \overline{a_\nu})] =$$

$$= \frac{1}{1-e^{2\pi\lambda i}} \left\{ \int\limits_c^{(a_\mu\, x\, \overline{a_\mu}\, \overline{x})} (u-x)^{\lambda-1} \,[f(u)-f_\nu(u)]\, du - \right.$$

$$(21) \qquad \left. - \int\limits_c^{(a_\nu\, x\, \overline{a_\nu}\, \overline{x})} (u-x)^{\lambda-1} \,[f(u)-f_\mu(u)]\, du \right\}.$$

Эта формула подтверждаетъ наше положеніе.

Изъ предыдущаго анализа слѣдуетъ, что для какой-либо особой точки a_k функціи $f(u)$ существуютъ n интеграловъ, которые имѣютъ аналогію съ главными интегралами въ теоріи гипергеометрическихъ интеграловъ. Прежде всего имѣемъ голоморфные въ области указанной точки интегралы: $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$, $[(a_1\, a_3\, \overline{a_1}\, \overline{a_3})]$, $\cdots$, $[(a_1\, a_{k-1}\, \overline{a_1}\, \overline{a_{k-1}})]$, $[(a_1\, a_{k+1}\, \overline{a_1}\, \overline{a_{k+1}})]$, $\cdots$, $[(a_1\, a_n\, \overline{a_1}\, \overline{a_n})]$ и, наконецъ, неголоморфный: $[(a_k\, x\, \overline{a_k}\, \overline{x})]$.

Не лишены интереса представленія этихъ интеграловъ въ области точки a_k. Изъ интеграловъ голоморфныхъ въ разсматриваемыхъ предѣлахъ остановимся только на $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$.

Находимъ:

$$[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})] = \int\limits_c^{(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})} (u-a_k)^{\lambda-1} f(u) \left[1-\frac{x-a_k}{u-a_k}\right]^{\lambda-1} du =$$

$$= \int\limits_c^{(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})} (u-a_k)^{\lambda-1} f(u) \left[1-[\lambda-1]_1 \frac{x-a_k}{u-a_k} + [\lambda-1]_2 \left(\frac{x-a_k}{u-a_k}\right)^2 - \cdots + \right.$$

$$(22) \qquad \left. \cdots + (-1)^p\, [\lambda-1]_p \left(\frac{x-a_k}{u-a_k}\right)^p + \cdots \right] du.$$

Полагая далѣе:

$$(23) \qquad (-1)^p\, [\lambda-1]_p \int\limits_c^{(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})} (u-a_k)^{\lambda-p-1} f(u)\, du = A(p),$$

предыдущему соотношенію дадимъ видъ:

$$[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})] =$$

$$(24) \qquad = A(0) + (x-a_k)\, A(1) + \cdots + (x-a_k)^p A(p) + \cdots$$

Чтобы получить разложеніе интеграла $[(a_k\, x\, \overline{a_k}\, \overline{x})]$ въ области a_k, надо знать представленіе для этой послѣдней функціи $f(u)$. Насъ интересуютъ тутъ главнымъ образомъ тѣ случаи, когда $f(u)$ есть интегралъ линейнаго однороднаго дифференціальнаго уравненія съ раціональными коэффиціентами. Интересующая насъ функція, согласно результатамъ Фукса, имѣетъ такое выраженіе:

$$f(u) = (u-a_k)^r \sum_{j=0}^{j=i} \varphi_j(u-a_k)\,[lg\,(u-a_k)]^j, \tag{25}$$

гдѣ r есть постоянное, а $\varphi_j(u-a_k)$ рядъ, идущій по положительнымъ и отрицательнымъ степенямъ $u - a_k$:

$$\varphi_j(u-a_k) = \sum_{(p)} A_j (u-a_k)^p. \tag{26}$$

Внеся выраженіе (26) въ (25) и этотъ послѣдній результатъ въ

$$[(a_k\, x\, \overline{a_k}\, \overline{x})] = \int_c^{(a_k\, x\, \overline{a_k}\, \overline{x})} (u-x)^{\lambda-1} f(u)\, du, \tag{27}$$

будемъ имѣть:

$$[(a_k\, x\, \overline{a_k}\, \overline{x})] =$$

$$= \sum_{j=0}^{j=i} \sum_{(p)} A_j \int_c^{(a_k\, x\, \overline{a_k}\, \overline{x})} (u-x)^{\lambda-1} (u-a_k)^{p+r} [lg(u-a_k)]^j\, du. \tag{28}$$

Введемъ новое перемѣнное интеграціи въ интегралѣ правой части (28) при помощи подстановки:

$$u = x + (a_k - x)\, v. \tag{29}$$

Тогда получимъ:

$$[(a_k\, x\, \overline{a_k}\, \overline{x})] =$$

$$= (-1)^{r+\lambda} (x-a_k)^{\lambda+r} \sum_{j=0}^{j=i} \sum_{(p)} A_j (-1)^p (x-a_k)^p \int_{c_1}^{(10\overline{1}\overline{0})} v^{\lambda-1} (v-1)^{p+r}$$

$$[\,[lg\,(a_k-x) + lg\,(v-1)]^j\, dv =$$

$$= (a_k - x)^{\lambda+r} \sum_{j=0}^{j=i} \sum_{(p)} \sum_{q=0}^{q=j} [j]_q A_j (a_k - x)^p [lg(a_k - x)]^{j-q} \int_{c_1}^{(1010)} v^{\lambda-1} (v-1)^{p+r}$$

$$(30) \qquad [\,[lg(v-1)]^q\, dv,$$

гдѣ положено:

$$(30') \qquad c_1 = \frac{c - x}{a_k - x}.$$

Принимая во вниманіе формулу (86α) главы I, будемъ имѣть:

$$[(a_k\, x\, \bar{a}_k\, \bar{x})] =$$

$$(31) \qquad = e^{\pi(\lambda-1)i} (a_k - x)^{\lambda+r} \sum_{j=0}^{j=i} \sum_{(p)} \sum_{q=0}^{q=j} A_j [j]_q (a_k - x)^p [lg(a_k - x)]^{j-q}$$

$$[\; \bar{B}_q(\lambda, p+r+1).$$

Пользуясь формулами (86β) главы I, можно было бы $\bar{B}_q(\lambda, p+r+1)$ выразить чрезъ $\bar{B}_0(\lambda, r)$, $\bar{B}_1(\lambda, r), \cdots, \bar{B}_i(\lambda, r)$; при чемъ $\bar{B}_0(\lambda, r)$ есть $\bar{E}(\lambda, r)$.

Изслѣдованіе второго интеграла (2) не представляетъ трудности. Мы ограничимся лишь указаніемъ особыхъ точекъ тѣхъ изъ интеграловъ этого вида, гдѣ пути интеграціи суть простые пути съ двойными обходами. Всѣ они сводятся къ тремъ типамъ: $[(a_1\, a_2\, \bar{a}_1\, \bar{a}_2)]$, $[(a_1\, x_1\, \bar{a}_1\, \bar{x}_1)]$ и $[(x_1\, x_2\, \bar{x}_1\, \bar{x}_2)]$.

Поступая по пріему, изложенному въ главѣ III, приходимъ къ заключенію, что особыми точками функціи $[(a_1\, a_2\, \bar{a}_1\, \bar{a}_2)]$ оказываются лишь такія системы $(x_1\, x_2 \cdots x_m)$, гдѣ между количествами $x_1, x_2, \cdots, x_m$ есть обязательно a_1, a_2 и ∞.

Далѣе, особыми точками функціи $[(a_1\, x_1\, \bar{a}_1\, \bar{x}_1)]$ служатъ совокупности $(x_1\, x_2\, x_3 \cdots x_m)$, гдѣ x_1 совпадаетъ съ любымъ изъ количествъ: $x_2, x_3, \cdots, x_m, a_1, a_2, \cdots, a_n$ и ∞, или же любое изъ перемѣнныхъ $x_2, x_3, \cdots, x_m$ сливается съ a_1 и ∞.

Наконецъ, особыми точками интеграла $[(x_1\, x_2\, \bar{x}_1\, \bar{x}_2)]$ служатъ системы $(x_1\, x_2\, x_3 \cdots x_m)$, гдѣ одно изъ перемѣнныхъ x_1 и x_2 совпадаетъ съ $x_3, x_4, \cdots, x_m, a_1, a_2, \cdots, a_n$ и ∞, или же какое либо изъ количествъ $x_3, x_4, \cdots, x_m$ равно ∞.

§ 2.

Остановимся теперь на интегралѣ $W(x) = \int\limits_L e^{-\frac{x}{u}} f(u)\, du$, (32)

гдѣ функція $f(u)$ ограничена условіемъ:

$$\lim_{u=0} u^k f(u) = 0\text{[1]} \tag{32'}$$

для нѣкотораго весьма большого цѣлаго положительнаго числа k.

За L примемъ прежде всего пути съ двойными обходами, огибающіе особыя точки функціи $f(u)$, а потомъ пути, связанные съ существенно особой точкой $u = 0$ подъинтегральной функціи:

$$\sigma(u) = e^{-\frac{x}{u}} f(u). \tag{33}$$

Предварительно отыщемъ тѣ направленія, которыя приводятъ $\sigma(u)$ въ точку $u = 0$ со значеніемъ 0. Пусть x занимаетъ опредѣленное положеніе x_0 въ плоскости u.

Положимъ далѣе, что

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \rho_0 e^{\varphi_0 i}; \\ u &= r e^{\psi i}. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Тогда будемъ имѣть:

$$\frac{x_0}{u} = \frac{\rho_0}{r} \left[cs(\varphi_0 - \psi) + i sn(\varphi_0 - \psi)\right]. \tag{35}$$

Очевидно, что

$$cs(\varphi_0 - \psi) = 0 \tag{36}$$

для слѣдующихъ значеній ψ:

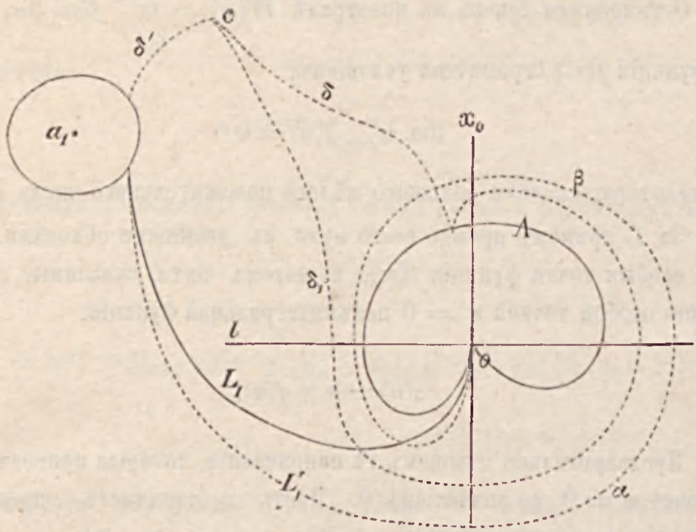
$$\psi = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}, = \varphi_0 + \frac{3\pi}{2}. \tag{37}$$

---

[1]) Результаты этого параграфа справедливы, если $f(u)$ ограничена условіемъ $\lim\limits_{u=0} e^{-\frac{1}{u}} f(u) = 0$.

Вообразимъ, что чрезъ точку $u = 0$ проведены двѣ прямыя $0x_0$ и l, взаимно перпендикулярныя.

Черт. 19.



Прямая l дѣлитъ всю плоскость u на двѣ части α и β; при этомъ, какъ легко сообразить, всякій путь, ведущій къ точкѣ $u = 0$ внутри области α, приводитъ $\sigma(u)$ въ эту точку со значеніемъ 0. За дозволенный путь L можно принять замкнутую линію, которая имѣетъ своимъ началомъ и концомъ точку 0 и лежитъ въ безконечной смежности съ этой послѣдней внутри α.

Таковой путь, не содержащій внутри себя особыхъ точекъ функціи $f(u)$, назовемъ чрезъ Λ.

Кромѣ Λ, съ точкою $u = 0$ связаны еще другіе дозволенные пути. Такъ, всякій простой или сложный контуръ, начинающійся и кончающійся въ точкѣ $u = 0$ внутри области α и огибающій точки a_1, a_2, $\cdots$, a_n, есть искомый путь. Простые контуры, огибающіе послѣдовательно точки a_1, a_2, $\cdots$, a_n, обозначимъ чрезъ L_1, L_2, $\cdots$, L_n.

Замѣтимъ, что при движеніи точки x_0 и, слѣдовательно, при вращеніи прямой $0x_0$ около точки $u = 0$, прямая l также вращается около той же точки 0, все время оставаясь перпендикулярной къ $0x_0$. При этомъ концы путей Λ, L_1, L_2, $\cdots$, L_n, представляемыхъ въ видѣ гибкихъ, удобоподвижныхъ, растяжимыхъ и сжимаемыхъ нитей, все время касаются въ точкѣ 0 къ прямой $0x_0$.

Всѣ пути съ двойными обходами имѣютъ общее начало c; при чемъ, начальное значеніе подъинтегральной функціи $\sigma(u)$ есть

$$\sigma(c) = \sigma_0(c). \tag{38}$$

Что же касается до значеній подъинтегральной функціи на путяхъ Λ, L_1, L_2, $\cdots$, L_n, то они опредѣляются при помощи вспомогательныхъ путей, соединяющихъ c съ этими путями, такъ, какъ это указано П. А. Некрасовымъ на стр. 61—62 его работы: „Линейныя дифференціальныя уравненія и пр.“.

Изучимъ предварительно свойства интеграла $\int\limits_{\Lambda} e^{\frac{x}{u}} f(u)\, du$. Легко обнаружить, что всякая точка x_0, отличная отъ 0 и ∞, представляетъ простую точку этой функціи. Въ самомъ дѣлѣ, пусть x_0 будетъ или простой точкою функціи $\sigma(u)$, или же одной изъ слѣдующихъ: a_1, a_2, $\cdots$, a_n. Вообразимъ, что перемѣнное x совершило обходъ въ положительномъ направленіи около x_0 по настолько малому замкнутому пути, что внутри него нѣтъ другихъ особыхъ точекъ функціи $f(u)$, кромѣ x_0 (если эта послѣдняя совпадаетъ съ одной изъ точекъ a_1, a_2, $\cdots$, a_n). Тогда произойдетъ слѣдующее. Путь Λ въ концѣ обхода или совсѣмъ не измѣнится, или же претерпитъ консервативную деформацію. Что же касается до формы выраженія подъинтегральной функціи, то она останется прежней. Въ виду этого, въ концѣ движенія перемѣннаго x интегралъ $\int\limits_{\Lambda} e^{\frac{x}{u}} f(u)\, du$ сохранитъ свое первоначальное значеніе.

Далѣе, дадимъ перемѣнному x безконечно малое приращеніе Δx вдоль прямой $0x_0$. Тогда будемъ имѣть:

$$\Delta_{x=x_0} W(x) = \int\limits_{\Lambda} e^{\frac{x_0}{u}} \left(e^{\frac{\Delta x}{u}} - 1\right) f(u)\, du. \tag{39}$$

Изъ соотношенія (39) находимъ:

$$\left.\frac{dW(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = \int\limits_{\Lambda} e^{\frac{x_0}{u}} \frac{f(u)}{u}\, du \tag{40}$$

Что же касается до непрерывности функціи $\int\limits_{\Lambda} e^{\frac{x}{u}} f(u)\, du$ для точки $x = x_0$, то это ея свойство вполнѣ очевидно.

Эти же три результата показываютъ, что, дѣйствительно, $x = x_0$ служитъ простою точкой разсматриваемаго интеграла. Остается теперь изучить характеръ точекъ $x = 0$ и $x = \infty$. Мы начнемъ съ $x = 0$. Представимъ себѣ, что перемѣнное x совершило обходъ около $u = 0$ въ положительномъ направленіи. По окончаніи движенія путь Λ, очевидно, займетъ первоначальное положеніе. Значенія же подъинтегральной функціи $\sigma(u)$ будутъ опредѣляться при помощи новаго положенія нити δ, а именно δ_1 (Черт. 19). Легко видѣть, что интегралъ $\int\limits_\Lambda e^{\frac{x}{u}} f(u)\,du$ преобразуется въ $\int\limits_\Lambda e^{\frac{x}{u}} f_0(u)\,du$, гдѣ $f_0(u)$ есть $f(u)$ послѣ обхода перемѣннымъ u точки 0 въ положительномъ направленіи. Отсюда слѣдуетъ, что $x = 0$ представляетъ особую точку $W(x)$. Если x совершитъ въ положительномъ направленіи обходъ около $u = \infty$, то, какъ легко сообразить, разсматриваемый интегралъ перейдетъ въ $\int\limits_\Lambda e^{\frac{x}{u}} f_{-0}(u)\,du$, гдѣ $f_{-0}(u)$ есть $f(u)$ послѣ обхода перемѣннымъ u точки 0 въ отрицательномъ направленіи. Значитъ, $x = \infty$ оказывается особой точкой функціи $W(x)$.

Обратимся теперь къ интеграламъ:

$$\int\limits_{L_1} e^{\frac{x}{u}} f(u)\,du, \int\limits_{L_2} e^{\frac{x}{u}} f(u)\,du, \cdots, \int\limits_{L_n} e^{\frac{x}{u}} f(u)\,du. \tag{41}$$

Очевидно, что достаточно изслѣдовать первый изъ нихъ. Точно такъ же, какъ и для интеграла $\int\limits_\Lambda e^{\frac{x}{u}} f(u)\,du$, безъ труда убѣждаемся, что всѣ точки плоскости перемѣннаго u, за исключеніемъ 0 и ∞, являются обыкновенными интеграла $\int\limits_{L_1} e^{\frac{x}{u}} f(u)\,du$.

Далѣе, легко видѣть, что $x = 0$ служитъ особою точкой разсматриваемой функціи. Въ самомъ дѣлѣ, вообразимъ, что перемѣнное x обошло точку 0 по замкнутому пути въ положительномъ направленіи. Въ концѣ такого движенія путь L_1 приметъ новое положеніе L'_1 (Черт. 19), которое, какъ видно изъ чертежа, отличается отъ прежняго двумя обходами около 0 — въ положительномъ и отрицательномъ направленіи.

Новое значеніе интеграла $\int\limits_{L_1} e^{\frac{x}{u}} f(u)\, du$ напишется по формулѣ:

$$\int\limits_{L_1'} e^{\frac{x}{u}} f(u)\, du = \int\limits_{\Lambda} e^{\frac{x}{u}} [f_1(u) - f(u)]\, du + \int\limits_{L_1} e^{\frac{x}{u}} f(u)\, du, \tag{42}$$

гдѣ $f_1(u)$ представляетъ $f(u)$ послѣ обхода перемѣннымъ u точки a_1 въ положительномъ направленіи.

Аналогичнымъ образомъ находимъ:

$$\int\limits_{L_2'} e^{\frac{x}{u}} f(u)\, du = \int\limits_{\Lambda} e^{\frac{x}{u}} [f_2(u) - f(u)]\, du + \int\limits_{L_2} e^{\frac{x}{u}} f(u)\, du;$$

. . . .

. . . . (43)

$$\int\limits_{L_n'} e^{\frac{x}{u}} f(u)\, du = \int\limits_{\Lambda} e^{\frac{x}{u}} [f_n(u) - f(u)]\, du + \int\limits_{L_n} e^{\frac{x}{u}} f(u)\, du,$$

гдѣ $f_2(u), f_3(u), \cdots, f_n(u)$ суть $f(u)$ послѣ обхода перемѣннымъ u соотвѣтственно точекъ $a_1, a_2, \cdots, a_n$ въ положительномъ направленіи. Значитъ, $x = 0$ есть особая точка функцій (41). Такимъ же образомъ удостовѣряемся, что и $x = \infty$ служитъ особой точкою интеграловъ (41). Что же касается до интеграловъ съ двойными обходами, то всѣ они представляютъ функціи голоморфныя на всей конечной плоскости перемѣннаго x. Безконечно же удаленная ея точка является для нихъ существенно особою точкой.

Примѣнимъ добытые результаты къ нѣкоторымъ частнымъ видамъ интеграла (32).

Остановимся предварительно на интегралѣ:

$$W_1(x) = \int\limits_{L} e^{xu} (u - \alpha_1)^{\lambda_1 - 1} (u - \alpha_2)^{\lambda_2 - 1} \cdots (u - \alpha_n)^{\lambda_n - 1}\, du, \tag{44}$$

гдѣ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ суть нѣкоторыя постоянныя. При этомъ, будемъ предполагать, что $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ не есть цѣлое число или нуль. Преобразуемъ интегралъ (44) къ новому перемѣнному интеграціи v при помощи подстановки:

$$u = \frac{1}{v}. \tag{45}$$

Тогда получимъ:

$$W_1(x) = C \int\limits_{L'} e^{\frac{x}{v}} v^{-\delta} (v-\beta_1)^{\lambda_1-1} (v-\beta_2)^{\lambda_2-1} \cdots (v-\beta_n)^{\lambda_n-1} dv, \tag{46}$$

гдѣ положено:

$$\beta_1 = \frac{1}{\alpha_1}, \ \beta_2 = \frac{1}{\alpha_2}, \ \ldots, \ \beta_n = \frac{1}{\alpha_n};$$

$$C = \alpha_1^{\lambda_1-1} \alpha_2^{\lambda_2-1} \cdots \alpha_n^{\lambda_n-1} (-1)^{n+\lambda_1+\cdots+\lambda_n-1}; \tag{47}$$

$$\delta = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n - n + 2.$$

Пусть будутъ:

$$\begin{gathered} y_0 = \int\limits_{\Lambda} e^{\frac{x}{v}} \mu(v)\, dv, \ y_1 = \int\limits_{L_1} e^{\frac{x}{v}} \mu(v)\, dv, \ \cdots, \ y_n = \int\limits_{L_n} e^{\frac{x}{v}} \mu(v)\, dv; \\ \eta_1 = \int\limits_{c_1}^{(\beta_1 \beta_2 \overline{\beta_1} \overline{\beta_2})} e^{\frac{x}{v}} \mu(v)\, dv, \ \eta_2 = \int\limits_{c_1}^{(\beta_1 \beta_3 \overline{\beta_1} \overline{\beta_3})} e^{\frac{x}{v}} \mu(v)\, dv, \ \cdots, \ \eta_{n-1} = \int\limits_{c_1}^{(\beta_1 \beta_n \overline{\beta_1} \overline{\beta_n})} e^{\frac{x}{v}} \mu(v)\, dv, \end{gathered} \tag{48}$$

гдѣ принято:

$$\mu(v) = v^{-\delta} (v-\beta_1)^{\lambda_1-1} (v-\beta_2)^{\lambda_2-1} \cdots (v-\beta_n)^{\lambda_n-1}. \tag{49}$$

Такъ какъ y_0 послѣ обхода перемѣннымъ x точки 0 въ положительномъ направленіи принимаетъ множитель $e^{-2\pi\delta i}$, то этотъ интегралъ въ области точки $x = 0$ имѣетъ такое выраженіе:

$$y_0 = x^{-\delta} P(x), \tag{50}$$

гдѣ $P(x)$ есть функція однозначная на всей конечной плоскости перемѣннаго x.

Далѣе соотношенія (42) и (43) въ разсматриваемомъ случаѣ представятся такъ:

$$\begin{gathered} \overline{y_1} = y_1 + (e^{2\pi\lambda_1 i} - 1)\, y_0; \\ \overline{y_2} = y_2 + (e^{2\pi\lambda_2 i} - 1)\, y_0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overline{y_n} = y_n + (e^{2\pi\lambda_n i} - 1)\, y_0. \end{gathered} \tag{51}$$

При этомъ $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \cdots, \overline{y}_n$ суть значенія $y_1, y_2, \cdots, y_n$ послѣ обхода перемѣннымъ x точки 0 въ положительномъ направленіи.

Изъ соотношеній (51) легко сообразить видъ функцій $y_1, y_2, \cdots, y_n$ въ области точки 0. Въ самомъ дѣлѣ, первое изъ этихъ соотношеній, въ силу (50), напишется такъ:

$$x^{\delta}\,[\overline{y}_1 - y_1] = (e^{2\pi\lambda_1 i} - 1)\;P(x). \tag{52}$$

Отсюда ясно, что y_1 имѣетъ составъ:

$$y_1 = x^{-\delta}\,\lambda(x) + v_1(x)\,, \tag{53}$$

гдѣ $\lambda(x)$ и $v_1(x)$ суть функціи однозначныя.

Внеся выраженіе (53) въ равенство (52), найдемъ для $\lambda(x)$:

$$\lambda(x) = \frac{e^{2\pi\lambda_1 i} - 1}{e^{-2\pi\delta i} - 1}\,P(x). \tag{54}$$

А посему имѣемъ:

$$y_1 = \frac{e^{2\pi\lambda_1 i} - 1}{e^{-2\pi\delta i} - 1}\,x^{-\delta}\,P(x) + v_1(x). \tag{55}$$

Аналогичнымъ образомъ находимъ:

$$y_2 = \frac{e^{2\pi\lambda_2 i} - 1}{e^{-2\pi\delta i} - 1}\,x^{-\delta}\,P(x) + v_2(x);$$

. . . .

. . . .

$$y_n = \frac{e^{2\pi\lambda_n i} - 1}{e^{-2\pi\delta i} - 1}\,x^{-\delta}\,P(x) + v_n(x); \tag{56}$$

гдѣ $v_2(x), v_3(x), \cdots, v_n(x)$ суть функціи однозначныя на всей конечной плоскости перемѣннаго x.

Легко теперь обнаружить, что функціи $v_1(x), v_2(x), v_3(x), \cdots, v_n(x)$ голоморфны на всей конечной плоскости x. Разсмотримъ для этой цѣли интегралъ $\int_c^{(0\,\beta_1\,\overline{0}\,\overline{\beta_1})} e^{\frac{x}{v}}\,\mu(v)\,dv$.

Такъ какъ значеніе его не зависитъ отъ начала c (при соблюденіи извѣстныхъ предостереженій), то мы въ правѣ написать:

(57) $$\int_c^{(0\,\beta_1\,\overline{0}\,\overline{\beta_1})} e^{\frac{x}{v}}\mu(v)\,dv = (1-e^{2\pi\lambda_1 i})\,y_0 - (1-e^{-2\pi\delta i})\,y_1.$$

Изъ соотношеній (55) и (57) находимъ:

(58) $$y_1 = \frac{(1-e^{2\pi\lambda_1 i})\,y_0}{1-e^{-2\pi\delta i}} + \frac{1}{e^{-2\pi\delta i}-1}\int_c^{(0\,\beta_1\,\overline{0}\,\overline{\beta_1})} e^{\frac{x}{v}}\mu(v)\,dv.$$

Принимая во вниманіе (50) и сопоставляя соотношенія (55) съ (58), приходимъ къ выводу:

(59) $$v_1(x) = \frac{1}{e^{-2\pi\delta}-1}\int_c^{(0\,\beta_1\,\overline{0}\,\overline{\beta_1})} e^{\frac{x}{v}}\mu(v)\,dv.$$

Аналогичнымъ путемъ убѣждаемся въ справедливости равенствъ:

$$v_2(x) = \frac{1}{e^{-2\pi\delta i}-1}\int_c^{(0\,\beta_2\,\overline{0}\,\overline{\beta_2})} e^{\frac{x}{v}}\mu(v)\,dv;$$

(59′) . . . .

$$v_n(x) = \frac{1}{e^{-2\pi\delta i}-1}\int_c^{(0\,\beta_n\,\overline{0}\,\overline{\beta_n})} e^{\frac{x}{v}}\mu(v)\,dv.$$

Такимъ образомъ голоморфность функцій $v_1(x)$, $v_2(x)$, $\cdots$, $v_n(x)$ на всей конечной плоскости x доказана.

Имѣя въ виду, что интегралы вида $\int_c^{(0\,\beta_k\,\overline{0}\,\overline{\beta_k})} e^{\frac{x}{v}}\mu(v)\,dv$ могутъ быть по извѣстнымъ пріемамъ выражены чрезъ η_1, η_2, $\cdots$, η_{n-1} линейными и однородными формулами съ постоянными коэффиціентами, на основаніи предыдущихъ результатовъ въ правѣ заключить, что за основную систему интеграловъ можемъ принять слѣдующія функціи:

(60) $$y_0,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \cdots,\ \eta_{n-1},$$

между которыми послѣднія $n-1$ голоморфны на всей конечной плоскости x, а первая остается однозначной въ той же плоскости послѣ умноженія на x^{δ}.

Для будущихъ цѣлей не лишне остановиться на интегралѣ:

$$W_2(x) = \int\limits_L e^{xu+W} (u-\alpha_1)^{\lambda_1-1} (u-\alpha_m)^{\lambda_m-1}\, du, \tag{61}$$

гдѣ W имѣетъ составъ (2) главы IV при условіи, что $\theta_q(u) = 0$.

Преобразуя этотъ интегралъ къ новому перемѣнному интеграціи v на основаніи подстановки (45), получимъ:

$$W_2(x) = C_1 \int\limits_{L'} e^{\frac{x}{v}+W'} v^{-\delta'} (v-\beta_1)^{\lambda_1-1} \cdots (v-\beta_m)^{\lambda_m-1}\, dv, \tag{62}$$

гдѣ β, C_1 и δ_1 имѣютъ значенія:

$$\beta_1 = \frac{1}{\alpha_1},\ \beta_2 = \frac{1}{\alpha_2},\ \cdots,\ \beta_m = \frac{1}{\alpha_m};$$

$$\delta' = \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m-m+2;$$

$$C_1 = -(-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m-m}\, \alpha_1^{\lambda_1-1}\alpha_2^{\lambda_2-1}\cdots\alpha_m^{\lambda_m-1}; \tag{63}$$

$$W' = W\left(\frac{1}{v}\right).$$

Подъ L' будемъ разумѣть прежде всего пути Λ, L_1, L_2, $\cdots$, L_m, $(\beta_1\,\beta_2\,\overline{\beta_1}\,\overline{\beta_2})$, $(\beta_1\,\beta_3\,\overline{\beta_1}\,\overline{\beta_3})$, $\cdots$, $(\beta_1\,\beta_m\,\overline{\beta_1}\,\overline{\beta_m})$, а также пути подобнаго же рода, но болѣе сложнаго состава, о которыхъ у насъ была рѣчь выше. Но кромѣ ихъ, сюда надо присоединить еще дозволенные пути, связанные съ существенно особыми точками β_1, β_2, $\cdots$, β_m функціи $e^{W'}$. Изысканіе этихъ путей производится по пріему, изложенному въ § 1 главы IV. Какъ тамъ, такъ и здѣсь простые дозволенные пути такого рода условимся обозначать чрезъ $(kl)_{\beta_\mu}$ для $\mu = 1, 2, \cdots, m$; а интегралъ, взятый по пути $(kl)_{\beta_\mu}$, будемъ обозначать чрезъ $[(kl)]_{\beta_\mu}$.

Всѣ интегралы, о которыхъ тутъ идетъ рѣчь, за исключеніемъ

$$\int\limits_\Lambda e^{\frac{x}{v}+W'} (v-\beta_1)^{\lambda_1-1}\cdots dv,\ \int\limits_{L_1} e^{\frac{x}{v}+W'} (v-\beta_1)^{\lambda_1-1}\cdots dv,\ \cdots,\ \int\limits_{L_n} e^{\frac{x}{v}+W'} (v-\beta_1)^{\lambda_1-1}\cdots dv,$$

а равно и тѣхъ, которые приводятся къ суммѣ этихъ послѣднихъ, представляютъ функціи голоморфныя на всей конечной плоскости перемѣннаго x. Что же касается до интеграловъ, взятыхъ по путямъ Λ, L_1, L_2, $\cdots$, L_m, то характеръ ихъ въ сущности былъ изслѣдованъ нами въ настоящемъ параграфѣ.

Легко далѣе убѣдиться, что за основную систему можно принять слѣдующую группу интеграловъ:

$$\int\limits_{\Lambda} e^{\frac{x}{v}}\varphi(v)dv,\ \int\limits_{c}^{(\beta_1\,\beta_1\,\overline{\beta_1}\,\overline{\beta_2})} e^{\frac{x}{v}}\varphi(v)dv, \cdots,\ \int\limits_{c}^{(\beta_1\,\beta_m\,\overline{\beta_1}\,\overline{\beta_m})} e^{\frac{x}{v}}\varphi(v)dv;\ [(01)]_{\beta_1},\ [(12)]_{\beta_1},\ \cdots,\ [(s_1-10)]_{\beta_1};$$

(64) . . . .

. . . .

$$[(01)]_{\beta_m},\ [(12)]_{\beta_m},\ \cdots,\ [(s_m-10)]_{\beta_m}.$$

Само собою разумѣется, что въ своихъ изслѣдованіяхъ мы предполагаемъ λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_m и δ' отличными отъ цѣлыхъ чиселъ или нуля. Но легко видѣть, какъ должны измѣниться результаты, если нѣкоторыя изъ этихъ количествъ оказываются цѣлыми или нулями.

Перейдемъ теперь къ интегралу вида:

(65) $$U_x = \int\limits_{L} v^{x-1}f(v)\,dv,$$

гдѣ $f(v)$ представляетъ любую функцію перемѣннаго v съ изолированными особыми точками, число которыхъ конечное. Пусть эти послѣднія будутъ: b_1, b_2, $\cdots$, b_n. Мы ограничимся тутъ разсмотрѣніемъ лишь слѣдующихъ дозволенныхъ путей:

(66) $$(o\,b_1\,o\,\overline{b_1}),\ (o\,b_2\,o\,\overline{b_2}),\ \cdots,\ (o\,b_m\,o\,\overline{b_m}).$$

Подлежащіе же изслѣдованію интегралы суть:

(67) $$\int\limits_{c}^{(o\,b_1\,o\,\overline{b_1})} v^{x-1}f(v)dv,\ \int\limits_{c}^{(o\,b_2\,o\,\overline{b_2})} v^{x-1}f(v)\,dv,\ \cdots,\ \int\limits_{c}^{(o\,b_m\,o\,\overline{b_m})} v^{x-1}f(v)dv;$$

при чемъ, значенія подъинтегральной функціи на путяхъ интеграціи опредѣляются тѣмъ, что, при данномъ x, въ точкѣ $v=c$ она принимаетъ данную величину.

Не трудно сообразить, что интегралы (67) представляютъ функціи голоморфныя на всей конечной плоскости перемѣннаго x. Возьмемъ, напр., первый изъ нихъ: $\int\limits_{C}^{(o b_1 \overline{o} \overline{b_1})} v^{x-1} f(v)\, dv$. Пусть x_0 будетъ произвольной точкой плоскости перемѣннаго x (она же есть плоскость перемѣннаго v). При всевозможныхъ обходахъ перемѣннымъ x этой точки въ любомъ направленіи, разсматриваемый интегралъ не мѣняетъ своего значенія. Далѣе, для $x = x_0$ интегралъ конеченъ, однозначенъ и имѣетъ вполнѣ опредѣленную конечную производную $\int\limits_{C}^{(o b_1 \overline{o} \overline{b_1})} v^{x_0-1} lg v\, f(v)\, dv$. Значитъ, дѣйствительно, точка x_0 и, слѣдовательно, любая точка конечной плоскости x представляетъ обыкновенную точку разсматриваемой функціи. Что же касается до $x = \infty$, то она оказывается существенно особою ея точкою.

Аналогичный выводъ имѣетъ мѣсто и относительно интеграловъ вида $\int\limits_{L} (u-\alpha_1)^{x_1-1} \cdots (u-\alpha_m)^{x_m-1} f(u)\, du$, гдѣ $f(u)$ ограничена предыдущимъ условіемъ.

Разумѣя подъ L пути:

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \overline{\alpha_1}\ \overline{\alpha_2}),\ (\alpha_1\ \alpha_3\ \overline{\alpha_1}\ \overline{\alpha_3}),\ \cdots,\ (\alpha_1\ a_n\ \overline{\alpha_1}\ \overline{a_n}), \tag{68}$$

$$(\alpha_2\ \alpha_3\ \overline{\alpha_2}\ \overline{\alpha_3}),\ \cdots,\ (\alpha_2\ a_n\ \overline{\alpha_2}\ \overline{a_n}),\ \cdots\ (\alpha_m\ a_n\ \overline{\alpha_m}\ \overline{a_n}),$$

утверждаемъ, что интегралы разсматриваемаго рода, взятые по этимъ путямъ, представляютъ функціи голоморфныя въ области любой точки $(x_1\ x_2 \cdots x_m)$, гдѣ между количествами $x_1, x_2, \cdots, x_m$ нѣтъ ∞. Точки же $(x_1\ x_2 \cdots x_m)$, гдѣ между $x_1, x_2, \cdots, x_m$ оказываются ∞, является существенно особыми для этихъ интеграловъ.

§ 3.

Особаго вниманія заслуживаютъ интегралы § 1, гдѣ функція $f(u)$ удовлетворяетъ нѣкоторому линейному однородному уравненію съ раціональными коэффиціентами. Въ этомъ случаѣ вышеупомянутые интегралы также удовлетворяютъ нѣкоторымъ однороднымъ линейнымъ (дифференціальнымъ или разностнымъ) уравненіямъ съ раціональными коэффиціентами. На выводѣ этихъ послѣднихъ мы сейчасъ и остановимся. Положимъ, что $f(u)$ удовлетворяетъ уравненію:

$$(69)\qquad P_{m_0}\frac{d^ny}{du^n}+P_{m_1}\frac{d^{n-1}y}{du^{n-1}}+\cdots+P_{m_n}y=0, \text{ *)}$$

гдѣ P_{m_k} представляетъ алгебраическій многочленъ степени m_k.

Пусть въ рядѣ чиселъ:

$$(70)\qquad m_0-n,\ m_1-n+1,\ m_2-n+2, \cdots, m_k-n+k, \cdots, m_n$$

нѣтъ большаго m_k-n+k.

Умноживъ обѣ части соотношенія (69) на $(u-x)^{\lambda-m_k+n-k-1}\,du$ и взявъ отъ полученныхъ результатовъ интегралъ по дозволенному пути L, будемъ имѣть:

$$\int_L P_{m_0}(u-x)^{\lambda-m_k+n-k-1}\frac{d^ny}{du^n}\,du+\int_L P_{m_1}(u-x)^{\lambda-m_k+n-k-1}\frac{d^{n-1}y}{du^{n-1}}\,du+\cdots$$

$$(70')\qquad \cdots+\int_L P_{m_k}(u-x)^{\lambda-m_k+n-k-1}\frac{d^{n-k}y}{du^{n-k}}\,du+\cdots$$

$$\cdots+\int_L P_{m_n}(u-x)^{\lambda-m_k+n-k-1}\,y\,du=0,$$

или:

$$(71)\qquad \sum_{p=o}^{p=n}\int_L P_{m_p}(u)\,(u-x)^{\lambda-m_k+n-k-1}\frac{d^{n-p}y}{du^{n-p}}\,du=0.$$

Далѣе, имѣемъ:

$$(72)\qquad P_{m_p}(u)=\sum_{q=o}^{q=m_p}\frac{(u-x)^q}{1.2\cdots q}\,P_{m_p}^{(q)}(x).$$

---

*) Результаты настоящаго параграфа имѣютъ мѣсто также и въ томъ случаѣ, если правая часть уравненія (69) не нуль, но алгебраическій многочленъ перемѣннаго u, или же представляетъ выраженіе вида: $(u-x)^\alpha\varphi_1(u)+(u-x)^\beta\varphi_2(u)+\cdots+(u-x)^\mu\varphi_m(u)$, гдѣ $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u), \cdots, \varphi_m(u)$, представляя цѣлыя алгебраическія функціи относительно u, могутъ быть произвольными функціями относительно x.

Въ виду формулы (72), соотношеніе (71) можно написать въ формѣ:

$$\sum_{p=o}^{p=n}\sum_{q=o}^{q=m_p}\frac{P_{m_p}^{(q)}(x)}{1.2\cdots q}\int_L (u-x)^{\lambda+q-m_k+n-k-1}\frac{d^{n-p}y}{du^{n-p}}\,du=0. \tag{73}$$

При помощи интеграціи по частямъ соотношенію (73) дадимъ видъ:

$$\sum_{p=o}^{p=n}(-1)^p\sum_{q=o}^{q=m_p}\frac{(\lambda+q-m_k+n-k-1)_{n-p}}{1.\,2.\,3\,\cdots\,q}P_{m_p}^{(q)}(x)\int_L (u-x)^{\lambda-m_k+p+q-k-1}y\,du=0. \tag{74}$$

Полагая, что

$$\eta=\int_L (u-x)^{\lambda-1}y\,du, \tag{75}$$

будемъ имѣть:

$$\sum_{p=o}^{p=n}\sum_{q=o}^{q=m_p}(-1)^q\frac{(\lambda-m_k+q+n-k-1)_{n-p}}{q!\,(\lambda-1)_{m_k+k-p-q}}P_{m_p}^{(q)}(x)\frac{d^{m_k+k-p-q}y}{dx^{m_k+k-q-p}}=0. \tag{76}$$

Порядокъ дифференціальнаго линейнаго уравненія (76), очевидно, m_k+k.

Соотношеніе (74) служитъ также для образованія линейнаго разностнаго уравненія съ раціональными коэффиціентами, интегралы котораго зависятъ отъ интеграловъ уравненія (69). Въ самомъ дѣлѣ, полагаемъ въ немъ:

$$x=\alpha,\ \lambda-m_k=z. \tag{77}$$

Тогда будемъ имѣть:

$$\sum_{p=o}^{p=n}(-1)^p\sum_{q=o}^{q=m_p}\frac{(z+n+q-k-1)_{n-p}}{1.2\cdots q}P_{m_p}^{(q)}(\alpha)\int_L (u-\alpha)^{z+p+q-k-1}y\,du=0. \tag{78}$$

Принимая

$$U_z=\int_L (u-\alpha)^{z-1}y\,du, \tag{79}$$

соотношеніе (78) представимъ въ формѣ:

$$(80)\qquad \sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p\sum_{q=0}^{q=m_p}\frac{(z+n+q-k-1)_{n-p}}{1.2.3\cdots q}P_{m_p}{}^{(q)}(\alpha)\,U_{z+p+q-k}=0.$$

Полученное разностное уравненіе съ раціональными коэффиціентами, очевидно, порядка m_k+k.

Остановимся теперь на частномъ видѣ уравненія (80).

Пусть, вмѣсто (69), будетъ уравненіе:

$$(81)\qquad (a_0-b_0\,u)\,u^n\,y^{(n)}+(a_1-b_1\,u)\,u^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots(a_n-b_n\,u)\,y=0,$$

гдѣ $a_0, a_1, \cdots, a_n, b_0, b_1, \cdots, b_n$ суть постоянныя, служившее предметомъ изслѣдованія многихъ ученыхъ, какъ, напр.: G. Boole'a, [1]) Thomae, [2]) Forsyth'a, [3]) W. W. Iohnson'a, [4]) Goursat, [5]) Hj. Mellin'a, [6]) П. А. Некрасова [7]) и другихъ.

Сопоставляя уравненіе (81) съ (69), находимъ:

$$(82)\qquad \begin{gathered} m_0=n+1,\ m_1=n,\ m_2=n-1,\cdots,\ m_p=n-p+1,\cdots,\ m_n=1;\\ P_{m_p}(u)=(a_p-b_p u)\,u^{n-p};\ P_{m_p}^{(q)}(\alpha)=\alpha^{n-p-q}[(n-p)_q\,a_p-(n-p+1)^q\,\alpha\,b_p].\end{gathered}$$

Внеся выраженія (82) въ (80) и полагая тамъ $\alpha=0$, получимъ:

$$(83)\qquad \begin{gathered}(z+2n)_n\,b_0-(z+2n-1)_{n-1}\,b_1+(z+2n-2)_{n-2}\,b_2-\cdots+(-1)^n b_n]\;u_{z+n+1}=\\ =[(z+2n-1)_n a_0-(z+2n-2)_{n-1}a_1+(z+2n-3)_{n-2}a_2-\cdots+(-1)^n a_n]u_{z+n}.\end{gathered}$$

Полагая далѣе

$$84)\qquad z+n=x,$$

---

1) A Treatise on Differential Equations, 2 ed.. 1865.

2) „Ueber die höheren hypergeometrischen Reihen“. Math. Ann., Bd. II.

3) A Treatise on Differential Equations. (Нѣмецкій переводъ Maser. Braunschweig. 1889).

4) On the Jntegrals in Series of Binomial Differential Equations. American Journal of Math., v. XI, Baltimor. 1888.

5) „Sur une classe des fonctions etc.“. Acta Mathematica, 2:1. Berlin, Stockholm, Paris, 1883. P. 1—70.

6) „Ueber einen Zusammenhang zwischen gewissen Differential und Differenzengleichungen.“ Acta Mathematica, t. 9. 1886.

7) „Приложеніе общаго дифференцированія къ интегрированію уравненія вида $\Sigma(a_s+b_s\,x)\,x^s\,D^s y=0$.“ Мат. Сб., т. XIV, стр. 334—373.

будемъ имѣть:

$$[(x+n)_n b_0-(x+n-1)_{n-1} b_1+(x+n-2)_{n-2} b_2-\cdots+ \tag{85}$$

$$+(-1)^n b_n]\, u_{x+1}=[(x+n-1)_n a_0-(x+n-2)_{n-1} a_1+$$

$$+(x+n-3)_{n-2} a_2-\cdots+(-1)^n a_n]\, u_x.$$

Интегралы же этого уравненія выражаются въ формѣ:

$$u_x=\int_L v^{x-1} y\, dv. \tag{86}$$

Соотношеніе (85) есть линейное разностное уравненіе съ раціональными коэффиціентами перваго порядка. Общій интегралъ такого уравненія въ зависимости отъ интеграловъ Эйлера былъ данъ нами въ § 7 главы I. Въ разсматриваемомъ случаѣ этотъ интегралъ имѣетъ составъ:

$$U_x=C\left(\frac{a_0}{b_0}\right)^x \frac{\overline{\Gamma}(x-a_1)\,\overline{\Gamma}(x-a_2)\cdots\overline{\Gamma}(x-a_n)}{\overline{\Gamma}(x-\alpha_1)\,\Gamma(x-\alpha_2)\cdots\Gamma(x-\alpha_n)}, \tag{87}$$

гдѣ $a_1, a_2, \cdots, a_n$ суть корни многочлена $(x+n-1)_n-\frac{a_1}{a_2}(x+n-2)_{n-1}+$ $+\frac{a_2}{a_0}(x+n-3)_{n-2}-\cdots+(-1)^n\frac{a_1}{a_0}$, а $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$ корни многочлена $(x+n)_n-\frac{b_1}{b_0}(x+n-1)_{n-1}+\frac{b_2}{b_0}(x+n-2)_{n-2}-\cdots+(-1)^n\frac{b_n}{b_0}$.

Сопоставляя между собою формулы (86) и (87), найдемъ:

$$\left(\frac{a_0}{b_0}\right)^x \frac{\overline{\Gamma}(x-a_1)\,\overline{\Gamma}(x-a_2)\cdots\overline{\Gamma}(x-a_n)}{\overline{\Gamma}(x-\alpha_1)\,\Gamma(x-\alpha_2)\cdots\Gamma(x-\alpha_n)}=C_1\int_L v^{x-1} y\, dv, \tag{88}$$

гдѣ C_1 есть нѣкоторая періодическая функція съ періодомъ единица,

Эта послѣдняя формула имѣетъ болѣе широкія основанія, чѣмъ подобнаго же рода формула Hj. Mellin'а, данная имъ въ цитированной уже нами статьѣ.

Формула (88) имѣетъ мѣсто при b_0 и a_0 отличныхъ отъ нуля. Но вполнѣ очевидно, какъ надо видоизмѣнить ее, если оказывается тотъ или другой изъ этихъ случаевъ.

§ 4.

Въ предыдущемъ параграфѣ мы обнаружили, что, если y есть интегралъ уравненія (69), то функціи (75) и (79) удовлетворяютъ линейнымъ уравненіямъ (76) и (80), — первая дифференціальному, а вторая разностному. Теперь же мы постараемся доказать, что интегралъ всякаго дифференціальнаго линейнаго однороднаго уравненія съ раціональными коэффиціентами можетъ быть представленъ въ формѣ (75), а интегралъ всякаго линейнаго разностнаго однороднаго уравненія также съ раціональными коэффиціентами въ формѣ (79), гдѣ y есть интегралъ нѣкотораго дифференціальнаго линейнаго уравненія однородной формы, коэффиціенты котораго раціонально зависятъ отъ u.

Имѣемъ:

$$P_{m_0}(x)\frac{d^n y}{dx^n}+P_{m_1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+P_{m_n}(x)\,y=0, \tag{90}$$

гдѣ $P_{m_k}(x)$ есть алгебраическій многочленъ степени m_k.

Полагаемъ:

$$y=\int_L (u-x)^{\lambda-1}\zeta\,du. \tag{91}$$

Внеся это выраженіе въ уравненіе (90), будемъ имѣть:

$$\sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p P_{m_p}(x)\,(\lambda-1)_{n-p}\int_L (u-x)^{\lambda-n+p-1}\zeta\,du=0, \tag{92}$$

или:

$$\sum_{p=0}^{p=n}\sum_{q=0}^{q=m_p}\frac{(\lambda-1)_{n-p}(-1)^{p+q}}{1\cdot 2\cdots q}\int_L P_{m_p}^{(q)}(u)\,(u-x)^{\lambda-n+p+q-1}\zeta\,du=0. \tag{92'}$$

При помощи интеграціи по частямъ находимъ:

$$\sum_{p=0}^{p=n}\sum_{q=0}^{q=m_p}\frac{(\lambda-1)_{n-p}}{q!\,(\lambda-n+m_k+k-1)_{m_k-p-q+k}}\int_L \frac{d^{m_k+k-p-q}\left(P_{m_p}^{(q)}(u)\,\zeta\right)}{du^{m_k+k-p-q}}$$
$$[\;(u-x)^{\lambda+m_k+k-n-1}\,du=0. \tag{93}$$

Функція (91) служитъ интеграломъ уравненія (90), если ζ выполняетъ слѣдующее условіе:

$$\sum_{p=0}^{p=n}\sum_{q=0}^{q=m_p} \frac{(\lambda-1)_{n-p}}{q!\,(\lambda-n+m_k+k-1)_{m_k-p-q+k}} \frac{d^{m_k+k-p-q}\left(\zeta P_{m_p}^{(q)}(u)\right)}{du^{m_k+k-p-q}}=0. \tag{94}$$

Пусть далѣе дано уравненіе:

$$f_{m_0}(x)\,u_x+f_{m_1}(x)\,u_{x+1}+\cdots+f_{m_n}(x)\,u_{x+n}=0; \tag{95}$$

при чемъ принято:

$$\begin{aligned}
f_{m_0}(x)&=A_0\,x^{m_0}+A_1\,x^{m_0-1}+\cdots+A_{m_0};\\
f_{m_1}(x)&=B_0\,x_{m_1}+B_1\,x^{m_1-1}+\cdots+B_{m_1};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (96)\\
f_{m_n}(x)&=M_0\,x^{m_n}+M_1\,x^{m_n-1}+\cdots+M_n,
\end{aligned}$$

гдѣ $A, B, \cdots, M$ суть нѣкоторыя постоянныя:

Полагая въ выраженіи (79) $z=x$, $\alpha=0$ и $u=v$, будемъ имѣть:

$$u_x=\int_L v^{x-1}y\,dv. \tag{97}$$

Внеся это выраженіе для u_x въ уравненіе (95), получимъ послѣ интеграціи по частямъ:

$$\begin{aligned}
&\int_L v^{x-1}\{(-1)^{m_0}[A_0\nabla^{m_0}y-A_1\nabla^{m_0-1}y+\cdots+(-1)^{m_0}A_{m_0}y]\}+\\
&+(-1)^{m_1}[B_0\nabla^{m_1}(vy)-B_2\nabla^{m_1-1}(vy)+\cdots+(-1)^{m_1}B_{m_1}vy]+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad+(-1)^{m_n}[M_0\nabla^{m_n}(v^ny)-M_1\nabla^{m_n-1}(v^ny)+\cdots\\
&\qquad\qquad\cdots+(-1)^{m_n}M_{m_n}v^ny]\}\,dv=0. \qquad (98)
\end{aligned}$$

При этомъ, принято:

$$\nabla[v^py]=v\,\frac{d}{dv}[v^py]; \tag{98'}$$

$$(98'') \qquad x^k \int_L v^{x+p-1} y\, dv = (-1)^k \int_L v^{x-1} \nabla^k [v^p y]\, dv.$$

Остается теперь выбрать y такимъ образомъ, чтобы выполнялось условіе:

$$(99) \quad \begin{aligned} &(-1)^{m_0} [A_0 \nabla^{m_0} y - A_1 \nabla^{m_0-1} y + \cdots + (-1)^{m_0} A_{m_0} y] + \\ &+ (-1)^{m_1} [B_0 \nabla^{m_1} (vy) - B_1 \nabla^{m_1-1} (vy) + \cdots + (-1)^{m_1} B_{m_1} vy] + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (-1)^{m_n} [M_0 \nabla^{m_n} (v^n y) - M_1 \nabla^{m_n-1} (v^n y) + \cdots + (-1)^{m_n} M_{m_n} v^n y] = 0. \end{aligned}$$

Полученное соотношеніе есть линейное дифференціальное уравненіе однородной формы съ цѣлыми алгебраическими коэффиціентами, и порядокъ его опредѣляетъ наибольшее изъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ: $m_0, m_1, \cdots, m_n$.

Пусть будетъ въ частности:

$$(100) \quad \begin{aligned} &a_0 \nabla^2 y - a_1 \nabla y + a_2 y + \\ &+ b_0 \nabla^2 (vy) - b_1 \nabla (vy) + b_2 vy + \\ &+ c_0 \nabla^2 (v^2 y) - c_1 \nabla (v^2 y) + c_2 v^2 y + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ l_0 \nabla^2 (v^n y) - l_1 \nabla (v^n y) + l_2 v^n y = 0, \end{aligned}$$

или:

$$(100') \quad \begin{aligned} &v^2 (a_0 + b_0 v + c_0 v^2 + \cdots + l_0 v^n) \frac{d^2 y}{dv^2} + v\, [(a_0 - a_1) + \\ &+ (3\, b_0 - b_1)\, v + (5\, c_0 - c_1)\, v^2 + \cdots + (\,(2n+1)\, l_0 - l_1)\, v^n] \frac{dy}{dv} + \\ &+ [a_2 + (b_0 - b_1 + b_2)\, v + (4 c_0 - 2\, c_1 + c_2)\, v^2 + \cdots \\ &\cdots + (n^2\, l_0 - n l_1 + l_2)\, v^n]\, y = 0. \end{aligned}$$

Разсмотримъ подробнѣе случай $n = 2$. Уравненіе $(100')$ приметъ видъ:

$$(101) \quad \begin{aligned} &v^2 (a_0 + b_0\, v + c_0\, v^2) \frac{d^2 y}{dv^2} + \\ &+ v\, [a_0 - a_1) + (3\, b_0 - b_1)\, v + (5\, c_0 - c_1)\, v^2] \frac{dy}{dv} + \\ &+ [a_2 + (b_0 - b_1 + b_2)\, v + (4\, c_0 - 2\, c_1 + c_2)\, v^2]\, y = 0. \end{aligned}$$

Преобразуемъ это уравненіе къ новому независимому перемѣнному ξ на основаніи подстановки:

$$v = \frac{1}{\xi}. \tag{102}$$

Тогда получимъ:

$$\xi(a_0\xi^2+b_0\xi+c_0)\frac{d^2y}{d\xi^2}+[(a_0+a_1)\xi^2+(b_1-b_0)\xi+(c_1-3c_0)]\frac{dy}{d\xi}+$$

$$+\frac{a_2\xi^2+(b_0-b_1+b_2)\xi+(4c_0-2c_1+c_2)}{\xi}y=0. \tag{103}$$

Пусть далѣе будетъ:

$$y = \xi^\lambda w. \tag{104}$$

Въ силу (**104**), соотношеніе (**103**) приметъ видъ:

$$\xi^2(a_0\xi^2+b_0\xi+c_0)\frac{d^2w}{d\xi^2}+\xi[(2\lambda a_0+a_0+a_1)\xi^2+(2\lambda b_0+b_1-b_0)\xi+$$

$$+2\lambda c_0+c_1-3c_0]\frac{dw}{d\xi}+\{[\lambda(\lambda a_0+a_1)+a_2]\xi^2+$$

$$+[\lambda(b_0\lambda+b_1-2b_0)+(b_0-b_1+b_2)]\xi+$$

$$+\lambda^2c_0+\lambda(c_1-4c_0)+4c_0-2c_1+c_2\}w=0. \tag{105}$$

Выберемъ λ такимъ образомъ, чтобы имѣло мѣсто:

$$c_0\lambda^2+(c_1-4c_0)\lambda+4c_0-2c_1+c_2=0. \tag{106}$$

Тогда по сокращеніи на ξ уравненіе (105) напишется въ формѣ:

$$\xi(a_0\xi^2+b_0\xi+c_0)\frac{d^2w}{d\xi^2}+$$

$$+[(2\lambda a_0+a_0+a_1)\xi^2+(2\lambda b_0+b_1-b_0)\xi+2\lambda c_0+c_1-3c_0]\frac{dw}{d\xi}+ \tag{107}$$

$$+\{[\lambda(\lambda a_0+a_1)+a_2]\xi+\lambda(\lambda b_0-2b_0+b_1)+b_0-b_1+b_2\}w=0.$$

Допустимъ теперь, что

$$a_0=b_0=a_1=0. \tag{108}$$

Уравненіе (**107**) обратится въ слѣдующее:

$$c_0\xi\frac{d^2w}{d\xi^2}+(b_1\xi+2\lambda c_0+c_1-3c_0)\frac{dw}{d\xi}+$$

(109) $$+(a_2\xi+\lambda b_1-b_1+b_2)w=0.$$

Что же касается до уравненія (95), то въ разсматриваемомъ случаѣ оно приметъ форму:

(110) $$(c_0x^2+c_1x+c_2)u_{x+2}+(b_1x+b_2)u_{x+1}+a_2u_x=0.$$

Интегралы же этого послѣдняго уравненія выражаются чрезъ интегралы уравненія (109) по формулѣ:

(111) $$u_x=-\int\limits_{L'}\xi^{\lambda-x-1}w\,d\xi.$$

Остается найти функцію w. Пусть будетъ:

(112) $$w=\int\limits_{L_1}e^{\xi z}f(z)\,dz.$$

Внеся выраженіе (112) въ (109), получимъ послѣ интеграціи по частямъ:

$$\int\limits_{L_1}e^{z\xi}\Big[(c_0z^2+b_1z+a_2)\frac{df}{dz}+$$

(113) $$+(5c_0-2\lambda c_0-c_1)z+2b_1-\lambda b_1-b_2)f\Big]dz=0.$$

Для опредѣленія $f(z)$ имѣемъ уравненіе:

(114) $$(c_0z^2+b_1z+a_2)\frac{df}{dz}=[(2\lambda c_0-5c_0+c_1)z+(\lambda b_1-2b_1+b_2)]f.$$

Допустимъ, что

(115) $$c_0z^2+b_1z+a_2=c_0(z-\alpha_1)(z-\alpha_2).$$

Уравненіе (114) можно написать въ формѣ:

(116) $$\frac{dlgf}{dz}=\frac{A_1}{z-\alpha_1}+\frac{A_2}{z-\alpha_2},$$

гдѣ A_1 и A_2 извѣстныя постоянныя. Общимъ интеграломъ этого уравненія будетъ:

(117) $$f=\text{Const.}\,(z-\alpha_1)^{A_1}(z-\alpha_2)^{A_2}.$$

А потому

$$w = \text{Const.} \int_{L_1} e^{\xi z} (z-\alpha_1)^{A_1} (z-\alpha_2)^{A_2} dz. \tag{118}$$

Искомые же интегралы уравненія (**110**) напишутся въ формѣ:

$$u_x = C \int_{L'} \xi^{\lambda-x-1} d\xi \int_{L_1} e^{\xi z} (z-\alpha_1)^{A_1} (z-\alpha_2)^{A_2} dz, \tag{119}$$

гдѣ C есть произвольное постоянное или произвольная періодическая функція съ періодомъ единица.

Но допустимъ, что

$$c_0 z^2 + b_1 z + a_2 = c_0 (z-\alpha)^2. \tag{120}$$

Уравненіе (**114**) можемъ написать такъ:

$$\frac{dlg f}{dz} = \frac{B_2}{(z-\alpha)^2} + \frac{B_1}{z-\alpha}. \tag{121}$$

Интеграломъ этого уравненія будетъ:

$$f = \text{Const.}\ (z-\alpha)^{B_1} e^{-\frac{B_2}{z-\alpha}}. \tag{122}$$

Искомые интегралы уравненія (**110**) представятся въ формѣ:

$$u_x = C_1 \int_{L'} \xi^{\lambda-x-1} d\xi \int_{L_1} e^{\xi z - \frac{B_2}{z-\alpha}} (z-\alpha)^{B_1} dz, \tag{123}$$

гдѣ C_1 произвольное постоянное или произвольная періодическая функція съ періодомъ единица.

Замѣтимъ, что уравненіе (**110**) по внѣшней формѣ имѣетъ аналогію съ уравненіемъ:

$$(c_0 x^2 + c_1 x + c_2) \frac{d^2 y}{dx^2} + (b_1 x + b_2) \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0, \tag{124}$$

изслѣдованіе котораго, какъ извѣстно, породило обширную литературу.

Разсмотримъ еще уравненіе:

$$A_0 (z+n-1)_n\ U_z - (z+n-1)_{n-1} [A_1 + B_0 (z+n)]\ U_{z+1} +$$
$$+ (z+n-1)_{n-2} [A_2 + B_1 (z+n)]\ U_{z+2} -$$

$$
\begin{aligned}
&- (z+n-1)_{n-3}\,[A_3+B_2\,(z+n)]\;U_{z+3} + \cdots \\
(125)\qquad &\cdots + (-1)^n\,[A_n+B_{n-1}\,(z+n)]\;U_{z+n} + \\
&+ (-1)^{n+1}\,B_n\;U_{z+n+1} = 0.
\end{aligned}
$$

Поищемъ его интегралъ въ формѣ:

$$
(126)\qquad U_z = \int\limits_L x^{z-1}\,y dx.
$$

Внеся это выраженіе въ уравненіе (125) и произведя въ полученномъ результатѣ интеграцію по частямъ, найдемъ:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_L x^{z+n-1}\,\left[(A_0-B_0x)\frac{d^ny}{dx^n} + (A_1-B_1x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots\right. \\
(127)\qquad &\left.\cdots + (A_n-B_nx)\,y\right] dx = 0.
\end{aligned}
$$

Выберемъ y такъ, чтобы имѣло мѣсто:

$$
(128)\quad (A_0-B_0x)\frac{d^ny}{dx^n} + (A_1-B_1x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + (A_n-B_nx)\,y = 0.
$$

Уравненіе (128) интегрируемъ по пріему Лапласа.

Полагаемъ для этой цѣли:

$$
(129)\qquad y = \int\limits_L e^{xu}\,v\,du,
$$

гдѣ v нѣкоторая функція u.

Если внесемъ это выраженіе для y въ уравненіе (128) и произведемъ тамъ интеграцію по частямъ, то будемъ имѣть:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{L'} e^{xu}\left\{[B_0u^n+B_1u^{n-1}+\cdots+B_n]\frac{dv}{du} + \right. \\
(130)\qquad &\left. + [A_0u^n+(A_1+nB_0)\,u^{n-1}+\cdots+A_n+B_{n-1}]\,v\right\} du = 0.
\end{aligned}
$$

Выберемъ v такимъ образомъ, чтобы имѣло мѣсто:

$$
\begin{aligned}
&[B_0u^n+B_1u^{n-1}+\cdots+B_n]\frac{dv}{du} + \\
(131)\qquad &+ [A_0u^n+(A_1+nB_0)\,u^{n-1}+\cdots+A_n+B_{n-1}]\,v = 0.
\end{aligned}
$$

Различаемъ два случая: 1) корни полинома $B_0 u^n + B_1 u^{n-1} + \cdots + B_n$ различны и 2) этотъ многочленъ имѣетъ равные корни.

Въ первомъ случаѣ полагаемъ:

$$B_0 u^n + B_1 u^{n-1} + \cdots + B_n = B_0 (u-\alpha_1)(u-\alpha_2) \cdots (u-\alpha_n). \qquad (132)$$

Уравненіе (131) тогда можетъ быть представлено въ формѣ:

$$\frac{d \lg v}{du} = -\frac{A_0}{B_0} + \frac{A'_1}{u-\alpha_1} + \frac{A'_2}{u-\alpha_2} + \cdots + \frac{A'_n}{u-\alpha_n}, \qquad (133)$$

гдѣ $A'_1, A'_2, \cdots, A'_n$ извѣстныя постоянныя.

Интеграломъ уравненія (133) будетъ:

$$v = \text{Const.}\ e^{-\frac{A_0}{B_0}u} (u-\alpha_1)^{A'_1} (u-\alpha_2)^{A'_2} \cdots (u-\alpha_n)^{A'_n}. \qquad (134)$$

Искомые же интегралы уравненія (125) представятся въ формѣ:

$$U_z = C \int_L x^{z-1}\, dx \int_{L'} e^{\left(x - \frac{A_0}{B_0}\right) u} (u-\alpha_1)^{A'_1} (u-\alpha_2)^{A'_2} \cdots (u-\alpha_n)^{A'_n}\, du, \qquad (135)$$

гдѣ C произвольное постоянное или произвольная періодическая функція съ періодомъ единица.

Во второмъ случаѣ полагаемъ:

$$B_0 u^n + B_1 u^{n-1} + \cdots + B_n = B_0 (u-\alpha_1)^{l_1} (u-\alpha_2)^{l_2} \cdots (u-\alpha_k)^{l_k}, \qquad (136)$$

гдѣ

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_k = n. \qquad (137)$$

Уравненіе (131) можно написать тогда такъ:

$$\begin{aligned} \frac{d \lg v}{du} = -\frac{A_0}{B_0} &+ \frac{\alpha'_{l_1}}{(u-\alpha_1)^{l_1}} + \frac{\alpha'_{l_1-1}}{(u-\alpha_1)^{l_1-1}} + \cdots + \frac{\alpha'_1}{u-\alpha_1} + \\ &+ \frac{\beta_{l_2}}{(u-\alpha_2)^{l_2}} + \frac{\beta_{l_2-1}}{(u-\alpha_2)^{l_2-1}} + \cdots + \frac{\beta_1}{u-\alpha_2} + \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (138) \\ &+ \frac{\lambda_{l_k}}{(u-\alpha_k)^{l_k}} + \frac{\lambda_{l_k-1}}{(u-\alpha_k)^{l_k-1}} + \cdots + \frac{\lambda_1}{u-\alpha_k}. \end{aligned}$$

Интеграломъ его будетъ:

$$v = \text{Const.}\; e^{W_2 - \frac{A_0}{B_0} u} (u-\alpha_1)^{\alpha'_1} (u-\alpha_2)^{\beta_1} \cdots (u-\alpha_k)^{\lambda_1}, \tag{139}$$

гдѣ принято:

$$W_2 = -\frac{\alpha'_{l_1}}{(l_1-1)(u-\alpha_1)^{l_1-1}} - \frac{\alpha'_{l_1-1}}{(l_1-2)(u-\alpha_1)^{l_1-2}} - \ldots - \frac{\alpha'_2}{u-\alpha_1} -$$

$$-\frac{\beta_{l_2}}{(l_2-1)(u-\alpha_2)^{l_2-1}} - \frac{\beta_{l_2-1}}{(l_2-2)(u-\alpha_2)^{l_2-2}} - \ldots - \frac{\beta_2}{u-\alpha_2} -$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{140}$$

$$-\frac{\lambda_{l_k}}{(l_k-1)(u-\alpha_k)^{l_k-1}} - \frac{\lambda_{l_k-1}}{(l_k-2)(u-\alpha_k)^{l_k-2}} - \ldots - \frac{\lambda_2}{u-\alpha_k}.$$

Искомые интегралы уравненія (125) напишутся въ формѣ:

$$U_z = C_1 \int_L x^{z-1}\, dx \int_{L'} e^{\left(x - \frac{A_0}{B_0}\right) u + W_2} (u-\alpha_1)^{\alpha'_1} (u-\alpha_2)^{\beta_1} \cdots \tag{141}$$

$$\cdots (u-\alpha_k)^{\lambda_1}\, du,$$

гдѣ C_1 произвольное постоянное или произвольная періодическая функція съ періодомъ единица.

§ 5.

Примѣнимъ теперь методъ опредѣленныхъ интеграловъ къ интегрированію смѣшанныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами.

Пусть будетъ дано уравненіе:

$$\sum_{q=0}^{q=m} \sum_{p=0}^{p=n} A_{pq} \frac{d^{m-q} u_{x+n-p}}{dx^{m-q}} = 0, \tag{142}$$

гдѣ положено:

$$A_{pq} = \sum_{s=0}^{s=\alpha_{pq}} a_{spq}\, x^{\alpha_{pq}-s}; \tag{143}$$

при чемъ α_{pq} нѣкоторое цѣлое положительное число, а a_{spq} нѣкоторое постоянное.

Въ силу выраженія (143), уравненіе (142) приметъ видъ:

$$\sum_{p=0}^{q=m} \sum_{p=0}^{p=n} \sum_{s=0}^{s=\alpha_{pq}} a_{spq}\, x^{\alpha_{pq}-s} \frac{d^{m-q}\, u_{x+n-p}}{dx^{m-q}} = 0. \tag{144}$$

Постараемся удовлетворить этому уравненію при помощи функціи:

$$u_x = \int\limits_L v^{x-1} f(v)\, dv, \tag{145}$$

гдѣ L есть дозволенный путь.

Внеся это послѣднее выраженіе въ уравненіе (144), получимъ:

$$\sum_{q=0}^{q=m} \sum_{p=0}^{p=n} \sum_{s=0}^{s=\alpha_{pq}} a_{spq}\, x^{\alpha_{pq}-s} \int\limits_L v^{x+n-p-1} (lgv)^{m-q} f(v)\, dv = 0. \tag{146}$$

При помощи интеграціи по частямъ убѣждаемся въ справедливости соотношенія:

$$\int\limits_L v^{x-1} \left[\sum_{q=0}^{q=m} \sum_{p=0}^{p=n} \sum_{s=0}^{s=\alpha_{pq}} (-1)^{\alpha_{pq}-s} a_{spq} \nabla^{\alpha_{pq}-s} \left[v^{n-p} (lgv)^{m-q} f(v) \right] dv = 0. \right. \tag{147}$$

Выберемъ функцію $f(v)$ такимъ образомъ, чтобы выполнялось условіе:

$$\sum_{q=0}^{q=m} \sum_{p=0}^{p=n} \sum_{s=0}^{s=\alpha_{pq}} (-1)^{\alpha_{pq}-s} a_{spq}\, \nabla^{\alpha_{pq}-s} \left[v^{n-p} (lgv)^{m-q} f(v) \right] = 0. \tag{148}$$

При такомъ выборѣ $f(v)$, выраженіе (145) есть интегралъ уравненія (142).

Соотношеніе (148) представляетъ дифференціальное линейное уравненіе однородной формы и порядокъ его опредѣляетъ наибольшій изъ показателей α_{pq}.

Мы особенно обратимъ тутъ вниманіе на случай, когда всѣ полиномы A_{pq} суть линейныя цѣлыя функціи перемѣннаго x.

Значитъ, уравненіе (144) вида:

$$\sum_{q=0}^{q=m} \sum_{p=0}^{p=n} \sum_{s=0}^{s=1} a_{spq}\, x^{1-s} \frac{d^{m-q}\, u_{x+n-p}}{dx^{m-q}} = 0. \tag{149}$$

Уравненіе (148) обращается въ слѣдующее:

(150) $$\sum_{q=0}^{q=m} \sum_{p=0}^{p=n} \sum_{s=0}^{s=1} (-1)^{1-s} a_{spq} \nabla^{1-s} [v^{n-p} (lgv)^{m-q} f(v)] = 0,$$

или:

$$v \sum_{q=0}^{q=m} B_{qn} (lgv)^{m-q} \frac{dlg f(v)}{dv} =$$

(151) $$= C_{0n} (lgv)^m + \sum_{q=0}^{q=m-1} (C_{q+1,n} - D_{qn}) (lgv)^{m-q-1},$$

гдѣ принято:

$$B_{qn} = a_{00q} v^n + a_{01q} v^{n-1} + a_{02q} v^{n-2} + \cdots + a_{0nq};$$

(152) $$\begin{aligned} C_{qn} = v^n [a_{10q} - n a_{00q}] &+ v^{n-1} [a_{11q} - (n-1) a_{01q}] + \cdots \\ \cdots &+ v^{n-2} [a_{12q} - (n-2) a_{02q}] + \cdots \\ \cdots &+ v [a_{1n-1q} - a_{0n-1q}] + a_{1nq}; \end{aligned}$$

$$D_{qn} = (m-q)(a_{00q} v^n + a_{01q} v^{n-1} + \cdots + a_{0nq}).$$

Будемъ различать два случая: 1) корни полинома $\sum_{q=0}^{q=m} B_{qn} (lgv)^{m-q}$ относительно lgv различны и 2) этотъ многочленъ имѣетъ одинаковые корни.

Остановимся предварительно на разсмотрѣніи перваго случая.

Пусть будетъ:

(153) $$\sum_{q=0}^{q=m} B_{qn} (lgv)^{m-q} = B_{0n} (lgv - \alpha_1)(lgv - \alpha_2) \cdots (lgv - \alpha_m).$$

Пользуясь обыкновеннымъ пріемомъ, уравненіе (151) можемъ представить въ слѣдующей формѣ:

$$\frac{dlg f(v)}{dv} =$$

(154) $$= \frac{C_{0n}}{vB_{0n}} + \frac{\Lambda_1}{lgv - \alpha_1} + \frac{\Lambda_2}{lgv - \alpha_2} + \cdots + \frac{\Lambda_m}{lgv - \alpha_m},$$

гдѣ $\Lambda_1, \Lambda_2, \cdots, \Lambda_m$ суть извѣстныя функціи v.

Интегрируя это уравненіе, находимъ:

(155) $$f(v) = \text{Const.}\; e^{\int \frac{C_{0n}}{vB_{0n}} dv + \int \frac{\Lambda_1 dv}{lgv-\alpha_1} + \cdots + \int \frac{\Lambda_m dv}{lgv - \alpha_m}}.$$

Пусть далѣе:

$$B_{on}=a_{000}\,(v-\delta_1)\,(v-\delta_2)\cdots(v-\delta_n). \qquad (156)$$

Тогда можемъ написать:

$$\frac{C_{0n}}{v\,B_{0n}}=\frac{\rho}{v}+\frac{\mu_1-1}{v-\delta_1}+\frac{\mu_2-1}{v-\delta_2}+\cdots+\frac{\mu_n-1}{v-\delta_n}, \qquad (156')$$

гдѣ ρ, μ_1, μ_2, $\cdots$, μ_n суть извѣстныя постоянныя.

Внеся выраженіе (156′) для $\dfrac{C_{0n}}{vB_{0n}}$ въ соотношеніе (155), послѣ интеграціи получимъ:

$$f(v)=Const.\; v^{\rho}(v-\delta_1)^{\mu_1-1}\cdots(v-\delta_n)^{\mu_n-1}\, e^{\int\frac{\Lambda_1 dv}{lgv-\alpha_1}+\cdots+\int\frac{\Lambda_m dv}{lgv-\alpha_m}}. \qquad (157)$$

Искомые интегралы представятся тогда въ слѣдующей формѣ:

$$u_x=const.\int\limits_L v^{x+\rho-1}(v-\delta_1)^{\mu_1-1}\cdots(v-\delta_n)^{\mu_n-1}\, e^{\int\frac{\Lambda_1 dv}{lgv-\alpha_1}+\cdots+\int\frac{\Lambda_m dv}{lgv-\alpha_m}}\, dv. \qquad (158)$$

Допустимъ теперь, что

$$B_{0n}=a_{000}\,(v-\delta_1)^{l_1}\,(v-\delta_2)^{l_2}\cdots(v-\delta_k)^{l_k}, \qquad (159)$$

гдѣ

$$l_1+l_2+\cdots+l_k=n.$$

Тогда можемъ написать:

$$\frac{C_{0n}}{vB_{0n}}=\frac{\sigma}{v}+\frac{\alpha'_{l_1}}{(v-\delta_1)^{l_1}}+\frac{\alpha'_{l_1-1}}{(v-\delta_1)^{l_1-1}}+\cdots+\frac{\alpha'_1}{v-\delta_1}+$$

$$+\frac{\beta'_{l_2}}{(v-\delta_k)^{l_2}}+\frac{\beta'_{l_2-1}}{(v-\delta_2)^{l_2-1}}+\cdots+\frac{\beta'_1}{v-\delta_2}+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (160)$$

$$+\frac{\lambda'_k}{(v-\delta_k)^{l_k}}+\frac{\lambda'_{k-1}}{(v-\delta_k)^{l_k-1}}+\cdots+\frac{\lambda'_1}{v-\delta_k},$$

гдѣ σ, α', β', $\cdots$, λ' суть извѣстныя постоянныя.

Если это выраженіе внесемъ въ соотношеніе (155), то по выполненіи интеграціи найдемъ:

(161)
$$f(v) = \text{Const.}\ e^{W_1 + \int \frac{\Lambda_1 dv}{lgv - \alpha_1} + \int \frac{\Lambda_2 dv}{lgv - \alpha_2} + \cdots + \int \frac{\Lambda_m dv}{lgv - \alpha_m}} v^{\sigma} (v-\delta_1)^{\alpha'_1} (v-\delta_2)^{\beta'_1} \cdots (v-\delta_k)^{\lambda'_1},$$

гдѣ положено:

$$W_1 =$$

$$= - \frac{\alpha'_{l_1}}{(l_1-1)(v-\delta_1)^{l_1-1}} - \frac{\alpha'_{l_1-1}}{(l_1-2)(v-\delta_1)^{l_1-2}} - \cdots - \frac{\alpha'_2}{v-\delta_1}$$

. . . .

(162) . . . .

$$- \frac{\lambda'_k}{(l_k-1)(v-\delta_k)^{l_k-1}} - \frac{\lambda'_{k-1}}{(l_k-2)(v-\delta_k)^{l_k-2}} - \cdots - \frac{\lambda'_2}{v-\delta_k}.$$

Искомые интегралы уравненія (149) напишутся тогда въ формѣ:

(163)
$$u_x = \int_L e^{W_1 + \int \frac{\Lambda_1 dv}{lgv - \alpha_1} + \cdots + \int \frac{\Lambda_m dv}{lgv - \alpha_m}} v^{x+\sigma-1} (v-\delta_1)^{\alpha'_1} (v-\delta_2)^{\beta'_1} \cdots (v-\delta_k)^{\lambda'_1} dv.$$

Мы до сихъ поръ предполагали корни полинома $\sum\limits_{q=0}^{q=m} B_{qn}(lgv)^{m-q}$ относительно lgv различными. Но допустимъ, что имѣетъ мѣсто:

(164) $$\sum_{q=0}^{q=m} B_{qn}(lgv)^{m-q} = B_{0n}(lgv-\alpha_1)^{m_1}(lgv-\alpha_2)^{m_2} \cdots (lgv-\alpha_\nu)^{m_\nu},$$

гдѣ

(165) $$m_1 + m_2 + \cdots + m_\nu = m.$$

Уравненіе (151) тогда можно написать въ формѣ:

$$\frac{dlgf(v)}{dv} = \frac{C_{0n}}{vB_{0n}} + \frac{A_{m_1}}{(lgv-\alpha_1)^{m_1}} + \frac{A_{m_1-1}}{(lgv-\alpha_1)^{m_1-1}} + \cdots + \frac{A_1}{lgv-\alpha_1} +$$

$$+ \frac{B_{m_2}}{(lgv-\alpha_2)^{m_2}} + \frac{B_{m_2-1}}{(lgv-\alpha_2)^{m_2-1}} + + \cdots + \frac{B_1}{lgv-\alpha_2} +$$

. . . .

(166) . . . .

$$\frac{M_{m_\nu}}{(lgv-\alpha_\nu)^{m_\nu}}+\frac{M_{m_\nu-1}}{(lgv-\alpha_\nu)^{m_\nu-1}}+\cdots+\frac{M_1}{lgv-\alpha_\nu},$$

гдѣ A, B, $\cdots$, M суть извѣстныя функціи v.

Интегрируя это уравненіе, будемъ имѣть:

$$f=\text{const.}\, e^{\int\left(W_2+\frac{C_{0n}}{vB_{0n}}\right)dv+\int\frac{A_1dv}{lgv-\alpha_1}+\cdots+\int\frac{M_1dv}{lgv-\alpha_\nu}},\tag{167}$$

гдѣ W_2 имѣетъ составъ:

$$W_2=\frac{A_{m_1}}{(lgv-\alpha_1)^{m_1}}+\frac{A_{m_1-1}}{(lgv-\alpha_1)^{m_1-1}}+\cdots+\frac{A_2}{(lgv-\alpha_1)^2}+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\tag{168}$$

$$\frac{M_{m_\nu}}{(lgv-\alpha_\nu)^{m_\nu}}+\frac{M_{m_\nu-1}}{(lgv-\alpha_\nu)^{m_\nu-1}}+\cdots+\frac{M_2}{(lgv-\alpha_\nu)^2}.$$

Принимая во вниманіе составъ для $\frac{C_{0n}}{vB_{0n}}$ (156′), будемъ имѣть:

$$f(v)=\text{Const.}\, v^{\rho}(v-\delta_1)^{\mu_1-1}\cdots(v-\delta_n)^{\mu_n-1}\, e^{\int W_2dv+\int\frac{A_1dv}{lgv-\alpha_1}+\cdots+\int\frac{M_1dv}{lgv-\alpha_\nu}}.\tag{169}$$

Искомые интегралы уравненія (144) представятся въ формѣ:

$$u_x=\text{Const}\int_L v^{x+\rho-1}(v-\delta_1)^{\mu_1-1}\cdots(v-\delta_n)^{\mu_n-1}\, e^{\int W_2dv+\int\frac{A_1dv}{lgv-\alpha_1}+\cdots+\int\frac{M_1dv}{lgv-\alpha_\nu}}dv.\tag{170}$$

Если же за значеніе для $\frac{C_{0n}}{v\,B_{0n}}$ примемъ его выраженіе, данное формулой (160), то будемъ имѣть:

$$f(v)=\text{const.}\, v^{\sigma}(v-\delta_1)^{\alpha'_1}\cdots(v-\delta_k)^{\lambda'_1}e^{W_1+\int W_2dv+\cdots+\int\frac{M_1dv}{lgv-\alpha_\nu}}.\tag{171}$$

Интегралы же уравненія (149) напишутся тогда слѣдующимъ образомъ:

$$u_x=\text{const}\int_L v^{\sigma+x-1}(v-\delta_1)^{\alpha'_1}\cdots(v-\delta_k)^{\lambda'_1}e^{W_1+\int W_2dv+\cdots+\int\frac{M_1dv}{lgv-\alpha_\nu}}dv.\tag{172}$$

При помощи интеграціи по частямъ легко обнаружить справедливость соотношенія:

$$\int W_2 dv = \frac{a_{m_1-1}}{(lgv-\alpha_1)^{m_1-1}} + \frac{a_{m_1-2}}{(lgv-\alpha_1)^{m_1-2}} + \cdots + \frac{a_1}{lgv-\alpha_1} + \int \frac{a_0 dv}{lgv-\alpha_1} +$$

$$(173) + \frac{b_{m_2-1}}{(lgv-\alpha_2)^{m_2-1}} + \frac{b_{m_2-2}}{(lgv-\alpha_2)^{m_2-2}} + \cdots + \frac{b_1}{lgv-\alpha_2} + \int \frac{b_0 dv}{lgv-\alpha_2} +$$

. . . .

. . . .

$$\frac{l_{m_\nu-1}}{(lgv-\alpha_\nu)^{m_\nu-1}} + \frac{l_{m_\nu-2}}{(lgv-\alpha_\nu)^{m_\nu-2}} + \cdots + \frac{l_1}{lgv-\alpha_\nu} + \int \frac{l_0 dv}{lgv-\alpha_\nu},$$

гдѣ $a, b, \cdots, l$ суть нѣкоторыя функціи v, которыя опредѣляются обыкновеннымъ пріемомъ.

§ 6.

Въ настоящемъ параграфѣ постараемся доказать возможность примѣненія метода опредѣленныхъ интеграловъ къ интегрированію совокупныхъ системъ дифференціальныхъ, разностныхъ и смѣшанныхъ линейныхъ уравненій однородной формы съ раціональными коэффиціентами.

Остановимся предварительно на системѣ слѣдующихъ дифференціальныхъ линейныхъ уравненій:

$$(174)\qquad \begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{\nu=m} A_\nu(x)\frac{d^\nu y}{dx_\nu} + \sum_{\nu=0}^{\nu=m'} B_\nu(x)\frac{d^\nu \eta}{dx^\nu} = 0;\\ &\sum_{\nu=0}^{\nu=n} A'_\nu(x)\frac{d^\nu y}{dx^\nu} + \sum_{\nu=0}^{\nu=n'} B'_\nu(x)\frac{d^\nu \eta}{dx^\nu} = 0. \end{aligned}$$

При этомъ, принято:

$$(175)\qquad \begin{aligned} A_\nu(x) &= \sum_{k=0}^{k=q_\nu} b_{k\nu} x^{q_\nu-k};\\ B_\nu(x) &= \sum_{k=0}^{k=l_\nu} c_{k\nu} x^{l_\nu-k}; \end{aligned}$$

$$A'_\nu(x) = \sum_{k=0}^{k=q'_\nu} b'_{k\nu} x^{q'_\nu - k};$$

$$B'_\nu(x) = \sum_{k=0}^{k=l'_\nu} c'_{k\nu} x^{l'_\nu - k},$$

гдѣ q_ν, l_ν, q'_ν и l'_ν суть цѣлыя положительныя числа.

Обнаружимъ тутъ справедливость двухъ теоремъ.

Теорема I. Если функція y выражается въ формѣ:

$$y = \int\limits_L e^{ux} \varphi(u)\, du, \tag{176}$$

то функція η можетъ быть представлена такъ:

$$\eta = \frac{1}{k(x)} \int\limits_L e^{ux} \theta(u)\, du; \tag{177}$$

при чемъ, $k(x)$ нѣкоторый алгебраическій многочленъ, а дозволенный путь интеграціи L одинъ и тотъ же въ обоихъ интегралахъ.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ уравненій (174) безъ труда находимъ выраженіе для η чрезъ y и производныя этой послѣдней функціи въ формѣ:

$$\eta = \frac{1}{k(x)} \sum_{\nu=0}^{\nu=l} M_\nu(x) \frac{d^\nu y}{dx^\nu}, \tag{178}$$

гдѣ $k(x)$ и $M_\nu(x)$ суть извѣстныя цѣлыя алгебраическія функціи x, а l нѣкоторое цѣлое положительное число, значеніе котораго легко сообразить.

Пусть будетъ:

$$M_\nu(x) = \sum_{k=0}^{k=p_\nu} a_{k\nu} x^{p_\nu - k}. \tag{179}$$

Тогда соотношеніе (178) напишется слѣдующимъ образомъ:

$$\eta = \frac{1}{k(x)} \sum_{\nu=0}^{\nu=l} \sum_{k=0}^{k=p_\nu} a_{k\nu} x^{p_\nu - k} \frac{d^\nu y}{dx^\nu}. \tag{180}$$

Принимая во вниманіе выраженіе (176) для y, при помощи интеграціи по частямъ соотношеніе (180) представимъ такъ:

(181) $$\eta=\frac{1}{k(x)}\sum_{\nu=0}^{\nu=l}\sum_{k=0}^{k=p_\nu}(-1)^{p_\nu-k}\,a_{k\nu}\int\limits_L e^{ux}\,\frac{d^{p_\nu-k}[u^\nu\varphi(u)]}{du^{p_\nu-k}}\,du.$$

При условіи, что

(182) $$\theta(u)=\sum_{\nu=0}^{\nu=l}\sum_{k=0}^{k=p_\nu}(-1)^{p_\nu-k}\,a_{k\nu}\,\frac{d^{p_\nu-k}[u^\nu\varphi(u)]}{du^{p_\nu-k}},$$

формула (181) совпадаетъ съ соотношеніемъ (177).

Теорема II. Пусть функція y уравненій (174) выражается въ формѣ:

(183) $$y=\int\limits_{L'}(u-x)^{\lambda-1}\,\varphi(u)\,du.$$

Легко тогда обнаружить, что функція η тѣхъ же уравненій можетъ быть представлена слѣдующимъ образомъ:

(184) $$\eta=\frac{1}{k(x)}\int\limits_{L'}(u-x)^{\lambda+\delta-1}\,\chi(u)\,du,$$

гдѣ $k(x)$ полиномъ предыдущей теоремы, а дозволенный путь L' въ обоихъ интегралахъ одинъ и тотъ же.

Для доказательства теоремы воспользуемся соотношеніемъ (178).

Принимая во вниманіе формулу:

(185) $$M_\nu(x)=\sum_{k=0}^{k=p_\nu}(-1)^{p_\nu-k}\,\frac{M_\nu^{(p_\nu-k)}(u)\,(u-x)^{p_\nu-k}}{1\cdot2\cdots(p_\nu-k)},$$

а также (183), равенству (178) дадимъ видъ:

(186) $$\eta=\frac{1}{k(x)}\sum_{\nu=0}^{\nu=l}\sum_{k=0}^{k=p_\nu}\frac{(-1)^{p_\nu+\nu-k}(\lambda-1)_\nu}{1\cdot2\cdots(p_\nu-k)}\int\limits_{L'}(u-x)^{\lambda+p_\nu-k-\nu-1}$$
$$[\ \varphi(u)\,M_\nu^{(p-k)}(u)\,du,$$

или, если δ наибольшее изъ p_ν,

$$\eta=\frac{1}{k(x)}\sum_{\nu=0}^{\nu=l}\sum_{k=0}^{k=p_\nu}\frac{(\lambda-1)_\nu}{(\lambda+\delta-1)_{k+\nu-p_\nu+\delta}\,1\cdot2\cdots(p_k-k)}$$

(187) $$\left[\ \int\limits_{L'}(u-x)^{\lambda+\delta-1}\,\frac{d^{k+\nu-p_\nu+\delta}[\varphi(u)\,M_\nu^{(p_\nu-k)}(u)]}{du^{k+\nu-p_\nu+\delta}}\,du=0.\right.$$

Полагая, что

$$\chi(u) = \tag{188}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\nu=l} \sum_{k=0}^{k=p_\nu} \frac{(\lambda-1)_\nu}{(\lambda+\delta-1)^{k+\nu-p_\nu+\delta}\,1\cdot 2\cdots(p_\nu-k)} \frac{d^{k+\nu-p_\nu+\delta}\left[\varphi(u)\,M_\nu^{(p_\nu-k)}(u)\right]}{du^{k+\nu-p_\nu+\delta}},$$

соотношеніе (187) заставимъ совпасть съ формулой (184).

Въ виду двухъ предыдущихъ теоремъ, интегралы уравненій (174) можно искать въ любой изъ слѣдующихъ двухъ формъ:

$$y = \int_L e^{ux}\,\varphi(u)\,du,\ \eta = \int_L e^{ux}\,\theta(u)\,du \tag{189}$$

или:

$$y = \int_L (u-x)^{\lambda-1}\,\varphi(u)\,du,\ \eta = \int_L (u-x)^{\lambda-1}\,\chi(u)\,du. \tag{190}$$

Остановимся сначала на формѣ (189). Если внесемъ выраженія (189) для y и η въ уравненія (174), то, принимая во вниманія формулы (175) и произведя въ полученныхъ результатахъ интеграціи по частямъ, будемъ имѣть:

$$\int_L e^{ux}\left[\sum_{\nu=0}^{\nu=m}\sum_{k=0}^{k=q_\nu}(-1)^{q_\nu-k}\,b_{k\nu}\,\frac{d^{q_\nu-k}\left[u^\nu\varphi(u)\right]}{du^{q_\nu-k}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=0}^{\nu=m'}\sum_{k=0}^{k=l_\nu}(-1)^{l_\nu-k}\,c_{k\nu}\,\frac{d^{l_\nu-k}\left[u^\nu\theta(u)\right]}{du^{l_\nu-k}}\right]du = 0;$$

$$\tag{191}$$

$$\int_L e^{ux}\left[\sum_{\nu=0}^{\nu=n}\sum_{k=0}^{k=q'_\nu}(-1)^{q'_\nu-k}\,b'_{k\nu}\,\frac{d^{q'_\nu-k}\left[u^\nu\varphi(u)\right]}{du^{q'_\nu-k}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=0}^{\nu=n'}\sum_{k=0}^{k=l'_\nu}(-1)^{l'_\nu-k}\,c'_{k\nu}\,\frac{d^{l'_\nu-k}\left[u^\nu\theta(u)\right]}{du^{l'_\nu-k}}\right]du = 0.$$

Выберемъ функціи $\varphi(u)$ и $\theta(u)$ такимъ образомъ, чтобы имѣли мѣсто:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=m}\sum_{k=0}^{k=q_\nu}(-1)^{q_\nu-k}\,b_{k\nu}\,\frac{d^{q_\nu-k}\left[u^\nu\varphi(u)\right]}{du^{q_\nu-k}} +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{\nu=m'}\sum_{k=0}^{k=l_\nu}(-1)^{l_\nu-k}\,c_{k\nu}\,\frac{d^{l_\nu-\nu}\left[u^\nu\theta(u)\right]}{du^{l_\nu-k}} = 0;$$

(192)
$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n}\sum_{k=0}^{k=q'_\nu}(-1)^{q'_\nu-k}\,b'_{k\nu}\,\frac{d^{q'_\nu-k}[u^\nu\,\varphi(u)]}{du^{q'_\nu-k}}+$$
$$+\sum_{\nu=0}^{\nu=n'}\sum_{k=0}^{k=l'_\nu}(-1)^{l'_\nu-k}\,c'_{k\nu}\,\frac{d^{l'_\nu-k}[u^\nu\,\theta(u)]}{du^{l'_\nu-k}}=0.$$

Точно также легко убѣдиться, что интегралы уравненія (192) выражаются чрезъ интегралы уравненія (174) по формуламъ вида:

(193)
$$\varphi=\int\limits_{L_1}e^{ux}\,y\,dx,\ \theta(u)=\int\limits_{L_1}e^{ux}\,\eta\,dx.$$

Польза отъ преобразованій такого рода очевидна, — уравненіе, которое получается послѣ выполненія преобразованія, можетъ оказаться проще и, слѣдовательно, вопросъ болѣе трудный сведется къ болѣе легкому. Это послѣднее обстоятельство на самомъ дѣлѣ оказывается всякій разъ, когда степени всѣхъ коэффиціентовъ уравненія, подвергаемаго преобразованію, ниже его порядка.

Положимъ, что коэффиціенты уравненія (174) суть линейныя цѣлыя функціи перемѣннаго x. Значитъ, допустимъ, что

(194)
$$\begin{aligned}A_\nu(x)&=b_{0\nu}\,x+b_{1\nu};\\ B_\nu(x)&=c_{0\nu}\,x+c_{1\nu};\\ A'_\nu(x)&=b'_{0\nu}\,x+b'_{1\nu};\\ B'_\nu(x)&=c'_{0\nu}\,x+c'_{1\nu}.\end{aligned}$$

Тогда уравненіе (192) напишется слѣдующимъ образомъ:

(195)
$$\frac{d\varphi}{du}\sum_{\nu=0}^{\nu=m}b_{0\nu}\,u^\nu+\frac{d\theta}{du}\sum_{\nu=0}^{\nu=m'}c_{0\nu}\,u^\nu+\varphi\sum_{\nu=n}^{\nu=m}u^{\nu-1}(\nu b_{0\nu}-b_{1\nu}\,u)+$$
$$+\theta\sum_{\nu=0}^{\nu=m'}u^{\nu-1}(\nu c_{0\nu}-c_{1\nu}u)=0;$$
$$\frac{d\varphi}{du}\sum_{\nu=0}^{\nu=n}b'_{0\nu}\,u^\nu+\frac{d\theta}{du}\sum_{\nu=0}^{\nu=n'}c'_{0\nu}\,u^\nu+\varphi\sum_{\nu=0}^{\nu=n}u^{\nu-1}(\nu b'_{0\nu}-b'_{1\nu}\,u)+$$
$$+\theta\sum_{\nu=0}^{\nu=n'}u^{\nu-1}(\nu c'_{0\nu}-c'_{1\nu}\,u)=0.$$

Такимъ образомъ данная система преобразовалась въ систему уравненій перваго порядка.

Обратимся теперь къ формѣ (190) интеграловъ уравненій (174). Внеся выраженія (190) для y и η въ уравненіе (174), получимъ:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=m}(-1)^\nu(\lambda-1)_\nu\int_L A_\nu(x)\,(u-x)^{\lambda-\nu-1}\varphi(u)\,du+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{\nu=m'}(-1)^\nu(\lambda-1)_\nu\int_L B_\nu(x)\,(u-x)^{\lambda-\nu-1}\chi(u)\,du=0;$$

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n}(-1)^\nu(\lambda-1)_\nu\int_L A'_\nu(x)\,(u-x)^{\lambda-\nu-1}\varphi(u)\,du+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{\nu=n'}(-1)^\nu(\lambda-1)_\nu\int_L B'_\nu(x)\,(u-x)^{\lambda-\nu-1}\chi(u)\,du=0, \tag{196}$$

или:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=m}(-1)^\nu(\lambda-1)_\nu\sum_{p=0}^{p=q_\nu}\frac{(-1)^p}{p!}\int_L(u-x)^{\lambda+p-\nu-1}\varphi(u)\,D^pA_p(u)\,du+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{\nu=m'}(-1)^\nu(\lambda-1)_\nu\sum_{p=0}^{p=l_\nu}\frac{(-1)^p}{p!}\int_L(u-x)^{\lambda+p-\nu-1}\chi(u)D^pB_p(u)du=0;$$

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n}(-1)^\nu(\lambda-1)_\nu\sum_{p=0}^{p=q'_\nu}\frac{(-1)^p}{p!}\int_L(u-x)^{\lambda+p-\nu-1}\varphi(u)\,D^pA'_p(u)du+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{\nu=n'}(-1)^\nu(\lambda-1)_\nu\sum_{p=0}^{p=l'_\nu}\frac{(-1)^p}{p!}\int_L(u-x)^{\lambda+p-\nu-1}\chi(u)D^pB'_p(u)du=0. \tag{197}$$

Обозначимъ чрезъ α наибольшее изъ чиселъ $q_\nu-\nu$ и $l_\nu-\nu$, а чрезъ β наибольшее изъ чиселъ $q'_\nu-\nu$ и $l'_\nu-\nu$.

При помощи интеграціи по частямъ соотношеніямъ (197) можно дать тогда слѣдующій видъ:

$$\int_L(u-x)^{\lambda+\alpha-1}\left[\sum_{\nu=0}^{\nu=m}\sum_{p=0}^{p=q_\nu}\frac{(\lambda-1)_\nu}{p!(\lambda+\alpha-1)_{\alpha-p+\nu}}\cdot\frac{d^{\alpha-p+\nu}[\varphi(u)D^pA_p(u)]}{du^{\alpha-p+\nu}}+\right.$$

$$+\sum_{\nu=0}^{\nu=m'}\sum_{p=0}^{p=l_\nu}\frac{(\lambda-1)_\nu}{p!(\lambda+\alpha-1)_{\alpha-p+\nu}}\frac{d^{\alpha-p+\nu}[\chi(u)D^p B_\nu(u)]}{du^{\alpha-p+\nu}}\Bigg]du=0;$$

(198)

$$\int_L (u-x)^{\lambda+\beta-1}\Bigg[\sum_{\nu=0}^{\nu=n}\sum_{p=0}^{p=q'_\nu}\frac{(\lambda-1)_\nu}{p!(\lambda+\beta-1)_{\beta-p+\nu}}\frac{d^{\beta-p+\nu}[\varphi(u)D^p A'_p(u)]}{du^{\beta-p+\nu}}+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{\nu=n'}\sum_{p=0}^{p=l'_\nu}\frac{(\lambda-1)_\nu}{p!(\lambda+\beta-1)_{\beta-p+\nu}}\frac{d^{\beta-p+\nu}[\chi(u)D^p B'_p(u)]}{du^{\beta-p+\nu}}\Bigg]du=0.$$

Отсюда для опредѣленія $\varphi(u)$ и $\chi(u)$ имѣемъ условія:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=m}\sum_{p=0}^{p=q_\nu}\frac{(\lambda-1)_\nu}{p!(\lambda+\alpha-1)_{\alpha-p+\nu}}\frac{d^{\alpha-p+\nu}[\varphi(u)D^p A_p(u)]}{du^{\alpha-p+\nu}}+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{\nu=m'}\sum_{p=0}^{p=l_\nu}\frac{(\lambda-1)_\nu}{p!(\lambda+\alpha-1)_{\alpha-p+\nu}}\frac{d^{\alpha-p+\nu}[\chi(u)D^p B_\nu(u)]}{du^{\alpha-p+\nu}}=0;$$

(199)

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n}\sum_{p=0}^{p=q'_\nu}\frac{(\lambda-1)_\nu}{p!(\lambda+\beta-1)_{\beta-p+\nu}}\frac{d^{\beta-p+\nu}[\varphi(u)D^p A'_p(u)]}{du^{\beta-p+\nu}}+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{\nu=n'}\sum_{p=0}^{p=l'_\nu}\frac{(\lambda-1)_\nu}{p!(\lambda+\beta-1)_{\beta-p+\nu}}\frac{d^{\beta-p+\nu}[\chi(u)D^p B'_p(u)]}{du^{\beta-p+\nu}}=0.$$

Порядокъ перваго изъ этихъ уравненій совпадаетъ съ α, а второго съ β.

Польза отъ такого рода преобразованій не подлежитъ сомнѣнію. Возьмемъ, напр., систему двухъ уравненій, по своему строенію похожихъ на гипергеометрическое уравненіе L. Pochhammer'a:

$$\sum_{k=0}^{k=n}\frac{(-1)^{n-k}}{(\lambda-1)_{n-k}}\left[\frac{\psi_1^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}+(\lambda-n)\frac{\varphi_1^{(k)}(x)}{k!}\right]\frac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}}+$$

$$+\sum_{k=0}^{k=n'}\frac{(-1)^{n'-k}}{(\lambda-k)_{n-k}}\left[\frac{\psi_2^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}+(\lambda-n')\frac{\varphi_2^{(k)}(x)}{k!}\right]\frac{d^{n'-k}\eta}{dx^{n'-k}}=0;$$

(200)

$$\sum_{k=0}^{k=m}\frac{(-1)^{n-k}}{(\lambda-1)_{m-k}}\left[\frac{\psi_3^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}+(\lambda-m)\frac{\varphi_3^{(k)}(x)}{k!}\right]\frac{d^{m-k}y}{dx^{m-k}}+$$

$$+\sum_{k=0}^{k=m'}\frac{(-1)^{m'-k}}{(\lambda-1)_{m'-k}}\left[\frac{\psi_4^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}+(\lambda-m')\frac{\varphi_4^{(k)}(x)}{k!}\right]\frac{d^{m'-k}\eta}{dx^{m'-k}}=0,$$

гдѣ $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$, $\psi_4(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ и $\varphi_4(x)$ суть алгебраическіе многочлены послѣдовательно степеней: $n-1$, $n'-1$, $m-1$, $m'-1$, n, n', m и m'.

Въ виду выраженій (190) для y и η, послѣднія соотношенія можно представить въ формѣ:

$$\begin{gathered}\int\limits_L (u-x)^{\lambda-n}\left[\psi_1(u)\,\psi-\frac{d\,\varphi_1(u)\psi}{du}\right]du+\\+\int\limits_L (u-x)^{\lambda-n'}\left[\psi_2(u)\,\chi-\frac{d\,\varphi_2(u)\chi}{du}\right]du=0;\\ \int\limits_L (u-x)^{\lambda-m}\left[\psi_3(u)\psi-\frac{d}{du}\varphi_3(x)\psi\right]du+\\ \int\limits_L (u-x)^{\lambda-m'}\left[\psi_4(x)\chi-\frac{d}{du}\,\varphi_4(u)\,\chi\right]du=0.\end{gathered}\tag{201}$$

Допустимъ, что

$$n'=n+k_1,\ m'=m+k_2.\tag{202}$$

Тогда при помощи интеграціи по частямъ соотношенія (201) представимъ такъ:

$$\begin{gathered}\int\limits_L (u-x)^{\lambda-n}\left[\psi_1(u)\psi-\frac{d\,\varphi_1(u)\psi}{du}\right]du+\\+\frac{(-1)^{k_1}}{(\lambda-n)_{k_1}}\int\limits_L (u-x)^{\lambda-n}\frac{d^{k_1}}{du^{k_1}}\left[\psi_2(u)\chi-\frac{d\,\varphi_2(u)\chi}{du}\right]du=0;\\ \int\limits_L (u-x)^{\lambda-m}\left[\psi_3(u)\psi-\frac{d\,\varphi_3(u)\psi}{du}\right]du+\\+\frac{(-1)^{k_2}}{(\lambda-m)_{k_2}}\int\limits_L (u-x)^{\lambda-m}\frac{d^{k_2}}{du^{k_2}}\left[\psi_4(u)\chi-\frac{d\,\varphi_4(u)\chi}{du}\right]du=0.\end{gathered}\tag{203}$$

Значитъ, ψ и χ удовлетворяютъ уравненіямъ:

$$\begin{gathered}(\lambda-n)_{k_1}\left[\psi_1(u)\,\psi-\frac{d\,\varphi_1(u)\psi}{du}\right]+\\+(-1)^{k_1}\frac{d^{k_1}}{du^{k_1}}\left[\psi_2(u)\,\chi-\frac{d\,\varphi_1(u)\chi}{du}\right]=0;\end{gathered}\tag{204}$$

$$(\lambda - m)_{k_2} \left[\psi_3(u)\psi - \frac{d}{du} \varphi_3(u)\psi \right] +$$

$$+ (-1)^{k_2} \frac{d^{k_2}}{du^{k_2}} \left[\psi_4(u)\chi - \frac{d\, \varphi_4(u)\chi}{du} \right] = 0.$$

Въ случаѣ, если $k_1 = k_2 = 0$, соотношенія (204) обратятся въ

$$\varphi_1(u) \frac{d\psi}{du} + \varphi_2(u) \frac{d\chi}{du} = [\psi_1(u) - \varphi_1'(u)]\psi + [\psi_2(u) - \varphi_2'(u)]\chi;$$

(205)

$$\varphi_3(u) \frac{d\psi}{du} + \varphi_4(u) \frac{d\chi}{du} = [\psi_3(u) - \varphi_3'(u)]\psi + [\psi_4(u) - \varphi_4'(u)]\chi.$$

Къ аналогичнымъ результатамъ мы пришли бы, если бы, вмѣсто уравненій (200), взяли систему двухъ уравненій, имѣющихъ аналогію съ уравненіемъ C. Jordan'a (въ частности съ уравненіемъ Tissot).

Обратимся теперь къ совокупнымъ системамъ уравненій въ конечныхъ разностяхъ.

Положимъ, что дана система двухъ уравненій:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=m} A_\nu(x) u_{x+\nu} + \sum_{\nu=0}^{\nu=m'} B_\nu(x) v_{x+\nu} = 0;$$

(206)

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} A_\nu'(x) u_{x+\nu} + \sum_{\nu=0}^{\nu=n'} B_\nu'(x) v_{x+\nu} = 0,$$

гдѣ $A_\nu(x)$, $B_\nu(x)$, $A_\nu'(x)$ и $B_\nu'(x)$ совпадаютъ съ таковыми же функціями уравненій (174).

Докажемъ предварительно одну теорему.

Теорема III. Если функція u_x уравненій (206) выражается въ формѣ:

(207) $$u_x = \int_L u_1^{x-1} \varphi(u_1)\, du_1,$$

то функція v_x тѣхъ же уравненій можетъ быть представлена такъ:

(208) $$v_x = \frac{1}{M(x)} \int_L u_1^{x-1} \theta(u_1) du_1.$$

гдѣ $M(x)$ есть нѣкоторый полиномъ, а дозволенный путь L въ обоихъ интегралахъ одинъ и тотъ же.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ уравненій (206) безъ труда находимъ:

$$v_x = \frac{1}{M(x)} \sum_{k=0}^{k=l} P_{m_k}(x)\, u_{x+k}, \tag{209}$$

гдѣ $P_{m_k}(x)$ есть полиномъ степени m_k вида:

$$P_{m_k}(x) = \sum_{p=0}^{p=m_k} a_{kp}\, x^p. \tag{210}$$

Замѣнивъ въ равенствѣ (209) $P_{m_k}(x)$ и u_x ихъ выраженіями по формуламъ (210) и (207), будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{1}{M(x)} \sum_{k=0}^{k=l} \sum_{p=0}^{p=m_k} a_{pk}\, x^p \int_L u_1^{x+k-1} \varphi(u_1) du_1 = \\ &= \frac{1}{M(x)} \int_L u_1^{x-1} \sum_{k=0}^{k=l} \sum_{p=0}^{p=m_k} (-1)^p a_{kp}\, \Delta^p \left[u_1^k \varphi(u_1)\right] du_1. \end{aligned} \tag{211}$$

При условіи, что

$$\sum_{k=0}^{k=l} \sum_{p=0}^{p=m_k} (-1)^p a_{kp}\, \Delta^p \left[u_1^k \varphi(u_1)\right] = \theta(u_1), \tag{212}$$

соотношенія (211) и (208) совпадаютъ.

Въ силу теоремы III, интегралы уравненій (206) можемъ искать въ формѣ:

$$\begin{aligned} u_x &= \int_L u_1^{x-1} \varphi(u_1) du_1; \\ v_x &= \int_L u_1^{x-1} \theta(u_1)\, du_1. \end{aligned} \tag{213}$$

Замѣнивъ въ уравненіяхъ (206) функціи u_x и v_x ихъ выраженіями (213), будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{\nu=m} A_\nu(x) \int_L u_1^{x+\nu-1} \varphi(u_1) du_1 + \sum_{\nu=0}^{\nu=m'} B_\nu(x) \int_L u_1^{x+\nu-1} \theta(u_1) du_1 = 0; \\ &\sum_{\nu=0}^{\nu=n} A'_\nu(x) \int_L u_1^{x+\nu-1} \varphi(u_1)\, du_1 + \sum_{\nu=0}^{\nu=n'} B'_\nu(x) \int_L u_1^{x+\nu-1} \theta(u_1) du_1 = 0. \end{aligned} \tag{214}$$

Принимая во вниманіе составъ полиномовъ $A_\nu(x)$, $B_\nu(x)$, $A'_\nu(x)$ и $B'_\nu(x)$, при помощи интеграціи по частямъ соотношеніямъ (214) дадимъ видъ:

$$\int_L u_1^{x-1}\left[\sum_{\nu=0}^{\nu=m}\sum_{k=0}^{k=q_\nu}(-1)^{q_\nu-k}b_{k\nu}\,\Delta^{q_\nu-k}\left[u_1^\nu\,\varphi(u_1)\right]+\right.$$

(215)

$$\left.+\sum_{\nu=0}^{\nu=m'}\sum_{k=0}^{k=l_\nu}(-1)^{l_\nu-k}c_{k\nu}\,\Delta^{l_\nu-k}\left[u_1^\nu\,\theta(u_1)\right]\right]du=0;$$

$$\int_L u_1^{x-1}\left[\sum_{\nu=0}^{\nu=n}\sum_{k=0}^{k=q'_\nu}(-1)^{q'_\nu-k}b'_{k\nu}\Delta^{q'_\nu-k}\left[u_1^\nu\,\varphi(u_1)\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=0}^{\nu=n'}\sum_{k=0}^{k=l'_\nu}(-1)^{l'_\nu-k}c'_{k\nu}\,\Delta^{l'_\nu-k}\left[u_1^\nu\,\theta(u_1)\right]\right]du_1=0.$$

Функціи $\varphi(u_1)$ и $\theta(u_1)$, слѣдовательно, служатъ интегралами уравненій:

(216)

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=m}\sum_{k=0}^{k=q_\nu}(-1)^{q_\nu-k}b_{k\nu}\Delta^{q_\nu-k}[u_1^\nu\varphi(u_1)]+\sum_{\nu=0}^{\nu=m'}\sum_{k=0}^{k=l_\nu}(-1)^{l_\nu-k}c_{k\nu}\Delta^{l_\nu-k}[u_1^\nu\,\theta(u_1)]=0;$$

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n}\sum_{k=0}^{k=q'_\nu}(-1)^{q'_\nu-k}b'_{k\nu}\Delta^{q'_\nu-k}[u_1^\nu\varphi(u_1)]+\sum_{\nu=0}^{\nu=n'}\sum_{k=0}^{k=l'_\nu}(-1)^{l'_\nu-k}c'_{k\nu}\Delta^{l'_\nu-k}[u_1^\nu\,\theta(u_1)]=0.$$

Порядокъ перваго изъ этихъ уравненій опредѣляетъ наибольшее изъ чиселъ: q_ν и l_ν, а порядокъ второго — наибольшее изъ чиселъ: q'_ν и l'_ν.

Если числа q_ν, l_ν, q'_ν и l'_ν единицы, то система (206) преобразуется такимъ образомъ въ систему уравненій перваго порядка:

$$u_1\sum_{\nu=0}^{\nu=m}b_{0\nu}u_1^\nu\,\frac{d\varphi}{du_1}+u_1\sum_{\nu=0}^{\nu=m'}c_{0\nu}u_1^\nu\,\frac{d\theta}{du_1}=$$

(217)

$$=\sum_{\nu=0}^{\nu=m}u_1^\nu(b_{1\nu}-\nu\,b_{0\nu})\varphi+\sum_{\nu=0}^{\nu=m'}u_1^\nu(c_{1\nu}-\nu\,c_{0\nu})\,\theta;$$

$$u_1\sum_{\nu=0}^{\nu=n}b'_{0\nu}u_1^\nu\,\frac{d\varphi}{du_1}+u_1\sum_{\nu=0}^{\nu=n'}c'_{0\nu}u_1^\nu\,\frac{d\theta}{du_1}=$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\nu=n} u_1^\nu (b'_{1\nu} - \nu\, b'_{0\nu})\,\varphi + \sum_{\nu=0}^{\nu=n'} u_1^\nu (c'_{1\nu} - \nu\, c'_{0\nu})\,\theta$$

Разсмотримъ также систему:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{\nu=m} (-1)^\nu \sum_{k=0}^{k=1} a_{k\nu} (x+k-1)_\nu\, u_{x+k-\nu} + \\ &+ \sum_{\nu=0}^{\nu=m'} (-1)^\nu \sum_{k=0}^{k=1} b_{k\nu} (x+k-1)_\nu\, v_{x+k-\nu} = 0; \\ &\sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu \sum_{k=0}^{k=1} a'_{k\nu} (x+k-1)_\nu\, u_{x+k-\nu} + \\ &+ \sum_{\nu=0}^{\nu=n'} (-1)^\nu \sum_{k=0}^{k=1} b'_{k\nu} (x+k-1)_\nu\, v_{x+k-\nu} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (218)$$

гдѣ $a_{k\nu}$ $b_{k\nu}$, $a'_{k\nu}$ и $b'_{k\nu}$ суть нѣкоторыя постоянныя.

Внеся выраженія (213) для u_x и v_x въ уравненія (218) и пользуясь интеграціей по частямъ, найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} &\int_L u_1^{x-1} \left[\sum_{\nu=0}^{\nu=m} \sum_{k=0}^{k=1} a_{k\nu}\, u_1^k \frac{d^\nu \varphi(u_1)}{du_1^\nu} + \right. \\ &\left. + \sum_{\nu=0}^{\nu=m'} \sum_{k=0}^{k=1} b_{k\nu}\, u_1^k \frac{d^\nu \theta(u_1)}{du_1^\nu} \right] du_1 = 0; \\ &\int_L u_1^{x-1} \left[\sum_{\nu=0}^{\nu=n} \sum_{k=0}^{k=1} a'_{k\nu}\, u_1^k \frac{d^\nu \varphi(u_1)}{du_1^\nu} + \right. \\ &\left. + \sum_{\nu=0}^{\nu=n'} \sum_{k=0}^{k=1} b'_{k\nu}\, u_1^k \frac{d^\nu \theta(u_1)}{du_1^\nu} \right] du_1 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (219)$$

Значитъ, для опредѣленія $\varphi(u_1)$ и $\theta(u_1)$ имѣемъ уравненія:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{\nu=m} \sum_{k=0}^{k=1} a_{k\nu}\, u_1^k \frac{d^\nu \varphi(u_1)}{du_1^\nu} + \sum_{\nu=0}^{\nu=m'} \sum_{k=0}^{k=1} b_{k\nu}\, u_1^k \frac{d^\nu \theta(u_1)}{du_1^\nu} = 0; \\ &\sum_{\nu=0}^{\nu=n} \sum_{k=0}^{k=1} a'_{k\nu}\, u_1^k \frac{d^\nu \varphi(u_1)}{du_1^\nu} + \sum_{\nu=0}^{\nu=n'} \sum_{k=0}^{k=1} b'_{k\nu}\, u_1^k \frac{d^\nu \theta(u_1)}{du_1^\nu} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (220)$$

Эти же послѣднія уравненія, имѣя своими коэффиціентами линейныя цѣлыя функціи отъ u_1, посредствомъ преобразованій:

(221)
$$\varphi(u_1) = \int\limits_{L'} e^{u_1 u_2} f_1(u_2) du_2;$$
$$\theta(u_1) = \int\limits_{L'} e^{u_1 u_2} f_2(u_2)\, du_2$$

сводятся къ двумъ линейнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ 1-го порядка однородной формы съ раціональными коэффиціентами. А потому система уравненій (218) сводится къ этимъ послѣднимъ посредствомъ слѣдующихъ двукратныхъ интеграловъ:

(222)
$$u_x = \int\limits_{L} u_1^{x-1}\, du_1 \int\limits_{L'} e^{u_1 u_2} f_1(u_2)\, du_2;$$
$$v_x = \int\limits_{L} u_1^{x-1}\, du_1 \int\limits_{L'} e^{u_1 u_2} f_2(u_2)\, du_2.$$

Легко такимъ же образомъ обнаружить, что система:

(223)
$$[(-1)^n b_0 (z+n)_n + (-1)^{n-1} b_1 (z+n-1)_{n-1} + \cdots + b_n]\, u_{z+1} +$$
$$+ [(-1)^{n'} d_0 (z+n')_{n'} + (-1)^{n'-1} d_1 (z+n'-1)_{n'-1} + \cdots + d_{n'}]\, v_{z+1} =$$
$$= [(-1)^n a_0 (z+n-1)_n + (-1)^{n-1} a_1 (z+n-2)_{n-1} + \cdots + a_n]\, u_z +$$
$$+ (-1)^{n'} c_0 (z+n'-1)_{n'} + (-1)^{n'-1} c_1 (z+n'-2)_{n'-1} + \cdots + c_n]\, v_z;$$
$$[(-1)^m b'_0 (z+m)_m + (-1)^{m-1} b'_1 (z+m-1)_{m-1} + \cdots + b'_m]\, u_{z+1} +$$
$$+ [(-1)^{m'} d'_0 (z+m')_{m'} + (-1)^{m'-1} (z+m'-1)_{m'-1} + \cdots + d_{m'}]\, v_{z+1} =$$
$$= [(-1)^m a'_0 (z+m-1)_m + (-1)^{m-1} a'_1 (z+m-2)_{m-1} + \cdots + a'_m]\, u_z +$$
$$+ [(-1)^{m'} c'_0 (z+m'-1)_{m'} + (-1)^{m'-1} c'_1 (z+m'-2)_{m'-1} + \cdots + c'_{m'}]\, v_z,$$

гдѣ a, b, c, d, a', b', c' и d' суть нѣкоторыя постоянныя, а m, n, m' и n' суть цѣлыя положительныя числа, — при помощи интеграловъ:

(224)
$$u_z = \int\limits_{L} x^{z-1} y\, dx, \quad v_z = \int\limits_{L} x^{z-1} \eta\, dx$$

преобразуется въ слѣдующія дифференціальныя уравненія:

$$
\begin{aligned}
&(a_0-b_0 x)\, x^n y^{(n)}+(a_1-b_1 x)\, x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+(a_n-b_n x)\, y+\\
&+(c_0-d_0 x)x^{n'}y^{(n')}+(c_1-d_1 x)\, x^{n'-1}y^{(n'-1)}+\cdots+(c_{n'}-d_{n'} x)\, \eta=0;\\
&(a'_0-b'_0 x)\, x^m y^{(m)}+(a'_1-b'_1 x)\, x^{m-1}y^{(m-1)}+\cdots+(a_m-b'_m x)\, y+\\
&+(c'_0-d'_0 x)\, x^{m'}\eta^{(m')}+(c'_1-d'_1 x)\, x^{m'-1}\eta^{(m'-1)}+\cdots+(c'_{m'}-d'_{m'} x)\, \eta=0.
\end{aligned}
\tag{225}
$$

Въ заключеніе этого параграфа, разсмотримъ слѣдующую систему смѣшанныхъ уравненій:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{q=0}^{q=m}\sum_{p=0}^{p=n}\sum_{s=0}^{s=\alpha_{pq}} a_{spq}x^{\alpha_{pq}-s}\,\frac{d^{m-q}u_{x+n-p}}{dx^{m-q}}+\\
&\sum_{q=0}^{q=m_1}\sum_{p=0}^{p=n_1}\sum_{s=0}^{s=\beta_{pq}} b_{spq}x^{\beta_{pq}-s}\,\frac{d^{m_1-q}v_{x+n_1-p}}{dx^{m_1-q}}=0;\\
&\sum_{q=0}^{q=m_2}\sum_{p=0}^{p=n_2}\sum_{s=0}^{s=\gamma_{pq}} c_{spq}\,x^{\gamma_{pq}-s}\,\frac{d^{m_2-q}u_{x+n_2-p}}{dx^{m_2-q}}+\\
&+\sum_{q=0}^{q=m_3}\sum_{p=0}^{p=n_3}\sum_{s=0}^{s=\delta_{pq}} g_{spq}\,x^{\delta_{pq}-s}\,\frac{d^{m_3-q}u_{x+n_3-p}}{dx^{m_3-q}}=0,
\end{aligned}
\tag{226}
$$

гдѣ a_{spq}, b_{spq}, c_{spq} и g_{spq} суть постоянныя.

Какъ и въ трехъ предыдущихъ случаяхъ настоящаго параграфа, безъ труда можемъ убѣдиться, что интегралы этой системы мы можемъ искать въ формѣ:

$$
\begin{aligned}
u_x&=\int\limits_L v^{x-1}f(v)\,dv;\\
v_x&=\int\limits_L v^{x-1}\varphi(v)\,dv,
\end{aligned}
\tag{227}
$$

гдѣ въ обоихъ интегралахъ дозволенный путь L одинъ и тотъ же.

При этомъ, эти выраженія для u_x и v_x на самомъ дѣлѣ удовлетворяютъ уравненіямъ (226), если $f(v)$ и $\varphi(v)$ опредѣляются изъ соотношеній:

$$\sum_{q=0}^{q=m}\sum_{p=0}^{p=n}\sum_{s=0}^{s=\alpha_{pq}}(-1)^{\alpha_{pq}-s}a_{spq}\,\Delta^{\alpha_{pq}-s}\left[v^{n-p}(lgv)^{m-q}f(v)\right]+$$

$$+\sum_{q=0}^{q=m_1}\sum_{p=0}^{p=n_1}\sum_{s=0}^{s=\beta_{pq}}(-1)^{\beta_{pq}-s}\,b_{spq}\,\Delta^{\beta_{pq}-s}\left[v^{n_1-p}(lgv)^{m_1-q}\varphi(v)\right]=0,$$

$$(228)$$

$$\sum_{q=0}^{q=m_2}\sum_{p=0}^{p=n_2}\sum_{s=0}^{s=\gamma_{pq}}(-1)^{\gamma_{pq}-s}c_{spq}\Delta^{\gamma_{pq}-s}\left[v^{n_2-p}(lgv)^{m_2-q}f(v)\right]+$$

$$+\sum_{q=0}^{q=m_3}\sum_{p=0}^{p=n_3}\sum_{s=0}^{s=\delta_{pq}}(-1)^{\delta_{pq}-s}g_{spq}\,\Delta^{\delta_{pq}-s}\left[v^{n_3-p}(lgv)^{m_3-q}\,\varphi(v)\right]=0.$$

Порядокъ перваго изъ этихъ уравненій опредѣляетъ наибольшее изъ чиселъ α_{pq} и β_{pq}, а порядокъ второго — наибольшее изъ чиселъ γ_{pq} и δ_{pq}. Если эти числа единицы, то оба уравненія (228) перваго порядка.

Въ виду изслѣдованій настоящаго параграфа, легко видѣть, какъ примѣняется методъ опредѣленныхъ интеграловъ въ томъ случаѣ, если дается система нѣсколькихъ линейныхъ уравненій любого изъ трехъ разсмотрѣнныхъ родовъ.

§ 7.

Въ этомъ параграфѣ мы остановимся на нѣкоторыхъ разностныхъ линейныхъ уравненіяхъ, коэффиціенты которыхъ зависятъ отъ одного класса трансцендентныхъ функцій.

Пусть функція $\varphi(x)$ удовлетворяетъ условію:

$$\varphi(x+1)=\varphi(x)+\theta(x), \tag{229}$$

гдѣ $\theta(x)$ можетъ быть постояннымъ (нуль не исключается) или періодической функціей съ періодомъ единица. Въ числѣ функцій, обладающихъ вышеуказаннымъ свойствомъ, оказывается извѣстная въ литературѣ функція Ex.

Разсмотримъ послѣ этого уравненіе:

$$\sum_{p=0}^{p=n} f_{m_p}[\varphi(x)]\,u_{x+p}=0, \tag{230}$$