ИЗВѢСТІЯ

ВАРШАВСКАГО

ПОЛИТЕХНИЧЕСКАГО ИНСТИТУТА

ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II.

ВЫПУСКЪ II.—1900 г.

ВАРШАВА.

ВЪ ТИПОГРАФІИ ВАРШАВСКАГО УЧЕБНАГО ОКРУГА,
Краковское-Предмѣстье № 3.

1900.

Печатано по опредѣленію Совѣта Варшавскаго Политехническаго Института И м п е р а т о р а Н и к о л а я II.

Директоръ *А. Лагоріо.*

СОДЕРЖАНІЕ.

Ученый и учебный отдѣлы.

Редакторъ *И. И. Иванюковъ*

УЧЕНЫЙ И УЧЕБНЫЙ ОТДѢЛЫ.

О нѣкоторыхъ приложеніяхъ кинематики измѣняемыхъ тѣлъ къ шарнирнымъ механизмамъ.

П. О. Сомова.

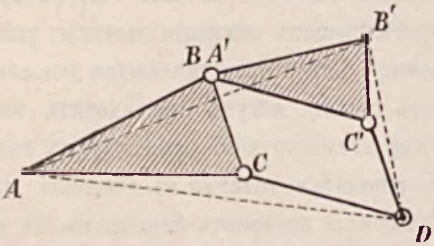
1. Мы будемъ разсматривать такія измѣняемыя системы точекъ, движеніе которыхъ опредѣляется конечнымъ числомъ параметровъ. Для опредѣленія движенія такой системы достаточно знать движеніе конечнаго числа ея точекъ. Пусть будетъ n наименьшее число точекъ, опредѣляющихъ движеніе системы; условимся называть эти точки *основными.* Здѣсь представляются два случая: или движенія всѣхъ основныхъ точекъ могутъ происходить независимо одно отъ другого или между этими точками существуютъ связи, какъ напримѣръ между тремя основными точками въ движеніи твердаго тѣла. Въ обоихъ случаяхъ, если построить механизмъ, въ которомъ n точекъ могутъ совершать всякія движенія, возможныя для основныхъ точекъ измѣняемой системы, а нѣкоторая произвольно выбранная $(n+1)$-ая точка двигается такъ, какъ если бы она принадлежала измѣняемой системѣ, движеніе которой опредѣляется n основными точками,— то можно сказать, что этотъ механизмъ *изображаетъ* движеніе данной измѣняемой системы.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ разсматривать только плоскія измѣняемыя системы и механизмы, составленные изъ твердыхъ тѣлъ, двигающихся параллельно плоскости и соединенныхъ между собою шарнирами.

2. Между измѣняемыми системами первенствующую роль играетъ, какъ по своимъ геометрическимъ свойствамъ, такъ и по значенію въ различныхъ вопросахъ механики, *система коллинеарно-измѣняемая* и въ особенности ея частный видъ — *система однородно-измѣняемая.* Въ настоящей статьѣ мы будемъ разсматривать механизмы, основанные на кинематикѣ этой послѣдней системы, и прежде всего еще болѣе частнаго вида коллинеарно-измѣняемой системы, — *системы подобно-измѣняемой,* которую можно разсматривать вообще какъ простѣйшую измѣняемую систему.

3. Движеніе плоской подобно-измѣняемой системы опредѣляется, какъ извѣстно, движеніемъ какихъ-нибудь двухъ ея точекъ, которое можетъ быть для каждой точки задаваемо произвольно; поэтому сочлененіе, въ которомъ три какихъ-либо точки образуютъ треугольникъ, постоянно остающійся подобнымъ самому себѣ, а двѣ изъ его вершинъ могутъ совершать произвольныя движенія, можетъ служить для изображенія плоской подобно-измѣняемой системы. Въ настоящее время извѣстно нѣсколько такихъ сочлененій; мы должны упомянуть о простѣйшемъ изъ нихъ, такъ какъ оно будетъ являться основнымъ элементомъ во многихъ изъ описанныхъ ниже механизмовъ. Подобные между собою, неизмѣняемые треугольники, ABC и $A'B'C'$ (фиг. 1), соединены вершинами B и A' помощью шарнира; на сторонахъ BC и $A'C'$ построенъ параллелограммъ $BC'DC$, въ вершинахъ котораго устроены шарниры. При всякомъ измѣненіи такого сочлененія точки A, B' и D образуютъ треугольникъ, который, измѣняясь, остается подобнымъ двумъ даннымъ треугольникамъ [1]).

Фиг. 1.



Это сочлененіе условимся для краткости называть *сочлененіемъ A.*

---

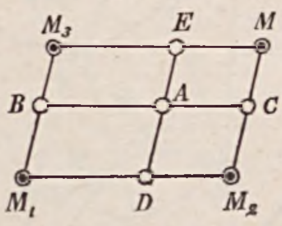
[1]) „Плагіографъ" Сильверстера. Sylvester. „On the plagiograph aliter the scew pantograph". Nature. 1875.

4. Движеніе плоской однородно-измѣняемой системы опредѣляется движеніемъ трехъ ея точекъ, которое для каждой точки можетъ быть задаваемо совершенно произвольно. Мы получимъ механизмъ, изображающій движеніе однородно-измѣняемой системы, если построимъ такое сочлененіе, у котораго можно было-бы три точки двигать произвольно, независимо одну отъ другой, а нѣкоторая четвертая, заранѣе намѣченная точка двигалась бы такъ, какъ если-бы она принадлежала заданной тремя основными точками однородно-измѣняемой системѣ.

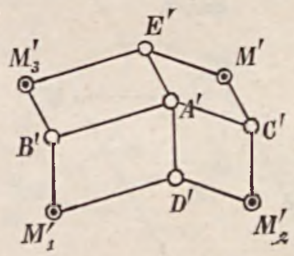
Для построенія такого механизма мы будемъ пользоваться слѣдующими основными свойствами однородно-измѣняемой системы: 1) точки, расположенныя на прямой линіи, при всякомъ положеніи системы принадлежатъ прямой линіи; 2) принадлежащія системѣ параллельныя прямыя линіи постоянно остаются параллельными; 3) отрѣзки параллельныхъ прямыхъ имѣютъ, при данномъ перемѣщеніи системы, одинаковый коэффиціентъ удлиненія [1]). 4) Въ частности, отрѣзки, принадлежащіе той-же прямой, измѣняются пропорціональнымъ образомъ.

5. На основаніи первыхъ двухъ изъ указанныхъ свойствъ параллелограммъ во все время движенія остается параллелограммомъ. Принимая это во вниманіе, построимъ прежде всего такой частный

фиг. 2.



фиг. 3.



видъ сочлененія, изображающаго однородно-измѣняемую систему, въ которомъ четвертая точка, M, съ тремя основными точками, M_1, M_2,

---

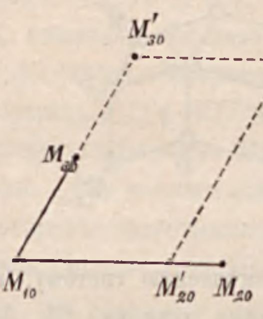
[1]) Послѣднее свойство вытекаетъ какъ слѣдствіе изъ первыхъ двухъ.

M_3, образуетъ параллелограммъ. Внутри параллелограмма $M_1M_2MM_3$ возьмемъ произвольную точку A, проведемъ черезъ нее прямыя BC и DE, параллельныя его сторонамъ, и замѣтимъ точки ихъ пересѣченія съ послѣдними; если всѣ девять точекъ соединить стержнями, какъ показано на фигурѣ 2, и въ этихъ точкахъ устроить шарниры, то получится сочлененіе, въ которомъ при всякой его деформаціи точки M_1, M_2, M_3 и M образуютъ параллелограммъ (фиг. 3). При этомъ нетрудно видѣть, что движеніе трехъ изъ этихъ точекъ остается въ извѣстныхъ, зависящихъ отъ размѣровъ сочлененія предѣлахъ произвольнымъ. Такимъ образомъ, задавъ произвольно движеніе точекъ M_1, M_2 и M_3, мы найдемъ, что точка M будетъ двигаться такъ, какъ еслибы она принадлежала однородно-измѣняемой системѣ, движеніе которой опредѣляется точками M_1, M_2, M_3.

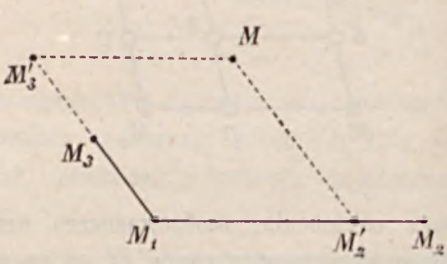
Изображенное здѣсь сочлененіе условимся для краткости называть *сочлененіемъ B*.

6. Чтобы отъ этого сочлененія, въ которомъ точка M не можетъ быть взята произвольно, перейти къ общему случаю, замѣтимъ слѣдующее построеніе, которое опредѣляетъ положеніе произвольно выбранной четвертой точки при какомъ-нибудь положеніи трехъ основныхъ точекъ, когда положенія всѣхъ четырехъ точекъ извѣстны въ одной опредѣленной фазѣ системы. Пусть будутъ M_{10}, M_{20}, M_{30} и M_0 эти

фиг. 4.



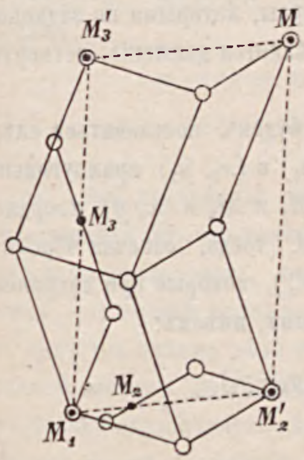
фиг. 5.



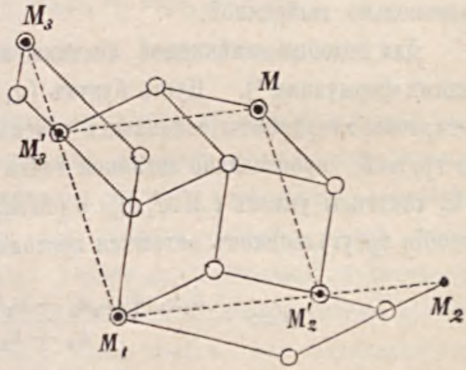
данныя положенія; чтобы найти положеніе M послѣдней точки въ какой-нибудь новой фазѣ системы, построимъ двѣ вспомогательныя точки M'_{20} и M'_{30}, лежащія на прямыхъ $M_{10}M_{20}$ и $M_{10}M_{30}$ и образующія вмѣстѣ съ точками M_{10} и M_0 параллелограммъ (фиг. 4). Точки M'_2 и M'_3 будутъ принадлежать данной однородно-измѣняемой системѣ во всякомъ ея положеніи, если онѣ будутъ связаны съ основными точками согласно перечисленнымъ въ § 4 условіямъ, т. е. если онѣ будутъ постоянно находиться на прямыхъ M_1M_2 и M_1M_3 и если при этомъ отношенія отрѣзковъ $M_1M_2/M_2M'_2$ и $M_1M_3/M_3M'_3$ будутъ оставаться постоянными. Этимъ требованіямъ очевидно можно удовлетворить помощью двухъ обыкновенныхъ пантографовъ. Предполагая, что они устроены, и соединяя послѣ этого точки M_1, M'_2, M'_3 и M указаннымъ въ § 5 способомъ, мы получимъ сочлененіе, въ которомъ точка M постоянно принадлежитъ однородно - измѣняемой системѣ, заданной основными точками M_1, M_2, M_3.

7. Фигуры 6, 7 и 8 изображаютъ комбинаціи основного сочлененія съ пантографами, позволяющія свести число членовъ механизма

фиг. 6.



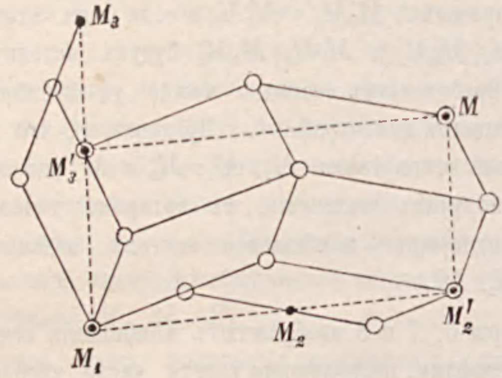
фиг. 7.



съ 20 на 16, а именно: два изъ элементовъ каждаго пантографа могутъ служить въ то-же время элементами основного, параллелограммнаго сочлененія. Три изображенныхъ случая различаются между собою тѣмъ, что въ первомъ изъ нихъ обѣ вспомогательныя точки находятся внѣ отрѣзковъ M_1M_2 и M_1M_3, во второмъ случаѣ онѣ обѣ внутри

этихъ отрѣзковъ, а въ третьемъ случаѣ одна изъ нихъ внѣ одного изъ этихъ отрѣзковъ а другая внутри другого.

Фиг. 8.



Сочлененія, изображенныя въ этомъ §, мы будемъ называть *сочлененіями С.*

8. Замѣтимъ для дальнѣйшаго формулы, которыми по заданному движенію основныхъ точекъ системы опредѣляется движеніе четвертой, произвольно выбранной.

Для подобно-измѣняемой системы мы будемъ пользоваться слѣдующими формулами [1]). Пусть будутъ (x_1, y_1) и (x_2, y_2) прямоугольныя Декартовы координаты основныхъ точекъ M_1 и M_2 и (x, y) координаты третьей, произвольно заданной точки M; тогда, означая черезъ k_1 и k_2 тангенсы угловъ (MM_1M_2) и (MM_2M_1), которые при сохраненіи подобія треугольниковъ остаются постоянными, имѣемъ:

$$x = \frac{k_1x_1 + k_2x_2 - k_1k_2(y_1 - y_2)}{k_1 + k_2},$$
$$y = \frac{k_1k_2(x_1 - x_2) + k_1y_1 + k_2y_2}{k_1 + k_2}. \tag{1}$$

Для однородно-измѣняемой системы, движеніе которой задано

---

[1]) П. Сомовъ. Кинематика подобно-измѣняемой системы двухъ измѣреній. 1885 г. Магист. дисс.

тремя основными точками: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $M_3(x_3, y_3)$, напишемъ сначала координаты точки M', лежащей въ вершинѣ параллелограмма $M_1M_3M'M_2$:

$$\begin{aligned} x' &= x_2 + x_3 - x_1 \ , \\ y' &= y_2 + y_3 - y_1 \ . \end{aligned} \tag{2}$$

Примѣняя эти формулы къ параллелограмму $M_1M'_3MM'_2$, содержащему вспомогательныя точки и заданную точку $M(x, y)$, и принимая во вниманіе, что

$$\begin{aligned} x'_2 - x_1 &= m_2(x_2 - x_1) \ , \qquad & y'_2 - y_1 &= m_2(y_2 - y_1) \ , \\ x'_3 - x_1 &= m_3(x_3 - x_1) \ , \qquad & y'_3 - y_1 &= m_3(y_3 - y_1) \ , \end{aligned}$$

гдѣ

$$m_3 = \frac{M_1M'_2}{M_1M_2} \ , \quad m_3 = \frac{M_1M'_3}{M_1M_3} \ ,$$

по свойству однородно измѣняемой системы, постоянныя числа, находимъ:

$$\begin{aligned} x &= (1 - m_2 - m_3)x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 \ , \\ y &= (1 - m_2 - m_3)y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 \ . \end{aligned} \tag{3}$$

9. Всѣ механизмы, которые содержатъ въ себѣ сочлененія, соотвѣтствующія подобно-измѣняемой или однородно-измѣняемой системѣ, можно классифицировать, основываясь на тѣхъ способахъ, которыми у этихъ сочлененій отнимаются всѣ степени свободы кромѣ одной. Такъ какъ мы имѣемъ дѣло теперь только съ отдѣльными точками измѣняемой системы, то для пониженія числа ея степеней свободы мы можемъ только ограничивать движеніе этихъ точекъ, или заставляя ихъ двигаться по опредѣленнымъ кривымъ линіямъ или закрѣпляя нѣкоторыя изъ нихъ неподвижно или, наконецъ, устанавливая какія-либо добавочныя связи между этими точками, напримѣръ задавая отношенія между ихъ скоростями. Принимая во вниманіе, что плоская подобно-измѣняемая система имѣетъ 4 степени свободы, а плоская однородно-измѣняемая система — 6 степеней свободы, можно всѣ относящіеся сюда механизмы размѣстить въ слѣдующихъ группахъ:

I. Подобно-измѣняемая система.

a) Одна точка неподвижна и задана траекторія другой точки.

b) Заданы траекторіи двухъ точекъ и отношеніе ихъ скоростей для всякаго положенія системы.

c) Заданы траекторіи трехъ точекъ.

II. Однородно-измѣняемая система.

a) Двѣ точки неподвижны и задана траекторія третьей точки.

b) Одна точка неподвижна, даны траекторіи двухъ другихъ точекъ и отношеніе ихъ скоростей.

c) Одна точка неподвижна и заданы траекторіи еще трехъ точекъ.

d) Даны траекторіи трехъ точекъ и отношенія между ихъ скоростями.

e) Даны траекторіи четырехъ точекъ и отношеніе между скоростями двухъ изъ нихъ.

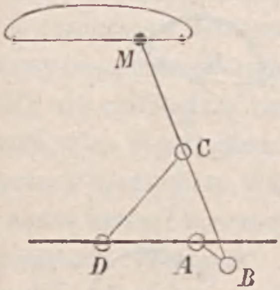
f) Заданы траекторіи пяти точекъ.

10. Если ограничиваться только шарнирными соединеніями, то практическая осуществимость механизмовъ, относящихся къ перечисленнымъ выше случаямъ, зависитъ отъ того, возможно-ли и насколько удобно шарнирнымъ механизмомъ воспроизводить задаваемыя траекторіи или устанавливать отношенія между скоростями различныхъ точекъ. Ввиду этого понятно, что на первомъ планѣ между задаваемыми траекторіями стоятъ: 1) кругъ, 2) кривыя, получаемыя шарнирнымъ четырехсторонникомъ и 3) прямая линія.

Относительно прямолинейнаго движенія, которымъ придется неоднократно пользоваться въ дальнѣйшемъ, сдѣлаемъ слѣдующія замѣчанія. Вмѣсто того, чтобы употреблять точныя „*прямила*", т. е. механизмы, дающіе теоретически точное прямолинейное движеніе, требующіе не менѣе пяти подвижныхъ членовъ (Hart, Bricard и др.), можно съ не меньшею и даже съ бо́льшею *практическою точностью* употреблять приближенныя прямила, состоящія только изъ трехъ подвижныхъ членовъ, такъ какъ у многихъ изъ нихъ степень ихъ отклоненія отъ прямолинейнаго движенія не превосходитъ тѣхъ погрѣшностей, которыя всеравно неизбѣжны при устройствѣ теоретически точныхъ прямилъ, содержащихъ большее число членовъ и шарнировъ, и вслѣдствіе которыхъ ихъ теоретическая точность теряетъ свое значеніе.

Эта мысль, неоднократно высказывавшаяся Чебышевымъ, особенно наглядно подтверждается на его механизмѣ, называемомъ „λ-образнымъ прямиломъ Чебышева“, которое мы и будемъ употреблять при составленіи описываемыхъ въ этой статьѣ механизмовъ. Оно нетолько отличается большою точностью на значительномъ прямолинейномъ пути [1]), но и хорошею прочностью движенія вслѣдствіе весьма цѣлесообразнаго расположенія членовъ; кромѣ того, когда оно входитъ составною частью другого болѣе сложнаго механизма, оно представляетъ еще то удобство, что точка, идущая по прямой линіи, вынесена на свободный конецъ одного изъ его членовъ (фиг. 9). Слѣдующіе относительные размѣры даютъ вполнѣ достаточную степень точности: $AB = 11$, $BC = CM = DC = 32$, $AD = 25$. При этомъ точка M не уклоняется замѣтно отъ прямой линіи приблизительно на длинѣ $= {}^2/_3 BM$. Эта прямая параллельна неподвижной прямой AD, что представляетъ также большое удобство въ примѣненіяхъ прямила къ болѣе сложнымъ механизмамъ.

фиг. 9.



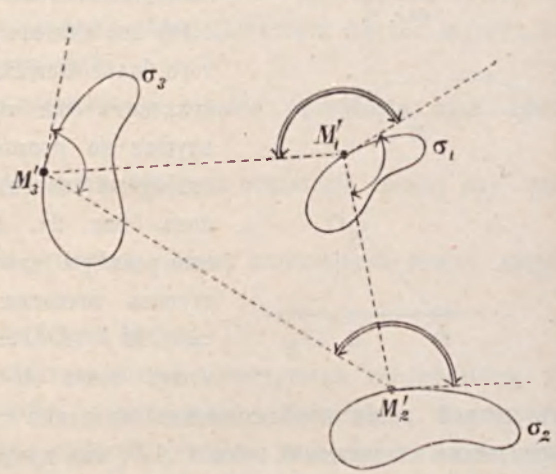
Механизмы, соотвѣтствующіе случаю I, *a*.

11. Если одна точка подобно-измѣняемой системы остается неподвижною, то движеніе ея характеризуется тѣмъ, что всѣ ея точки описываютъ подобныя между собою кривыя, имѣющія неподвижную точку общимъ центромъ подобія. Такое движеніе Бурместеръ называетъ „однообразнымъ“ (einförmig) движеніемъ подобно-измѣняемой системы. Сочлененіе A (§ 3) представляетъ собою въ этомъ случаѣ извѣстный обобщенный пантографъ (плагіографъ) Сильвестра, на которомъ мы и не будемъ останавливаться. Но мы воспользуемся однообраз-

[1]) Болѣе подробныя указанія см. у Н. Б. Делоне: „Передача вращенія и механическое черченіе кривыхъ шарнирно-рычажными механизмами“. 1894 г. стр. 12.

нымъ движеніемъ подобно-измѣняемой системы для устройства такого *механизма, въ которомъ-бы непрерывное движеніе одной точки по замкнутой кривой линіи преобразовывалось въ поочередное движеніе двухъ другихъ точекъ по двумъ между собою подобнымъ замкнутымъ линіямъ.* Пусть будетъ въ сочлененіи A сначала точка M_3 неподвижнымъ центромъ подобія. Двигая точку M_1 по какой-нибудь замкнутой линіи σ_1, мы приводимъ и точку M_2 въ движеніе по подобной-же линіи σ_2, причемъ у точекъ M_1 и M_2 соотвѣтственными положеніями будутъ такія, въ которыхъ касательныя къ ихъ траекторіямъ образуютъ съ прямыми M_3M_1 и M_3M_2 равные углы.

фиг. 10.



Проведемъ черезъ точку M_3 кривую σ_3, подобную σ_1, которая была-бы такъ расположена и имѣла-бы такіе линейные размѣры, чтобы точка M_2 въ нѣкоторомъ ея положеніи M_2' на кривой σ_2 служила центромъ подобія кривыхъ σ_3 и σ_1 (фиг. 10). Когда точка M_2 подъ вліяніемъ движенія точки M_1 придетъ въ положеніе M_2', то получится развѣтвленіе въ движеніи механизма: или точка M_2 будетъ продолжать свое движеніе по кривой σ_2, а точка M_3 будетъ оставаться неподвижною, или точка M_2 сдѣлается неподвижною, а точка M_3, если ее въ это время освободить, начнетъ, подъ вліяніемъ продолжающагося движенія точки M_1, совершать свое движеніе по кривой σ_3. Важно замѣтить, что въ послѣднемъ случаѣ точка M_2 сама собою закрѣпится неподвижно, такъ какъ будетъ служить центромъ подобія кривыхъ σ_3 и σ_1, все время, пока точки M_3 и M_1 не совершатъ по этимъ кривымъ цѣлыхъ оборотовъ. Точно такъ-же точка M_3, когда она возвратится въ свое первоначальное положеніе и точка M_2 будетъ снова выведена изъ состоянія покоя, закрѣпится сама собою, служа центромъ подобія траекторій точекъ M_1 и M_2. Такимъ образомъ нѣтъ надобности закрѣплять точки M_2 и M_3 механическимъ путемъ на все время цѣлаго оборота, а достаточно ихъ задерживать поочередно на весьма короткій промежутокъ времени. Конечно здѣсь предполагается, что устроены механизмы, которые позволяли-бы точкамъ M_1, M_2, M_3 совершать движенія только по опредѣленнымъ подобнымъ между собою кривымъ σ_1, σ_2, σ_3, которыя должны быть притомъ расположены указаннымъ выше образомъ.

12. Понятно, что для осуществленія описываемаго движенія кривая σ должна принадлежать къ числу такихъ линій, которыя могутъ быть описываемы механическимъ путемъ, и должно быть устроено механическое приспособленіе для поочереднаго задерживанія точекъ M_2 и M_3, что́ составляетъ главную трудность при устройствѣ описываемыхъ здѣсь механизмовъ. Но, если ограничиваться приближеннымъ, впрочемъ практически обыкновенно достаточно точнымъ результатомъ, то можно весьма простымъ способомъ достигнуть ***автоматическаго чередованія движеній.*** Будемъ предполагать опять, что точка M_1 ведущая. Если-бы кривыя σ_2 и σ_3 были иначе расположены, чѣмъ это было выше указано, то было-бы невозможно, чтобы при движеніи точки M_1 одна изъ точекъ M_2 и M_3 оставалась неподвижною въ теченіе конечнаго промежутка времени: а именно, получилось бы движеніе подобно-измѣняемой системы, относящееся уже къ случаю I, *c*, § 9. При этомъ для точекъ M_1, M_2, M_3 или могли-бы оставаться возможными замкнутые пути по кривымъ σ_1, σ_2, σ_3 (если не для всѣхъ, то для одной или двухъ изъ нихъ) или движеніе точекъ могло-бы быть только колебательнымъ по нѣкоторымъ частямъ кривыхъ σ_1, σ_2, σ_3. Появленіе того или другого случая зависитъ: 1) отъ того, какъ перемѣщены кривыя σ_2 и σ_3 относительно σ_1, и 2) отъ размѣровъ сочлененія A. Предположимъ теперь, что кривыя σ_2 и σ_3 отклонены лишь весьма мало отъ ихъ положеній, указанныхъ въ § 11, или что одна изъ нихъ оставлена безъ измѣненія и лишь другая кривая весьма мало отклонена. Тогда произойдетъ слѣдующее явленіе: одна изъ точекъ M_2, M_3, напр. M_2 будетъ описывать свой путь со скоростью, *почти* пропорціональною скорости точки M_1, а другая точка, M_3, будетъ оставаться *почти* неподвижною, совершая едва замѣтное перемѣщеніе взадъ и впередъ по весьма малой дугѣ своей траекторіи σ_3. При этомъ, вообще говоря, случится еще слѣдующее: когда точка M_2 будетъ закан

чивать свой путь, то точка M_3 не будетъ находиться совершенно въ томъ мѣстѣ, которое она должна была-бы занимать при вполнѣ правильномъ расположеніи кривыхъ σ_2, σ_3; поэтому, когда точка M_2 придетъ въ свое начальное положеніе, точка M_3 будетъ находиться въ движеніи, и этимъ самымъ по причинѣ, указанной въ § 11, закрѣпитъ на мѣстѣ точку M_2; т. е., точнѣе говоря, точка M_2, начиная съ этого момента, будетъ въ состояніи лишь весьма мало отклоняться отъ своего нормальнаго положенія покоя, подобно тому, какъ это было раньше съ точкою M_3. Эта-же послѣдняя точка будетъ слѣдовать за движеніемъ точки M_1; когда она закончитъ свое движеніе, то точка M_2 будетъ уже немного отклонена отъ своего нормальнаго положенія покоя, и своимъ движеніемъ закрѣпитъ точку M_3. Такимъ образомъ движенія точекъ M_2 и M_3 будутъ чередоваться автоматически. Опытъ показываетъ, что нетолько достаточно весьма малаго отклоненія кривыхъ σ отъ ихъ нормальныхъ положеній, чтобы получить это чередованіе, но при этомъ одна изъ точекъ M_2, M_3, вслѣдствіе слабой измѣняемости членовъ механизма и небольшого, почти неизбѣжнаго хлябанія на осяхъ вращенія, будетъ фактически оставаться на мѣстѣ и лишь весьма незадолго до прихода другой точки въ начальное положеніе выйдетъ изъ состоянія покоя. Во всякомъ случаѣ допущенная *геометрическая* неправильность окажется отчасти сглаженною благодаря *механическимъ* условіямъ.

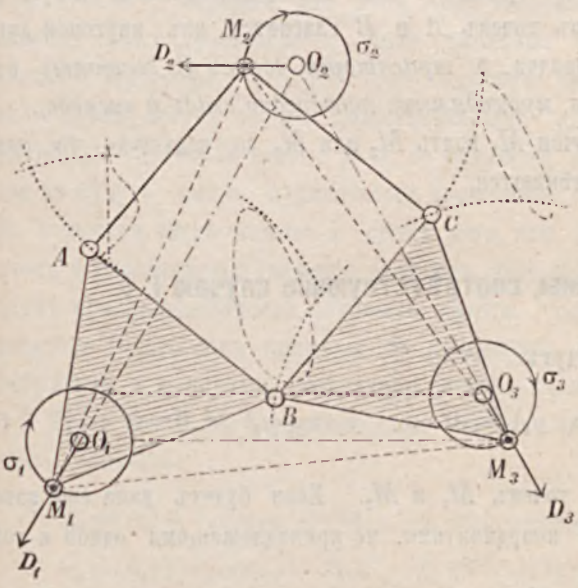
Въ какомъ направленіи выгоднѣе всего сдѣлать отклоненіе, это будетъ каждый разъ зависѣть отъ формы кривыхъ σ, отъ того, какія точки на нихъ принимаются за исходныя, и отъ формы треугольника, служащаго основаніемъ сочлененію A. Впрочемъ на практикѣ проще всего поступать слѣдующимъ образомъ: построить сочлененіе A и механизмы, производящіе движенія по кривымъ σ, эти послѣдніе механизмы установить по возможности точно въ ихъ нормальныхъ положеніяхъ, а потомъ, измѣняя весьма мало положеніе одного изъ нихъ по разнымъ направленіямъ, пробами найти такое положеніе его, при которомъ достаточно прочно устанавливается чередованіе движеній. На опытѣ это достигается весьма легко.

13. МЕХАНИЗМЪ I. *Преобразованіе непрерывнаго кругового движенія одной точки въ круговыя движенія двухъ другихъ точекъ, совершаемыя поочередно.* Самое простое примѣненіе сказаннаго въ §§ 11 и 12 получится, если заставить точки M_1, M_2, M_3 двигаться по тремъ кругамъ. Задавъ радіусъ r_1 и центръ O_1 круга ведущей точки M_1 произвольно и выбравъ какія-нибудь начальныя положенія точекъ M_2 и M_3, заставимъ точку M_2 двигаться по такому кругу, чтобы точка M_3 въ ея начальномъ положеніи была общимъ центромъ подобія въ движеніи по двумъ предыдущимъ кругамъ; и точно также заставимъ точку M_3 оставаться на такомъ кругѣ, чтобы точка M_2 въ ея начальномъ положеніи была центромъ подобія круговыхъ движеній точекъ M_1 и M_3. Это приводитъ къ равенствамъ:

$$r_1 \,.\, M_2M_3 = r_2 \,.\, M_3M_1 = r_3 \,.\, M_1M_2 \quad .$$

На фиг. 11 изображенъ такой механизмъ, причемъ для подобно-измѣняемой системы взятъ равносторонній треугольникъ, вслѣдствіе чего и радіусы всѣхъ трехъ круговъ равны. Кромѣ того и неизмѣняемые равносторонніе треугольники, входящіе въ составъ сочлененія A, взяты равными. *Въ этомъ случаѣ каждая изъ точекъ можетъ служить ведущею,* причемъ будетъ происходить чередованіе вращеній двухъ другихъ точекъ. Вращенія эти совершаются *съ тою-же угловою скоростью,* какъ вращеніе ведущей точки. Механизмъ, включая сюда мотыли, которые ведутъ точки M_1, M_2, M_3 по кругамъ, состоитъ изъ семи подвижныхъ членовъ. Прямыя O_1D_1, O_2D_2 (параллельныя прямой M_1M_3 въ ея начальномъ положеніи) и O_3D_3 указываютъ такія положенія мотылей, въ кото-

фиг. 11.



рыхъ они, послѣ одного оборота ведущей точки, приходятъ въ состояніе покоя.

14. *Преобразованіе непрерывнаго кругового движенія одной точки въ движеніе другой точки по двумъ различнымъ круговымъ дугамъ.* Для этой цѣли можетъ служить тотъ-же механизмъ I. Обратимъ вниманіе на движенія точекъ A, B и C: если каждую изъ точекъ M_1, M_2, M_3 поочередно принимать за ведущую, то для каждой изъ точекъ A, B, C получатся три траекторіи; двѣ круговыя дуги и нѣкоторая линія высшаго порядка, которую мы точнѣе не будемъ опредѣлять. Эти траекторіи нужно разсматривать попарно; а именно, если точка M_1 ведущая, и M_2 совершаетъ круговое движеніе, а M_3 остается неподвижною, то точка A описываетъ кривую высшаго порядка, а B и C круговыя дуги съ общимъ центромъ въ M_3; когда M_2 остается на мѣстѣ, а M_3 двигается по своему кругу, то точка B совершаетъ движеніе по нѣкоторой кривой высшаго порядка, а точки C и A описываютъ круговыя дуги съ общимъ центромъ въ M_2. Такимъ образомъ, пока точка M_1 остается ведущею, траекторія каждой изъ точекъ A и B слагается изъ круговой дуги и кривой высшаго порядка, а *траекторія точки C состоитъ изъ двухъ круговыхъ дугъ, проходимыхъ поочередно взадъ и впередъ.*.

Если вмѣстѣ точки M_1 взять M_2 или M_3 за ведущую, то роли точекъ A, B, C мѣняются.

Механизмы, соотвѣтствующіе случаю I, b.

15. Пусть будутъ

$$f_1(x_1, y_1) = 0 \quad , \qquad f_2(x_2, y_2) = 0 \tag{4}$$

уравненія траекторій точекъ M_1 и M_2. Если будетъ дана еще зависимость между двумя координатами, не принадлежащими одной и той-же точкѣ, наприм.

$$f(x_1, y_2) = 0 \,, \tag{5}$$

то этимъ будетъ установлено и отношеніе между скоростями этихъ точекъ во всякомъ ихъ положеніи; а траекторія всякой третьей точки подобно-измѣняемой системы опредѣлятся исключеніемъ координатъ x_1, y_1, x_2, y_2 изъ уравненій (1), (4) и (5). Если кромѣ того одна изъ координатъ будетъ задана въ функціи времени, то этимъ координаты всѣхъ точекъ опредѣлятся какъ функціи времени; поэтому можно также предполагать, что координаты x_1, y_1, x_2, y_2 непосредственно задаются какъ функціи времени, удерживая однако-же въ виду ту точку зрѣнія, которая отмѣчена какъ случай I, *b*.

Приложимъ эти разсужденія къ двумъ механизмамъ: къ удвоителю вращеній и къ механизму для преобразованія гармоническаго движенія съ измѣненіемъ фазы и амплитуды колебанія.

16. МЕХАНИЗМЪ II. *Точный удвоитель вращенія.*

Говоря объ удвоителѣ вращеній, мы будемъ предполагать, что онъ теоретически „точный", т. е. удвоеніе вращеній происходитъ *съ постояннымъ сохраненіемъ отношенія* 2 : 1 *угловыхъ скоростей*, и что это удвоеніе достигается исключительно *шарнирными соединеніями* членовъ механизма. Первый точный удвоитель принадлежитъ Н. Б. Делоне [1]), который для этой цѣли воспользовался обращеніемъ движенія своего „реверзора". Ниже описанные мною удвоители (настоящаго параграфа и § 28) не представляютъ какихъ-либо практическихъ преимуществъ передъ вышеуказаннымъ удвоителемъ; и вообще всѣ точные удвоители такого рода, не исключая и удвоителя Делоне, едва-ли будутъ имѣть практическое примѣненіе, такъ какъ состоятъ изъ большого числа членовъ и кромѣ того для устраненія мертвыхъ точекъ и развѣтвленій движенія требуютъ еще добавочныхъ направляющихъ приспособленій или маховыхъ колесъ. Здѣть приводятся эти удвоители только какъ примѣры на приложеніе кинематики подобно-измѣняемой и однородно-измѣняемой системъ къ механизмамъ.

Пусть точка M_2 вращается вдвое скорѣе, чѣмъ точка M_1; тогда можно написать:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + r_1 \cos(\alpha_1 + \omega t), \quad y_1 = b_1 + r_1 \sin(\alpha_1 + \omega t), \\ x_2 &= a_2 + r_2 \cos(\alpha_2 + 2\omega t), \quad y_2 = b_2 + r_2 \sin(\alpha_2 + 2\omega t), \end{aligned} \tag{6}$$

гдѣ значеніе буквъ не требуетъ объясненія. Подставляя эти выра-

[1]) Н. Б. Делоне: „Передача вращенія и механическое черченіе кривыхъ шарнирно-рычажными механизмами". 1894 г., стр. 33.

женія въ формулы (1) и исключая t, получимъ для координатъ точки M уравненіе четвертаго порядка, опредѣляющее конхоиду Паскаля:

$$[(x-a)^2+(y-b)^2+p^2+q^2]^2-[m(x-a+p)+n(y-b+q)]^2$$
$$-[n(x-a-p)-m(y-b-q)]^2=0\ ; \qquad (7)$$

причемъ

$$a=\frac{k_1a_1+k_2a_2-k_1k_2(b_1-b_2)}{k_1+k_2}\,,\quad b=\frac{k_1k_2(a_1-a_2)+k_1b_1+k_2b_2}{k_1+k_2}\,,$$

$$m=\frac{k_1r_1(\cos\alpha_1-k_2\sin\alpha_1)}{k_1+k_2}\,,\quad n=\frac{k_1r_1(\sin\alpha_1+k_2\cos\alpha_1)}{k_1+k_2}\,,\qquad (8)$$

$$p=\frac{k_2r_2(\cos\alpha_2+k_1\sin\alpha_2)}{k_1+k_2}\,,\quad q=\frac{k_2r_2(\sin\alpha_2-k_1\cos\alpha_2)}{k_1+k_2}\,.$$

Поэтому, если наоборотъ заставить точку M двигаться по этой кривой, а точки M_1 и M_2 по указаннымъ кругамъ, то M_2 будетъ имѣть вдвое большую угловую скорость, чѣмъ точка M_1. Такимъ образомъ задача о шарнирномъ удвоителѣ сводится къ устройству шарнирнаго механизма для черченія конхоиды Паскаля. Не останавливаясь подробно на описаніи такого механизма, замѣтимъ только, что онъ очевидно можетъ быть построенъ какъ обращеніе шарнирнаго механизма, воспроизводящаго эллиптическое движеніе плоской неизмѣняемой фигуры. Для этого же послѣдняго механизма нужно двѣ точки плоской фигуры заставить помощью двухъ прямилъ (§ 10) двигаться по двумъ прямымъ линіямъ l_1 и l_2. Удерживая плоскую фигуру неподвижною и освобождая плоскость, содержащую прямыя l_1 и l_2, мы получимъ очевидно такое движеніе послѣдней, въ которомъ всѣ точки описываютъ Паскалевы конхоиды. Нетрудно подыскать положеніе и размѣры этого механизма такъ, чтобы нѣкоторая заранѣе намѣченная точка описывала требуемую кривую (7).

На фигурѣ 12 изображена лишь существенная часть удвоителя, для котораго, подобно измѣняемый треугольникъ M_1MM_2 взятъ прямоугольнымъ и равнобедреннымъ, центры круговъ на осяхъ координатъ, въ одинаковомъ разстояніи отъ начала, и радіусы ихъ равными. Кромѣ того принято:

$$\alpha_1=0\ ,\quad \alpha_2=\frac{\pi}{2}\ .$$

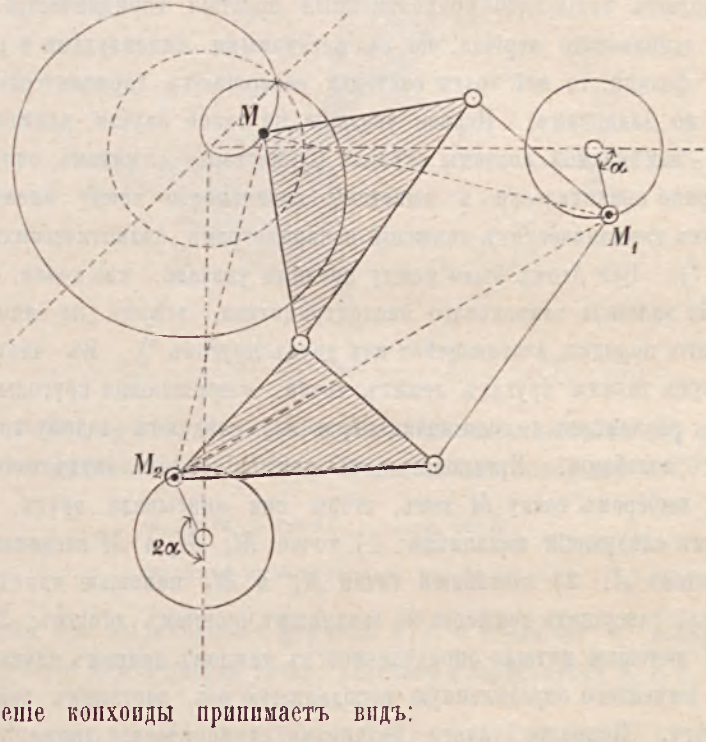
Тогда можно положить:

$$k_1 = -1, \quad k_2 = -1, \quad a_1 = b_2 = s, \quad a_2 = 0, \quad b_1 = 0; \quad r_1 = r_2 = r;$$

и формулы (8) даютъ:

$$a = 0, \quad b = 0, \quad 2m = 2q = r, \quad 2n = 2p = -r.$$

фиг. 12.



Уравненіе конхоиды принимаетъ видъ:

$$\left(x^2 + y^2 - \frac{r^2}{2}\right)^2 - \frac{r^2}{2}\left[x^2 + y^2 - r(x - y) + \frac{r^2}{2}\right] = 0.$$

Поворачивая координатныя оси па уголъ $\frac{3}{4}\pi$, находимъ:

$$\left(x'^2 + y'^2 - \frac{r^2}{2}\right)^2 - \frac{r^2}{2}\left(x'^2 + y'^2 + \sqrt{2}\, r x' + \frac{r^2}{2}\right) = 0;$$

а полагая $x' = x'' - \frac{1}{2}\sqrt{2}\, r$, $y' = y''$, получаемъ

$$\left(x''^2 + y''^2 - \sqrt{2}\, r x''\right)^2 - \frac{r^2}{2}\left(x''^2 + y''^2\right) = 0,$$

уравненіе конхоиды Паскаля въ простѣйшемъ видѣ, въ какомъ оно обыкновенно разсматривается, т. е. когда начало координатъ находится въ двойной точкѣ кривой, а ось (x) направлена по ея оси симметріи. Кромѣ того мы видимъ, что радіусъ основного круга конхоиды, а также и ея параметръ равны $r/\sqrt{2}$.

17. МЕХАНИЗМЪ III. *Преобразованіе гармоническихъ движеній.* Если двѣ точки M_1 и M_2 плоской подобно-измѣняемой системы совершаютъ какія-либо прямолинейныя простыя гармоническія колебанія одинаковаго періода, но съ различными амплитудами и различными фазами, то всѣ точки системы совершаютъ гармоническія движенія по эллипсамъ. Первое указаніе на такой случай движенія подобно-измѣняемой системы сдѣлалъ Бурместеръ [1]); потомъ оно было разобрано аналитически и выведены зависимости между элементами данныхъ гармоническихъ движеній и параметрами эллиптическихъ движеній [2]). При этомъ было между прочимъ указано, что точки, описывающія эллипсы одинаковаго эксцентрицитета, лежатъ на линіи четвертаго порядка, слагающейся изъ двухъ круговъ [3]). Въ частности, на двухъ такихъ кругахъ лежатъ точки, совершающія круговыя движенія, равномѣрныя, если точки M_1 и M_2 слѣдуютъ закону гармоническаго колебанія. Предполагая, что движенія этихъ двухъ точекъ заданы, выберемъ точку M такъ, чтобы она описывала кругъ, и построимъ слѣдующій механизмъ: 1) точки M_1, M_2 и M соединимъ сочлененіемъ A; 2) заставимъ точки M_1 и M_2 помощью какихъ-либо прямилъ совершать движенія по заданнымъ прямымъ линіямъ; 3) точку M помощью мотыля опредѣленной въ каждомъ данномъ случаѣ длины и имѣющаго опредѣленную неподвижную ось, заставимъ двигаться по кругу. Помощью такого механизма гармоническое движеніе точки M_1 преобразуется въ гармоническое движеніе точки M_2.

Сдѣлаемъ слѣдующее приложеніе предыдущихъ разсужденій: построимъ механизмъ для преобразованія гармоническаго колебанія по данной прямой въ другое колебаніе на другомъ отрѣзкѣ той-же пря-

---

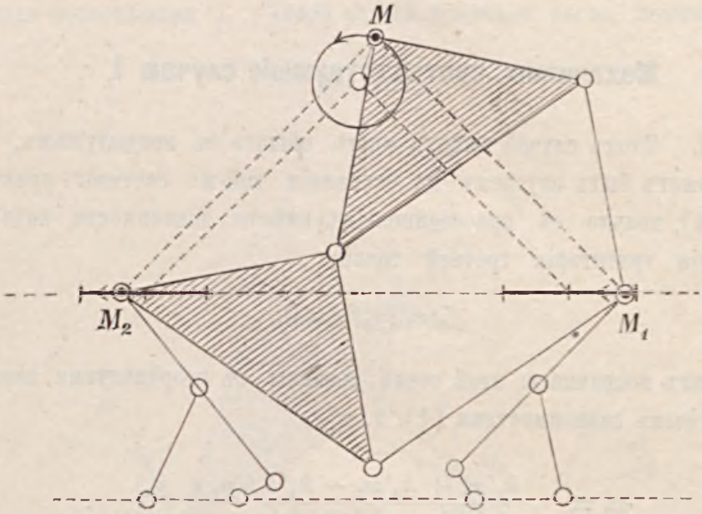
[1]) Zeitschrift f. Math. und Phys B. XXIII.

[2]) П. Сомовъ. Кинематика подобно-измѣняемой системы двухъ измѣреній. Магист. диссерт. 1885 г., стр. 139—156.

[3]) Тамъ-же, стр. 154.

мой, съ такою-же амплитудою, но съ фазою, отличающеюся отъ фазы перваго колебанія на прямой уголъ. Для этого примемъ данную пря-

фиг. 13.



мую за ось (x), средину между средними положеніями точекъ M_1 и M_2 за начало координатъ (фиг. 13), и слѣдовательно положимъ:

$$x_1 = a + r\cos t\,, \qquad y_1 = 0\,,$$

$$x_2 = -a - r\sin t\,, \quad y_2 = 0\,.$$

Подставляя эти выраженія въ формулы (1) и исключая t, находимъ для траекторіи какой-нибудь точки, заданной координатами k_1 и k_2:

$$2x^2 + 2\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right)xy + \left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2}\right)y^2 -$$

$$- 2a\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)y + 2a^2 - r^2 = 0.$$

Удовлетворяя условіямъ, чтобы этотъ эллипсъ былъ кругомъ, находимъ только двѣ дѣйствительныхъ, изолированныхъ точки, въ которыя въ данномъ случаѣ обращается упомянутое выше геометрическое мѣсто. Для этихъ точекъ имѣемъ:

$$k_1 = k_2 = \pm 1;$$

такъ что точка M_3 должна вмѣстѣ съ точками M_1 и M_2 образовать равнобедренный прямоугольный треугольникъ. Центръ круга, описываемаго точкою M, лежитъ на оси (y), въ разстояніи a отъ начала координатъ, а радіусъ его равенъ $r / \sqrt{2}$.

Механизмы, соотвѣтствующіе случаю I, *c*.

18. Этотъ случай имѣетъ много общаго съ предыдущимъ, такъ какъ можетъ быть изучаемъ на основаніи той-же системы уравненій (1) и (4), только съ присоединеніемъ вмѣсто зависимости вида (5) уравненія траекторіи третьей точки:

$$f_3(x_3, y_3) = 0. \tag{9}$$

Такъ какъ координаты этой точки связаны съ координатами первыхъ двухъ точекъ зависимостями (1), т. е.

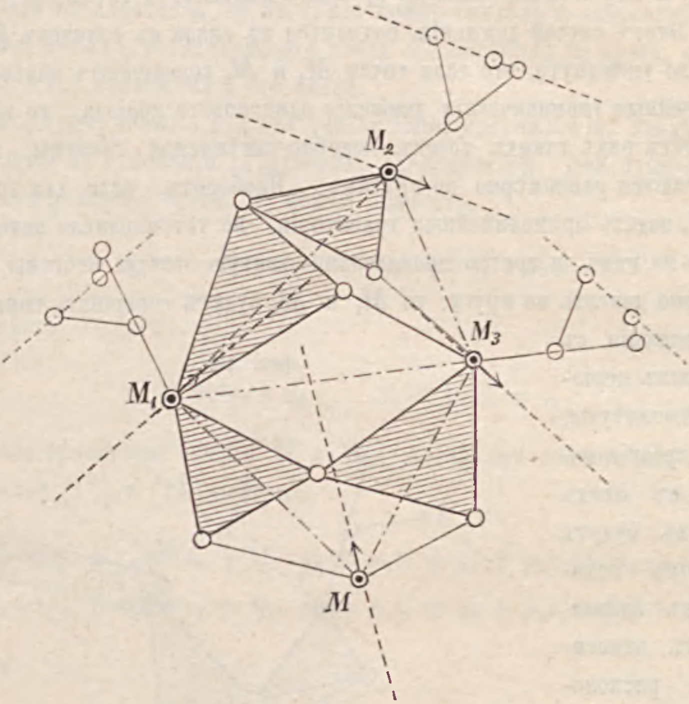
$$\left.\begin{aligned} x_3 &= \frac{k_1' x_1 + k_2' x_2 - k_1' k_2' (y_1 - y_2)}{k_1' + k_2'}, \\ y_3 &= \frac{k_1' k_2' (x_1 - x_2) + k_1' x_1 + k_2' x_2}{k_1' + k_2'}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

гдѣ k_1' и k_2' опредѣляютъ подобно-измѣняемый треугольникъ $M_1M_2M_3$, то мы имѣемъ опять пять уравненій (4), (9) и (10), помощью которыхъ пять изъ координатъ могутъ быть выражены въ функціи шестой, или въ функціи времени, если эта послѣдняя координата задана какъ функція времени; а послѣ этого можетъ быть найдено движеніе всякой новой, произвольно заданной точки.

Кромѣ основного отличія настоящаго случая, состоящаго въ томъ, что сразу задаются траекторіи не двухъ а трехъ точекъ, особенность въ примѣненіяхъ его къ механизмамъ заключается еще въ томъ, что хотя траекторіи трехъ точекъ и могутъ быть взяты произвольно, но перемѣщенія точекъ на нихъ заключены вообще говоря въ нѣкоторыхъ предѣлахъ, въ которыхъ только и можетъ сохраняться подобіе треугольника $M_1M_2M_3$. Иногда можетъ представлять практическій интересъ именно опредѣленіе этихъ предѣловъ для каждой точки.

19. МЕХАНИЗМЪ IV, *для прямолинейнаго движенія какого* *угодно числа точекъ съ пропорціонально измѣняющимися скоростями.* Извѣстно, что если три точки плоской подобно-измѣняемой системы двигаются по прямымъ линіямъ, то всѣ ея точки двигаются прямолинейно, причемъ отношенія между скоростями всѣхъ точекъ остаются постоянными [1]). Такой случай движенія легко можетъ быть

фиг. 14.



воспроизведенъ помощью механизма, состоящаго изъ сочлененія A и трехъ прямилъ, направляющихъ точки M_1, M_2, M_3 по тремъ прямымъ линіямъ. Чтобы включить сюда какую-либо четвертую точку *той-же подобно-измѣняемой системы,* нужно построить еще сочлененіе A, содержащее двѣ изъ предыдущихъ точекъ и точку M. Такой механизмъ

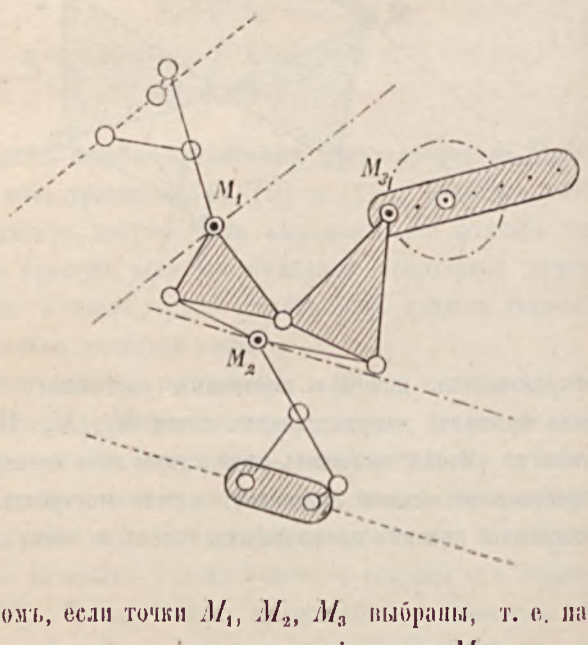
---

[1]) Этотъ случай движенія подобно-измѣняемой системы одинъ изъ первыхъ, которые были изучаемы.

изображенъ на фигурѣ 14. Понятно, что его можно сколько угодно надстраивать, вводя, подобно предыдущему, новыя сочлененія A. Мы получимъ такимъ образомъ цѣлую сѣть точекъ, принадлежащихъ одной и той-же подобно-измѣняемой системѣ и совершающихъ прямолинейныя движенія съ пропорціональными скоростями.

20. МЕХАНИЗМЪ V, *для одновременнаго измѣненія нѣсколькихъ элементовъ гармоническаго движенія.* Предположимъ, что точки M_1 и M_2 направляются по прямымъ линіямъ, а точка M_3 — по кругу. Этотъ случай движенія находится въ связи съ случаемъ § 17. Тамъ было упомянуто, что если точки M_1 и M_2 совершаютъ какія-либо прямолинейныя гармоническія движенія одинаковаго періода, то всегда существуетъ рядъ такихъ точекъ подобно-измѣняемой системы, которыя двигаются равномѣрно по кругамъ. Наоборотъ, если для точекъ M_1 и M_2 задать прямолинейныя траекторіи, не устанавливая законовъ движенія по нимъ, а третію произвольно взятую точку системы, M_3, равномѣрно двигать по кругу, то M_1 и M_2 будутъ совершать гармоническія движенія съ одинаковымъ періодомъ. Амплитуды, фазы и среднія положенія въ этихъ движеніяхъ будутъ при этомъ находиться въ зависимости отъ относительнаго расположенія точекъ M_1, M_2, M_3, отъ положеній заданныхъ траекторій первыхъ двухъ точекъ и отъ величины радіуса круга третьей точки. Такимъ образомъ, если точки M_1, M_2, M_3 выбраны, т. е. параметры k_1' и k_2' заданы, и дано круговое движеніе точки M_3, то можно, мѣняя положенія прямолинейныхъ траекторій точекъ M_1 и M_2, по-

фиг. 15.



лучать гармоническія движенія съ различною относительною фазою, различными амплитудами и различными средними положеніями. Для устройства такого механизма (фиг. 15) можно построить сочлененіе A, точку M_1 заставить двигаться по прямой линіи помощью неизмѣннымъ образомъ укрѣпленнаго прямила, прямило же для точки M_2 не устанавливать на плоскости неизмѣннымъ образомъ, а его оси вращенія помѣстить на особой пластинкѣ, которой можно было бы давать различныя положенія па плоскости; то-же самое можно сдѣлать и относительно оси вращенія мотыля, заставляющаго точку M_3 двигаться по кругу, причемъ можетъ быть измѣняема и его длина.

Формулы, дающія всѣ требуемыя выше соотношенія, могутъ быть составлены на основаніи слѣдующихъ зависимостей. Для равномѣрнаго кругового движенія точки M_3 можно написать:

$$x_3 = a + r\cos t\,, \qquad y_3 = b + r\sin t\,. \tag{11}$$

Пусть будутъ

$$y_1 = p_1 x_1 + q_1\,, \qquad y_2 = p_2 x_2 + q_2 \tag{12}$$

уравненія траекторій точекъ M_1 и M_2; тогда при помощи ихъ изъ зависимостей (10) и (11) найдемъ;

$$\begin{aligned} x_1 &= s_1 + r_1\cos(\alpha_1 + t), & y_1 &= p_1 s_1 + q_1 + p_1 r_1 \cos(\alpha_1 + t). \\ x_2 &= s_2 + r_2\cos(\alpha_2 + t), & y_2 &= p_2 s_2 + q_2 + p_2 r_2 \cos(\alpha_2 + t), \end{aligned} \tag{13}$$

причемъ

$$s_1 = (k_1' + k_2')(a + k_1'k_2'q_1 - k_1'k_2'q_2),$$

$$s_2 = (k_1' + k_2')(b - k_1'q_1 - k_2'q_2),$$

$$r_1 = rk_2'(k_1' + k_2')\sqrt{(1+k_1'^2)(1+p_2^2)}\,,$$

$$r_2 = rk_1'(k_1' + k_2')\sqrt{(1+k_2'^2)(1+p_1^2)}\,,$$

$$tg\alpha_1 = -\frac{1 + k_1'p_2}{k_1' - p_2}\,, \qquad tg\alpha_2 = -\frac{1 - k_2'p_1}{k_2' + p_1}\,.$$

Припоминая значеніе параметровъ k_1' и k_2' и означая углы $(M_3M_1M_2)$ и $(M_3M_2M_1)$ черезъ β_1 и β_2, а углы прямыхъ (12) съ осью

(x) черезъ γ_1 и γ_2, находимъ изъ послѣднихъ двухъ формулъ для относительной фазы гармоническихъ колебаній:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = (\beta_2 - \beta_1) + (\gamma_2 - \gamma_1) \,. \tag{14}$$

Отсюда мы видимъ, что *если въ треугольникѣ* $M_1M_2M_3$ *взять* $\beta_2 = \beta_1$, *то относительная фаза гармоническихъ движеній измѣряется угломъ между прямыми, по которымъ эти движенія происходятъ.*

21. МЕХАНИЗМЪ VI, *которымъ достигается преобразованіе равномѣрнаго круговаго движенія одновременно: 1) въ равномѣрное движеніе по полуокружности взадъ и впередъ и 2) въ половину гармоническаго движенія, съ остановкою точки вмѣсто второй половины этого движенія.* Пусть будутъ траекторіи двухъ точекъ круговыя, а третьей—прямая линія; этотъ случай приводитъ къ механизмамъ, въ которыхъ равномѣрное круговое движеніе точки M_1 преобразовывается въ нѣкоторое, вообще говоря неравномѣрное, колебательное по дугѣ круга точки M_2 и въ нѣкоторое прямолинейное колебательное точки M_3. Ввиду разсмотрѣнія одного относящагося сюда приложенія, выпишемъ соотвѣтствующія настоящимъ условіямъ зависимости. Предполагая, что прямолинейное движеніе происходитъ по оси (x), а центры круговыхъ траекторій взяты произвольно, можно написать:

$$x_1 = a_1 + r_1 \cos t, \qquad y_1 = b_1 + r_1 \sin t, \tag{15}$$

$$x_2 = a_2 + r_2 \cos \varphi, \qquad y_2 = b_2 + r_2 \sin \varphi, \tag{16}$$

$$x_3 = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 - k_1 k_2 (y_1 - y_2)}{k_1 + k_2}, \tag{17}$$

$$y_3 = \frac{k_1 k_2 (x_1 - x_2) + k_1 y_1 + k_2 y_2}{k_1 + k_2} = 0 \,, \tag{18}$$

гдѣ φ нѣкоторая функція времени. Для ея опредѣленія имѣемъ уравненіе (18), изъ котораго, при помощи формулъ (15), (16) и (17) находимъ:

$$\sin(\beta_1 - \varphi) = \frac{B \cos \beta_1}{k_2 r_2} + \frac{k_1 r_1 \cos \beta_1}{k_2 r_2 \cos \beta_2} \sin(\beta_2 + t) \,; \tag{19}$$

причемъ:

$$B = k_1 k_2 (a_1 - a_2) + k_1 b_1 + k_2 b_2 \,, \tag{20}$$

а углы β_1 и β_2 имѣютъ то-же значеніе, какъ въ § 20. Послѣ этого x_2, y_2 и x_3 могутъ быть выражены въ функціи t, т. е. въ зависимости отъ положенія точки M_1. Замѣтимъ только формулу:

$$x_3 = \frac{1}{k_1 + k_2}\left[A + \frac{k_1 r_1}{\cos\beta_2}\cos(\beta_2 + t) + \frac{k_2 r_2}{\cos\beta_1}\cos(\beta_1 - \varphi)\right], \quad (21)$$

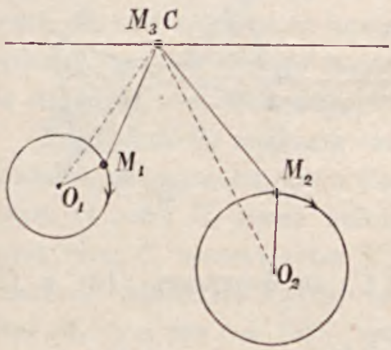
гдѣ

$$A = k_1 a_1 + k_2 a_2 - k_1 k_2 (b_1 - b_2). \quad (22)$$

Формула (19) позволяетъ выбрать параметры механизма такъ, чтобы данной дугѣ, проходимой точкою M_1, соотвѣтствовала данная дуга, проходимая точкою M_2, и т. п.

Не останавливаясь на этихъ вопросахъ, разсмотримъ тотъ частный случай механизма, когда на траекторіи точки M_3 находится такая точка C, которая могла бы служить центромъ подобія въ „однообразномъ" (§ 11) движеніи подобно-измѣняемой системы, опредѣляемомъ круговымъ движеніемъ точки M_1, и когда при этомъ уголъ (O_1CO_2) (фиг. 16) между прямыми, соединяющими центры траекторій M_1 и M_2 съ точкою C, равенъ углу $(M_1M_3M_2)$. Въ этомъ случаѣ точка M_3, придя въ положеніе C, можетъ или сдѣлаться неподвижною или продолжать свое прямолинейное движеніе, т. е. въ соотвѣтственномъ положеніи механизма происходитъ развѣтвленіе движенія. Если положенія центровъ вращенія и размѣры всѣхъ частей механизма считать теоретически точными, то точка M_3, послѣ задержки ея въ точкѣ C, будетъ постоянно оставаться неподвижною, т. е. начнется „однообразное" круговое движеніе подобно-измѣняемой системы. Можно достигнуть автоматической задержки въ точкѣ C, если допустить маленькую неправильность, напр. измѣнивъ весьма мало положеніе центра O_2 или радіусъ r_2. Точка M_3 будетъ тогда во время полуоборота точки M_1

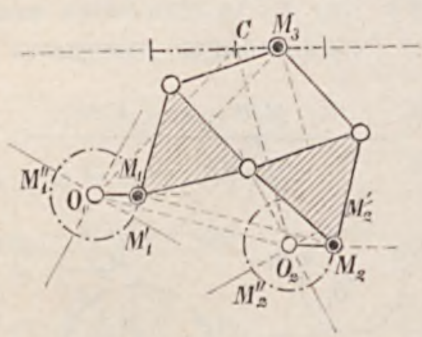
фиг. 16.



оставаться почти на мѣстѣ или, говоря точнѣе, совершать весьма малое перемѣщеніе, котораго впрочемъ практически почти не будетъ происходить вслѣдствіе измѣняемости членовъ механизма или хлябанія на осяхъ вращенія; при второмъ-же полуоборотѣ точки M_1, точка M_3 совершитъ прямолинейное движеніе взадъ и впередъ и возвратится въ точку C. Точка M_2 будетъ во время стоянія точки M_3, по свойству „однообразнаго" движенія, вращаться въ ту-же сторону какъ точка M_1 и съ тою-же угловою скоростью, а при колебательномъ движеніи точки M_3 дѣлать полуоборота назадъ, но вообще говоря уже съ иною, перемѣнною угловою скоростью. Опытъ показываетъ, что легко можетъ быть достигнута автоматическая перемѣна движеній, подобно тому, какъ это было указано въ § 13. Нужно впрочемъ замѣтить, что вслѣдствіе допущенной неточности механизма и измѣняемости его членовъ точка M_2 будетъ описывать немного менѣе полуокружности и на концахъ ея пути равномѣрность движенія будетъ нарушаться.

На фигурѣ 17 изображенъ механизмъ, въ которомъ вышеприведенныя соображенія осуществлены при слѣдующихъ, наиболѣе упрощенныхъ предположеніяхъ: треугольникъ $M_1M_2M_3$ равносторонній, такъ что $k_1 = k_2 = \sqrt{2}$; далѣе $r_1 = r_2$, $A = 0$, $B = 0$. Въ этомъ случаѣ треугольникъ CO_1O_2 тоже долженъ быть равностороннимъ, причемъ положеніе центровъ O_1 и O_2 въ остальномъ остается произвольнымъ. При этихъ условіяхъ и предполагая начало координатъ въ точкѣ C, по формуламъ (19) и (21) находимъ:

Фиг. 17.



$$\varphi = -t\,,$$

$$x_3 = 2r_1 \cos\left(\frac{\pi}{3} + t\right).$$

Первая изъ этихъ формулъ показываетъ, что и *обратное вращеніе* точки M_2 происходитъ теперь равномѣрно при равномѣрномъ движеніи точки M_1. На фигурѣ 17 изображено положеніе механизма при $t = 0$;

при этомъ O_1M_1 и O_2M_2 параллельны оси (x), а $CM_3 = r_1$. При поворотѣ точки M_1 по часовой стрѣлкѣ на уголъ $\pi/6$, точка M_2 поворачивается на тотъ-же уголъ обратно часовой стрѣлкѣ и приходитъ въ положеніе M_2', а точка M_3 приходитъ въ C. Послѣ этого точка M_2 или можетъ продолжать свое движеніе въ томъ-же направленіи, причемъ M_3, при равномѣрномъ вращеніи точки M_1, будетъ совершать гармоническое движеніе, или точка M_2 начнетъ двигаться обратно, а точка M_3 останавливаться; въ дѣйствительности, вслѣдствіе указанныхъ выше причинъ произойдетъ послѣднее. Послѣ полуоборота, т. е. при $t = 7\pi/6$, $\varphi = 5\pi/6$, въ положеніяхъ M_1'' и M_2'', опять получается развѣтвленіе движенія: или точка M_3 останется на прежнемъ мѣстѣ, а M_2 будетъ продолжать свое движеніе по часовой стрѣлкѣ, или точка M_3 начнетъ возвращаться назадъ, а M_2 измѣнитъ направленіе своего движенія; въ дѣйствительности произойдетъ послѣднее, такъ что при дальнѣйшемъ полуоборотѣ точки M_1 точка M_2 возвратится въ положеніе M_2', а M_3 совершитъ правую половину гармоническаго движенія и возвратится въ точку C. Такимъ образомъ мы имѣемъ механизмъ, въ которомъ *равномѣрное круговое движеніе точки M_1, совершаемое постоянно въ одну и ту-же сторону, преобразовывается: 1) въ (теоретически) равномѣрное круговое движеніе точки M_2 по полукругу взадъ и впередъ и 2) въ половину гармоническаго движенія точки M_3 отъ средняго ея положенія къ крайнему и обратно къ среднему, причемъ вмѣсто другой половины гармоническаго движенія точка M_3 остается неподвижною.*

Можно было-бы заставить точку M_3 совершать лѣвую половину гармоническаго движенія; для этого нужно было-бы при $t = \pi/6$, приложивъ къ точкѣ M_3 весьма небольшое усиліе, заставить ее перейти черезъ точку C, причемъ точка M_2, перейдя черезъ положеніе M_2', продолжала-бы вращаться обратно часовой стрѣлкѣ и послѣ полуоборота точки M_1, т. е. при $t = 7\pi/6$ пришла-бы въ положеніе M_2'', точка-же M_3 вернулась-бы въ положеніе C; послѣ этого точка M_3 осталась-бы на мѣстѣ, а M_2 начала-бы двигаться обратно; по совершеніи полуоборота точка M_3 стала-бы опять двигаться влѣво, а M_2 опять измѣнила-бы направленіе своего движенія и т. д.

22. МЕХАНИЗМЪ VII, *въ которомъ три точки подобно-измѣняемой системы двигаются съ одинаковою угловою скоростью по кругамъ различнаго радіуса и съ различными центрами.* Полагая

$$x_1 = a_1 + r_1 \cos t, \quad y_1 = b_1 + r_1 \sin t,$$
$$x_2 = a_2 + r_2 \cos\varphi, \quad y_2 = b_2 + r_2 \sin\varphi,$$
$$x_3 = a_3 + r_3 \cos\psi, \quad y_3 = b_3 + r_3 \sin\psi,$$

и подставляя эти координаты въ формулы (10), находимъ:

$$\begin{aligned} &\frac{k_1 r_1}{\cos\beta_2}\cos(t+\beta_2) + \frac{k_2 r_2}{\cos\beta_1}\cos(\varphi-\beta_1) - (k_1+k_2) r_3 \cos\psi = A, \\ &\frac{k_1 r_1}{\cos\beta_2}\sin(t+\beta_2) + \frac{k_2 r_2}{\cos\beta_1}\sin(\varphi-\beta_1) - (k_1+k_2) r_3 \sin\psi = B; \end{aligned} \tag{23}$$

гдѣ β_1 и β_2 имѣютъ прежнія значенія, а

$$A = (k_1+k_2)a_3 - k_1 a_1 - k_2 a_2 + k_1 k_2 (b_1 - b_2),$$
$$B = (k_1+k_2)b_3 - k_1 k_2 (a_1 - a_2) - k_1 b_1 - k_2 b_2.$$

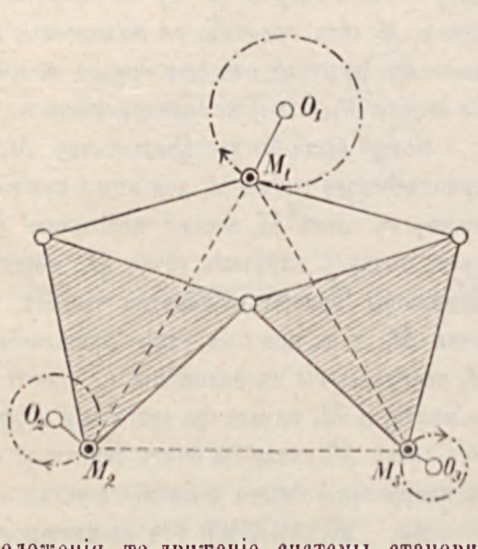
Формулы (23) даютъ зависимости между углами вращенія трехъ данныхъ точекъ.

Остановимся только на случаѣ, когда

$$A = 0, \quad B = 0.$$

Сравненіе этихъ условій съ формулами (1) показываетъ, что въ этомъ случаѣ треугольникъ, имѣющій своими вершинами центры круговъ, подобенъ треугольнику $M_1M_2M_3$. Исключая изъ формулъ (23) поочередно углы t, φ и ψ, находимъ, что разности этихъ угловъ, $\varphi-\psi$, $\psi-t$, $t-\varphi$ постоянны, т. е. точки M_1, M_2 и M_3 вращаются съ равными угловыми скоростями. Если двѣ точки плоской подобно-измѣняемой системы двигаются по двумъ подобнымъ кривымъ, занимая на нихъ постоянно соотвѣтственныя положенія, то движеніе системы становится „однообразнымъ", т. е. существуетъ неподвижный центръ подобія.

Фиг. 18.



Мы пришли такимъ образомъ къ разсмотрѣнному уже выше случаю движенія: I, *a*. По отличіе отъ этого случая, существенное въ практическомъ отношеніи, состоитъ въ томъ, что теперь въ механизмъ, изображающій подобно-измѣняемую систему, этотъ неподвижный центръ подобія не включенъ.

На фигурѣ 18 изображенъ спеціальный случай, когда треугольникъ $M_1M_2M_3$ равносторонній. Въ этомъ случаѣ формулы (23) принимаютъ видъ:

$$r_1 \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) + r_2 \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) - r_3 \cos\psi = 0,$$

$$r_1 \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) + r_2\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) - r_3 \sin\psi = 0.$$

Отсюда

$$\cos\left(\varphi - \psi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{r_2^2 + r_3^2 - r_1^2}{2r_2r_3},$$

$$\cos\left(\psi - t - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{r_3^2 + r_1^2 - r_2^2}{2r_3r_1},$$

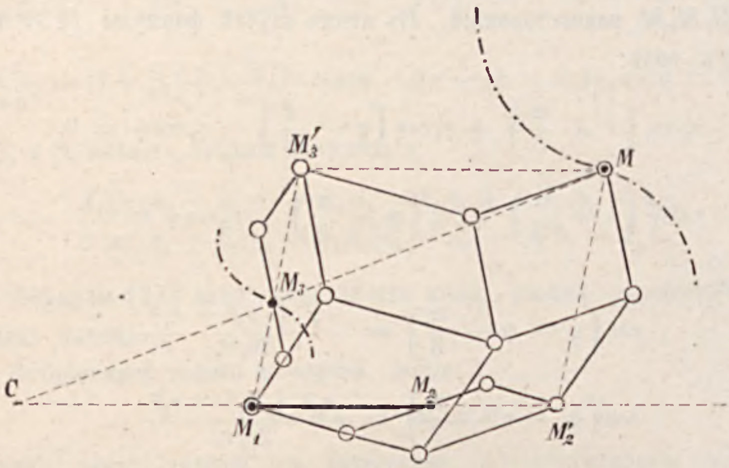
$$\cos\left(t - \varphi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{r_1^2 + r_2^2 - r_3^2}{2r_1r_2}.$$

Чтобы эти косинусы численно не превосходили единицы, т. е. чтобы движеніе было въ дѣйствительности возможно, необходимо, чтобы ни одинъ изъ радіусовъ не превосходилъ суммы двухъ остальныхъ и не былъ меньше ихъ разности. Всѣ три точки могутъ при этомъ совершать полные обороты, если только размѣры членовъ сочлененія *A* будутъ достаточно велики для этого.

Механизмы, соотвѣтствующіе случаю II, *a*.

23. Переходя къ однородно-измѣняемой системѣ, разсмотримъ прежде всего простѣйшій случай: когда двѣ основныхъ точки системы, M_1 и M_2, неподвижны. Въ сплошной однородно-измѣняемой системѣ въ этомъ случаѣ остается неподвижною цѣлая прямая M_1M_2 и движеніе системы состоитъ изъ сдвиговъ. Всѣ точки описываютъ подобныя между собою кривыя, занимая на нихъ соотвѣтственныя положенія; поэтому механизмъ, который мы получаемъ, беря сочлененіе B (§ 5) или сочлененіе C (§ 7), закрѣпляя двѣ основныхъ точки его, M_1 и M_2, неподвижно и двигая третью основную точку M_3 по произвольно заданной линіи σ_3, представляетъ собою пантографъ: четвертая точка M

Фиг. 19.

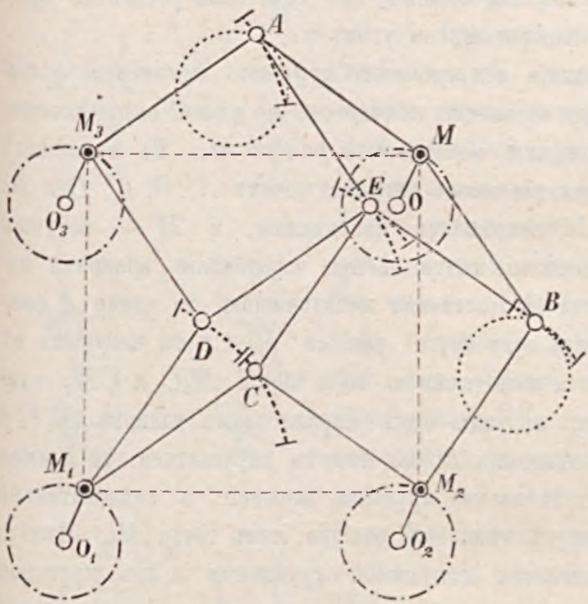


описываетъ кривую σ, подобную линіи σ_3. Центръ подобія этихъ линій находится въ точкѣ C (фиг. 19), для которой

$$\frac{CM_1}{CM'_2} = \frac{M_1 M_3}{M'_2 M}.$$

24. МЕХАНИЗМЪ VIII, *преобразовывающій непрерывное вращеніе одной точки въ поочередныя вращенія двухъ или трехъ другихъ точекъ.* Помощью разсматриваемаго сочлененія можно преобразовать непрерывное движеніе точки M по замкнутой кривой линіи въ поочередныя движенія трехъ точекъ M_1, M_2, M_3 по подобнымъ-же замкнутымъ линіямъ, пользуясь для этого соображеніями, подобными тѣмъ, которыя приведены въ § 11. Не повторяя ихъ въ общемъ видѣ, разсмотримъ механизмъ для поочередныхъ круговыхъ движеній этихъ точекъ. Для простоты возьмемъ сочлененіе B; тогда радіусы r_1, r_2, r_3 и r описываемыхъ четырьмя точками круговъ нужно взять равными, а центры ихъ, O_1, O_2, O_3, O, въ вершинахъ какого-нибудь параллелограмма. Дадимъ механизму (фиг. 20) такое очевидно возможное положеніе, чтобы кривошипы, ведущіе точки по кругамъ, были параллельны и въ одну сторону направлены. Удерживая точку M_1 неподвижною и вращая точку M, мы очевидно приведемъ въ движеніе только одну изъ точекъ M_2, M_3, такъ какъ иначе четырехугольникъ $M_1M_2MM_3$ пересталъ-бы быть параллелограммомъ, что по свойству сочлененія B невозможно. Положимъ, что пришла въ движеніе точка M_2; тогда точка M_3 сама собою закрѣпится и будетъ въ состояніи придти въ движеніе только послѣ того, какъ точки M и M_2 совершатъ полные обороты. Если послѣ этого точка M_3 придетъ въ движеніе, то точка M_2 должна будетъ остаться на мѣстѣ. Средствомъ, указаннымъ въ § 12, очень легко достигнуть автоматическаго чередованія вращеній точекъ M_2 и M_3: для этого нужно только немного нарушить правильность въ расположеніи центровъ круговъ. Опытъ показываетъ, что выгоднѣе всего перемѣстить точку O весьма мало по направленію діагонали O_1O.

фиг. 20.



Закрѣпляя вмѣсто M_1 точку M_2 или M_3, мы получимъ чередованіе вращеній точекъ M_3 и M_1 или M_1 и M_2. Понятно также, что, удерживая точку M неподвижно и вращая какую-нибудь другую точку, можно получить чередованіе вращеній двухъ остальныхъ точекъ.

Отличіе и преимущество настоящаго механизма передъ механизмомъ, описаннымъ въ § 13, состоитъ въ томъ, что здѣсь можно исходныя положенія кривошиповъ четырехъ точекъ устанавливать какъ угодно, лишь-бы эти положенія были параллельны. Мало того, можно измѣнять эту установку во время дѣйствія механизма, измѣняя положеніе закрѣпленной точки. Закрѣпимъ напр. точку M_1 и вращеніемъ точки M приведемъ въ движеніе точку M_3; тогда точка M_2, какъ было выше замѣчено, сама собою останется неподвижною; но если мы въ это время повернемъ точку M_1 на какой-нибудь уголъ α, напр. въ сторону вращенія точки M, то и точка M_2, по свойству сочлененія B оставаться параллелограммомъ, повернется на тотъ-же уголъ, а вслѣдствіе этого вращеніе точки M_3 можетъ окончиться лишь по совершеніи оборота на уголъ $2\pi + \alpha$, и послѣ этого уже можетъ начаться вращеніе точки M_2. Въ общемъ, вся начальная установка кривошиповъ измѣнится поворотомъ на уголъ α.

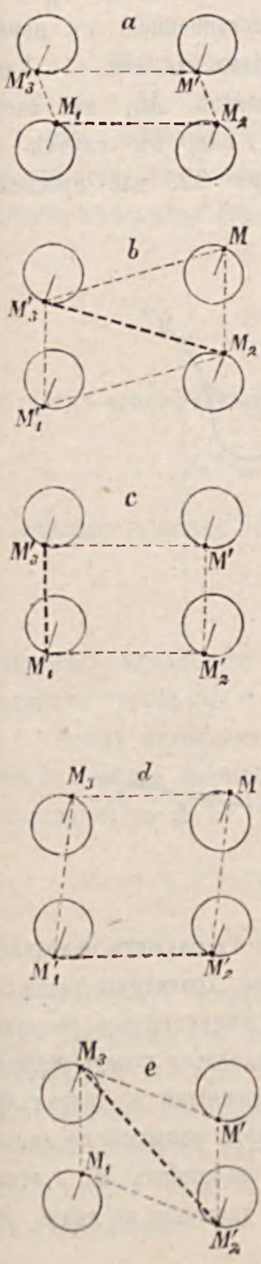
25. *Преобразованіе непрерывнаго кругового движенія одной точки въ движеніе другой точки поочередно по цѣлой окружности и по дугѣ круга съ другими центромъ и радіусомъ.* Въ механизмѣ VIII заслуживаютъ вниманія также движенія точекъ A, B, C, D и E. Пусть будетъ точка M_1 закрѣплена неподвижно, а M — ведущая точка. Прослѣдимъ движеніе точки A при чередованіи вращеній точекъ M_2 и M_3. Когда M_3 остается неподвижною, то точка A описываетъ взадъ и впередъ дугу круга радіуса M_3A и съ центромъ въ M_3. Когда M_2 дѣлается неподвижною, то и члены M_1C и CM_2 становятся неподвижными; а такъ какъ параллелизмъ членовъ M_1C и M_3A, по свойству сочлененія B, не можетъ нарушиться, то прямая M_3A совершаетъ поступательное круговое движеніе, а слѣдовательно точка A описываетъ кругъ такого-же радіуса какъ точка M_3. Итакъ, траекторія точки A слагается изъ цѣлой окружности и изъ круговой дуги; причемъ переходъ съ одной линіи на другую происходитъ при возвращеніи механизма въ его исходное положеніе.

Подобное-же движеніе совершаетъ точка B. Точки C и D поочередно описываютъ круговыя дуги съ центромъ въ M_1 и поочередно приходятъ въ состояніе покоя. Наконецъ, точка E описываетъ поочередно двѣ круговыя дуги съ центрами въ C и D.

26. *Преобразованіе непрерывнаго кругового движенія одной точки въ поочередные полуобороты трехъ остальныхъ точекъ.* Для этой цѣли можетъ опять служить механизмъ VIII. Разсмотримъ положеніе его, указанное на фигурѣ 20, и пусть будетъ M ведущая точка. Положимъ, что она совершила полуоборота и повернула за

собою точку M_3, въ то время какъ точки M_1 и M_2 оставались неподвижными (фиг. 21, *a*); послѣ этого точка M_3, въ положеніи M'_3, можетъ остановиться, а точка M_1 начать движеніе, причемъ прямая $M_2M'_3$ будетъ служить неподвижною прямою того сдвига, который теперь совершаетъ однородно-измѣняемая система (фиг. 21, *b*). Послѣ новаго полуоборота точка M_1 можетъ остановиться, въ положеніи M'_1, а точка M_2 начать двигаться и придти въ положеніе M'_2 (фиг. 21, *c*). При слѣдующемъ полуоборотѣ эта точка можетъ оставаться неподвижною, а вмѣсто этого точка M'_3 можетъ совершать свой второй полуборотъ и возвратиться въ свое начальное положеніе M_3 (фиг. 21, *d*). Точно также точки M'_1 и M'_2 могутъ послѣдовательно произвести вторыя половины своихъ оборотовъ и возвратиться въ свои начальныя положенія (фиг. 21, *e* и фиг. 20). Такимъ образомъ, послѣ трехъ цѣлыхъ оборотовъ точки M весь механизмъ возвратится въ свое первоначальное положеніе.

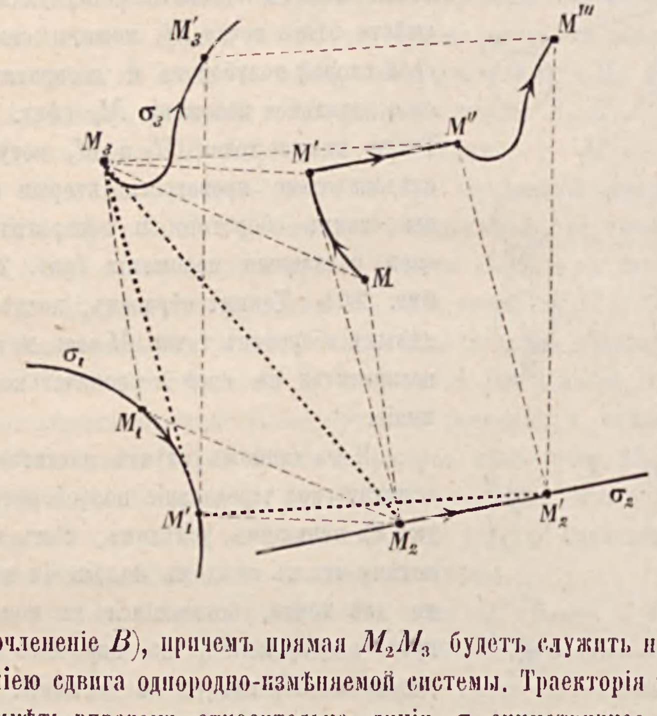
фиг. 21.



И въ данномъ случаѣ достигается автоматическое чередованіе полуоборотовъ, но уже съ меньшимъ успѣхомъ, чѣмъ прежде, потому что въ каждомъ положеніи механизма двѣ точки, остающіяся въ покоѣ, могутъ одновременно, но впрочемъ только одновременно, придти въ движеніе. Поэтому здѣсь требуется добавочное приспособленіе для послѣдовательнаго задерживанія трехъ точекъ по совершеніи ими полуоборотовъ и для освобожденія ихъ каждый разъ, какъ ведущая точка сдѣлаетъ одинъ цѣлый оборотъ.

27. МЕХАНИЗМЪ IX, *для вычерчиванія линій, составленныхъ изъ отрѣзковъ двухъ или трехъ другихъ линій даннаго вида.* Заставимъ точки M_1, M_2, M_3 помощью какихъ-либо добавочныхъ механизмовъ оставаться на трехъ заданныхъ линіяхъ σ_1, σ_2, σ_3, оставляя притомъ точку M свободною, т. е. соединенною съ первыми тремя точками только основнымъ сочлененіемъ B или C. Удерживая точки M_2 и M_3 неподвижными и двигая M_1, мы заставимъ точку M описать линію тожественную или, въ случаѣ сочлененія C, подобную линіи σ_1 (на фигурѣ 22, для простоты,

фиг. 22.



взято сочлененіе B), причемъ прямая M_2M_3 будетъ служить неподвижною линіею сдвига однородно-измѣняемой системы. Траекторія точки M будетъ имѣть впрочемъ относительно линіи σ_1 симметричное расположеніе, такъ какъ неподвижная прямая сдвига находится теперь *между* точками M_1 и M. Удерживая M_3 и M'_1 неподвижными и двигая M_2 по линіи σ_2, можно заставить точку M продолжать движеніе по линіи, тожественной или подобной σ_2; а если потомъ закрѣпить M_2 и освободить M_3, то точка M будетъ продолжать свое движеніе по линіи, тожественной или подобной линіи σ_3. Такимъ образомъ путь точки M можетъ быть составленъ изъ произвольныхъ отрѣзковъ линій σ_1, σ_2, σ_3, примыкающихъ одинъ къ другому въ какомъ угодно порядкѣ.

Механизмы, соотвѣтствующіе случаю II, *b*.

28. МЕХАНИЗМЪ X, *второй точный удвоитель вращенія*. Предполагая, что неподвижная точка, M_1, находится въ началѣ координатъ, имѣемъ по формуламъ (3):

$$\begin{aligned} x &= m_2 x_2 + m_3 x_3 \,, \\ y &= m_2 y_2 + m_3 y_3 \,; \end{aligned} \tag{24}$$

къ этому присоединяются въ данномъ случаѣ уравненія:

$$f_2(x_2, y_2) = 0 \,, \qquad f_3(x_3, y_3) = 0 \tag{25}$$

и зависимость между двумя координатами разныхъ точекъ, напр.

$$\varphi(x_2, x_3) = 0 \,;$$

или вмѣсто послѣдняго условія можно предполагать, что всѣ четыре координаты точекъ M_2 и M_3 заданы въ функціи времени.

Между механизмами, относящимися къ этому случаю, отмѣтимъ только одинъ: точный удвоитель вращенія, аналогичный удвоителю, описанному въ § 16. Зададимъ:

$$x_2 = a_2 + r_2 cos(\alpha_2 + t) \,, \qquad y_2 = b_2 + r_2 sin(\alpha_2 + t) \,,$$
$$x_3 = a_3 + r_3 cos(\alpha_3 + 2t) \,, \qquad y_3 = b_3 + r_3 sin(\alpha_3 + 2t) \,.$$

Подставляя эти координаты въ уравненія (24) и исключая t, находимъ для траекторіи точки M уравненіе конхоиды Паскаля. Отсюда заключаемъ, что если точку M двигать по этой конхоидѣ, что́ можетъ быть сдѣлано помощью шарнирнаго механизма, а точки M_2 и M_3 заставить совершать круговыя движенія, то точка M_3 будетъ вращаться вдвое скорѣе точки M_2. На фигурѣ 23 изображенъ такой удвоитель въ предположеніи, что $a_2 = b_3$, $b_2 = 0$, $a_3 = 0$, $r_2 = r_3$, $\alpha_3 = \alpha_2 + \pi/2$;

причемъ для простоты механизмъ для движенія по конхоидѣ Паскаля не помѣщенъ.

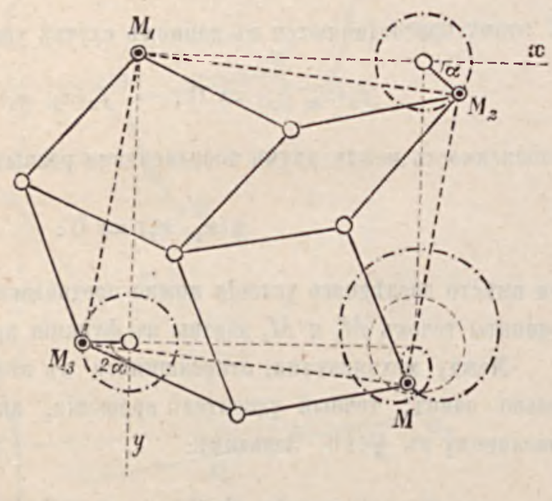
Механизмы, относящіеся къ случаю II, *c*.

29. МЕХАНИЗМЪ XI, *для разложенія даннаго движенія точки на движенія по двумъ другимъ заданнымъ линіямъ.* Къ уравненіямъ (24) и (25) присоединяется теперь уравненіе траекторіи точки M. Хотя этотъ случай въ сущности совпадаетъ съ предыдущимъ, онъ приводитъ однакоже къ другого рода задачѣ, разрѣшаемой помощью сочлененія B и указанной въ заголовкѣ этого §. Предположимъ, что въ формулахъ (24)

$$m_2 = m_3 = 1\,,$$

т. е. что четырехугольникъ $M_1M_2MM_3$ параллелограммъ (сочлененіе B). Тогда, дифференцируя уравненія (24) по t, находимъ, что скорость точки M есть

фиг. 23.



геометрическая сумма скоростей точекъ M_2 и M_3. Каждый разъ, когда мы можемъ механическимъ путемъ получить движеніе по линіямъ σ, σ_2 и σ_3, мы получаемъ механизмъ для разложенія движенія по линіи σ на движенія по σ_2 и σ_3.

Простѣйшій случай будетъ тотъ, когда точки M_2 и M_3 принуждены помощью шарнирныхъ прямилъ двигаться по двумъ взаимно перпендикулярнымъ прямымъ линіямъ, проходящимъ черезъ точку M_1. Принимая эти прямыя за координатныя оси, имѣемъ по формуламъ (24):

$$x = x_2\,, \qquad y = y_3\,,$$

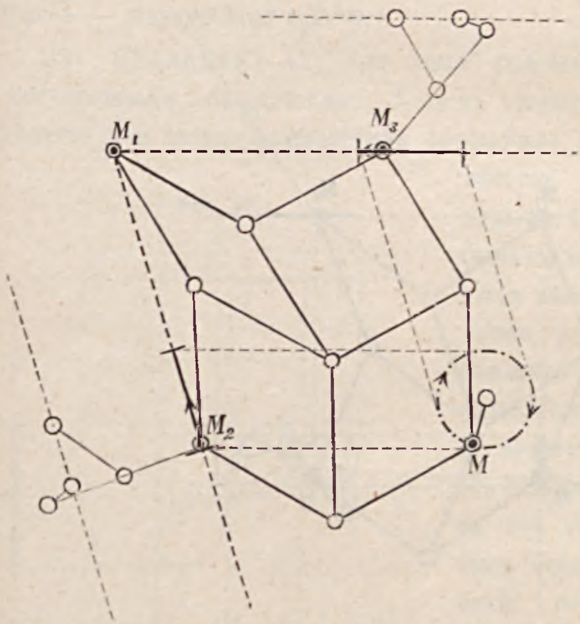
т. е. *точки M_2 и M_3 отмѣчаютъ непосредственно прямоугольныя координаты точки M.*

Этотъ случай соотвѣтствуетъ *чистой деформаціи* однородно-измѣняемой системы по координатнымъ осямъ: если M_3 удерживать неподвижно, то происходитъ удлиненіе по оси (x), если M_2 оставлять неподвижною, то удлиненіе по оси (y). Движеніе точки M является такимъ образомъ результатомъ этихъ двухъ удлиненій.

Дальнѣйшіе четыре механизма представляютъ частныя приложенія предыдущаго.

30. *Второй МЕХАНИЗМЪ* (XII) *для преобразованія фазы гармоническаго движенія.* Пусть точка M равномѣрно двигается по кругу, а M_2 и M_3 по двумъ прямымъ, образующимъ между собою произвольно данный уголъ α. Тогда эти двѣ послѣднія точки совершаютъ гармоническія движенія одинаковаго періода, но съ различными фазами. Ихъ относительная фаза опредѣляется очевидно угломъ α.

фиг. 24.

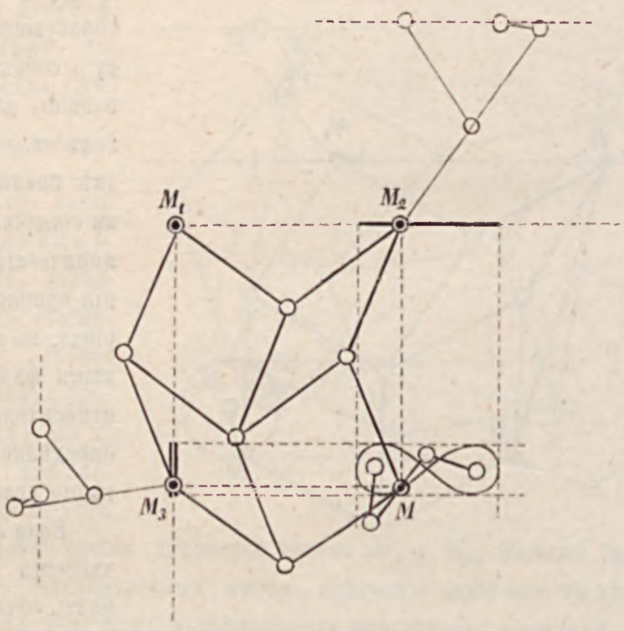


Если вмѣсто сочлененія B употреблять сочлененіе C, то можно, пользуясь числами m_2 и m_3, и амплитуды обоихъ гармоническихъ колебаній задавать произвольно.

31. МЕХАНИЗМЪ XIII *(не шарнирный), для черченія фигуръ Лиссажу.* Если точку M двигать по какой-нибудь фигурѣ Лиссажу, а M_2 и M_3 по двумъ взаимно перпендикулярнымъ прямымъ линіямъ (осямъ координатъ), то эти двѣ послѣднія точки будутъ совершать гармоническія движанія съ различными періодами. Простыхъ шарнирныхъ механизмовъ для воспроизведенія фигуръ Лиссажу, соотвѣтствующихъ даже простѣйшимъ интерваламъ (кромѣ унисона), насколько намъ извѣстно, не существуетъ; тѣмъ не менѣе разсматриваемое сочлененіе можетъ быть полезно нетолько для разложенія движенія по данной уже фигурѣ Лиссажу на прямолинейныя, но и для полученія такихъ фигуръ, если гармоническія движенія точекъ M_2 и M_3, съ различными періодами и различными фазами, производить помощью зубчатыхъ зацѣпленій и скользящихъ паръ.

32. МЕХАНИЗМЪ XIV, *для удвоенія приближенныхъ гармоническихъ колебаній.* Удвоеніе колебаній можетъ быть достигнуто

фиг. 25.



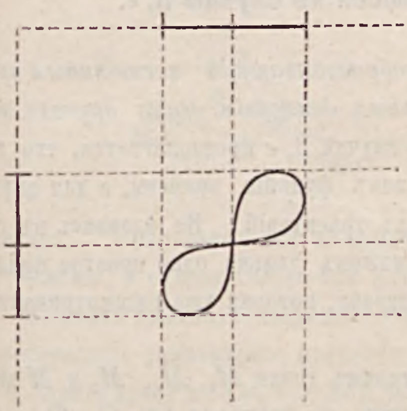
довольно просто и шарнирнымъ образомъ. Фигура Лиссажу, соотвѣтствующая октавѣ и имѣющая при извѣстной относительной фазѣ форму восьмерки, хотя и не есть лемниската, но по своей формѣ похожа на нее[1]); поэтому, если точку M двигать по лемнискатѣ, ось которой на-

[1]) Уравненіе лемнискаты: $(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) = 0$, уравненіе восьмерки Лиссажу: $x^4 - a^2(x^2-y^2) = 0$.

раллельна оси (x), то на одно колебаніе точки M_2 точка M_3 совершитъ два колебанія; и если предположить, что точка M_2 слѣдуетъ въ точности закону гармоническаго движенія, то M_3 будетъ совершать удвоенное колебаніе, приблизительно гармоническое. Для полученія движенія точки M по лемнискатѣ проще всего взять антипараллелограммъ, у котораго болѣе короткіе члены вращаются около неподвижныхъ осей; тогда средняя точка промежуточнаго члена описываетъ кривую, имѣющую форму восьмерки и обращающуюся въ лемнискату при отношеніи членовъ $1 : \sqrt{2}$ [1]). Амплитуды обоихъ колебаній могутъ быть взяты произвольной длины: для этого нужно воспользоваться сочлененіемъ C и числамъ m_2 и m_3 въ формулѣ (24) давать соотвѣтственныя значенія. На фигурѣ 25 изображенъ такой механизмъ, въ которомъ одна амплитуда равна длинѣ отрѣзка оси внутри лемнискаты, а другая — ширинѣ этой кривой.

33. МЕХАНИЗМЪ XV, *для двухъ колебательныхъ движеній съ поочередными остановками.* Если въ предыдущемъ механизмѣ не укрѣплять осей антипараллелограмма неподвижно на плоскости, а помѣстить ихъ на отдѣльной пластинкѣ, которую можно было бы поворачивать на плоскости движенія механизма, то можно различнымъ образомъ измѣнять соотношенія между колебаніями точекъ M_2 и M_3. Въ частности, если повернуть ось лемнискаты на уголъ $\pi/4$, то обѣ точки будутъ совершать одинаковое число колебаній, но съ поочередными остановками въ своихъ среднихъ положеніяхъ, какъ это легко видѣть на фигурѣ 26, принявъ во вниманіе, что касательныя къ лемнискатѣ въ ея двойной точкѣ взаимно перпендикулярны.

Фиг. 26.



[1]) Burmester, Lehrbuch der Kinematik, стр. 306.

Механизмы, относящіеся къ случаю II, d.

34. Этотъ случай приводитъ къ тому, что координаты трехъ основныхъ точекъ выражены въ функціи одной изъ нихъ, или, что всѣ шесть координатъ выражены въ функціи времени. Формулы (3) показываютъ теперь возможность устройства шарнирнаго механизма для такого движенія точки M, въ которомъ ея координаты выражаются трехчленными функціями времени, если только возможно при этомъ шарнирнымъ образомъ получить движеніе каждой изъ трехъ основныхъ точекъ и связать ихъ скорости согласно заданнымъ шести функціямъ времени.

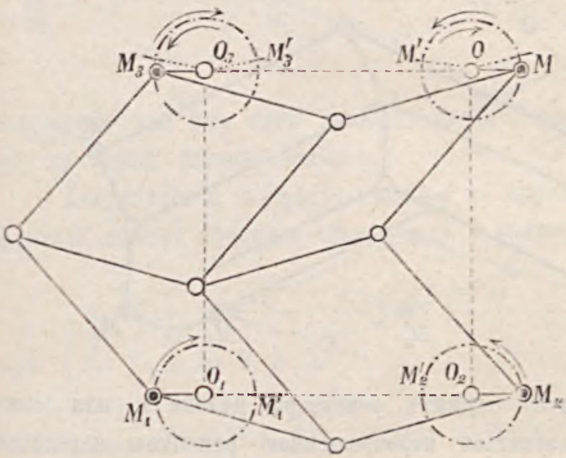
Не останавливаясь на болѣе подробномъ разборѣ этого случая, замѣтимъ только, что и въ томъ случаѣ, когда движеніе трехъ основныхъ точекъ нельзя установить шарнирнымъ или какимъ-либо другимъ механическимъ способомъ, то и тогда сочлененіе B или C представляетъ удобное средство для построенія по точкамъ такой линіи, координаты точекъ которой выражаются трехчленными функціями времени.

Механизмы, относящіеся къ случаю II, e.

35. МЕХАНИЗМЪ XVI, *преобразовывающій постоянныя вращенія двухъ точекъ въ колебательныя движенія двухъ другихъ точекъ по полуокружностямъ.* Въ случаѣ II, e предполагается, что координаты двухъ точекъ заданы какъ функціи времени, а для двухъ другихъ точекъ заданы уравненія ихъ траекторій. Не вдаваясь въ общее разсмотрѣніе и этого случая, укажемъ только одно простое приложеніе, разрѣшающее часть той-же задачи, которая уже разсматривалась въ § 21.

Возьмемъ сочлененіе B и заставимъ точки M_1, M_2, M_3 и M двигаться по кругамъ равныхъ радіусовъ съ центрами O_1, O_2, O_3 и O, расположенными въ вершинахъ нѣкотораго прямоугольника. Возьмемъ начальныя положенія кривошиповъ параллельными, по O_1M_1, O_2M_2, O_3M_3 и OM (фиг. 27). Очевидно, что такія положенія для механизма возможны. Вращая M_1 и M_2 въ обратныхъ направленіяхъ съ одинаковою угловою скоростью, мы заставляемъ, по свойству сочлененія B, всегда образовать своими вершинами параллелограммъ, и точки M_3, M двигаться такимъ-же образомъ. При этомъ или M_3 будетъ вращаться въ ту-же сторону, какъ M_1, а M какъ M_2, или вращенія точекъ M_3 и M будутъ происходить соотвѣтственно въ противуположныхъ направленіяхъ; положимъ, что произойдетъ первое движеніе. Послѣ полуоборота четыре точки займутъ положенія M'_1, M'_2, M'_3, M'. При дальнѣйшемъ вращеніи двухъ первыхъ точекъ въ прежнихъ направленіяхъ, для двухъ другихъ точекъ станетъ возможнымъ одно изъ двухъ движеній: или продолженіе вращеній въ прежнихъ направленіяхъ или вращенія, обратныя предыдущимъ. Вслѣдствіе тренія и хотя-бы самаго ничтожнаго хлябанія на осяхъ O_3 и O, а также вслѣдствіе измѣняемости самыхъ членовъ механизма начнется второе движеніе; потому-что точки M_3 и M въ дѣйствительности немного не дойдутъ до положеній M'_3 и M', а въ такомъ случаѣ онѣ будутъ вынуждены возвращаться назадъ. Точно также онѣ не дойдутъ вполнѣ до своихъ начальныхъ положеній, а слѣдовательно при началѣ вторыхъ оборотовъ точекъ M_1 и M_2 опять измѣнятъ направленія своихъ движеній. Такимъ образомъ непрерывное равномѣрное вращеніе точекъ M_1 и M_2 преобразовывается въ равномѣрное-же (въ большей части пути) движеніе точекъ M_3 и M по полуокружностямъ взадъ и впередъ. Вслѣдствіе указанныхъ уже выше причинъ нетолько будетъ происходить автоматическое измѣненіе направленій вращенія, но кромѣ того не будетъ на концахъ путей происходить рѣзкихъ ударовъ; но зато точки M_3 и M не будутъ проходить полныхъ полуокружностей и скорости ихъ около концовъ путей фактически не будутъ равны скоростямъ точекъ M_1 и M_2. Если-бы авто-

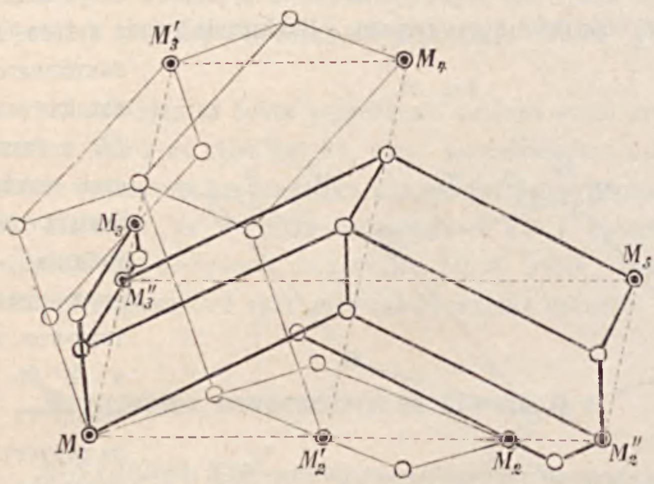
фиг. 27.



матическое измѣненіе направленій вращенія оказалось недостаточнымъ, то можно было-бы на концахъ полуокружностей устроить упоры, снабдивъ ихъ притомъ пружинами.

Для осуществленія настоящаго механизма требуется еще построить „реверзоръ" для обращенія вращенія точки M_1 въ обратное вращеніе точки M_2 съ тою-же угловою скоростью. Однимъ изъ простѣйшихъ такихъ механизмовъ служитъ реверзоръ Делоне [1]); или можно было-бы также воспользоваться перекрещенною ременною передачею, если не гнаться за тѣмъ, чтобы *весь* механизмъ былъ шарнирнымъ.

фиг. 28.



Механизмы, относящіеся къ случаю II, *f*.

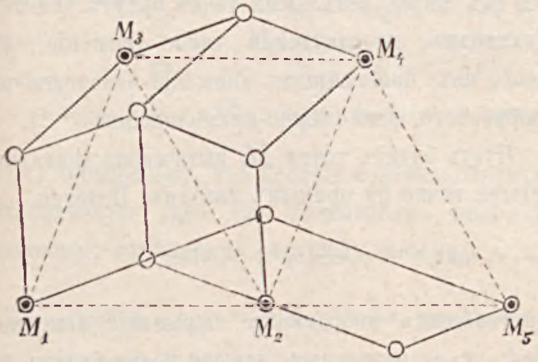
36. Чтобы включить въ механизмъ пятую точку однородно-измѣняемой системы, нужно къ сочлененію B или C присоединить новое такое-же сочлененіе, которое содержало-бы въ себѣ три изъ прежнихъ точекъ, напр. M_1, M_2, M_3, а четвертую — новую точку M_5. Такая

---

[1]) Делоне: „Передача вращеній и механическое черченіе кривыхъ шарнирно-рычажными механизмами. 1894 годъ, стр. 30.

система самаго общаго вида, состоитъ изъ 32 членовъ (фиг. 28). Число этихъ членовъ сокращается, если одинъ изъ четырехугольниковъ, $M_1M_2M_3M_4$ или $M_1M_2M_3M_5$ взять въ видѣ параллелограмма (фиг. 28). Если-же оба четырехугольника предполагать параллелограммами, то можно ограничиться только **14** членами (фиг. 29). Этимъ послѣднимъ сочлененіемъ можно впрочемъ пользоваться только тогда, когда можно три изъ пяти данныхъ точекъ предполагать находящимися на одной прямой линіи.

фиг. 29.



Аналитически вопросъ сводится къ выраженію 9 координатъ въ функціи десятой помощью слѣдующихъ 9 уравненій:

$$f_i(x_i, y_i) = 0 \tag{26}$$

при $i = 1, 2, 3, 4, 5$ и

$$\begin{aligned} x_4 &= (1 - m_2 - m_3)x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3, \\ y_4 &= (1 - m_2 - m_3)y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3, \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} x_5 &= (1 - n_2 - n_3)x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3, \\ y_5 &= (1 - n_2 - n_3)y_1 + n_2 y_3 + n_3 y_3. \end{aligned} \tag{28}$$

Въ случаѣ упрощеннаго сочлененія (фиг. 29)

$$m_2 = m_3 = 1, \quad n_2 = \frac{M_1 M_5}{M_1 M_2} = 2, \quad n_3 = 0.$$

37. Сочлененіемъ общаго вида (фиг. 28) можно воспользоваться, чтобы движеніе по данной линіи разлагать на движенія по четыремъ другимъ тоже заранѣе заданнымъ линіямъ. Отмѣтимъ нѣсколько простѣйшихъ случаевъ.

Предыдущія формулы показываютъ, что если пять точекъ направить по прямымъ линіямъ помощью какихъ-либо прямилъ, то при равномѣрномъ движеніи одной изъ нихъ, остальныя точки будутъ двигаться тоже равномѣрно. Механизмъ, производящій такое движеніе, служитъ для изображенія одного изъ простѣйшихъ движеній однородно-измѣняемой системы: „однообразнаго, равномѣрно-прямолинейнаго" [1]).

МЕХАНИЗМЪ XVII. Пусть будетъ точка M_1 вынуждена двигаться по кругу, а остальныя четыре точки по прямымъ линіямъ. Полагая

$$x_1 = a_1 + r_1 \cos t, \qquad y_1 = b_1 + r_1 \sin t,$$

мы получаемъ тогда для остальныхъ координатъ выраженія линейныя относительно $\cos t$ и $\sin t$; т. е. остальныя четыре точки будутъ совершать прямолинейныя гармоническія движенія съ одинаковымъ періодомъ, но съ различными фазами и амплитудами, которыя зависятъ отъ относительнаго расположенія точекъ системы и направленія прямыхъ, по которымъ онѣ двигаются. Настоящій *механизмъ разрѣшаетъ такимъ образомъ задачу о преобразованіи прямолинейнаго гармоническаго движенія въ три другихъ такихъ-же движенія съ тѣмъ-же періодомъ, но съ различными фазами и амплитудами*, которыя могутъ быть притомъ заранѣе выбираемы.

Случаи двухъ круговыхъ и трехъ прямолинейныхъ, трехъ круговыхъ и двухъ прямолинейныхъ и наконецъ четырехъ круговыхъ и одного прямолинейнаго движеній разбирать не будемъ, замѣтивъ только, что эти случаи, при нѣкоторыхъ частныхъ предположеніяхъ, приводятъ къ вопросамъ, аналогичнымъ тѣмъ, которые разсматривались въ § 21.

МЕХАНИЗМЪ XVIII, *въ которомъ пять точекъ однородно-измѣняемой системы двигаются съ одинаковою угловою скоростью по пяти различнымъ кругамъ.* Полагая

$$x_i = a_i + r_i \cos \alpha_i, \qquad y_i = b_i + r_i \sin \alpha, \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

---

[1]) Burmester. Zeitschr. f. Math. u. Phys. B. 19 u. 20.

П. Сомовъ. Кинематика коллинеарно-измѣняемой системы общаго вида. Варшавскія Унив. Изв. 1891 г. § 12.

имѣемъ по формуламъ (27) и (28) четыре зависимости для опредѣленія четырехъ угловъ α_i въ функціи пятаго. Полагая въ этихъ зависимостяхъ:

$$\begin{aligned} a_4 - (1 - m_2 - m_3)a_1 - m_2 a_2 - m_3 a_3 &= 0, \\ b_4 - (1 - m_2 - m_3)b_1 - m_2 b_2 - m_3 b_3 &= 0, \\ a_5 - (1 - n_2 - n_3)a_1 - n_2 a_2 - n_3 a_3 &= 0, \\ b_5 - (1 - n_2 - n_3)b_1 - n_2 b_2 - n_3 b_3 &= 0, \end{aligned} \tag{29}$$

т. е. предполагая, что центры круговъ образуютъ конфигурацію, представляющую одно изъ возможныхъ положеній пяти данныхъ точекъ однородно-измѣняемой системы, имѣемъ:

$$\begin{aligned} r_4 \cos\alpha_4 - (1-m_2-m_3) r_1 \cos\alpha_1 - m_2 r_2 \cos\alpha_2 - m_3 r_3 \cos\alpha_3 &= 0, \\ r_4 \sin\alpha_4 - (1-m_2-m_3) r_1 \sin\alpha_1 - m_2 r_2 \sin\alpha_2 - m_3 r_3 \sin\alpha_3 &= 0, \\ r_5 \cos\alpha_5 - (1-n_2-n_3) r_1 \cos\alpha_1 - n_2 r_2 \cos\alpha_2 - n_3 r_3 \cos\alpha_3 &= 0, \\ r_5 \sin\alpha_5 - (1-n_2-n_3) r_1 \sin\alpha_1 - n_2 r_2 \sin\alpha_2 - n_3 r_3 \sin\alpha_3 &= 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Отсюда находимъ:

$$\begin{aligned} &2m_2 m_3 r_2 r_3 \cos(\alpha_2 - \alpha_3) + 2m_3 (1 - m_2 - m_3) r_3 r_1 \cos(\alpha_3 - \alpha_1) + \\ &+ 2m_2 (1 - m_2 - m_3) r_1 r_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \\ &= r_4^2 - (1 - m_2 - m_3)^2 r_1^2 - m_2^2 r_2^2 - m_3^2 r_3^2, \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} &2n_2 n_3 r_2 r_3 \cos(\alpha_2 - \alpha_3) + 2n_3 (1 - n_2 - n_3) r_3 r_1 \cos(\alpha_3 - \alpha_1) + \\ &+ 2n_2 (1 - n_2 - n_3) r_1 r_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \\ &= r_5^2 - (1 - n_2 - n_3)^2 r_1^2 - n_2^2 r_2^2 - n_3^2 r_3^2. \end{aligned} \tag{32}$$

Беря точки M_1, M_2, M_3 такъ, чтобы было

$$m_2 + m_3 = 1,$$

получаемъ по формулѣ (31):

$$\cos(\alpha_2 - \alpha_3) = \frac{r_4^2 - m_2^2 r_2^2 - m_3^2 r_3^2}{2m_2 m_3 r_2 r_3} = \text{пост.} \tag{33}$$

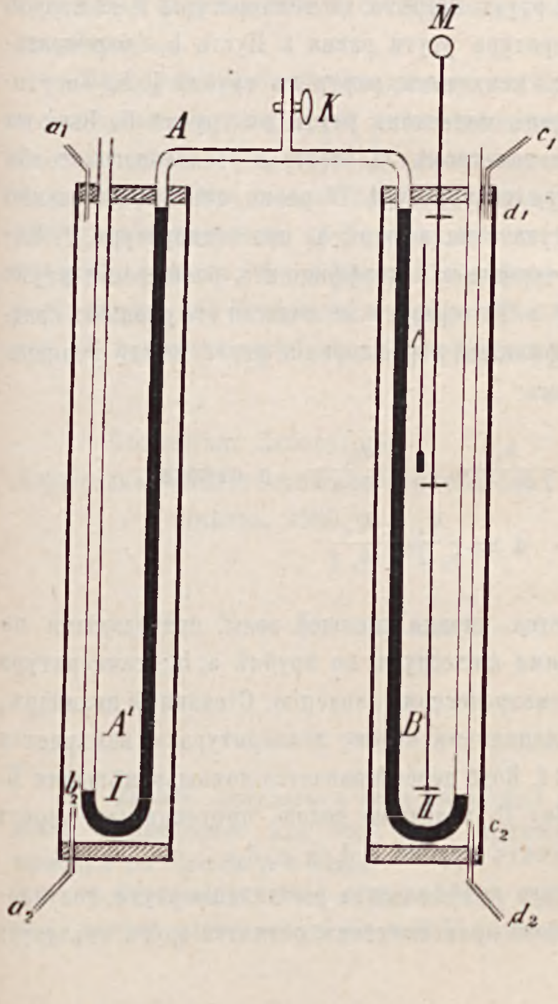
т. е. точки M_2 и M_3 вращаются съ одинаковою угловою скоростью. Послѣ этого, по формуламъ (30) и (32) легко видѣть, что и разности

$\alpha_3 - \alpha_1$, $\alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_4 - \alpha_1$ и $\alpha_5 - \alpha_1$ остаются постоянными, т. е. всѣ пять точекъ вращаются съ одинаковою угловою скоростью. Мы получаемъ такимъ образомъ механизмъ, аналогичный механизму VII. Радіусы пяти круговъ должны быть подчинены условію, чтобы вторая часть выраженія (33) и другія, опредѣляющія косинусы разностей другихъ угловъ, численно не превосходили единицы; причемъ выборъ величинъ этихъ радіусовъ и положенія центровъ круговъ, подобно тому, какъ и въ механизмѣ VII, остается еще до нѣкоторой степени произвольнымъ.

Приборъ для опредѣленія коэффиціента термическаго расширенія ртути.

В. А. Бернацкаго.

Приборъ для опредѣленія термическаго коэффиціента расширенія ртути по методу сообщающихся сосудовъ, примѣняемый при занятіяхъ практикантовъ Физической Лабораторіи Варшавскаго Политехническаго Института, приготовленъ изъ длинной стекляной трубки, изогнутой, какъ указано на чертежѣ, въ двѣ U-образныя трубки I и II, длиною около 70 cm. каждая, соединенныя горизонтальной трубкой AB (длиною около 10 cm.) со стекляннымъ краномъ K.



Внутренній діаметръ трубокъ равенъ около 1 cm. U-образныя трубки окружены стекляными цилиндрами, закрытыми плотно сверху и снизу пробками; колѣна U-образныхъ трубокъ проходятъ черезъ верхнія пробки. Весь приборъ укрѣпленъ на подходящемъ штативѣ.

Когда въ трубки уже налита ртуть, кранъ К сообщается съ воздушнымъ насосомъ, помощью котораго воздухъ надъ ртутью разрѣжается до такой степени, чтобы уровни ртути въ трубкахъ AA_1 и BB_1 стали, какъ указано на чертежѣ, лишь немного ниже нижнихъ краевъ пробокъ, закрывающихъ сверху внѣшніе цилиндры. Количество ртути въ обѣихъ U-образныхъ трубкахъ подбирается такъ, чтобъ разность высотъ уровней ртути въ обоихъ колѣнахъ каждой U-образной трубки составляла около 60 cm. Когда воздухъ въ AB разрѣженъ, кранъ К запирается, послѣ чего приборъ готовъ для измѣреній.

Пусть въ трубкѣ I ртуть нагрѣта до температуры T, во второй трубкѣ (II) пусть температура ртути равна t. Пусть h_1—вертикальное разстояніе вершинъ менисковъ ртути въ трубкѣ I, h_2—вертикальное разстояніе вершинъ менисковъ ртути въ трубкѣ II. Высоты h_1 и h_2—измѣряются катетометромъ. Давленіе вертикальнаго столба ртути вышиною въ h_1 при температурѣ T^o равно, очевидно, давленію вертикальнаго столба ртути вышиною въ h_2 при температурѣ t^o. Поэтому, называя средній термическій коэффиціентъ расширенія ртути между температурами 0^o и T^o через α (и полагая его равнымъ среднему термическому коэффиціенту расширенія ртути между температурами 0^o и t^o), получаемъ:

$$\frac{h_1}{1+\alpha T} = \frac{h_2}{1+\alpha t} \quad \text{и отсюда}$$

$$\alpha = \frac{h_1 - h_2}{h_2 T - h_1 t}.$$

Трубка I нагрѣвается парами кипящей воды, приводимыми по трубкѣ $a_1 b_1$ и выходящими на воздухъ по трубкѣ $a_2 b_2$; температура T^o опредѣляется по барометрическому давленію. Стеклянный цилиндръ, окружающій трубку II, наполненъ водою; температура ея измѣряется ртутнымъ термометромъ t. Вода перемѣшивается помощью мѣшалки M. (Можно охлаждать трубку II, холодною водою, протекающею черезъ цилиндръ; для этого служатъ трубки $c_1 d_1$ и $c_2 d_2$).

Значенія термическаго коэффиціента расширенія ртути, получаемыя помощью этого прибора практикантами, разнятся другъ отъ друга не болѣе чѣмъ на 1% до 2% [1]). (Катетометръ, примѣняемый для измѣренія h_1 и h_2, даетъ отсчеты съ точностью до $^1/_{50}$ mm.).

Можно полагать, что описанный приборъ съ небольшими измѣненіями можетъ служить и для точнаго изслѣдованія расширяемости жидкостей по методу сообщающихся сосудовъ.

Позволю себѣ обратить вниманіе на то обстоятельство, что въ описываемомъ приборѣ передача теплоты отъ нагрѣтаго столба жидкости къ холодному совершается только по дурнымъ проводникамъ, именно по стеклу и по воздуху въ трубкѣ AB. Между тѣмъ и въ приборѣ Дюлонга и Пти и въ приборахъ Ренье столбы ртути, нагрѣваемый и охлаждаемый, соединены ртутнымъ же горизонтальнымъ столбикомъ.

Приборъ, подобный описанному, служитъ въ нашей лабораторіи и для сравненія плотностей смѣшивающихся жидкостей. Вся разница въ томъ, что въ приборѣ для сравненія плотностей, не подвергаемомъ нагрѣванію, соединеніе U-образныхъ трубокъ съ трубкою AB достигается помощью пробокъ и мастики, между тѣмъ въ приборѣ, предназначенномъ для измѣренія коэффиціента термическаго расширенія ртути, обѣ U-образныя трубки вмѣстѣ съ соединительной трубкой AB получены изгибаніемъ одной длинной стекляной трубки [2]).

Физическая Лабораторія
Варшавскаго Политехническаго Института.
Январь, 1900 г.

---

[1]) Такого результата едва ли можно достигнуть при употребленіи обыкновенно для этой цѣли примѣняемаго въ лабораторіяхъ прибора по Дюлонгу и Пти.

[2]) Стекляныя части къ описанному прибору изготовлены къ полному моему удовольствію фирмой П. Альтманнъ въ Берлинѣ.

Вліяніе питанія на дыханіе грибовъ.

А. Θ. Флёрова.

(Изъ Ботаническаго кабинета Варшавскаго Политехническаго Института).

Не смотря на многочисленныя изслѣдованія, вопросъ о дыханіи растеній во многихъ своихъ частяхъ является далеко не разработаннымъ. Связь дыханія съ питаніемъ, процессы распада и образованія веществъ и значеніе ихъ при дыханіи, можно сказать, почти не затронуты, а въ частности вопросъ о дыханіи низшихъ растеній—грибовъ. Въ моей работѣ я обратилъ вниманіе, во первыхъ на значеніе для дыханія различныхъ питательныхъ веществъ и во-вторыхъ на явленія голоданія и происходящія при этомъ измѣненія въ количествѣ бѣлковыхъ веществъ. Прежде чѣмъ перейти къ изложенію собственныхъ изслѣдованій я сдѣлаю краткій обзоръ очень немногочисленной литературы.

По вопросу о значеніи питательныхъ веществъ для дыханія грибовъ имѣются работы Дьяконова, Пуріевича и Жербе.

Дьяконовъ[1]) культивировалъ penicillium glaucum на различныхъ веществахъ и показалъ что отношеніе $\frac{CO^2}{O^2}$ различно, смотря по питающему веществу. Для винной кислоты отношеніе 2,90 для глюкозы 1.30; для хинной кислоты 1.22. Пуріевичъ[2]) обратилъ вниманіе на

[1]) Diakonow. Berichte d. deutsch. Bot. Gesellschaft. Bd. V. (1887).

[2]) Puriewitsch. Über die Athmung der Schimmelpilze auf verschiedenen Nährlosungen. Berichte d. deutsch. Bot. Gesellschaft. 1898. B. XVI.

значеніе количества питательнаго матеріала и на его вліяніе на отношеніе $\frac{CO^2}{O^2}$. Объектомъ изслѣдованія служилъ Aspergillus niger. Культура велась въ питательной жидкости Роллена, затѣмъ жидкость замѣнялась другими питательными жидкостями и черезъ 5—6 часовъ опредѣлялось дыханіе. Изъ опытовъ оказалось, что коэффиціентъ $\frac{CO^2}{O^2}$ повышается до извѣстнаго предѣла съ увеличеніемъ концентраціи, а затѣмъ падаетъ. При винной кислотѣ вліяніе концентраціи не сказалось. Авторъ приводитъ слѣдующую таблицу представляющую отношенія $\frac{CO^2}{O^2}$ (среднее изъ 5—10 опытовъ).

Декстроза		Сахароза		Маннитъ		Винная кислота	
конц. %	$\frac{CO^2}{O^2}$	конц. %	$\frac{CO^2}{O^2}$	конц. %	$\frac{CO^2}{O^2}$	конц. %	$\frac{CO^2}{O^2}$
1	0.89	1	0.85	5	0.47	1.5	1.59
2	0.97	5	0.96	10	0.66	3.0	1.52
5	1.10	10	1.04			7.0	1.57
10	1.30	20	0.93				
15	0.53	25	0.73				
17	0.47						

Жербе [1]) въ своей обширной работѣ обратилъ вниманіе на питательное значеніе кислотъ и сахаровъ въ связи съ вліяніемъ температуры. Оказалось, что на усвоеніе питательныхъ веществъ оказываетъ большое вліяніе температура, и вещество трудно—или неусвояемое при одной температурѣ легко потребляется при другой. Сравнительное изслѣдованіе показало, что винная кислота и сахароза легко усвояются при t° 20° С. винная кислота усвояется легче сахара при t° — 37° С и потребляется медленнѣе, чѣмъ сахаръ при t°— 12° С; яблочная кислота при всѣхъ температурахъ потребляется быстрѣе сахара. Эта работа интересна также и строгимъ количественнымъ подсчетомъ доставленнаго матеріала, развившагося гриба и выдѣленныхъ углекислоты и воды. Этими работами и исчерпывается литература вопроса о вліяніи питательныхъ веществъ на дыханіе; что касается голоданія грибовъ, то здѣсь литера-

---

[1]) Gerber. Recherches sur la maturation des fruits charnus. Annales des Sciences naturelles 1898.

турныхъ данныхъ еще менѣе. Дьяконовъ[1]), изучая интрамолекулярное дыханіе и способность къ броженію плесневыхъ грибовъ нашелъ, что при лишеніи плесени питательныхъ веществъ дыханіе идетъ мало по малу па убыль и падаетъ до ничтожной величины. Пуріевичъ[2]) опредѣлилъ отношеніе $\frac{CO^2}{O^2}$ при недостаткѣ питанія у Aspergillus niger. При замѣнѣ питательнаго раствора водою съ небольшимъ содержаніемъ минеральныхъ солей (NH_4NO^3, $MgSO^4$, KH_2O^4P) черезъ два дня $\frac{CO^2}{O^2}$ составлялъ 0,31, черезъ 3 дня —0,22, черезъ 5 дней — 0,07. Въ другомъ опытѣ по замѣнѣ раствора водой коэффиціэнтъ $\frac{CO^2}{O^2}$ равнялся на 2-ой день 0,89; на 3-й — 0,77, на 4-й — 0,69 и на 5-й — 0,25. Съ уменьшеніемъ $\frac{CO^2}{O^2}$ уменьшалось и количество поглощеннаго кислорода.

Собственныя изслѣдованія по вопросу о вліяніи питательныхъ веществъ на дыханіе растеній.

Въ виду того, что названныя работы[3]) скорѣе затрогиваютъ вопросъ, чѣмъ исчерпываютъ его, я занялся изученіемъ вліянія питательныхъ веществъ на дыханіе грибовъ и явленій голоданія.

Для опредѣленія дыханія я пользовался приборомъ Петтенкофера, стало быть опредѣлялось количество выдѣленной углекислоты. Приборъ былъ устроенъ съ усовершенствованіемъ, введеннымъ проф. Палладинымъ, благодаря чему можно было для полученія равномѣрнаго тока

---

[1]) Diakonow. Intramoläculare Athmung und Gährthätigkeit der Schimmelpilze (Berichte d. deutsch. Bot. Gesellschaft 1886).

[2]) l. c.

[3]) Когда моя статья была уже закончена, появилась подробная работа К. Пуріевича: „Физіологическія изслѣдованія надъ дыханіемъ растеній“, поэтому означенной работой я не могъ воспользоваться вполнѣ. Въ ней авторъ подробнѣе останавливается на голоданіи Aspergillus niger.

воздуха примѣнить водяной насосъ. Объектами изслѣдованія были взяты Mucor mucedo (чистыя культуры получены изъ бактеріологическаго института Краля въ Прагѣ) и шампиньоны (agaricus campestris) (Psalliota campestris), полученные изъ Варшавскаго Помологическаго Сада.

Для культивированія Mucor mucedo я примѣнилъ жидкость слѣдующаго состава:

вода	1000
аммоній фосфорнокислый.	2,0
калій азотнокислый . .	2,0
магній сѣрнокислый . .	0,5
кальцій хлористый . .	0,1
пептонъ	10,0

Сахары или другія органическія соединен. 60,0.

По раствореніи жидкость подкислялась нѣсколькими каплями фосфорной кислотой.

Стерилизованная жидкость разливалась въ количествѣ 50 куб. сант. въ Эрленмейэровскія колбы емкостью около 250—300 куб. сант. и тщательно стерилизовалась. Посѣвъ Mucor дѣлался такимъ образомъ: взятый матеріалъ со спорангіями тщательно взбалтывался въ стерилизованной водѣ и стерилизованной пипеткой отбиралось 5 куб. сант., которыя и вводились въ питательную жидкость. При такомъ посѣвѣ развитіе начиналось равномѣрно по всей поверхности жидкости.

Предварительными опытами была установлена энергія дыханія Mucor mucedo, а также количество образующагося сухого вещества въ зависимости отъ питательныхъ веществъ. Всѣ опыты производились при t° 19—21° Цельсія.

Опытъ I.

Mucor mucedo на 3% виноградномъ сахарѣ.

	Сухое вещество	дыханіе въ 1 часъ на 1 gr.
4-й день посѣва		
1)	0.0792	33.33 mgr. CO^2.
2)	0.0952	26.47 „ „
5-й день посѣва		
3)	0.0760	26.40 mgr. CO^2.
4)	0.1006	22.53 „ „

6-й день посѣва.

5)	0.0912	21.07 mgr. CO^2.
6)	0.0686	17.43 „ „
7)	0.0603	29.00 „ „
8)	0.0784	28.50 „ „
Среднее	0.0811	25.59 mgr. CO^2.

Опытъ II.

Mucor mucedo на 6% сахарозѣ

5-й день посѣва.

	Сухого вещества образовалось	дыханіе въ 1 часъ на 1 gr.
1)	0.3054	13.1 mgr. CO^2.
2)	0.1938	19.6 „ „
6-й день посѣва.		
3)	0.2241	20.0 mgr. CO^2.
4)	0.2428	18.0 „ „
5)	0.2786	22.8 „ „
6)	0.2164	19.8 „ „
Среднее	0.24315	18.75 mgr. CO^2.

Опытъ III.

Mucor mucedo засѣянъ на пивное сусло-желатина.

3-й день посѣва.

1)	0.3081	41.82 mgr. CO^2.
2)	0.3368	39.42 „ „
3)	0.3332	38.40 „ „
4)	0.3418	32.70 „ „
4-й день посѣва.		
5)	0.3630	44.10 mgr. CO^2.
6)	0.3908	38.20 „ „
Среднее	0.3456	38.10 mgr. CO^2.

Изъ этихъ опытовъ видно, что концентрація органическихъ питательныхъ веществъ оказываетъ вліяніе на образованіе сухого вещества. Вмѣстѣ съ тѣмъ Mucor mucedo отличается значительной энергіей дыханія именно: 39.10; 18.75; 25.59 mgr. углекислоты выдѣляется въ часъ на 1 граммъ сухого вещества.

Пуріевичъ [1]) показалъ, что энергія дыханія у шляпочныхъ грибовъ измѣняется по мѣрѣ развитія плодоношенія. Тоже самое онъ [2]) показалъ и для Aspergillus niger; въ началѣ развитія происходитъ усиленіе дыханія, достигаетъ максимума въ концѣ плодоношенія, затѣмъ происходитъ быстрое паденіе энергіи дыханія. Авторъ указываетъ при этомъ, что отношеніе $\frac{CO^2}{O^2}$ при этомъ почти не измѣняется, колеблясь отъ 1,04 до 1,07 (опытъ первый). Строго говоря опыты автора не могутъ служить для сужденія объ энергіи дыханія, потому что не было сдѣлано перечисленіе на сухое вещество; авторъ эксперементировалъ отъ 4 мая до 7-го съ однимъ и тѣмъ же растеніемъ (въ другомъ опытѣ отъ 8-го до 11-го) стало быть происходило увеличеніе сухого вещества. Объ истинной энергіи дыханія по его опытамъ судить нельзя.

Изученіе вліянія питательныхъ веществъ на дыханіе велось такимъ образомъ. По достиженій достаточнаго развитія, но до образованія спорангіевъ и потемнѣнія ихъ, опредѣлялось количество выдѣляемой Mucor mucedo углекислоты въ 1 часъ. Затѣмъ питательная жидкость быстро удалялась, мицелій промывался 4 – 5 разъ стерилизованной перегнанной водой, и вводилась другая жидкость. Черезъ извѣстный промежутокъ времени (отъ 20 минутъ до 7 часовъ) снова опредѣлялось количество выдѣленной углекислоты въ 1 часъ. Затѣмъ такимъ же порядкомъ введенная жидкость смѣнялась прежнею или другой и снова опредѣлялось количество углекислоты въ 1 часъ. По такому способу можно было изучать вліяніе различныхъ питательныхъ веществъ на дыханіе одной и той же культуры Mucor mucedo, не прибѣгая къ сравнительнымъ культурамъ. Произведенные опыты дали результаты сходные съ результатами полученными пр. Палладинымъ [3]) при его изслѣдованіи надъ вліяніемъ питанія на дыханіе у высшихъ растеній.

---

[1]) Пуріевичъ. „О вліяніи свѣта на процессъ дыханія у растеній“. 1890.

[2]) Пуріевичъ. „Физіологическія изслѣдованія надъ дыханіемъ растеній“, 1899 г., стр. 11.

[3]) Предварительное сообщеніе въ засѣданіи біологическаго отдѣленія Варшавскаго Общества Естествоиспытателей.

Опытъ 1.

5 дн. посѣвъ на мальтозѣ

въ 1 часъ выдѣлено 5.6 mgr. CO^2.

виннокаменнокислый аммоній:

черезъ одинъ часъ:

въ 1 часъ — 4.4 „ „

Опытъ 2.

9 дн. посѣвъ на мальтозѣ

въ 1 часъ 7.2 mgr. CO^2.

Инулинъ черезъ 1 ч. 20 м.

въ 1 часъ 7.6 „ „

Опытъ 3.

10 дн. посѣвъ.

Инулинъ

въ 1 часъ 7.6 mgr. CO^2.

декстроза черезъ 5 ч. 50 м.

въ 1 часъ 16.8 „ „

Опытъ 4.

11 дн. посѣвъ.

Сахароза въ 1 часъ въ 1 часъ 9.6 mgr, CO^2,

декстроза черезъ 7 часовъ

въ 1 часъ 38.8 ,, ,,

Опытъ 4a.

12 дн. посѣвъ.

декстроза

въ 1 часъ 56.0 mgr. CO^2.

Сахароза черезъ 10 м.

въ 1 часъ 17.6 „ „

Опытъ 5.

11 дн. посѣвъ на сахарозѣ.

Сахароза.

въ 1 часъ 1.2 mgr. CO^2.

декстроза черезъ 30 м.

въ 1 часъ 2.4 „ „

Опытъ 6.

9 дн. посѣвъ на мальтозѣ.

Мальтоза.

въ 1 часъ 8.4 mgr. CO^2.

декстроза черезъ 1 ч. 20 м.

въ 1 часъ 10.8 „ „

10 дн. посѣвъ. *Опытъ* 7.

декстроза,

въ 1 часъ 12.8 mgr. CO^2.

Инулинъ черезъ 1 ч. 10 м.

въ 1 часъ 8.0 „ „

Опытъ 8.

10 дн. посѣвъ.

Мальтоза.

въ 1 часъ 9.6 mgr. CO^2.

виннокаменнокислый аммоній — черезъ 5 ч. 45 м.

въ 1 часъ 6.8 „ „

Опытъ 9.

9 дн. посѣвъ.

декстроза.

въ 1 часъ 6.0 mgr. CO^2.

Виннокаменная кислота черезъ 1 ч. 5 м.

въ 1 часъ 3.2 „ „

„ черезъ 6 часовъ 2.0 „ „

декстроза черезъ 40 м.

въ 1 часъ 2.8 „ „

Опытъ 10.

10 дн. посѣвъ.

левулёза.

въ 1 часъ 10.0 mgr. CO^2.

декстроза черезъ 1 ч. 10 м.

въ 1 часъ 9.2 „ „

Эти опыты показываютъ, что Mucor mucedo крайне чувствителенъ къ питательнымъ веществамъ. Замѣна одного питательнаго вещества другимъ отражается на дыханіе, которое повышается или понижается въ зависимости отъ питательнаго достоинства вещества. По питательному достоинству изслѣдованное вещество располагается въ такомъ порядкѣ отъ болѣе къ менѣе питательному: левулеза, декстроза, мальтоза, сахароза и инулинъ, виннокаменнокислый аммоній, виннокаменная кислота.

Слѣдующій рядъ опытовъ былъ произведенъ съ цѣлью выяснить какъ отзывается на дыханіи лишеніе гриба питательныхъ веществъ. Опыты производились также какъ и предыдущіе только вмѣсто питательнаго раствора, мицелій, по промываніи 5—6 разъ стерелизованной водой, оставлялся въ водѣ.

Опытъ 1.

5 дн. посѣвъ.

Виннокаменный аммоній.

	въ 1 часъ	4.4 mgr. CO^2.
вода черезъ 1 ч. 10 м.		
	въ 1 часъ	2.8 „ „

Опытъ 2.

6 дн. посѣвъ.

Мальтоза.		
	въ 1 часъ	8.8 mgr. CO^2.
вода черезъ 5 ч. 45 м.		
	въ 1 часъ	3.6 ,, ,,
7 дн. посѣвъ (слѣдующій день)		
	воды въ 1 часъ	3.6 mgr. CO^2.
декстроза черезъ 1 ч. 30 м.		
	въ 1 часъ	7.2 ,, ,,
,, черезъ 3 ч. 45 м.		
	въ 1 часъ	10.6 ,, ,,

Опытъ 3.

7 дн. посѣвъ.

Мальтоза	въ 1 часъ	4.8 mgr. CO^2.
вода черезъ 4 ч. 45 м.		
	въ 1 часъ	2.4 mgr. CO^2.
слѣдующій день образуются спорангіи		
	воды въ 1 часъ	0.8 ,, ,,
Мальтоза черезъ 30 мин.		
	въ 1 часъ	4.4 ,, ,,

Опытъ 4.

10 дн. посѣвъ.

Инулинъ въ 1 часъ		8.0 mgr. CO^2.

вода черезъ 50 мин.

въ 1 часъ 5.0 mgr. CO^2.

слѣдующій день

въ 1 часъ 2.8 „ „

2-й день. Образовались многочисленные спорангіи. Вода подкислена фосфорной кислотой.

въ 1 часъ 3.2 mgr. CO^2.

3-й день „ 2.4 „ „

4-й день „ 1.2 „ „

Развитіе спорангіевъ продолжается.

Изъ этихъ опытовъ можно заключить:

1) Mucor mucedo является организмомъ непосредственно извлекающимъ для дыханія вещества[1]) питательнаго субстрата.

2) Лишеніе Mucor mucedo питательнаго субстрата вызываетъ тотчасъ сильное замедленіе дыханія[2]), обратно, доставленіе вновь питательныхъ веществъ быстро повышаетъ дыханіе. Стало быть Mucor mucedo не накопляетъ почти питательныхъ веществъ на случай голода, тѣмъ не менѣе дыханіе сильно замедленное продолжается и вмѣстѣ съ тѣмъ начинается быстрое образованіе спорангіевъ. Мицелій продолжаетъ давать спорангіеносные побѣги.

Кромѣ опытовъ съ голоданіемъ Mucor mucedo были произведены опыты съ цѣлью выяснить отношеніе шампиньоновъ (Psalliota campestris) къ лишенію субстрата. Грибы хранились въ стеклянныхъ влажныхъ камерахъ, а для опредѣленія дыханія помѣщались подъ стекляннымъ колпакомъ съ от—и приводящими стеклянными трубками.

Для сравненія была опредѣлена энергія дыханія молодыхъ шампиньоновъ (плодовыхъ тѣлъ съ пеньками).

Въ 1 часъ на 1 гр. сухого вещества выдѣлялись 3.4 mgr. CO_2; 3.1 mgr. CO_2
т. е. почти въ 6—10 разъ меньше, чѣмъ Mucor mucedo.

---

[1]) Ср. Gerber l. c.

[2]) У высшихъ растеній паденіе дыханія при голоданіи подробно изучено проф. Бородинымъ. Физіологическія изслѣдованія надъ дыханіемъ листоносныхъ побѣговъ. 1876 г.

Опытъ 1.

2 гриба съ цѣлыми покрывалами:

тотчасъ по снятіи съ субстрата	5.2	mgr. CO^2.
черезъ 1 день	5.2	,, ,,
черезъ 2 дня (прорывается покрывало)	3.6	,, ,,
черезъ 3 дня	4.0	,, ,,
черезъ 5 дней	3.2	,, ,,

Грибы достигли вдвое большей величины и образовали споры.

Опытъ 2.

3 молодыхъ гриба.

по снятіи съ субстрата	2.4	mgr. CO^2.
черезъ 1 день	2.4	,, ,,
черезъ 2 дня	2.0	,, ,,
черезъ 3 дня	2.8	,, ,,

Грибы выросли. Покрывало прорвалось и началось спорообразованіе.

Опытъ 3.

3 молодыхъ гриба.

по снятіи жатвы	3.2	mgr. CO^2.
черезъ 1 день	3.6	,, ,,
черезъ 2 дня	2.8	,, ,,
черезъ 3 дня	2.0	,, ,,

Грибы значительно развились, покрывало начало прорываться.

Эти опыты приводятъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

Плодовыя тѣла Psalliota campestris развиваются и растутъ безъ питательнаго субстрата и б е з ъ в о д ы. Во время развитія они достигаютъ значительной величины и образуютъ споры. При этомъ наблюдается переходъ питательныхъ веществъ изъ пенька въ шляпку.

Пенекъ становится сухимъ и уменьшается. Дыханіе Psalliota campestris крайне слабое. Лишеніе субстрата не вліяетъ на дыханіе, даже черезъ день дыханіе не измѣняется. Съ дальнѣйшимъ развитіемъ гриба дыханіе медленно падаетъ, повышаясь въ періодъ спорообразованія. Стало быть у высшихъ грибовъ мы имѣемъ противоположное низшимъ явленіе. Плодовое тѣло гриба, содержа въ себѣ значительный запасъ питательныхъ веществъ, совершенно пассивно относится къ лишенію субстрата, продолжая расти и развиваться въ влажной атмосферѣ. Разъ выяснилось [1]), что при дыханіи имѣютъ различное достоинство питательныя вещества, является интереснымъ вникнуть нѣсколько глубже въ процессъ распаденія и образованія веществъ при питаніи и въ частности при голоданіи.

Въ слѣдующей главѣ я излагаю мои изслѣдованія, произведенныя съ цѣлью выяснить, какая участь постигаетъ бѣлковыя тѣла при голоданіи грибовъ.

Изслѣдованія надъ голоданіемъ Amanita Muscaria.

Какъ извѣстно у высшихъ растеніи при голоданіи (ростъ въ темнотѣ) на ряду съ распадомъ происходитъ новообразованіе бѣлковъ [2]). Залесскій показалъ, что при проростаніи луковицъ Allium сера происходитъ новообразованіе бѣлковъ. Ошибка прежнихъ изслѣдователей заключалась въ томъ, что они вычисляли бѣлки въ % сухого вещества— число непостоянное. Прянишниковъ [3]) повторилъ работу Залесскаго и подтвердилъ его наблюденіе. У Прянишникова 5-го января бѣлковый азотъ составлялъ 33.3% общаго азота, 7-го декабря 49.7% и 17% 67.4%. Стало быть у высшихъ растеній при голоданіи происходитъ образованіе бѣлковъ. Изученіе явленія голоданія и вообще превращенія веществъ на высшихъ растеніяхъ представляетъ большія неудобства. Растенія приходится помѣщать въ ненормальныя условія, что конечно сильно сказывается на всѣхъ превращеніяхъ веществъ. Въ грибахъ мы имѣемъ превосходный объектъ для рѣшенія вопросовъ вообще о превращеніи веществъ какъ на свѣтѣ такъ и въ темнотѣ, такъ въ частности для изученія явленія голоданія. Относительно способности грибовъ образовать бѣлки въ отсутствіи свѣта, конечно не

---

[1]) A. Fleroff. Einfluss der Nahrung auf die Athmung der Pilze. Botanisches Centralblatt, 1899.

[2]) Zaleski. Zur Keimung der Zwiebeln von Allium Cepa und Eiweissbildung. Bericht. d. deutsch. Bot. Gesellschaft, 1898.

[3]) Prianischnikow. Eiwesszerfall und Eiweissrückbildung in den Pflanzen. Berichte d. deutsch. Bot. Gesellschaft, 1899. Прянишниковъ. Бѣлковыя вещества и ихъ превращеніе въ растеніи въ связи съ дыханіемъ и ассимиляціей. 1899.

можетъ быть и сомнѣнія, но является вопросъ, что происходитъ съ бѣлками при голоданіи грибовъ. Для рѣшенія этого вопроса необходимо было озаботиться подъискапіемъ подходящаго матеріала. Требовалось найти такой грибъ, который выдерживалъ бы продолжительное лишеніе субстрата, не отмирая и не подвергаясь въ то же время нападенію микроорганизмовъ. Совершенно случайно, собирая грибы для коллекціи, я открылъ интересный фактъ, что собранный матеріалъ (Amanita muscaria), случайно забытый мной въ ботанизиркѣ, продолжалъ расти въ отсутствіи воды и субстрата и развился настолько, что выполнилъ всю ботанизирку и приподнялъ крышку, сохраняя при этомъ совершенно свѣжій видъ. Это навело меня на мысль воспользоваться плодовыми тѣлами Amanita muscaria для изученія голоданія.

Матеріалъ собирался въ теченіи августа мѣсяца текущаго (1899) года. Были собраны самыя молодыя плодовыя тѣла и тотчасъ по сборѣ убиты при 110° С. и высушены; затѣмъ были собраны вполнѣ развившіеся и давшіе споры грибы и также высушены. Разумѣется всегда собирался по возможности однородный и не поврежденный матеріалъ и въ большомъ количествѣ экземпляровъ, такъ что индивидуальныя колебанія въ химическомъ составѣ не могли играть роли. На основаніи двухъ собранныхъ порцій можно судить о превращеніи веществъ при нормальномъ развитіи грибовъ и о ихъ химическомъ составѣ. Далѣе были собраны нѣсколько порцій молодыхъ грибовъ и оставлены для дальнѣйшаго развитія въ отсутствіи воды и субстрата по возможности при совершенно нормальныхъ условіяхъ. Грибы помѣщались на открытомъ воздухѣ, были затѣнены листвой деревьевъ и защищены отъ дождя навѣсомъ. Опытамъ весьма благопріятствовала погода; все время опытовъ былъ дождь и облачные дни. Собранные грибы, не смотря на лишеніе субстрата и воды, продолжали расти; они достигали втроевчетверо большей величины, прорывали покрывало и давали споры — словомъ проходили полный циклъ развитія. По окончаніи опыта грибы измельчались и высушивались при 110° С. Грибы поврежденные во время хода опытовъ конечно отбрасывались. Такимъ образомъ были приготовлены слѣдующія порціи:

Порція II собрана 10 августа, высушена 13-го, грибы значительно развились и прорвали покрывало.

Порція II/III. Стадія развитія немного болѣе чѣмъ порція II.

Собрана 10-го августа, высушена 13-го. Грибы развились значительно, прорвали покрывало и начали образовать споры. Эту порцію я считалъ по времени голоданія среднею между II и III.

Порція III собрана 12-го августа и высушена 17-го. Грибы развились, достигли величины взрослыхъ грибовъ. Начало осыпанія споръ.

Порція III B. C. Собраны 22-го августа высушены 28-го. Совершенно развились и споры осыпались. Пеньки почти сухи на ощупь, но грибы имѣли совершенно свѣжій видъ.

Порція III/IV. Собраны 13-го августа, высушены 21. Пеньки сухи на ощупь; шляпки начали увядать по краямъ. Общій видъ грибовъ свѣжій. Эта стадія голоданія послѣдняя. Съ 5-го дня голоданія грибы почти не увеличивались въ объемѣ.

Полученный такимъ образомъ матеріалъ былъ подвергнутъ анализу. Во всѣхъ порціяхъ были сдѣланы слѣдующія опредѣленія: общій азотъ; азотъ бѣлковый и азотъ непереваримый (нуклеиновый).

Общій азотъ опредѣлялся по способу Кьельдаля [1]). Для предотвращенія сильнаго перегрѣванія жидкости при отгонкѣ амміака и сопряженныхъ съ этихъ толчковъ, могущихъ повести къ потерѣ анализовъ, въ колбы для отгонки помѣщались 2—3 капиллярныхъ трубочки съ запаянными расширеніями. Бѣлковый азотъ опредѣлялся по способу Штуцера [2]), данномъ имъ для того случая, когда вещество содержитъ алколоиды. Именно, вещество (около 1 гр.) нагрѣвалось на водяной банѣ съ 100 куб. сант. безводнаго спирта и 1 куб. сант. крѣпкой уксусной кислоты; алколоиды переходятъ въ растворъ въ видѣ уксуснокислыхъ солей. Растворъ отфильтровываютъ; осадокъ нагрѣваютъ съ водой до кипѣнія, промываютъ нѣсколько разъ и высушиваютъ, а затѣмъ опредѣляютъ азотъ по Кьельдалю.

---

[1]) Морковинъ. „Методы количественнаго опредѣленія вещества растит. происхожденія". Густавсонъ. „Двадцать лекцій агрономической химіи". Франкфуртъ. „Методы химическаго изслѣдованія веществъ растительнаго происхожденія". Бетлингъ. „Къ вопросу объ опредѣленіи азота органическихъ веществъ по способу Кьельдаль—Вильфарта" Арх. біологическихъ наукъ, г. V.

[2]) A. Stutzer Journal für Landwirthschaft, t. XXV, III. Морковинъ l. c.

Опредѣленіе неперевариміыхъ бѣлковъ производилось обработкой желудочнымъ сокомъ[1]). Желудокъ только что убитой свиньи промывался, съ него снималась слизистая оболочка, измельченная на куски помѣщалась въ сосудъ съ 5-ю литрами воды и 100 куб. сант. 10% соляной кислоты, и 2—3 гр. салициловой. Черезъ двое сутокъ жидкость колировалась и затѣмъ тщательно отфильтровывалась. Опредѣленное количество вещества (около 1 gr.) обливалось 250 с. желудочнаго сока и оставлялось на 6 сутокъ въ термостатѣ при 39—40° С. Такъ какъ всѣ порціи обработывались при одинаковыхъ условіяхъ и однимъ и тѣмъ же желудочнымъ сокомъ, то получались сравнимые результаты.

Перехожу къ изложенію данныхъ анализа.

Порція I (во всѣхъ порціяхъ приводится среднее изъ 2-хъ опредѣленій).

Молодые грибы:

Общій азотъ (въ % сухого вещества)	4.06%	
бѣлковый азотъ (2.20—0.97)	1.23%	
нуклеиновый азотъ	0.97%	
Принимая общій азотъ за 100:		
бѣлковый	30.29	54.18%
нуклеиновый	23.89	

Порція II

Три дня голоданія:

общій азотъ	5.30%	
бѣлковый азотъ (2.60—1.17)	1.43%	
нуклеиновый азотъ	1.17%	
Въ % общаго азота:		
бѣлковый азотъ	27.21	49.28%
нуклеиновый азотъ	22.07	

---

[1]) Палладинъ. Условія образованія бѣлковыхъ веществъ неперевариміыхъ въ желуд. сокѣ и ихъ значеніе для дыханія растеній. A. Stutzer. (l. c).

Порція II/III.

4 дня голодапія:

Общій азотъ 5.12%

бѣлковый азотъ (3,02—1.45) 1.57%

нуклеиновый азотъ 1.45%

Въ % общаго азота:

Бѣлковый азотъ	30.64	54.96%
нуклеиновый	28.32	

Порція III.

5 дней голоданія:

Общій азотъ 5.29%

бѣлковый азотъ (3,32 —1.30) 2.02%

нуклеиновый азотъ 1.30%

Въ % обшаго азота:

Бѣлковый азотъ	38.18	62.75%
нуклеиновый	24.57	

Порція III В. С.

6 дней голодапія:

Общій азотъ 5.59%

бѣлковый азотъ (2.46—1.32) 1.14%

нуклеиновый азотъ 1.32%

Въ % общаго азота:

Бѣлковый азотъ	20.39	44.00%
нуклеиновый азотъ	23.61	

Порція III/IV.

8 дней голодапія:

Общій азотъ 5.86%

бѣлковый азотъ (2.63—1.34) 1.29%

нуклеиновый 1.34%

Въ % общаго азота:

Бѣлковый	22.36	45.05%
нуклеиновый	22.69	

Порція IV.

Взрослые грибы:

Общій азотъ:	4.41%
бѣлковый азотъ (2.53—1.06)	1.47%
нуклеиновый азотъ	1,06%

Въ % общаго азота:

Бѣлковый азотъ	33.33	57.36%
нуклеиновый	24.03	

Разсматривая данныя анализа мы видимъ, что при голоданіи общее количество азота въ % сухого вещества возрастаетъ. Это указываетъ на то, что въ грибахъ происходитъ потеря безазотистыхъ соединеній, которыя тратятся на дыханіе, на это же указываютъ и данные анализа бѣлковаго и нуклеиноваго азота (въ % сухого вещества). По даннымъ анализамъ, вычисленнымъ на сухое вещество, нельзя судить объ образованіи или распаденіи бѣлковыхъ веществъ, потому что сухое вещество не есть величина постоянная. Чтобы имѣть возможность судить объ отношеніи бѣлковъ грибовъ при голоданіи слѣдуетъ вычислять отношенія бѣлковаго и нуклеиноваго азота къ общему, принимая во вниманіе, что общій азотъ величина постоянная и трата азота при развитіи грибовъ не происходитъ (это предположеніе окончательно не доказано).

Разсмотримъ данныя анализа при перечисленіи на общій азотъ принятый за 100.

Азотъ	Порціи голоданія						
	I (0)	II (3)	II|III (4)	III (5)	III B.C.(6)	III IV (8)	IV (0)
Общій . .	100	100	100	100	100	100	100
бѣлковый	30.29	27.21	30.64	38.18	20.39	22.36	33.33
нуклеинов.	23.89	22.07	28.32	24.57	23.61	22.69	24.03
Сумма .	54.18	49.28	58.96	62.75	44.00	45.05	57.36

При голоданіи, не смотря на полное отсутствіе субстрата и даже воды, происходитъ новообразованіе бѣлковъ и нуклеиновъ. Какъ разъ это новообразованіе совпадаетъ съ началомъ спорообразованія и съ періодомъ ихъ созрѣванія; затѣмъ наступаетъ быстрое распаденіе бѣлковъ. Здѣсь не принимается во вниманіе то, что споры частью теряются: дѣло въ томъ, что при вычисленіи на общій азотъ, принятый за

100 это потеря не играетъ роли, да и сама по себѣ ничтожна; избѣжать же ея нельзя.

Такимъ образомъ опыты надъ голоданіемъ Amanita muscaria позволяютъ сдѣлать слѣдующіе выводы.

Плодовыя тѣла Amanita muscaria могутъ развиваться въ отсутствіи субстрата и воды; они достигаютъ почти нормальной величины и образуютъ споры.

При голоданіи тратятся въ значительномъ количествѣ безазотистыя органическія вещества. Количество бѣлковъ и нуклеиновъ при голоданіи сначала падаетъ, затѣмъ увеличивается и снова падаетъ. Максимумы увеличенія бѣлковъ и нуклеиновъ не совпадаютъ.

Теперь остается разсмотрѣть вопросъ, имѣетъ ли дыханіе непосредственную связь съ процессомъ распаденія бѣлковыхъ тѣлъ или при дыханіи тратится безазотистый матеріалъ, бѣлки же играютъ при дыханіи лишь посредственную роль.

Мнѣ кажется, что имѣющіяся данныя и изслѣдованія не позволяютъ дѣлать заключенія о непосредственномъ значеніи бѣлковъ для дыханія. Послѣдняя работа проф. Палладина[1]) показала, что повышеніе энергіи дыханія вслѣдствіе колебанія температуры не находится въ зависимости отъ количества нуклеиновыхъ соединеній. Пуріевичъ[2]), изучая голоданіе Aspergillus niger, полагаетъ, что окисленію при голоданіи подвергаются бѣлки, входящія въ составъ протоплазмы; но никакихъ доводовъ за это не приводитъ. Приведенныя выше аналитическія данныя показываютъ, что главнымъ образомъ тратятся, т. е. окисляются безазотистыя соединенія.

Работа Gerber[3]) показала, что можно произвести строгій подсчетъ доставленнаго безазотистаго матеріала и образовавшихся углекислоты и воды; мои наблюденія надъ питательнымъ значеніемъ различныхъ веществъ для дыханія показали, что безазотистыя вещества быстро повышаютъ энергію или понижаютъ, въ зависимости отъ пита-

---

[1]) Пуріевичъ. „Физіологическія изслѣдованія надъ дыханіемъ растеній".

[2]) Gerber l. c.

[3]) Палладинъ. „Вліяніе температуры на дыханіе растеній". 1899 г.

тельнаго достоинства, т. е. какъ бы непосредственно тратятся при дыханіи. При этомъ еще не слѣдуетъ упускать изъ виду открытыхъ какъ у высшихъ растеній, такъ и у грибовъ оксидазъ[1]), которыя именно и могутъ играть роль при дыханіи.

Надо думать, что бѣлкамъ и нуклеинамъ принадлежитъ роль образователей оксидазъ, которыя и являются окислителями и передатчиками кислорода. Процессъ распаденія бѣлковыхъ тѣлъ и ихъ новообразованія можетъ быть связанъ съ выработкой этихъ оксидазъ, а равнымъ образомъ по всей вѣроятности и съ ростомъ.

Если выяснилось какую первенствующую роль играютъ ферменты въ жизни растеній, то слѣдуетъ признать, что и при процессѣ дыханія они имѣютъ главное значеніе. Связь бѣлковъ съ дыханіемъ является тогда лишь косвенной.

Резюмируемъ теперь вкратцѣ все изложенное:

1) Различныя питательныя вещества имѣютъ неодинаковое питательное достоинство для растеній и въ связи съ этимъ оказываютъ вліяніе на энергію дыханія, повышая или понижая ее.

2) Плесневые грибы, въ частности Mucor mucedo, представляютъ типъ грибовъ всецѣло зависящихъ отъ питательнаго субстрата, съ лишеніемъ питанія тотчасъ наступаетъ голоданіе, связанное съ подавленіемъ энергіи дыханія.

3) Плодовыя тѣла высшихъ грибовъ почти не зависятъ отъ субстрата и могутъ развиваться въ его отсутствіи и даже безъ воды они достигаютъ нормальныхъ размѣровъ и даютъ споры.

4) Наступающій недостатокъ питательныхъ веществъ ведетъ къ тому, что голодающій грибъ начинаетъ быстро образовать споры и тѣмъ обезпечиваетъ свое дальнѣйшее развитіе.

5) При голоданіи грибовъ происходитъ усиленная трата безазотныхъ органическихъ веществъ, кои потребляются при дыханіи.

6) При голоданіи грибовъ происходитъ на ряду съ распаденіемъ бѣлковъ ихъ новообразованіе, особенно въ періодѣ спорообразованія.

---

[1]) Bertrand. Comptes rendus (CXX 1895) CXXIII. 1896. Bourquelot. Comptes rendus CXXIII. 1896. Grüss. Landwirtschaftl. Jahrbücher XXV. 1896.

7) Гипотеза о непосредственномъ значеніи бѣлковъ для дыханія не имѣетъ за собой достаточныхъ основаній.

8) Существованіе у растеній оксидазъ позволяетъ предполагать, что онѣ играютъ важную роль при дыханіи.

Изслѣдованіе по вопросу объ образованіи и распаденіи бѣлковъ у грибовъ въ зависимости отъ разныхъ условій (питанія, температуры, поранѣнія и свѣта), мной еще не закончено, и потому я оставляю за собой право продолжать начатыя уже мной изслѣдованія.

Варшава,
19 ноября 1899 года.

О гистонѣ и парагистонѣ.

А. Флерова.

А. Коссель [1]) подвергнулъ оставшуюся по обработкѣ водой красныхъ кровяныхъ шариковъ гуся субстанцію извлеченію разведенной соляной кислоты и затѣмъ, внося въ профильтрованный растворъ каменную соль, получилъ осадокъ, который былъ отфильтрованъ, промытъ содержащей соль кислотой и подвергнутъ діализу. По мѣрѣ удаленія соли вещество переходило въ діализаторѣ въ растворъ. Изслѣдованіе нейтральнаго, не содержащаго соли раствора показало, что полученное вещество, представляетъ неизвѣстное до тѣхъ поръ бѣлковое тѣло, близкое по свойствамъ къ классу A. Pepton (propepton; albumose). Коссель далъ этому веществу названіе гистонъ.

Наиболѣе характерныя реакціи для гистона слѣдующія: нейтральный растворъ гистона неспособенъ свертываться при нагрѣваніи; избытокъ амміака осаждаетъ его изъ нейтральнаго свободнаго отъ солей раствора; азотная кислота осаждаетъ на холоду, осадокъ исчезаетъ при нагрѣваніи и снова появляется при охлажденіи. Затѣмъ, гистонъ осаждается при насыщеніи раствора каменной солью, сѣрнокислымъ аммоніемъ, хлористымъ аммоніемъ, сѣрнокислымъ магніемъ. Концентрированный растворъ осаждается алкоголемъ. Для анализа Коссель упо-

[1]) A. Kossel. Ueber einen peptonartigen Bestandtheil des Zellkerns (Hoppe-Seyler's Zeitschrift für phys. Chemie. Bd. 8).

требилъ гистонъ, осажденный амміакомъ, и гистонъ, осажденный алкоголемъ, и получилъ слѣдующія числа (среднія)

Для гистона осажденнаго амміакомъ (I)

,, ,, ,, алкоголемъ (II)

	I	II
углеродъ	52.31	50.67
водородъ	7.09	6.99
азотъ	18.46	17.93
сѣра		0.50

Лиліенфельдъ [1]) при изслѣдованіи Thymus подвергнулъ добытый изъ Thymus нуклеогистонъ обработкѣ 0.8% соляной кислотой. Изъ отфильтрованнаго раствора было осаждено амміакомъ вещество, схожее съ гистономъ, полученнымъ А. Косселемъ [2]). Гистонъ, добытый Лиліенфельдомъ изъ Thymus, отличался отъ гистона добытаго изъ красныхъ кровяныхъ шариковъ гуся, способностью свертываться при нагрѣваніи, при чемъ свертокъ легко растворялся въ минеральныхъ кислотахъ: анализъ показалъ полное совпаденіе углерода и водорода

углеродъ	52.34	(у Косселя 52.31)
водородъ	7.31	(,, 7.09)

Шульцъ [3]) получилъ изъ гемоглобина глобинъ и считаетъ его за гистонъ, хотя глобинъ легко растворяется въ амміакѣ, но въ присутствіи хлористаго аммонія онъ не растворяется даже въ избыткѣ амміака. Самыми характерными реакціями для гистона Шульцъ считаетъ: осажденіе амміакомъ изъ солянокислаго раствора и нерастворимость осадка въ избыткѣ амміака; осажденіе крѣпкой азотной кислотой на холоду, но не при нагрѣваніи; свертыванье при кипяченіи, при чемъ свертокъ легко растворяется въ кислотахъ.

Иваръ Бангъ [4]) устанавливаетъ растворимость гистона въ амміакѣ въ томъ случаѣ, если растворъ не содержитъ никакой амміачной

---

[1]) Zur Chemie der Leucocyten (H.-S. Zeitschrift für phys. Chemie. Bd. 18).

[2]) l. c.

[3]) Die Eiweisskörper des Hämoglobins (H.-S. Zeitschrift. Bd. 24).

[4]) Studien über Histon (H.-S. Zeitschrift f. phys. Chemie. Bd. XXVII 1899 г. Эта работа появилась тогда, когда мои изслѣдованія надъ гистономъ были закончены).

соли; наоборотъ, въ случаѣ если въ растворѣ присутствуютъ соли аммонія, гистонъ осаждается и совершенно нерастворимъ въ избыткѣ аммiака. При этомъ совершенно безразлично количество гистона въ растворѣ; при прибавленіи солей аммонія къ амміачному раствору гистона всегда появляется осадокъ; равнымъ образомъ, все равно—содержитъ ли растворъ много или мало амміака. Гистонъ по указанію Ивара Бангъ свертывается при нагрѣваніи въ присутствіи солей. Реактивы алкалоидовъ (желѣзисто синеродистый калій и др.) осаждаютъ гистонъ изъ нейтральныхъ растворовъ. Далѣе Иваръ Бангъ устанавливаетъ интересное отношеніе гистона къ растворамъ бѣлка. Ovalbumin, serumglobulin, casein даютъ осадки съ 1% растворомъ гистона.

Mathews [1]) получилъ изъ arbacia вещество, принимаемое имъ за гистонъ. Arbacin отличается отъ гистона тѣмъ, что не осаждается амміакомъ; нейтральный растворъ арбацина осаждается реактивами, которыя осаждаютъ протаминъ.

Такимъ образомъ мы видимъ изъ обзора литературы, что далеко еще не выяснено, что такое гистонъ, и самыя разнообразныя вещества причисляются къ гистону [2]).

Поэтому Hammersten [3]) устанавливаетъ разнообразіе гистоновъ, причисляя къ нимъ globinu arbacin.

Послѣ того какъ изслѣдованія А. Косселя показали близкое отношеніе гистона къ протамину, является вопросъ не находятся ли въ животныхъ тканяхъ вмѣстѣ съ гистонами, такъ же и протамины. Для рѣшенія этого вопроса я по предложенію профессора А. Косселя приступилъ къ обработкѣ Thymus по тѣмъ методамъ, которые примѣняются для полученія протаминовъ изъ спермы рыбъ.

Коссель [4]) для полученія протамина примѣнялъ слѣдующій методъ:

---

[1]) Hoppe-Seyler's. Zeitschrift fur phys. Chemie. Bd. XXIII.

[2]) Вещества представляющія частію свойства протамина, частью гистона.

[3]) Hammersten. Lehrbuch der physiologischen Chemie. 1899.

[4]) Kossel. Ueber die Constitution der einfachsten Eiweissstoffe. Hoppe-Seyler's Zeitschrift. Bd. XXV. 1898 г.

A. Kossel. Weitere Mitteilungen über die Protamine (Hoppe-Seyler's Zeitschrift. Bd. XXII.

A. Kossel. Ueber die basischen Stoffe des Zellkerns (Hoppe-Seyler's Zeitschrift. Bd. XXII).

100 gr. извлеченныхъ спиртомъ и эѳиромъ тестикулъ разныхъ рыбъ (селедка, лосось) взбалтываютъ по $^{1}/_{4}$ часа съ 50 cc. однопроцентной сѣрной кислоты, и такая обработка повторялась до шести разъ. Фильтратъ осаждался тройнымъ количествомъ алкоголя; образующійся осадокъ отсасывался, растворялся въ горячей водѣ и очищался повторнымъ растворенiемъ и осажденiемъ алкоголемъ. Для освобожденія отъ слѣдовъ нуклеиновой кислоты, сѣрнокислая соль протамина переводилась въ пикриновокислое соединенiе осажденiемъ пикриновокислымъ натріемъ. Полученный пикратъ-протаминъ былъ разложенъ слабой сѣрной кислотой; пикриновая кислота удалялась эфиромъ и сульфатъ-протаминъ снова осаждался алкоголемъ. Подобный же методъ былъ примѣненъ Кураевымъ [1]). Для извлеченія протамино-подобныхъ веществъ я воспользовался этимъ методомъ съ тѣмъ измѣненіемъ, что, вмѣсто повторнаго взбалтыванья съ сѣрной кислотой, извлекалъ предварительно обработанную спиртомъ и эѳиромъ Thymus 2% сѣрной кислотой въ теченіе 48 часовъ. Вытяжка по фильтраціи осаждалась алкоголемъ, полученное вещество переводилось въ пикратъ, вторичной обработкой сѣрной кислотой и взбалтываньемъ съ эфиромъ превращалось обратно въ сульфатъ и очищалось повторнымъ осажденіемъ изъ раствора въ водѣ алкоголемъ. Получалось вещество представляющее во влажномъ состояніи бѣлый, хлопчатый осадокъ, при высушиваніи оно пріобрѣтало желтоватобѣлый оттѣнокъ. Это вещество отличалось по своимъ реакціямъ и отъ гистона и отъ протамина. Такъ, напримѣръ, при осажденіи аммiакомъ, часть вещества оставалась въ растворѣ. Это явленіе навело на предположеніе, не представляетъ ли данное вещество смѣсь двухъ различныхъ веществъ. Пользуясь указаннымъ отношеніемъ къ аммiаку, я примѣнилъ для раздѣленія этихъ веществъ еще неопубликованный методъ доктора Левина, которымъ онъ пользовался въ лабораторіи Косселя для полнаго отдѣленія протамина отъ гистона. Этотъ методъ состоитъ въ слѣдующемъ: работая надъ протаминами, докторъ Левинъ замѣтилъ, что въ то время какъ одни соединенія совершенно не даютъ Миллонову реакцію, другія ясно обнаруживаютъ ее. Предполагая, что,

---

[1]) D. Kurajeff. Ueber das Protamin aus den Spermatozoen der Macrelle (Hoppe-Seyler's Zeitschrift. Bd. XXVI).

если протамины являются определенной группой бѣлковыхъ веществъ, то они должны обладать и общими реакціями, онъ заподозрилъ, что въ данномъ случаѣ появленіе миллоновой реакціи въ одномъ протаминѣ и отсутствіе ея въ другомъ можетъ зависѣть отъ примѣси другого посторонняго вещества бѣлковаго характера. Пользуясь растворимостью протаминовъ въ избыткѣ амміака и примѣняя повторно подобную обработку онъ достигъ того, что изслѣдуемый имъ протаминъ сталъ давать лишь ничтожные слѣды миллоновой реакціи. Воспользовавшись любезнымъ указаніемъ доктора Левина и имѣя въ виду выше приведенное отношеніе къ амміаку полученнаго мною вещества, я примѣнилъ его методъ къ отдѣленію растворимой въ амміакѣ части отъ нерастворимой.

Раздѣленіе было произведено мною слѣдующимъ образомъ. Горячій растворъ очищеннаго переводомъ черезъ пикратъ вещества осаждался избыткомъ амміака. Черезъ четверть часа теплый растворъ отфильтровывался отъ осадка, осадокъ нѣсколько разъ обрабатывался горячей водой, и промывныя воды присоединялись къ фильтрату. Фильтратъ былъ осажденъ большимъ избыткомъ алкоголя, и осадокъ сохраненъ для дальнѣйшаго изслѣдованія. Осадокъ отъ амміака былъ изслѣдованъ для установленія его характера. Зная большое содержаніе гистона въ Thymus, можно было предположить не есть ли это осадокъ гистонъ. Послѣ тщательнаго промыванія горячей водой, это вещество было растворено въ небольшомъ избыткѣ слабой соляной кислоты. Всѣ реакціи характерныя для гистона были получены съ солянокислымъ растворомъ этого вещества, именно: при осажденіи амміакомъ получился совершенно нерастворимый въ горячей водѣ и въ избыткѣ амміака осадокъ, азотная кислота давала осадокъ на холоду, но не при нагрѣваніи. При охлажденіи осадокъ вновь появлялся. Растворъ свертывался при нагрѣваніи съ углекислымъ натріемъ, съ миллоновымъ реактивомъ получалась явственная миллонова реакція. Для окончательнаго установленія природы полученнаго тѣла, оно было осаждено отъ солянокислаго раствора избыткомъ амміака, и осадокъ промывался горячей водой пока въ промывныхъ водахъ нельзя было обнаружить ни хлора, ни амміака. Высушенное при 110° C. вещество представляло бѣлый порошокъ. Анализъ далъ слѣдующія числа

N—18.35%

C—52.37%

H— 7.70%
S— 0.62%

Гистоны, полученные Косселемъ и Лиліенфельдомъ дали при анализѣ слѣдующія числа:

Гистонъ осажденный аммiакомъ (А. Коссель)

N—18.46%
C—52.31%
H— 7.09%
S— 0.50%

Гистонъ (Лиліенфельдъ)

C—52.34%
H—7.31%

Такимъ образомъ полученное по способу выработанному для протаминовъ вещество является настоящимъ гистономъ. Этимъ подтверждается мнѣніе доктора Левина о возможной нечистотѣ добываемыхъ протаминовъ вслѣдствіе примѣси къ нимъ гистона или другихъ бѣлковыхъ тѣлъ.

Теперь перехожу къ фильтрату послѣ осажденія гистона аммiакомъ. Какъ сказано, фильтратъ вмѣстѣ съ промывными водами былъ осажденъ избыткомъ алкоголя. Осадокъ растворялся въ горячей водѣ и по прибавленіи небольшого количества алкоголя жидкость отфильтровывалась отъ образовавшейся мути. Изъ прозрачнаго фильтрата избытокъ алкоголя съ эфиромъ осадилъ желтовато-бѣлое вещество, которое снова было растворено въ водѣ и осаждено алкоголемъ съ эфиромъ. Такая обработка повторялась нѣсколько разъ. Растворъ этого вещества въ водѣ даетъ слѣдующія реакціи: растворъ сильно щелочной реакціи; явственная біуретова реакція, едва замѣтная миллонова; фосфорно-вольфрамовая кислота, таннинъ, желѣзисто-синеродистый калій съ уксусной кислотой, пикриновокислый натръ, іодистый калій съ іодистой ртутью—даютъ осадокъ.

Хромокислый натрій, іодъ съ іодистымъ каліемъ, сулема, каменная соль (при насыщеніи) и сѣрнокислый цинкъ (при насыщеніи) не даютъ осадка. Альбумоза въ аммiачномъ растворѣ не даетъ осадка [1]).

---

[1]) Можетъ быть осажденія не получалось именно вслѣдствіе примѣненія аммiака, при реакціи всегда появлялась муть.

Реакція Адамкевича не получается. Ѣдкія щелочи и углекислый натрій даютъ осадокъ быстро исчезающій при избыткѣ реактивѣ. При кипяченіи раствора вещества съ углекислымъ натріемъ свертыванья не получается. Азотная кислота ни на холоду, ни при нагрѣваніи не даетъ осадка. Вещество было высушено при 125% С и представляло желтовато-бѣлый порошокъ.

Оно было анализировано и получились слѣдующія данныя:

N—17.97% сѣра не опредѣлялась.
C—51.91%
H—7.81%

Кромѣ метода Левина для полученія этого вещества былъ примѣненъ ѣдкій баритъ, для превращенія сѣрнокислаго соединенія въ свободное основаніе. Къ горячему раствору вещества, содержащаго примѣсь гистона (по обработкѣ пикриновокислымъ натріемъ и повторной очисткѣ) прибавлялся въ избыткѣ ѣдкій баритъ. Полученная мутная жидкость по удаленіи избытка ѣдкаго барита углекислотой фильтровалась очень трудно. Для улучшенія фильтрованія къ жидкости было прибавлено равное количество алкоголя и нѣсколько амміака. Нагрѣтая жидкость отфильтровалась совершенно прозрачной и избыткомъ алкоголя изъ этой жидкости было осаждено вещество слегка желтоватаго цвѣта. Для очищенія оно было повторно растворено въ горячей водѣ и осаждено избыткомъ алкоголя въ присутствіи эѳира. По высушиваніи при 100° С. вещество было анализировано.

Анализъ далъ слѣдующія числа:

N—17.72%
C—51.77%
H—8.06
S— 1.99

Сравнивая эти данныя анализа съ данными анализа вещества, полученнаго обработкой амміакомъ, видимъ почти полное сходство:

	I	II
N	17.97	17.72
C	51.91	51.77
H	7.81	8.06

Качественныя реакціи оказались совершенно сходными съ реакціями перваго вещества. Стало быть здѣсь мы имѣемъ дѣло съ однимъ и тѣмъ же веществомъ. Это вещество по процентному составу стоитъ близко къ гистону, отличаясь большимъ содержаніемъ сѣры:

Полученное вещество (среднее).	Гистонъ.
N—17.84	18.35
C—51.84	52.37
H— 7.93	7.70
S— 1.99	0.62

Однако по своимъ реакціямъ оно совершенно отличается отъ гистона. Я предлагаю назвать это бѣлковое тѣло основного характера, добытое мною изъ Thymus „парагистонъ“.

Для сравненія приведу главныя реакціи гистона и парагистона:

	Гистонъ.	Парагистонъ.
Амміакъ (избытокъ въ присутствіи солей аммонія).	Осадокъ, совершенно нерастворимый въ водѣ.	Нѣтъ осадка.
Кипяченіе съ избыткомъ углекислаго натрія.	Свертыванье.	Свертыванья нѣтъ.
Азотная кислота на холоду.	Осажденіе.	Осадка нѣтъ.

Но полученный „Parahiston" не представляетъ собой также и типичнаго протамина.

	Гистонъ.	Парагистонъ.	Протаминъ.
Миллонова реакція.	Явственная.	Едва замѣтная.	Нѣтъ
Альбумоза.	Нѣтъ осадка.	Нѣтъ [1]) осадка.	осадокъ.

Сходство гистона, парагистона и протаминовъ состоитъ въ томъ, что они являются бѣлковыми веществами основного характера и обладаютъ способностью давать соли.

---

[1]) См. примѣчаніе выше. Иваръ Бангъ указываетъ въ своей работѣ (l. c.) на способность гистона давать осадокъ съ альбумозой.

Считать гистоны за соединенія протаминовъ съ бѣлковыми тѣлами, какъ это дѣлаетъ Коссель [1]) мы не имѣемъ достаточныхъ основаній. Наоборотъ данныя Ивара Банга скорѣе указываютъ на бо́льшую близость протаминовъ къ гистонамъ (способность давать соединенія съ альбумозами). Полученный мною парагистонъ подтверждаетъ высказанное предположеніе: онъ составляетъ какъ бы связующее звѣно между гистонами и протаминами. Приведенныя выше данныя позволяютъ считать гистонъ и парагистонъ за простыя бѣлковыя тѣла, приближающіяся къ протаминамъ, какъ и протамины обладающія основными свойствами. Что касается гистона и парагистона, то авторы, работавшіе надъ гистономъ, очевидно имѣли дѣло съ гистономъ содержавшимъ примѣсь парагистона; отсюда нѣкоторыя разногласія въ реакціяхъ. Весьма возможно, что полученный изъ nucleo-histon'a histon содержалъ и parahiston, который иногда могъ и преобладать. Условія образованія гистона и парагистона еще совершенно не выяснены. Возможно, что первый—можетъ легко превращаться въ организмѣ въ послѣдній, а послѣдній въ первый; за это говоритъ ихъ близкій химическій составъ и многія общія реакціи. Можетъ быть у зародышей въ Thymus преобладаетъ парагистонъ (или даже protamin?), который съ развитіемъ переходитъ въ гистонъ.

Подводя итоги всему сказанному можно сдѣлать слѣдующія заключенія:

1) Гистонъ въ болѣе чистомъ видѣ можно добыть, обрабатывая Thymus по способу выдѣленія протаминовъ и осаждая аммiакомъ [2]).

2) Наряду съ гистономъ Thymus содержитъ новое тѣло „парагистонъ“ бѣлковое вещество основного характера.

3) Гистонъ, парагистонъ и протамины обладаютъ нѣкоторыми общими свойствами, при чемъ парагистонъ является какъ бы промежуточнымъ звѣномъ между гистономъ и протаминами.

4) Парагистонъ по реакціямъ стоитъ ближе къ протаминамъ, по химическому составу къ гистону.

---

[1]) l. c. Hammersten (l. c.).

[2]) Предварительно переведя черезъ picrat.

5) Гистонъ прежнихъ изслѣдователей могъ содержать парагистонъ.

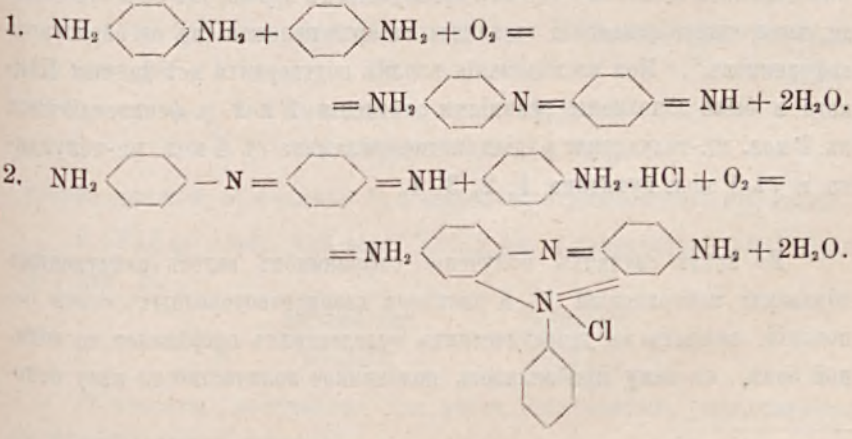
6) Положеніе Косселя о гистонѣ, какъ о соединеніи протаминовъ съ бѣлками нельзя считать доказаннымъ.

Варшава 14 ноября 1899 года.

О реакціяхъ образованія сафраниновъ.

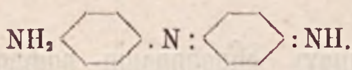
Д. Хардина.

Не смотря на то, что до настоящаго времени было произведено значительное количество изслѣдованій по различнымъ вопросамъ, касающимся теоріи сафраниновъ, однако громадное большинство ихъ разъясняло только съ той или другой стороны строеніе этихъ важныхъ пигментовъ, оставляя совершенно въ сторонѣ вопросъ о ходѣ реакцій, по которымъ они образуются. Въ послѣднемъ случаѣ наиболѣе цѣнными являются работы Ницкаго [1]), который показалъ, что при окисленіи 1 мол. р.-діамина и 2 мол. первичнаго моноамина сперва образуется индаминъ, который, затѣмъ окисляясь со второй частицей моноамина, даетъ уже сафранинъ:



[1]) Berl. Berich. 16. 472; 17. 223.

Однако на сколько просто для пониманія образованіе по реакціи 1 индамина, на столько трудно объяснить послѣдующую вторую реакцію, и вопросъ осложняется еще болѣе тѣмъ, что по изслѣдованіямъ того же автора [1]) далеко не всякій первичный аминъ способенъ давать сафранинъ, окисляясь совмѣстно съ простѣйшимъ индаминомъ



Такъ напр., Ницкій указываетъ, что изъ шести возможныхъ ксилидиновъ способны образовать въ этомъ случаѣ сафранинъ только два. Дѣйствительно, кажется весьма страннымъ, какимъ образомъ здѣсь могутъ вліять боковыя группы бензольнаго ядра, когда аминъ входитъ въ реакцію только своей амидо-группой. Имѣя же въ виду, что это изслѣдованіе появилось въ 1886 г., когда сами ксилидины были плохо изъучены, прежде всего приходило на умъ усомниться въ справедливости полученныхъ результатовъ и потому по предложенію проф. Е. Нёльтинга я занялся сначала провѣркой этихъ данныхъ, имѣя въ виду постараться, если подтвердится ихъ справедливость, найти какую-нибудь законность въ этомъ явленіи, что было бы тѣмъ болѣе желательнымъ, такъ какъ Ницкій по этому поводу говоритъ [2]): „... связанныя съ бензольнымъ ядромъ метильныя группы въ зависимости отъ ихъ расположенія могутъ оказывать вліяніе на способность образовать сафранинъ. Опредѣленной же законности изъ приведенныхъ примѣровъ вывести нельзя, хотя однако основанія съ занятымъ орто-положеніемъ не образуютъ сафраниновъ“. Мои изслѣдованія вполнѣ подтвердили всѣ данныя Ницкаго и были дополнены реакціями окисленія 1 мол. p.-фенилендіамина съ 2 мол. m.-толуидина; p.-діаминодифениламина съ 1 мол. m.-толуидина и съ 1 мол. кумидина 1, 2, 3, 4.

Во всѣхъ случаяхъ полученіе сафраниновъ велось слѣдующимъ образомъ: нейтральный 1%-й растворъ хлористоводородныхъ солей основаній, взятыхъ въ теоретическихъ количествахъ нагрѣвался на водяной банѣ, къ нему прибавлялось половинное количество по вѣсу осно-

---

[1]) Berl. Berich. 19. 3163.

[2]) Berl Berich. 19. 3166.

ваній твердой щавелевой кислоты и въ полученный такимъ образомъ горячій растворъ вливалось въ видѣ густой кашицы двойное по вѣсу основаній же количество перекиси марганца, полученной разложеніемъ вычисленнаго количества марганцевокаліевой соли спиртомъ. Смѣсь нагрѣвалась на водяной банѣ въ теченіе 4—6 часовъ и горячей отфильтровывалась отъ осадка. Затѣмъ къ яркокрасному или фіолетовому раствору прибавлялся растворъ соды, до прекращенія выдѣленія осадка, послѣ чего жидкость снова отфильтровывалась и изъ фильтрата сафранинъ выдѣлялся въ видѣ своей хлористоводородной соли насыщеніемъ раствора хлористымъ натріемъ. Для очистки полученнаго сыраго продукта этотъ послѣдній растворялся въ небольшомъ количествѣ воды, осаждался селитрой въ видѣ сравнительно трудно растворимой азотнокислой соли и полученный осадокъ прикристаллизовывался изъ горячей воды, слабо подкисленной азотной кислотой. Во всѣхъ нижеприведенныхъ случаяхъ, азотнокислыя соли сафраниновъ получались въ видѣ бронзово-зеленыхъ мелкихъ кристалловъ со всѣми характерными свойствами этихъ пигментовъ. Такъ какъ всѣ реакціи не допускали ни малѣйшаго сомнѣнія въ природѣ этихъ соединеній и такъ какъ окончательная очистка ихъ сопряжена съ громадной тратой вещества и времени, то только для двухъ изъ нихъ было сдѣлано опредѣленіе азота.

Азотнокислый B_1-4-амино-B_2-4-амино-6-метил-B_3-3-метилбензосафранинъ.

0.1785 gr. вещ. при давл. 730 мм. и температурѣ 23° дали 31.1 ксм. N.

	Вычислено:	Найдено:
N	18.57%	18.84%.

Азотнокислый B_1-4-амино-B_2-4-амино-B_3-3-метилбензосафранинъ.

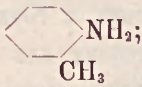
0.1845 gr. вещ. при давл. 732.3 мм. и температурѣ 24.5° дали 32.2 ксм. N.

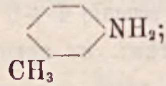
	Вычислено:	Найдено:
N	19.28%	19.37%.

Результаты, полученные при этомъ изслѣдованіи, представлены въ нижеслѣдующей таблицѣ [1]).

[1]) Мною не были повторены опыты съ анилиномъ, о.- и р.-толу-

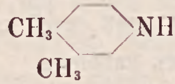
Амины, образующіе сафранины.



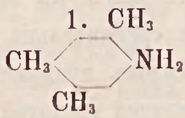


1.

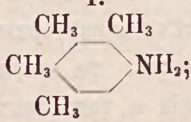
2.



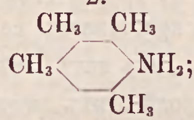
1.



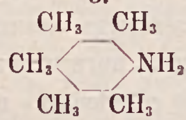
1.



2.

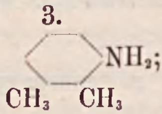


3.

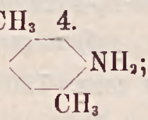


Амины, не образующіе сафраниновъ.

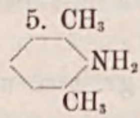
3.



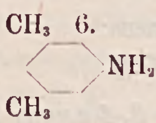
4.



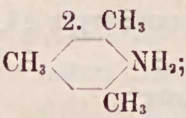
5.



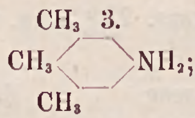
6.



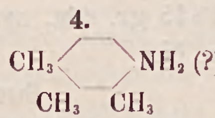
2.



3.

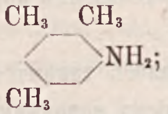
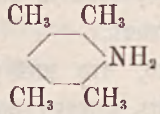


4.



идинами, 1, 2, 4-т.-ксилидиномъ и 1, 2, 4, 5-кумидиномъ, такъ какъ эти основанія были хорошо извѣстны давно и въ справедливости полученныхъ Ницкимъ съ ними результатовъ сомнѣваться было нельзя.

4. 5.

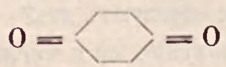
 

Мнѣ кажется, что изъ этой таблицы можно вывести нѣсколько иную зависимость, чѣмъ та, которую выводитъ Ницкій. По мнѣнію этого автора во всякомъ случаѣ амины, имѣющіе о.-мѣсто по отношенію къ NH_2-группѣ занятымъ, не образуютъ сафраниновъ; но тогда почему ксилидины 3, 4 и 6 и кумидинъ 3 не образуютъ ихъ? Мнѣ кажется, что здѣсь играетъ роль не только положеніе, но и *число* метильныхъ группъ. Такъ: когда моноаминъ имѣетъ одну группу CH_3, то ея положеніе по отношенію къ аминогруппѣ не вліяетъ на образованіе сафраниновъ (толуидины).

Когда моноаминъ имѣетъ 2 или нѣсколько группъ CH_3, то для образованія сафраниновъ необходимо, чтобы одна изъ нихъ была въ р.-положеніи къ NH_2-группѣ (ксилидины 1, 2), остальныя же должны попарно находиться также въ р.-положеніи другъ къ другу, если же число ихъ нечетно, то остающаяся отъ паръ группа можетъ занимать любое свободное мѣсто.

Во всѣхъ этихъ случаяхъ, какъ я уже упомянулъ выше, моноаминъ, согласно опытамъ Ницкаго, окислялся совмѣстно съ р.-діаминодифениламиномъ $NH_2\,C_6H_4\,NH\,C_6H_4\,NH_2$, но изъ вышеприведенныхъ правильностей вытекаетъ съ очевидностью, что при окисленіи р.-фенилендіамина съ 2 мол. моноамина случаи образованія сафраниновъ еще болѣе рѣдки; въ самомъ дѣлѣ, начиная съ ксилидиновъ для полученія упомянутыхъ пигментовъ необходимо, чтобы р.-мѣсто моноамина было замѣщено метильной группой; но это положеніе исключаетъ возможность образованія въ данномъ случаѣ индамина и слѣдовательно, только анилинъ и о.- и m.-толуидины при окисленіи съ р.-фенилендіаминомъ могутъ образовать сафранины. Опыты вполнѣ подтвердили это заключеніе; такъ: уже давно было извѣстно, что о.-толуидинъ даетъ сафранинъ, изъ р.-фенилендіамина и m.-толуидина онъ былъ полученъ мною, ксилидинъ же 1 при тѣхъ же условіяхъ не далъ сафранина. Интересно далѣе, что ксилидины 4 и 5 при окисленіи съ р.-фенилендіаминомъ, хотя и образовали индамины, однако затѣмъ сафраниновъ не получилось, что указываетъ, какъ бы на то, что вышеприведенныя правильности общи и справедливы при образованіи всевозможныхъ индаминовъ, какъ промежуточныхъ продуктовъ.

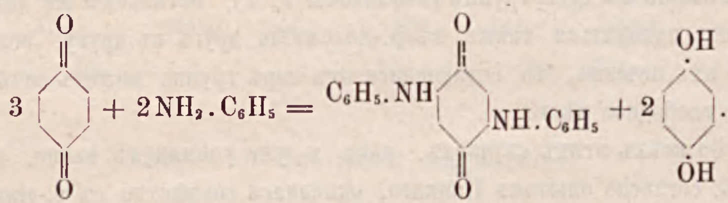
Не смотря на то, что мнѣ удалось такимъ образомъ установить нѣкоторую зависимость между строеніемъ моноамина и его способностью образовать сафранинъ, этимъ нисколько не разъяснился ходъ реакціи этого образованія. Разсуждая теоретически по моему мнѣнію съ большею или меньшею силою вѣроятности, можно допустить, что, такъ какъ индамины имѣютъ р.-хинонное строеніе:



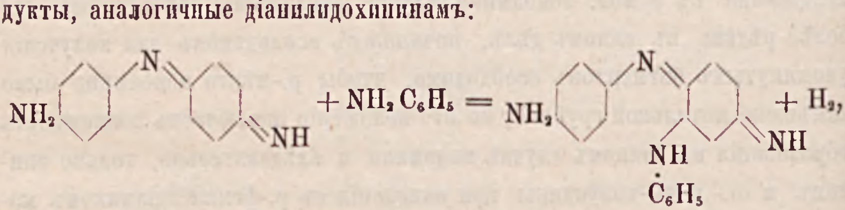
р.-хинонъ

индаминъ (аминофенилхинондіиминъ)

то они должны имѣть нѣкоторыя свойства, аналогичныя съ р.-хинономи, а извѣстно, что эти послѣдніе съ легкостью присоединяютъ 2 мол. анилина и его гомологовъ съ выдѣленіемъ 4 ат. водорода, давая діанилидохиноны:



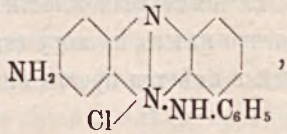
Возможно, что и индамины обладаютъ тѣмъ же свойствомъ, хотя и развитымъ въ меньшей степени, и съ 1 мол. моноамина даютъ продукты, аналогичные діанилидохининамъ:



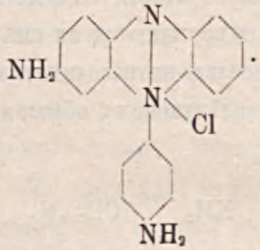
которые уже при дальнѣйшемъ окисленіи въ присутствіи минеральныхъ кислотъ даютъ соли сафраниновъ и тогда выведенныя выше правильности, вѣроятно, скорѣе будутъ относиться къ образованію этого промежуточнаго анилидоиндамина. На существованіе такаго продукта есть и въ литературѣ слабые намеки, именно Барбье и Виньонъ [1]), окисляя р.-фе-

[1]) Bul. d. la Soc. chim. 48. 338.

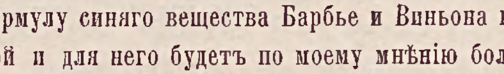
нилендіаминъ съ 2 частицами анилина при низкой температурѣ, выдѣлили весьма непрочное синее тѣло, которое они считаютъ за продуктъ присоединенія анилина къ амидофеназину:



и которое по ихъ мнѣнію при простомъ нагрѣваніи уже переходитъ въ сафранинъ, при чемъ формулу строенія этого послѣдняго они даютъ слѣдующую:

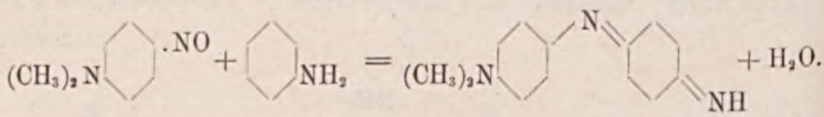


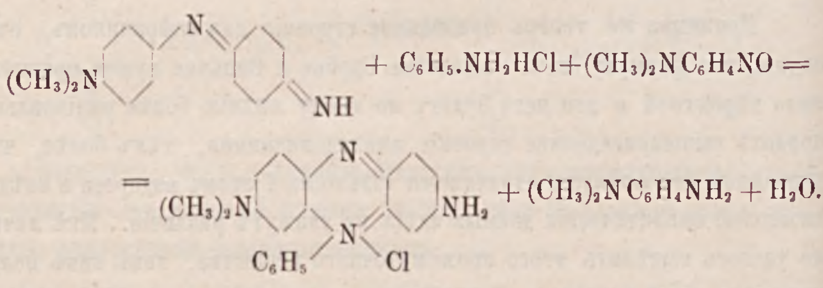
Принимая же теперь признанное строеніе для сафраниновъ, очевидно, что формулу синяго вещества Барбье и Виньона нужно признать мало вѣроятной и для него будетъ по моему мнѣнію болѣе раціонально придать вышеприведенное строеніе анилидоиндамина, тѣмъ болѣе, что указанныя двѣ формулы отличаются только на 1 атомъ водорода и слѣдовательно, аналитическія данныя здѣсь не укажутъ различія. Мнѣ лично не удалось выдѣлить этого промежуточнаго вещества, такъ какъ получающійся синій растворъ до крайности не проченъ и даже не можетъ быть отфильтрованъ безъ разложенія; цвѣтъ его едва ли такъ же отличается отъ цвѣта раствора индамина и мои опыты скорѣе наводятъ на сомнѣніе въ образованіи этого промежуточнаго вещества въ условіяхъ работы Барбье и Виньона; однако, беря вмѣсто обыкновеннаго индамина хлористоводородный тетраметилиндаминъ (Биншедлерову зелень)



и прибавляя къ его зеленому раствору 1 частицу уксуснокислаго анилина замѣтимъ черезъ нѣкоторое время, что растворъ становится индигово синимъ и изъ такого раствора при высаливаніи выпадаютъ синіе хлопья какого то вещества, на столько непрочнаго, что даже при повторномъ растворенiи его въ водѣ, жидкость становится фiолетовой въ силу образованiя нѣкотораго количества тетраметилсафранина (Биншедлероваго фiолетта). Не имѣя возможности получить это вещество въ чистомъ видѣ, я конечно ничего не могу сказать о его природѣ и весьма возможно, что здѣсь имѣется просто смѣсь сафранина съ индаминомъ.

Выведя указанныя выше правильности въ образованiи сафраниновъ при окисленiи р.-дiаминовъ съ первичными моноаминами, интересно было прослѣдить, подтверждаются ли онѣ относительно другой реакцiи образованiя тѣхъ же продуктовъ, открытой Барбье и Виньономъ [1]) въ 1887 г. Именно, подтверждаются ли онѣ при окисленiи моноаминовъ хлористоводородной солью нитрозодиметиланилина. До сихъ поръ эта реакцiя трактовалась слѣдующимъ образомъ:

1. 

2. 

т. е. значитъ и здѣсь принималось, что первоначально образуется диметилиндаминъ, а слѣдовательно, для этой реакцiи должны были бы существовать тѣ же законности, какъ и для предъидущей. Однако опыты показали совершенно обратное. Правда, нагрѣвая одну молекулу хлористоводороднаго нитрозодиметиланилина съ 1 мол. р.-толуидина въ спиртовомъ растворѣ въ теченiи 3 часовъ, соотвѣтствующаго сафранина получено не было; но при тѣхъ же условiяхъ легко и съ хорошимъ выходомъ получаются сафранины изъ m.-толуидина, р.-ксилидина (1, 2,

[1]) Bul. d. la Soc. chim. 48. 636.

5), ксилидина 1, 2, 6 и 1, 2, 3. Выдѣленіе этихъ пигментовъ всегда велось слѣдующимъ образомъ. Послѣ 3—4 часоваго нагрѣванія соотвѣтствующей смѣси хлористоводороднаго нитрозодиметиланилина и свободнаго первичнаго моноамина, растворенной въ 8—10 кратномъ количествѣ спирта, фіолетовый растворъ образовавшагося сафранина сильно разбавлялся водой до прекращенія выдѣленія смолистыхъ веществъ и потомъ нагрѣвался на голомъ огнѣ до кипѣнія; при этомъ смолы сбиваются въ болѣе или менѣе крупные комки и по охлажденіи растворъ сравнительно легко отъ нихъ отфильтровывается. Далѣе профильтрованный растворъ выпаривался на водяной банѣ до испаренія большей части спирта и по мѣрѣ концентрированія раствора къ нему добавлялись постоянно новыя количества воды. По окончаніи этой операціи, когда запахъ спирта уже исчезъ, растворъ обрабатывался содой, снова отфильтровывался отъ небольшого количества выдѣлившейся смолы и насыщался твердой поваренной солью. Образующійся при этомъ осадокъ хлористоводородной соли сафранина отфильтровывался, растворялся въ возможно маломъ количествѣ горячей воды и къ полученному такимъ образомъ раствору уже сравнительно чистаго продукта прибавлялась въ избыткѣ селитра. Выпадающая при этомъ азотнокислая соль сафранина окончательно очищалась 2—3 кратной кристаллизаціей изъ горячей воды. Нужно замѣтить, что получающіеся при этой реакціи B_1-4-диметиламиносафранины значительно хуже кристаллизуются B_1-4-аминосафраниновъ, что сильно затрудняетъ полученіе ихъ въ чистомъ состояніи. Всѣ азотнокислыя соли полученныхъ мною B_1-4-диметиламиносафраниновъ кристаллизуются въ мелкихъ буро-зеленыхъ кристаллахъ съ слабымъ металлическимъ блескомъ. И здѣсь, какъ и въ случаѣ B_1-4-аминосафраниновъ, въ виду несомнѣнности строенія, полученныхъ продуктовъ, вытекающей изъ ихъ реакцій, аналитическія данныя были получены только для двухъ изъ нихъ.

Азотнокислый B_1-4-диметиламино-B_2-4-амино-6-метил-B_3-3-метилбензосафранинъ:

0.1623 гр. вещ. при 740 мм. и 21.5° дали 25.2 кст. N.

	Вычислено:	Найдено:
N =	17.28%	17.50%.

Азотнокислый B_1-4-диметиламино-B_2-4-амино-3,6-диметил-B_3 2,5-диметилбензосафранинъ:

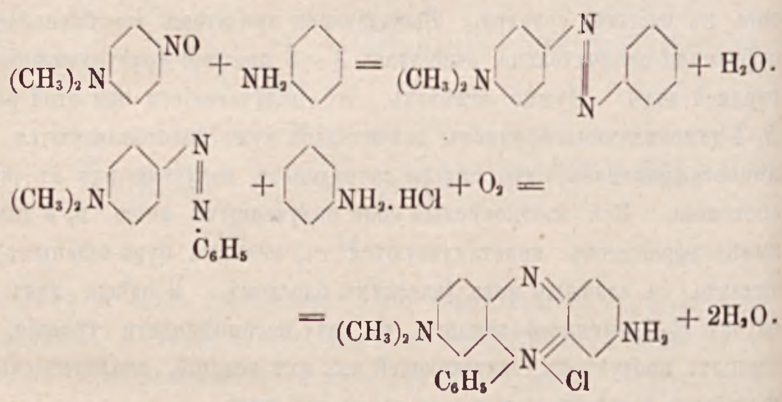
0.2015 гр. вещ. при 732 мм. давл. и 22° дали 29.1 кст. N.

	Вычислено:	Найдено:
N =	15.45%	15.74%.

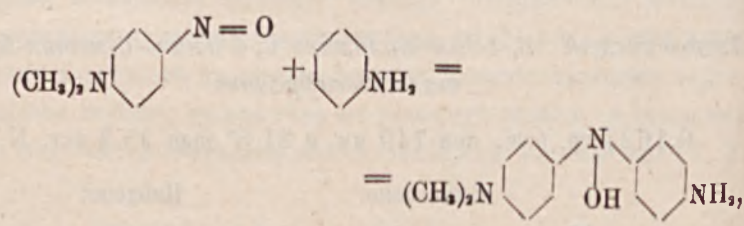
Изъ этихъ фактовъ вытекаетъ, что выведенныя раньше правильности справедливы только для реакціи образованія сафраниновъ окисленіемъ 1 мол. діамина съ 2 мол. моноамина; но такъ какъ при обсужденіи этой реакціи было указано, что эти правильности относятся собственно ко второй ея части, т. е. къ взаимодѣйствію между индаминомъ и моноаминомъ, то, слѣдовательно, окисленіе этого послѣдняго хлористоводороднымъ нитрозодиметиланилиномъ едва-ли происходитъ съ образованіемъ индамина, какъ промежуточнаго продукта, а потому и весь ходъ реакціи долженъ трактоваться иначе. Съ теоретической точки зрѣнія я вижу только два возможныхъ хода этой реакціи:

I a)

b)

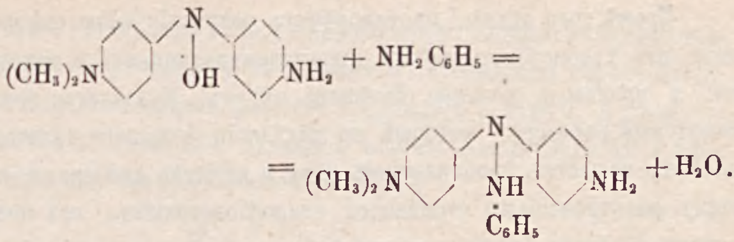


II a)

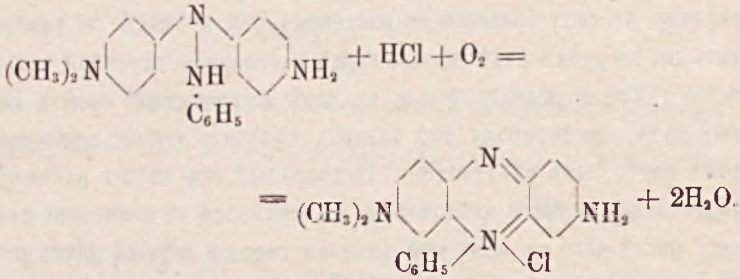


II

b)



c)



Первый ходъ имѣетъ за себя то, что извѣстно уже давно, что нитрозодиметиланилинъ при нѣкоторыхъ условіяхъ даетъ съ первичными аминами диметиламидоазобензолы [1]), которые въ свою очередь по указаніямъ Барбіе и Виньона [2]) при окисленіи въ присутствіи анилина образуютъ соотвѣтствующіе сафранины, но онъ совершенно не объясняетъ, почему р.-замѣщенные моноамины не даютъ въ этомъ случаѣ сафраниновъ, а какъ я уже упомянулъ выше, кипятя спиртовой растворъ хлористоводороднаго нитрозодиметиланилина съ р.-толуидиномъ, я не получилъ и слѣдовъ сафранина и изъ продуктовъ реакціи въ кристаллическомъ видѣ мною было выдѣлено только незначительное количество кристаллическаго, желтаго тѣла съ точкой плавленія 237—238°, растворяющагося въ минеральныхъ кислотахъ съ фуксинно-краснымъ цвѣтомъ и выпадающаго изъ этихъ растворовъ въ неизмѣненномъ видѣ при разбавленіи ихъ водой. Эти свойства весьма близко подходятъ къ тетраметилдіаминоазоксибензолу

$$(CH_3)_2NC_6H_4\underset{\underset{O}{\diagdown\diagup}}{N - N}C_6H_4N(CH_3)_2,$$

описанному Траубе [2]) и О. Фишеромъ и Вакеромъ [2]), для котораго послѣдніе авторы даютъ точку плавленія 236°.

[1]) Bul. d. l. Soc. chim. 48. 637.

[2]) Bul. d. la Soc. chim. 48. 772.

Кромѣ того схемѣ I противорѣчитъ полученіе мною сафранина исходя изъ хлористоводороднаго нитрозодиметиланилина и диметиланилина; а производя реакцію обычнымъ путемъ, получается грязнобурый спиртовый растворъ, который по выдѣленіи большого количества смолистыхъ веществъ прибавленіемъ воды и избытка амміака и послѣдующимъ фильтрованіемъ становится темнофіолетовымъ, изъ полученнаго такимъ образомъ раствора хлористоводородной соли основанія эту послѣднюю въ силу большой ея растворимости въ водѣ не удается выдѣлить въ твердомъ видѣ насыщеніемъ раствора поваренной солью; основаніе также не выдѣляется и въ видѣ азотнокислой соли. Единственный путь, по которому мнѣ удалось получить данное вещество въ чистомъ видѣ, былъ слѣдующій. Отдѣленный отъ смолы растворъ сильно подкислялся соляной кислотой и выпаривался до возможно малаго объема, послѣ чего къ нему прибавлялся горячій водный растворъ сулемы. По охлажденіи осаждается двойная хлористоводородная соль, которая очищается окончательно перекристаллизаціей изъ горячаго спирта. Очищенная такимъ образомъ, эта двойная соль представляетъ микроскопическіе почти черные кристаллы съ слабымъ бронзовымъ блескомъ. Она весьма трудно растворима въ горячей и холодной водѣ и нѣсколько легче въ горячемъ спиртѣ. Въ подкисленной водѣ растворяется сравнительно легко съ синефіолетовымъ цвѣтомъ.

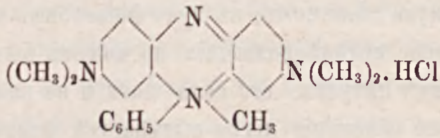
Анализъ этой соли далъ слѣдующія числа:

0.1730 гр. вещ. дали при 726.6 мм. давленія и 22° C 14 куб. сн. N.
0.4285 гр. „ 0.2775 gr. AgCl.
0.1625 гр. „ 0.2552 gr. CO_2.

Водородъ не опредѣлялся, такъ какъ очевидно, что выдѣляющаяся при анализѣ металлическая ртуть попадаетъ въ трубку съ $CaCl_2$.

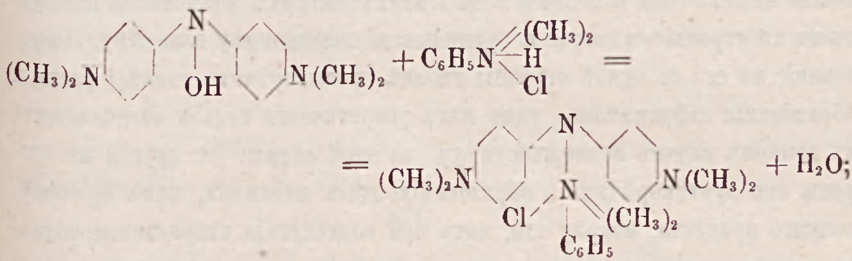
	Вычислено для $C_{23}H_{27}N_4Cl.HgCl_2$.	Вычислено для $C_{22}H_{23}N_4Cl.HCl_2$. (Биншедлеровъ віолеттъ)	Найдено:
N	8.42%	8.63%	8.87%
Cl	15.94%	16.33%	16.09%
C	43.00%	40.47%	42.80%.

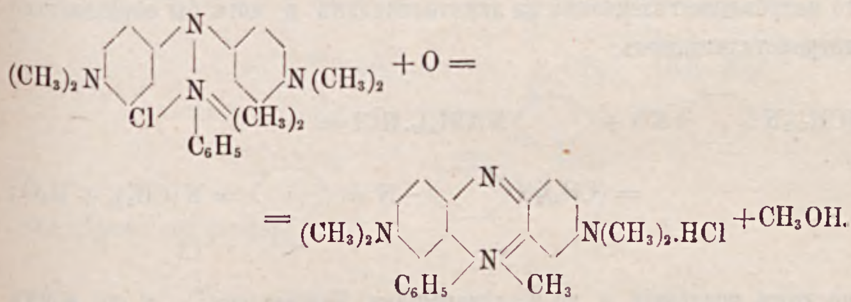
Выходъ вещества очень малъ и потому въ рукахъ я его имѣлъ не болѣе 2 гр., въ силу чего мнѣ не удалось сдѣлать повторныхъ анализовъ съ цѣлью установить природу вещества съ большею увѣренностью. Тѣмъ не менѣе полученныя числа указываютъ съ большой вѣроятностью, что данное вещество имѣетъ формулу $C_{23}H_{22}N_4Cl . HgCl_2$ и представляетъ изъ себя двойную соль сулемы и хлористоводороднаго B_1-4-диметиламино-B_2-4-диметиламинофенилметилазонія



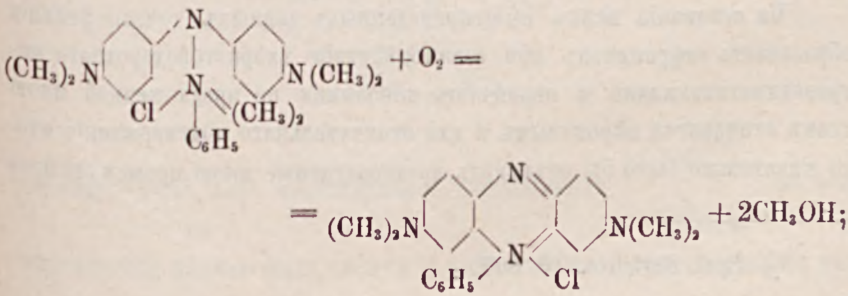
и тогда реакцію его образованія можно объяснить слѣдующимъ образомъ:

$$(CH_3)_2NC_6H_4.NO + C_6H_5N(CH_3)_2 = (CH_3)_2N.C_6H_4.\underset{\underset{OH}{|}}{N}.C_6H_4N(CH_3)_2.$$

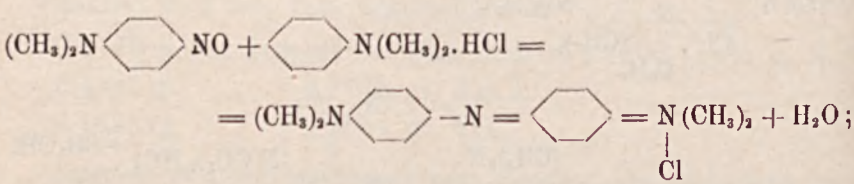




Конечно, послѣднюю реакцію можно было бы написать и иначе:



но тогда мы приходимъ къ формулѣ соли Бипшедлерова віолетта, которой съ одной стороны противорѣчатъ данныя анализа, а съ другой и слѣдующіе факты: Бипшедлеровъ віолеттъ великолѣпно кристаллизуется въ видѣ азотнокислой соли, сравнительно мало растворимой въ водѣ, соли его не разлагаются щелочами, окрашиваютъ хлопчатобумажную ткань, протравленную таннином, въ ярко-фіолетовый цвѣтъ. Полученное мною производное метилфенилазонія не можетъ быть выдѣлено въ кристаллахъ въ видѣ нитрата, его соли хотя и не разлагаются аммiакомъ, но свободное основаніе легко выдѣляется ѣдкимъ натромъ или кали на холоду, что уже доказываетъ, что въ немъ пятиатомный азотъ не связанъ съ кислотнымъ радикаломъ и, наконецъ, соли протравленную таннином хлопчатую бумагу окрашиваютъ въ темно-грязно-фіолетовый цвѣтъ. На основаніи всѣхъ этихъ данныхъ становится вѣроятнымъ то строеніе, которое я приписываю полученному веществу. Образованіе же его съ одной стороны вполнѣ противорѣчитъ схемѣ I реакціи образованія сафраниновъ, такъ какъ теоретически нельзя предположить въ данномъ случаѣ возможности ур. а) этой схемы, съ другой же стороны оно противорѣчитъ и образованію здѣсь индамина, какъ промежуточнаго продукта, потому что, хотя при воздѣйствіи хлористоводороднаго нитрозодиметиланилина на диметиланилинъ и могъ бы образоваться тетраметилиндаминъ:



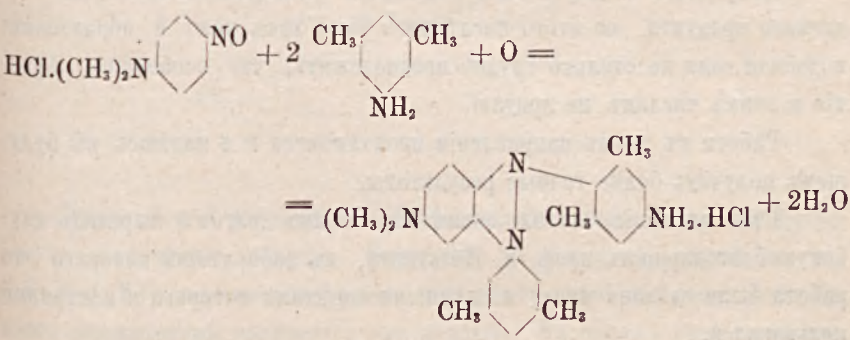
но этотъ послѣдній и по изслѣдованіямъ Бипшедлера[1]), и по моимъ опытамъ съ диметиланилиномъ не способенъ давать сафранина.

На основаніи всѣхъ вышеприведенныхъ данныхъ теченіе реакціи образованія сафраниновъ при взаимодѣйствіи хлористоводороднаго нитрозодиметиланилина и первичнаго моноамина по предложенной мною схемѣ становится вѣроятнымъ и для окончательнаго подтвержденія этого желательно было бы отыскать предполагаемые мною промежуточные

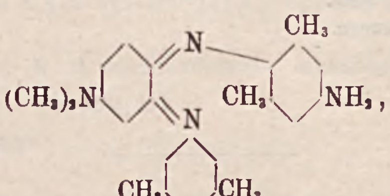
[1]) Berl. Berichte. 16. 867.

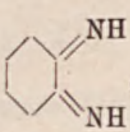
продукты. Но въ виду чрезвычайно легкаго полученія сафраниновъ этимъ путемъ, вѣроятно, упомянутые продукты въ условіяхъ реакціи крайне непостоянны и кромѣ того, имѣя въ виду, что останавливая реакцію на различныхъ стадіяхъ, пришлось бы всегда имѣть дѣло по крайней мѣрѣ съ пятью веществами, что страшно затрудняло бы выдѣленіе каждаго изъ нихъ въ чистомъ видѣ, я избралъ нѣсколько другой путь. Именно, я стремился комбинировать такія вещества, съ которыми реакція могла бы итти только до извѣстнаго предѣла. Въ этомъ направленіи я успѣлъ поставить пока только одинъ опытъ, надѣясь въ будущемъ пополнить этотъ пробѣлъ.

Нагрѣвая въ спиртовомъ растворѣ хлористоводородный нитрозодиметиланилинъ съ симметрическимъ m.-ксилидиномъ, очевидно, что соотвѣтствующаго сафранина получиться не можетъ, и здѣсь мы въ правѣ ожидать только образованія m.-ксилил-p.-амино-m.-ксилилдиметиламинофендіазина:



или вѣрнѣе его изомера



послѣднее тѣло, какъ производное o.-хинондіимида  , по всей вѣроятности должно быть синимъ и дѣйствительно, при нагрѣваніи указанной смѣси въ теченіи 3 часовъ, я получилъ грязно-бурый растворъ, который по осажденіи водой смолистыхъ веществъ пріобрѣлъ интенсивную голубую окраску. Образующійся пигментъ совершенно не обладаетъ свойствами сафранина и, скорѣе подходя по свойствамъ къ индаминамъ, даетъ подобно этимъ послѣднимъ трудно растворимую въ водѣ іодистоводородную соль, въ видѣ которой онъ и былъ очищенъ мною перекристаллизаціей изъ подкисленнаго воднаго раствора. Въ виду того, что я имѣлъ въ распоряженіи всего 1,5 гр. m.-ксилидина, я получилъ чистаго вещества только 0.12 gr. и могъ поэтому сдѣлать только одно опредѣленіе азота:

0.1145 гр. вещ. при 21,5° и 740 мм. давленія дали 9.8 куб. сан. N.

	Вычислено для $C_{24}H_{28}N_4I.HI$:	Найдено:
N	8.93%	9.45%.

Полученное число, хотя и подходитъ къ двухкислотной соли ожидаемаго продукта, но этого послѣдняго было такъ мало и образованія подобной соли на столько трудно предположить, что особеннаго вѣроятія я этимъ числамъ не придаю.

Работа въ этомъ направленіи продолжается и я надѣюсь въ будущемъ получить болѣе точные результаты.

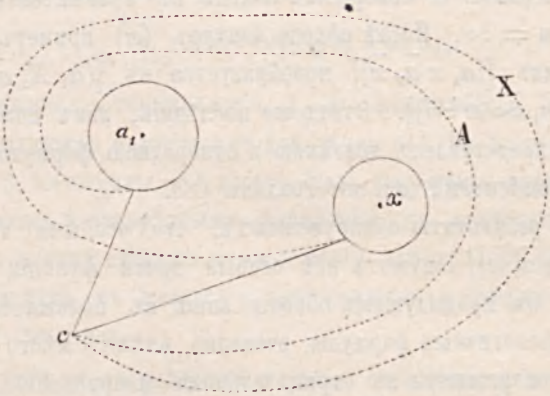
Въ заключеніе считаю своимъ пріятнымъ долгомъ выразить глубокую благодарность проф. Е. Нёльтингу, въ лабораторіи котораго эта работа была сдѣлана мною и цѣнными совѣтами котораго я постоянно пользовался.

Мюльгаузенъ въ Эльз.
Химическая школа.

$[(a_1\, x\, \overline{a_1}\, \overline{x})]$ можетъ быть выражено линейною и однородною формулой съ постоянными коэффиціентами отъ $k+1$ интеграловъ: $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$, $[(a_1\, a_3\, \overline{a_1}\, \overline{a_3})]$, $\cdots$, $[(a_1\, a_{k+1}, \overline{a_1}\, \overline{a_{k+1}})]$ и $[(a_1\, x\, \overline{a_1}\, \overline{x})]$.

Изъ предыдущаго своего анализа мы исключили точку a_1. Введемъ же и ее въ кругъ своихъ разсмотрѣній. Вообразимъ, что стержень x совершилъ обходъ въ положительномъ направленіи около точки a_1; при чемъ всѣ остальные стержни находятся внѣ пути, описаннаго перемѣннымъ x.

Черт. 11.



Чрезъ A и X на чертежѣ 11 обозначены новыя положенія путей (a_1) и (x) послѣ обхода. Интегралъ $[(a_1\, x\, \overline{a_1}\, \overline{x})]$ перейдетъ въ $[(A\, X\, \overline{A}\, \overline{X})]$, и легко обнаружить, что этотъ послѣдній лишь постояннымъ множителемъ отличается отъ перваго. Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$[(A\, X\, \overline{A}\, \overline{X})] = (1-e^{2\pi\lambda_1 i})\, [(A)] - (1-e^{2\pi b_1 i})\, [(X)], \tag{58}$$

такъ какъ пути A и X соотвѣтственно эквивалентны: $(x\, a_1\, \overline{x})$ и $(x\, a_1\, x\, \overline{a_1}\, \overline{x})$, или $(x)\ (a_1\, x\, \overline{a_1}\, \overline{x})$.

Далѣе, находимъ:

$$[(A)] = [(x\, a_1\, \overline{x})] = [(a_1)] - [(a_1\, x\, \overline{a_1}\, \overline{x})]; \tag{59}$$

$$[(X)] = [(x\, a_1\, x\, \overline{a_1}\, \overline{x})] = [(x)] + e^{2\pi\lambda_1 i}\, [(a_1\, x\, \overline{a_1}\, \overline{x})]. \tag{60}$$

При помощи формулъ (59) и (60), соотношенію (58) дадимъ видъ:

$$[(A\,X\,\overline{A}\,\overline{X})] = (1-e^{2\pi\lambda i})\left\{[(a_1)]-[(a_1\,x\,\overline{a}_1\,\overline{x})]\right\} -$$

$$-(1-e^{2\pi b_1 i})\left\{\frac{(1-e^{2\pi\lambda i})\,[(a_1)]-[(a_1\,x\,\overline{a}_1\,\overline{x})]}{1-e^{2\pi b_1 i}} + e^{2\pi\lambda i}\,[(a_1\,x\,\overline{a}_1\,\overline{x})]\right\} =$$

$$= e^{-\pi(b_1+\lambda)i}\,[(a_1\,x\,\overline{a}_1\,\overline{x})]. \tag{61}$$

Это и доказываетъ высказанное положенiе.

Разсмотримъ теперь безконечно удаленную точку плоскости перемѣннаго u.

Пусть стержень x совершитъ обходъ въ положительномъ направленiи около $u=\infty$. Послѣ обхода контуръ (x) приметъ положенiе X_1, и интегралъ $[(a_1\,x\,\overline{a}_1\,\overline{x})]$ преобразуется въ $[(a_1\,X_1\,\overline{a}_1\,\overline{X}_1)]$, или $[(a_1\infty\,x\infty\,\overline{a}_1\infty\,\overline{x}\infty)]$. Этотъ же послѣднiй, какъ намъ извѣстно, можетъ быть представленъ линейною и однородною формулой съ постоянными коэффицiентами отъ интеграловъ (8).

Всѣ эти результаты обнаруживаютъ, что особыми точками интеграла $[(a_1\,x\,\overline{a}_1\,\overline{x})]$ служатъ всѣ особыя точки функцiи $f(u)$. Мы предполагали въ предыдущемъ обходы лишь въ положительномъ направленiи. Аналогичныя формулы, очевидно, имѣютъ мѣсто для случая, если обходы совершаются въ отрицательномъ направленiи. Пользуясь же формулами, добытыми нами въ настоящей главѣ, мы могли бы безъ труда показать, что, послѣ какого-угодно числа обходовъ и въ любомъ направленiи около особыхъ точекъ $f(u)$, новыя значенiя интеграловъ (8), и, слѣдовательно, всякаго дозволеннаго интеграла выражаются линейными и однородными формулами съ постоянными коэффицiентами отъ интеграловъ (8).

Примѣчанiе. Разсужденiя, представленныя въ настоящемъ и предыдущемъ параграфахъ, непосредственно относились къ случаю, когда показатели $b_1, b_2, \cdots, b_n$ и λ ограничены условiями § 1. Но легко сообразить, что результаты, добытые въ нихъ, распространяются также и на тѣ случаи, которые были разобраны нами въ §§ 3 и 4.

§ 7.

Для полной характеристики интеграловъ (8), а, слѣдовательно, всякаго дозволеннаго интеграла, намъ осталось представить разложенiя ихъ въ области каждой ихъ особой точки. Анализъ двухъ предыдущихъ параграфовъ обнаружилъ, что для каждой конечной особой точки $a_1, a_2, \cdots, a_n$ функціи $f(u)$ существуетъ система n линейно независимыхъ интеграловъ, изъ которыхъ $n-1$ голоморфны въ области этой точки, а остальной оказывается функціей однозначной послѣ дѣленія на $(x-a_p)^{b_p+\lambda-1}$, гдѣ a_p разсматриваемая особая точка. Такъ, напр., относительно точки a_p этимъ свойствомъ обладаетъ слѣдующая группа интеграловъ:

$$
\begin{gathered}
[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})], \;\cdots, [(a_1\, a_{p-1}\, \overline{a_1}\, \overline{a_{p-1}})], [(a_1\, a_{p+1}\, \overline{a_1}\, \overline{a_{p+1}})] \cdots, \\
[(a_1 \infty \overline{a_1}\, \overline{\infty})], \; [(a_p\, x\, \overline{a_p}\, \overline{x})]. \qquad (62)
\end{gathered}
$$

Придерживаясь терминологіи L. Pochhammer'а, назовемъ эти интегралы главными интегралами для точки a_p. По пріемамъ, изложеннымъ въ § 2, интегралы (8) могутъ быть выражены чрезъ интегралы (62) линейными и однородными формулами съ постоянными коэффиціентами. А посему вопросъ о разложеніи интеграловъ (8) въ области точки a_p сводится къ вопросу о представленіи интеграловъ (62) въ области той же точки.

Приступая же къ разложенію этихъ послѣднихъ, мы остановимся прежде всего на интегралѣ $[(a_p\, x\, \overline{a_p}\, \overline{x})]$. Для своихъ цѣлей, введемъ новое перемѣнное интеграціи v при помощи подстановки:

$$
u = (x-a_p)v + a_p. \qquad (63)
$$

Тогда получимъ:

$$
\begin{aligned}
{}[(a_p\, x\, \overline{a_p}\, \overline{x})] &= \int_c^{(a_p\, x\, \overline{a_p}\, \overline{x})} (u-x)^{\lambda-1}(u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_n)^{b_n-1}\, du = \\
&= (x-a_p)^{\lambda+b_p-1} \int_{c_1}^{(0 1 \overline{0} \overline{1})} v^{b_p-1}(v-1)^{\lambda-1}\left[(a_p-a_1)+(x-a_p)v\right]^{b_1-1} \cdots dv = \\
&= A_p (x-a_p)^{\lambda+b_p-1} \int_{c_1}^{(1 0 \overline{1} \overline{0})} v^{b_p-1}(1-v)^{\lambda-1}\left[1-\frac{x-a_p}{a_1-a_p}\, v\right]^{b_1-1} \cdots\cdots \\
&\qquad \cdots\cdots \left[1-\frac{x-a_p}{a_n-a_p}\, v\right]^{b_n-1} dv, \qquad (64)
\end{aligned}
$$

гдѣ принято:

$$A_p = (-1)^{b_1+b_2+\cdots+b_{p-1}+b_{p+1}+\cdots+b_n+\lambda+n-1}(a_1-a_p)^{b_1-1}$$

$$(a_2-a_p)^{b_2-1}\cdots(a_n-a_p)^{b_n-1}; \tag{65}$$

$$c_1 = \frac{c-a_p}{x-a_p}. \tag{66}$$

Допустимъ теперь, что выполняются условія:

$$\left|\frac{x-a_p}{a_1-a_p}v\right| < 1, \quad \left|\frac{x-a_p}{a_2-a_p}v\right| < 1, \;\cdots, \quad \left|\frac{x-a_p}{a_n-a_p}v\right| < 1. \tag{67}$$

Тогда имѣетъ мѣсто слѣдующій абсолютно и равномѣрно сходящійся рядъ:

$$\left(1-\frac{x-a_p}{a_\nu-a_p}v\right)^{b_\nu-1} = 1-c_1^{(\nu)}(x-a_p)v+c_2^{(\nu)}(x-a_p)^2v^2-\cdots$$

$$+(-1)^k c_k^{(\nu)}(x-a_p)^k v^k+\cdots, \tag{68}$$

гдѣ положено:

$$c_k^{(\nu)} = [b_\nu-1]_k\,(a_\nu-a_p)^{-k}. \tag{69}$$

Дадимъ въ соотношеніи (68) ν значенія: $1, 2, 3, \cdots, p-1, p+1, \cdots, n$ и полученные такимъ образомъ результаты перемножимъ. Тогда будемъ имѣть:

$$\left(1-\frac{x-a_p}{a_1-a_p}v\right)^{b_1-1}\left(1-\frac{x-a_p}{a_2-a_p}v\right)^{b_2-1}\cdots\left(1-\frac{x-a_p}{a_n-a_p}v\right)^{b_n-1} = \tag{70}$$

$$= 1-C_1(x-a_p)v+C_2(x-a_p)^2v^2-\cdots+(-1)^k C_k(x-a_p)^k v^k+\cdots;$$

при чемъ положено:

$$C_k = \frac{[b_1-1]_k}{(a_1-a_p)^k}+\frac{[b_2-1]_k}{(a_2-a_p)^k}+\cdots+\frac{[b_{p-1}-1]_k}{(a_{p-1}-a_p)^k}+$$

$$+\frac{[b_{p+1}-1]_k}{(a_{p+1}-a_p)^k}+\cdots+\frac{[b_n-1]_k}{(a_n-a_p)^k}+\frac{[b_1-1]_{k-1}[b_2-1]_1}{(a_1-a_p)^{k-1}(a_2-a_p)}+$$

$$+\frac{[b_1-1]_{k-1}[b_3-1]_1}{(a_1-a_p)^{k-1}(a_3-a_p)}+\cdots+\frac{[b_{n-1}-1]_{k-1}[b_n-1]_1}{(a_{n-1}-a_p)^{k-1}(a_n-a_p)}+ \tag{71}$$

. . . .

. . . .

$$\frac{[b_1-1]_1[b_2-1]_1\cdots[b_{p-1}-1]_1[b_{p+1}-1]_1\cdots[b_{k+1}-1]_1}{(a_1-a_p)(a_2-a_p)\cdots(a_{p-1}-a_p)(a_{p+1}-a_p)\cdots(a_{k+1}-a_p)}+\cdots,$$

Внеся выраженіе (70) въ (64), будемъ имѣть:

$$[(a_p\, x\, \overline{a_p}\, \overline{x})] = A_p\,(x-a_p)^{\lambda+b_p-1}\left[\int\limits_{c_1}^{(10\overline{1}\overline{0})} v^{b_p-1}(1-v)^{\lambda-1}\,dv - \right.$$

$$- C_1(x-a_p)\int\limits_{c_1}^{(10\overline{1}\overline{0})} v^{b_p}(1-v)^{\lambda-1}\,dv + C_2(x-a_p)^2\int\limits_{c_1}^{(10\overline{1}\overline{0})} v^{b_p+1}(1-v)^{\lambda+1}\,dv - \cdots$$

$$\left.\cdots + (-1)^k\,C_k\,(x-a_p)^k\int\limits_{c_1}^{(10\overline{1}\overline{0})} v^{b_p+k-1}(1-v)^{\lambda-1}\,dv + \cdots\right]. \qquad (72)$$

Принимая во вниманіе соотношеніе (3) главы I, предыдущему равенству дадимъ слѣдующій видъ:

$$[(a_p\, x\, \overline{a_p}\, \overline{x})] = A'_p(x-a_p)^{\lambda+b_p-1}\,[\bar{E}(b_p,\lambda) + C_1\,\bar{E}(b_p+1,\lambda)\,(x-a_p) + \cdots$$

$$\cdots + C_k\,\bar{E}(b_p+k,\lambda)\,(x-a_p)^k + \cdots], \qquad (73)$$

гдѣ положено:

$$A'_p = A_p\, e^{\pi(b_p+\lambda)i}. \qquad (73')$$

Пользуясь формулой (31) главы I, соотношеніе (73) представимъ въ окончательной формѣ:

$$[(a_p\, x\, \overline{a_p}\, \overline{x})] = A''_p(x-a_p)^{\lambda+b_p-1}\left[1 - C_1\frac{b_p}{b_p+\lambda}\,(x-a_p)^k + \cdots\right. \qquad (74)$$

$$\left.\cdots + (-1)^k\,C_k\,\frac{b_p\,(b_p+1)\cdots(b_p+k-1)}{(b_p+\lambda)\,(b_p+\lambda+1)\cdots(b_p+\lambda+k-1)}\,(x-a_p)^k + \cdots\right];$$

при чемъ обозначено:

$$A''_p = A'_p\,\bar{E}(b_p,\lambda). \qquad (74')$$

Давъ p значенія: 1, 2, 3, $\cdots$, n, мы получимъ разложенія интеграловъ $[(a_1\, x\, \overline{a_1}\, \overline{x})]$, $[(a_2\, x\, \overline{a_2}\, \overline{x})]$, $\cdots$, $[(a_n\, x\, \overline{a_n}\, \overline{x})]$ соотвѣтственно въ области точекъ a_1, a_2, $\cdots$, a_n. Чтобы имѣть разложенія всѣхъ прочихъ интеграловъ группы (62), достаточно изыскать таковыя для $[(a_\mu\, a_\nu\, \overline{a_\mu}\, \overline{a_\nu})]$ и $[(a_\nu\, \infty\, \overline{a_\nu}\, \overline{\infty})]$, гдѣ μ и ν отличны отъ p.

Обратимъ прежде всего вниманіе на интегралъ $[(a_\mu\, a_\nu\, \overline{a_\mu}\, \overline{a_\nu})]$.

Имѣемъ:

$$[(a_\mu\, a_\nu\, \overline{a_\mu}\, \overline{a_\nu})] = \int_c^{(a_\mu\, a_\nu\, \overline{a_\mu}\, \overline{a_\nu})} (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_p)^{b_p-1} \cdots (u-x)^{\lambda-1}\, du =$$

$$= \int_c^{(a_\mu\, a_\nu\, \overline{a_\mu}\, \overline{a_\nu})} (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_p)^{\lambda+b_p-2} \left(1-\frac{x-a_p}{u-a_p}\right)^{\lambda-1} du =$$

$$= \int_c^{(a_\mu\, a_\nu\, \overline{a_\mu}\, \overline{a_\nu})} (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_p)^{\lambda+b_p-2} \cdots \left[1-[\lambda-1]_1 \frac{x-a_p}{u-a_p}+\right.$$

$$\left.+[\lambda-1]_2 \left(\frac{x-a_p}{u-a_p}\right)^2 - \cdots + (-1)^k [\lambda-1]_k \left(\frac{x-a_p}{u-a_p}\right)^k + \cdots\right] du =$$

(75)

$$= \int_c^{(a_\mu\, a_\nu\, \overline{a_\mu}\, \overline{a_\nu})} (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_p)^{\lambda+b_p-2} \cdots du -$$

$$-[\lambda-1]_1 (x-a_p) \int_c^{(a_\mu\, a_\nu\, \overline{a_\mu}\, \overline{a_\nu})} (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_p)^{\lambda+b_p-3} \cdots du + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^k [\lambda-1]_k (x-a_p)^k \int_c^{(a_\mu\, a_\nu\, \overline{a_\mu}\, \overline{a_\nu})} (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_p)^{\lambda+b_p-k-2} \cdots du + \cdots$$

. . . .

. . . .

Введемъ обозначеніе:

(76) $$F_p(k) = (-1)^k [\lambda-1]_k \int_c^{(a_\mu\, a_\nu\, \overline{a_\mu}\, \overline{a_\nu})} (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_p)^{b_p+\lambda-k-2} \cdots du.$$

Въ виду (76), соотношеніе (75) напишется такъ:

(77) $$[(a_\mu\, a_\nu\, \overline{a_\mu}\, \overline{a_\nu})] =$$

$$= F_p(0) + (x-a_p) F_p(1) + (x-a_p)^2 F_p(2) + \cdots + (x-a_p)^k F_p(k) + \cdots.$$

Разсмотримъ теперь интегралъ $[(a_\mu \infty\, \overline{a_\mu}\, \overline{\infty})]$. Имѣемъ:

$$[(a_\mu \infty\, \overline{a_\mu}\, \overline{\infty})] =$$

$$= \int_c^{(a_\mu \infty\, \overline{a_\mu}\, \overline{\infty})} (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_p)^{\lambda+b_p-2} \cdots (u-a_n)^{b_n-1} \left[1-[\lambda-1]_1 \frac{(x-a_p)}{u-a_p}+\right.$$

(78) $$\left.+[\lambda-1]_2 \left(\frac{x-a_p}{u-a_p}\right)^2 - \cdots + (-1)^k [\lambda-1]_k \left(\frac{x-a_p}{u-a_p}\right)^k + \cdots\right] du =$$

$$= \int\limits_c^{(a_\mu \infty \overline{a}_\mu \overline{\infty})} (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_p)^{\lambda+b_p-2} \cdots (u-a_n)^{b_n-1} du -$$

$$- [\lambda-1]_1 (x-a_p) \int\limits_c^{(a_\mu \infty \overline{a}_\mu \overline{\infty})} (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_p)^{\lambda+b_p-3} \cdots du +$$

$$+ [\lambda-1]_2 (x-a_p)^2 \int\limits_c^{(a_\mu \infty \overline{a}_\mu \overline{\infty})} (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_p)^{\lambda+b_p-4} \cdots du - \cdots \tag{78}$$

$$\cdots + (-1)^k [\lambda-1]_k (x-a_p)^k \int\limits_c^{(a_\mu \infty \overline{a}_\mu \overline{\infty})} (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_p)^{\lambda+b_p-k-2} \cdots du +$$

. . . .

. . . .

Положимъ:

$$F'_p(k) = (-1)^k [\lambda-1]_k \int\limits_c^{(a_\mu \infty \overline{a}_\mu \overline{\infty})} (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_p)^{\lambda+b_p-k-2} \cdots du. \tag{79}$$

Тогда равенство (78) напишется такъ:

$$[(a_\mu \infty \overline{a}_\mu \overline{\infty})] = F'_p(0) + (x-a_p) F'_p(1) + (x-a_p)^2 F'_p(2) + \cdots$$
$$\cdots + (x-a_p)^k F'_p(k) + \cdots \tag{80}$$

Замѣтимъ, что формулы (77) и (80) имѣютъ мѣсто при условіи:

$$\left| \frac{x-a_p}{u-a_p} \right| < 1. \tag{81}$$

Такимъ образомъ вопросъ о разложеніи главныхъ интеграловъ въ области каждой изъ точекъ $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ можно считать рѣшеннымъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ, считаемъ рѣшеннымъ вопросъ о представленіи интеграловъ (8) и, слѣдовательно, всякаго дозволеннаго интеграла въ области тѣхъ же точекъ.

Для того, чтобы считать выполненнымъ представленіе основныхъ интеграловъ (8) и въ области точки ∞ плоскости перемѣннаго u, намъ надо обратиться къ главнымъ интеграламъ, принадлежащимъ этой безконечно удаленной точкѣ.

Подъ таковыми интегралами, согласно воззрѣнію L. Pochhammer'a, будемъ разумѣть тутъ слѣдующую систему n интеграловъ:

$$
\begin{gathered}
[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})], \quad [(a_1\, a_3\, \overline{a_1}\, \overline{a_3})], \quad \cdots, \quad [(a_1\, a_n\, \overline{a_1}\, \overline{a_n})] \\
\text{и} \quad [(\infty\, x\, \overline{\infty}\, \overline{x})].
\end{gathered} \tag{82}
$$

Изъ этихъ функцій, ясное дѣло, для насъ достаточно представить разложеніе лишь $[(\infty\, x\, \overline{\infty}\, \overline{x})]$ и какого-либо изъ прочихъ интеграловъ, напр.: $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$. Остановимся прежде всего на $[(\infty\, x\, \overline{\infty}\, \overline{x})]$. Введемъ въ немъ новое перемѣнное интеграціи при помощи подстановки:

$$
u = \frac{x}{u'}. \tag{83}
$$

Тогда получимъ:

$$
\begin{gathered}
[(\infty\, x\, \overline{\infty}\, \overline{x})] = \int_c^{(\infty\, x\, \overline{\infty}\, \overline{x})} (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\cdots(u-x)^{\lambda-1}\,du = \\
= x^{\lambda+\sum\limits_{p=1}^{p=n} b_p-n} \int_c^{(1\,0\,\overline{1}\,\overline{0})} u'^{-(\lambda+\sum\limits_{p=1}^{p=n} b_p-n+1)}(1-u')^{\lambda-1}\left(1-\frac{u'}{x}a_1\right)^{b_1-1}\cdots\left(1-\frac{u'}{x}a_n\right)^{b_n-1}du'.
\end{gathered} \tag{84}
$$

Допустимъ, что выполняются условія:

$$
\left|\frac{u'a_1}{x}\right| < 1, \quad \left|\frac{u'a_2}{x}\right| < 1, \quad \cdots, \quad \left|\frac{u'a_n}{x}\right| < 1. \tag{85}
$$

Тогда можемъ написать:

$$
\begin{gathered}
\left(1-\frac{u'}{x}a_1\right)^{b_1-1}\left(1-\frac{u'}{x}a_2\right)^{b_2-1}\cdots\left(1-\frac{u'a_n}{x}\right)^{b_n-1} = \\
= 1-\frac{D_1}{x}u'+\frac{D_2}{x^2}u'^2-\frac{D_3}{x^3}u'^3+\cdots+(-1)^k\frac{D_k}{x^k}u'^k+\cdots
\end{gathered} \tag{86}
$$

При этомъ положено:

$$
\begin{aligned}
D_k = & \\
= & [b_1-1]^k a_1^k+[b_2-1]_k a_2^k+\cdots+[b_n-1]_k a_n^k+ \\
& +[b_1-1]_{k-1}[b_2-1]_1 a_1^{k-1}a_2+\cdots+[b_{n-1}-1]_{k-1}[b_n-1]_1 a_{n-1}^{k-1}a_n+ \\
& \quad \cdot\;\cdot \\
& \quad \cdot\;\cdot \\
& +[b_1-1]_1[b_2-1]_1\cdots[b_k-1]_1 a_1 a_2\cdots a_k+\cdots \\
& \qquad \cdots+[b_{n-k+1}-1]_1\cdots[b_n-1]_1 a_{n-k+1}\cdots a_n.
\end{aligned} \tag{87}
$$

Внеся выраженіе (86) въ соотношеніе (84), получимъ:

$$[(\infty\, x\, \overline{\infty}\, \overline{x})] =$$

$$= x^{\delta}\Bigg[\int\limits_{c_1}^{(10\overline{1}\overline{0})} u'^{-\delta-1}(1-u')^{\lambda-1}\,du' - \frac{D_1}{x}\int\limits_{c_1}^{(10\overline{1}\overline{0})} u'^{-\delta}(1-u')^{\lambda-1}\,du' + \tag{88}$$

$$\cdots + (-1)^k\frac{D_k}{x^k}\int\limits_{c_1}^{(10\overline{1}\overline{0})} u'^{-\delta+k-1}(1-u')^{\lambda-1}\,du' + \cdots\Bigg],$$

гдѣ положено:

$$\delta = \lambda + \sum_{p=1}^{p=n} b_p - n. \tag{89}$$

Принимая во вниманіе формулу (3) главы I, соотношенію (88) дадимъ видъ:

$$[(\infty\, x\, \overline{\infty}\, \overline{x})] =$$

$$= e^{\pi(\lambda-\delta)i}\, x^{\delta}\Big[\overline{E}(-\delta,\lambda) + \frac{D_1}{x}\overline{E}(-\delta+1,\lambda) + \frac{D_2}{x^2}\overline{E}(-\delta+2,\lambda) + \tag{90}$$

$$\cdots + \frac{D_k}{x^k}\overline{E}(-\delta+k,\lambda) + \cdots\Big].$$

Пользуясь формулой (31) главы I, послѣднему равенству дадимъ видъ:

$$[(\infty\, x\, \overline{\infty}\, \overline{x})] =$$

$$= Bx^{\delta}\Bigg[1 + \frac{D_1}{x}\,\frac{\delta}{\lambda-\delta} + \frac{D_2}{x^2}\,\frac{\delta(\delta-1)}{(\lambda-\delta)(\lambda-\delta+1)} + \cdots \tag{91}$$

$$\cdots + \frac{D_k}{x^k}\,\frac{\delta(\delta-1)\cdots(\delta-k+1)}{(\lambda-\delta)(\lambda-\delta+1)\cdots(\lambda-\delta+k-1)} + \cdots\Bigg],$$

гдѣ принято:

$$B = e^{\pi(\lambda-\delta)i}\,\overline{E}(-\delta,\lambda). \tag{91'}$$

Остается теперь представить разложеніе интеграла $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$ въ области безконечно удаленной точки. Для этой цѣли поступаемъ слѣдующимъ образомъ:

$$[(a_1\,a_2\,\overline{a}_1\,\overline{a}_2)] = \int\limits_c^{(a_1\,a_2\,\overline{a}_1\,\overline{a}_2)} (u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}du =$$

$$= (-1)^{\lambda-1}x^{\lambda-1}\int\limits_c^{(a_1\,a_2\,\overline{a}_1\,\overline{a}_2)}(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_n)^{b_n-1}\left(1-\frac{u}{x}\right)^{\lambda-1}du =$$

(92)

$$= (-1)^{\lambda-1}x^{\lambda-1}\Bigg[\int\limits_c^{(a_1\,a_2\,\overline{a}_1\,\overline{a}_2)}(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_n)^{b_n-1}du -$$

$$-\frac{[\lambda-1]_1}{x}\int\limits_c^{(a_1\,a_2\,\overline{a}_1\,\overline{a}_2)}u(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_n)^{b_n-1}du+\cdots$$

$$\cdots+(-1)^k\frac{[\lambda-1]_k}{x^k}\int\limits_c^{(a_1\,a_2\,\overline{a}_1\,\overline{a}_2)}u^k(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_n)^{b_n-1}du+\cdots\Bigg].$$

При этомъ подразумѣвается условіе:

$$\left|\frac{u}{x}\right| < 1. \tag{93}$$

Если далѣе введемъ обозначеніе:

$$\Phi_2(k) = (-1)^{\lambda+k-1}[\lambda-1]_k\int\limits_c^{(a_1\,a_2\,\overline{a}_1\,\overline{a}_2)}u^k(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_n)^{b_n-1}du. \tag{94}$$

то будемъ имѣть:

$$[(a_1\,a_2\,\overline{a}_1\,\overline{a}_2)] =$$

$$= x^{\lambda-1}\left[\Phi_2(0)+\frac{\Phi_2(1)}{x}+\frac{\Phi_2(2)}{x^2}+\cdots+\frac{\Phi(k)}{x^k}+\cdots\right]. \tag{95}$$

§ 8.

Изслѣдованія предыдущихъ параграфовъ приводятъ насъ къ слѣдующему выводу: если основная система интеграловъ вида (1) состоитъ изъ k интеграловъ, то всякій дозволенный интегралъ, послѣ всевозможныхъ обходовъ перемѣннаго x около особыхъ точекъ $f(u)$, вообще принимаетъ новыя аналитическія значенія, которыя выражаются чрезъ эти k интеграловъ линейными и однородными формулами съ постоянными коэффиціентами. Опираясь на извѣстную теорему Таннеру [1]), заключаемъ, что каждый изъ дозволенныхъ интеграловъ удовлетворяетъ нѣкоторому одному и тому же дифференціальному линейному уравненію k-го порядка съ однозначными коэффиціентами. Результаты предыдущаго параграфа убѣждаютъ насъ, что это уравненіе принадлежитъ къ классу извѣстныхъ Фуксовыхъ уравненій. Для составленія этого уравненія, мы прибѣгнемъ къ одному пріему, котораго впервые, насколько намъ извѣстно, придерживался É. Picard [2]) при составленіи гипергеометрическаго уравненія Гаусса. Замѣтимъ, что этотъ способъ по своей широтѣ примѣненія и простотѣ долженъ быть предпочитаемъ всѣмъ другимъ способамъ, относящимся къ тому же предмету.

Ограничимъ на первыхъ порахъ показатели $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и λ тѣми условіями, которыя были указаны въ самомъ началѣ § 1. Тогда $k = n$ и, слѣдовательно, искомое уравненіе n-го порядка. Полагаемъ:

$$g(u) = (u-a_1)^{b_1}(u-a_2)^{b_2}\ldots(u-a_n)^{b_n}(u-x)^{\lambda-n}. \tag{96}$$

Послѣ дифференцированія по u находимъ:

$$dg(u) = (u-a_1)^{b_1-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-n-1}\{[b_1(u-a_2)\ldots(u-a_n)+ \\ \cdots + b_n(u-a_1)\ldots(u-a_{n-1})](u-x)+(\lambda-n)(u-a_1)\ldots(u-a_n)\}\,du. \tag{97}$$

Введемъ обозначенія:

$$A = (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-n-1};$$
$$\psi(u) = b_1(u-a_2)\ldots(u-a_n)+\cdots+b_n(u-a_1)\ldots(u-a_{n-1});$$
$$\varphi(u) = (u-a_1)(u-a_2)\ldots(u-a_n). \tag{98}$$

Въ силу равенствъ (98), соотношенію (97) дадимъ видъ:

$$dg(u) = A[(u-x)\psi(u)+(\lambda-n)\varphi(u)]\,du. \tag{99}$$

Разлагая далѣе $\psi(u)$ и $\varphi(u)$ по строкѣ Тэйлора, получимъ:

---

[1]) Tannery. Annales de l' École Normale, t. IV, 2-me Série, p. 130.
В. А. Анисимовъ. Основанія теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій. Москва, 1889, стр. 27—29.

[2]) Traité d' Analyse, t. III, deuxième fascicule. Paris, 1895, p. 301—302.

$$\psi(u) = \psi(x) + \frac{(u-x)}{1}\psi'(x) + \cdots + \frac{(u-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\psi^{(n-1)}(x);$$

$$(100)\qquad \varphi(u) = \varphi(x) + \frac{(u-x)}{1}\varphi'(x) + \cdots + \frac{(u-x)^{n}}{1.2\ldots n}\varphi^{(n)}(x).$$

На основаніи формулъ (100), равенство (99) представимъ такъ:

$$(101)\qquad dg(u) = A\sum_{k=0}^{k=n}\left[\frac{\psi^{(k-1)}(x)}{1.2\ldots(k-1)} + (\lambda-n)\frac{\varphi^{(k)}(x)}{1.2\ldots k}\right](u-x)^k du.$$

Интегрируя обѣ части равенства (101) по любому дозволенному пути L, найдемъ, послѣ замѣны A его значеніемъ по формулѣ (98):

$$(102)\qquad \sum_{k=0}^{k=n}\left[\frac{\psi^{(k-1)}(x)}{1.2\ldots(k-1)} + \frac{(\lambda-n)\varphi^{(k)}(x)}{1.2\ldots k}\right]\int_L (u-a_1)^{b_1-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda+k-n-1}du = 0.$$

Если обѣ части соотношенія (1) продифференцируемъ $n-k$ разъ по x, то найдемъ:

$$(103)\qquad \frac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}} = (-1)^{n-k}(\lambda-1)_{n-k}\int_L (u-a_1)^{b_1-1}\ldots(u-x)^{\lambda+k-n-1}du,$$

гдѣ принято:

$$(103')\qquad (\lambda-1)_{n-k} = (\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-n+k).$$

При помощи формулы (103), соотношеніе (102) представимъ въ формѣ:

$$(104)\qquad \sum_{k=0}^{k=n}\frac{(-1)^k}{(\lambda-1)_{n-k}}\left[\frac{\psi^{(k-1)}(x)}{1.2\ldots(k-1)} + \frac{\lambda-n}{1.2\ldots k}\varphi^{(k)}(x)\right]\frac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}} = 0.$$

Это уравненіе совпадаетъ съ тѣмъ гипергеометрическимъ уравненіемъ n-го порядка, которое было впервые дано L. Pochhammer'омъ на 334 стр. 71-го тома журнала Крелля.

Мы ограничили показатели $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и λ условіями § 1. Но, очевидно, предыдущіе результаты справедливы также и для того случая, когда одинъ или нѣсколько изъ этихъ показателей суть цѣлыя отрицательныя числа. Случай же, когда одинъ или нѣсколько изъ показателей являются цѣлыми положительными числами, достоинъ особаго вниманія, и на изслѣдованіи его мы сейчасъ и остановимся. Легко сообразить, что для цѣлей достаточно ограничиться изслѣдованіемъ интеграла:

$$y = \int_L (u-a_1)^{b_1-1} \ldots (u-a_k)^{b_k-1} (u-x)^{\lambda-1} \theta_p(u,x)\, du; \tag{105}$$

при чемъ $\theta_p(u,x)$ цѣлая алгебраическая функція относительно u степени p, коэффиціенты которой произвольно зависятъ отъ x.

Обозначимъ далѣе чрезъ η функцію:

$$\eta = \int_L (u-x)^{\lambda-1} (u-a_1)^{b_1-1} \ldots (u-a_k)^{b_k-1}\, du. \tag{106}$$

Замѣтимъ, что подъ λ, b_1, b_2, ... b_n въ обѣихъ предыдущихъ формулахъ разумѣются числа, которыя не суть цѣлыя положительныя. За основные интегралы типа (106) примемъ слѣдующіе:

$$[(a_1 x \overline{a_1} \overline{x})], \quad [(a_1 a_2 \overline{a_1} \overline{a_2})], \quad \ldots, \quad [(a_1 a_k \overline{a_1} \overline{a_k})]. \tag{107}$$

Уравненіе, которому удовлетворяютъ интегралы (107), есть гипергеометрическое уравненіе L. Pochhammer'а порядка k.

Постараемся теперь доказать, что интегралы типа (105), гдѣ L любой изъ дозволенныхъ путей, связаны съ интегралами вида (107) соотношеніемъ:

$$y = A_k \eta + A_{k-1} \frac{d\eta}{dx} + \cdots + A_1 \frac{d^{k-1}\eta}{dx^{k-1}}, \tag{108}$$

гдѣ $A_1, A_2, \ldots, A_k$ суть нѣкоторыя функціи x. Для этой цѣли поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Пользуясь равенствомъ (103), можемъ написать:

$$A_k \eta + A_{k-1} \frac{d\eta}{dx} + \cdots + A_1 \frac{d^{k-1}\eta}{dx^{k-1}} =$$

$$= \int_L f_1 \left[A_k (u-x)^{k-1} - (\lambda-1)_1 A_{k-1} (u-x)^{k-2} + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + (-1)^q (\lambda-1)_q A_{k-q} (u-x)^{k-q-1} + \cdots + (-1)^{k-1} (\lambda-1)_{k-1} A_1\right] du, \tag{109}$$

гдѣ принято:

(109′) $$f_1(u) = \frac{f(u)}{(u-x)^{k-1}}.$$

Обозначимъ далѣе чрезъ $f_2(u)$ слѣдующую функцію:

(110) $$f_2(u) = f_1(u)(u-a_1)^{m_1+1}(u-a_2)^{m_2+1}\dots(u-a_k)^{m_k+1}(u-x)^{r+1},$$

гдѣ $m_1, m_2, \dots, m_k$ и r цѣлыя положительныя числа или нули.

Дифференцируя соотношеніе (110) по u, найдемъ:

$$\frac{df_2}{du} = \frac{df_1}{du}(u-a_1)^{m_1+1}\dots(u-a_k)^{m_k+1}(u-x)^{r+1} +$$

$$+(m_1+1)f_1(u-a_1)^{m_1}\dots(u-x)^{r+1} +$$

(111) $$+(m_2+1)f_1(u-a_1)^{m_1+1}(u-a_2)^{m_2}\dots(u-x)^{r+1} +$$

. . . .

. . . .

$$+(m_k+1)f_1(u-a_1)^{m_1+1}\dots(u-a_k)^{m_k}(u-x)^{r-1} +$$

$$+(r+1)f_1(u-a_1)^{m_1+1}\dots(u-a_k)^{m_k+1}(u-x)^{r} = f_1 M_t N_t.$$

При этомъ получено:

(112) $$t = m_1 + m_2 + \cdots + m_k + r;$$

(113) $$M_t = (u-a_1)^{m_1}\dots(u-a_k)^{m_k}(u-x)^{r};$$

$$N_t = \frac{d\,lg\,f_1}{du}(u-a_1)\dots(u-x) + (m_1+1)(u-a_2)\dots(u-x) + \cdots$$

(114) $$\cdots + (r+1)(u-a_1)\dots(u-a_k).$$

Полиномъ N_t, очевидно, степени k. Умноживъ обѣ части равенства (111) на du и произведя интегрированіе по дозволенному пути L, получимъ:

(115) $$\int_L f_1 M_t N_t\, du = 0.$$

Такимъ образомъ мы приходимъ къ формулѣ, которая представляетъ частный случай формулы (68) статьи П. А. Некрасова: „Линейныя дифференціальныя уравненія и пр.“.

При помощи этой формулы, слѣдуя идеѣ, указанной П. А. Некрасовымъ въ одной его замѣткѣ [1]), мы и выведемъ соотношеніе (108).

---

[1]) „Замѣчаніе по поводу линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, интегрируемыхъ посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ“. Мат. Сбор., т. XV.

Въ самомъ дѣлѣ, дадимъ $m_1, m_2, \ldots, m_k$ и rp системъ такихъ значеній, чтобы имѣли мѣсто:

$$t = 0, \quad = 1, \quad = 2, \quad \ldots, \quad = p-1. \tag{116}$$

Для нашей цѣли лучше всего положить:

$$m_1 = m_2 = \cdots = m_k = 0. \tag{117}$$

Тогда

$$t = r, \tag{118}$$

и полиномъ M_t представится:

$$M_t = M_r = (u-x)^r. \tag{119}$$

Принимая все это во вниманіе, можемъ написать равенства:

$$\int\limits_L f_1 N_0\, du = 0, \quad \int\limits_L f_1 M_1 N_1\, du = 0, \quad \ldots, \quad \int\limits_L f_1 M_{p-1} N_{p-1} du = 0. \tag{120}$$

Если теперь лѣвыя части этихъ послѣднихъ соотношеній умножимъ на $B_0, B_1, B_2, \cdots, B_{p-1}$ и полученные результаты вычтемъ изъ правой части равенства (109), то найдемъ:

$$\begin{aligned} A_k\eta + A_{k-1}\frac{d\eta}{dx} + \cdots + A_1\frac{d\eta^{k-1}}{dx^{k-1}} = \\ = \int\limits_L f_1 \,[A_k (u-x)^{k-1} - (\lambda-1)_1 A_{k-1} (u-x)^{k-2} + (\lambda-1)_2 A_{k-2} (u-x)^{k-3} - \\ \cdots + (-1)^q (\lambda-1)_q A_{k-q} (u-x)^{k-q-1} + \cdots + (-1)^{k-1} (\lambda-1)_{k-1} A_1 - \\ - B_0 N_0 - B_1 M_1 N_1 - B_2 M_2 N_2 - \cdots - B_{p-1} M_{p-1} N_{p-1}\,]\, du. \end{aligned} \tag{121}$$

Положеніе наше будетъ доказано, если представится возможность выбрать $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_k, B_0, B_1, \cdots, B_{p-1}$ такимъ образомъ, чтобы имѣло мѣсто тождество:

$$\begin{aligned} A_k (u-x)^{k-1} - (\lambda-1)_1 A_{k-1} (u-x)^{k-2} + (\lambda-1)_2 A_{k-2} (u-x)^{k-3} - \cdots \\ \cdots + (-1)^q (\lambda-1)_q A_{k-q} (u-x)^{k-q-1} + \cdots + (-1)^{k-1} (\lambda-1)_{k-1} A_1 - \\ - B_0 N_0 - B_1 M_1 N_1 - \cdots - B_{p-1} M_{p-1} N_{p-1} - \\ - (u-x)^{k-1}\, \theta_p(u, x) = 0. \end{aligned} \tag{122}$$

Полученное соотношеніе степени $k+p-1$ относительно $u-x$. Приравнявъ нулю коэффиціенты при всѣхъ степеняхъ $u-x$, получимъ $k+p$ линейныхъ неоднородныхъ уравненій, которыя и послужатъ для опредѣленія $k+p$ искомыхъ количествъ. Произведемъ вычисленія на самомъ дѣлѣ. Имѣемъ:

$$N_r = \frac{d\,lg f_1}{du}(u-a_1)\cdots(u-a_k)(u-x)+\varphi_1'(u)+$$

$$+r[(u-a_1)(u-a_2)\cdots(u-a_k)], \tag{123}$$

гдѣ принято:

$$\varphi_1(u)=(u-a_1)(u-a_2)\cdots(u-a_k)(u-x). \tag{124}$$

Далѣе убѣждаемся:

$$\frac{d\,lg f_1}{du}=\frac{d\,lg f}{du}-(k-1)\frac{d\,lg(u-x)}{du}=\frac{b_1-1}{u-a_1}+\frac{b_2-1}{u-a_2}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{b_k-1}{u-a_k}+\frac{\lambda-1}{u-x}-\frac{k-1}{u-x}=\frac{b_1}{u-a_1}+\frac{b_2}{u-a_2}+\cdots+\frac{b_k}{u-a_k}+$$

$$+\frac{\lambda-k+1}{u-x}-\left[\frac{1}{u-a_1}+\frac{1}{u-a_2}+\cdots+\frac{1}{u-a_k}+\frac{1}{u-x}\right]. \tag{125}$$

Въ силу соотношенія (125), N_r можно представить такъ:

$$N_r=\varphi_1(u)\left[\frac{b_1}{u-a_1}+\frac{b_2}{u-a_2}+\cdots+\frac{b_k}{u-a_k}+\frac{\lambda-k+1}{u-x}\right]+$$

$$+r(u-a_1)(u-a_2)\cdots(u-a_k). \tag{126}$$

Положимъ далѣе:

$$\psi(u)=\varphi_1(u)\left[\frac{b_1}{u-a_1}+\frac{b_2}{u-a_2}+\cdots+\frac{b_k}{u-a_k}+\frac{\lambda-k+1}{u-x}\right]; \tag{127}$$

$$\theta(u)=(u-a_1)(u-a_2)\cdots(u-a_k). \tag{128}$$

На основаніи обозначеній (127) и (128), равенство (126) напишется такъ:

$$N_r=\psi(u)+r\theta(u), \tag{127'}$$

гдѣ степень полиномовъ $\psi(u)$ и $\theta(u)$ есть k.

Разлагая $\psi(u)$ и $\theta(u)$ по строкѣ Тэйлора, находимъ:

$$\psi(u) = \psi(x) + \frac{u-x}{1}\psi'(x) + \cdots + \frac{(u-x)^k}{1.2\cdots k}\psi^{(k)}(x); \tag{129}$$

$$\theta(u) = \theta(x) + \frac{(u-x)}{1}\theta'(x) + \cdots + \frac{(u-x)^k}{1.2\cdots k}\theta^{(k)}(x). \tag{130}$$

Принимая во вниманіе (129), (130), (127′) и (119), находимъ:

$$B_r M_r N_r =$$

$$= (u-x)^r B_r \sigma_r + \frac{(u-x)^{r+1}}{1} B_r \sigma_r' + \frac{(u-x)^{r+2}}{1.2} B_r \sigma_r'' + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(u-x)^{r+q}}{1.2\cdots q} B_r \sigma_r^{(q)} + \cdots + \frac{(u-x)^{r+k}}{1.2\cdots k} B_r \sigma_r^{(k)}, \tag{131}$$

гдѣ положено:

$$\sigma_r = \psi(x) + r\,\theta(x). \tag{131′}$$

При помощи этой послѣдней формулы, а также:

$$\theta_p(u) = \theta_p(x) + \frac{u-x}{1}\theta_p'(x) + \cdots + \frac{(u-x)^p}{1.2\cdots p}\theta_p^{(p)}(x), \tag{132}$$

соотношеніе (122) представимъ въ слѣдующей формѣ:

$$\left[B_0\sigma_0 - (-1)^{k-1}(\lambda-1)_{k-1}A_1\right] +$$

$$+ (u-x)\left[\frac{B_0\sigma_0}{1} + B_1\sigma_1 - (-1)^{k-2}(\lambda-1)_{k-2}A_2\right] +$$

$$+ (u-x)^2\left[\frac{B_0\sigma_0''}{1.2} + \frac{B_1\sigma_1'}{1} + B_2\sigma_2 - (-1)^{k-3}(\lambda-1)_{k-3}A_3\right] +$$

$$+ (u-x)^3\left[\frac{B_0\sigma_0'''}{1.2.3} + \frac{B_1\sigma_1''}{1.2} + \frac{B_2\sigma_2'}{1} + B_3\sigma_3 - (-1)^{k-4}(\lambda-1)_{k-4}A_4\right] +$$

. . . .

. . . .

$$+ (u-x)^{k-1}\left[\frac{B_0\sigma_0^{(k-1)}}{1.2\cdots(k-1)} + \frac{B_1\sigma_1^{(k-2)}}{1.2\cdots(k-2)} + \cdots\right. \tag{133}$$

$$\left.\cdots + \frac{B_{p-1}\sigma_{p-1}^{(k-p)}}{1.2\cdots(k-p)} + \theta_p(x) - A_k\right] +$$

$$+(u-x)^k\left[\frac{B_0\sigma_0^{(k)}}{1.2\cdots k}+\frac{B_1\sigma_1^{(k-1)}}{1.2\cdots(k-1)}+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{B_{p-1}\sigma_{p-1}^{(k-p+1)}}{1.2\cdots(k-p+1)}+\theta_p'(x)\right]+$$

. . . .

$$+(u-x)^{k+p-2}\left[\frac{B_{p-2}\sigma_{p-2}^{(k)}}{1.2\cdots k}+\frac{B_{p-1}\sigma_{p-1}^{(k-1)}}{1.2\cdots(k-1)}+\frac{\theta_p^{(p-1)}(x)}{1.2\cdots(p-1)}\right]+$$

$$(133)\qquad +(u-x)^{k+p-1}\left[\frac{B_{p-1}\sigma_{p-1}^{(k)}}{1.2\cdots k}+\frac{\theta_p^{(p)}(x)}{1.2\cdots p}\right]=0.$$

Приравнявъ нулю коэффиціенты при различныхъ степеняхъ $u-x$, найдемъ слѣдующія уравненія:

$$\frac{B_{p-1}\sigma_{p-1}^{(k)}}{1.2\cdots k}+\frac{\theta_p^{(p}(x)}{1.2\cdots p}=0;$$

$$\frac{B_{p-2}\sigma_{p-2}^{(k)}}{1.2\cdots k}+\frac{B_{p-1}\sigma_{p-1}^{(k-1)}}{1.2\cdots(k-1)}+\frac{\theta_p^{(p-1)}(x)}{1.2\cdots(p-1)}=0;$$

. . . .

$$\frac{B_0\sigma_0^{(k)}}{1.2\cdots k}+\frac{B_1\sigma_1^{(k-1)}}{1.2\cdots(k-1)}+\cdots+\frac{B_{p-1}\sigma_{p-1}^{(k-p+1)}}{1.2\cdots(k-p+1)}+\theta_p'(x)=0;$$

$$(134)\qquad \frac{B_0\sigma_0^{(k-1)}}{1.2\cdots(k-1)}+\frac{B_1\sigma_1^{(k-2)}}{1.2\cdots(k-2)}+\frac{B_2\sigma_2^{(k-3)}}{1.2\cdots(k-3)}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{B_{p-1}\sigma_{p-1}^{(k-p)}}{1.2\cdots(k-p)}+\theta_p(x)-A_k=0;$$

. . . .

$$\frac{B_0\sigma_0'''}{1.2.3}+\frac{B_1\sigma_1''}{1.2}+\frac{B_2\sigma_2'}{1}+B_3\sigma_3-(-1)^{k-4}(\lambda-1)_{k-4}A_4=0;$$

$$\frac{B_0\sigma_0''}{1.2}+\frac{B_1\sigma_1'}{1}+B_2\sigma_2-(-1)^{k-3}(\lambda-1)_{k-3}A_3=0;$$

$$\frac{B_0\sigma_0}{1}+B_1\sigma_1-(-1)^{k-2}(\lambda-1)_{k-2}A_2=0;$$

$$B_0\sigma_0-(-1)^{k-1}(\lambda-1)_{k-1}A_1=0.$$

Вотъ тѣ $k+p$ уравненій, которыя служатъ для нахожденія $A_1, A_2, \cdots, A_k, B_0, B_1, \cdots, B_{p-1}$. Порядокъ вычисленія такой: сперва изъ первыхъ p уравненій надо опредѣлить p количествъ B_0, B_1, B_2, $\cdots$, B_{p-1}, а потомъ изъ остальныхъ уравненій весьма просто находятся A_1, A_2, $\cdots$, A_k. Для этой цѣли поступаемъ такъ. Обозначимъ чрезъ D_i слѣдующій детерминантъ:

$$D_i = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \frac{\sigma_{p-1}^{(k)}}{k!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\sigma_{p-2}^{(k)}}{k!} & \frac{\sigma_{p-1}^{(k-1)}}{(k-1)!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \; \frac{\sigma_{p-3}^{(k)}}{k!} & \frac{\sigma_{p-2}^{(k-1)}}{(k-1)!} & \frac{\sigma_{p-1}^{(k-2)}}{(k-2)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\sigma_{p-i}^{(k)}}{k!} & \frac{\sigma_{p-i+1}^{(k-1)}}{(k-1)!} & \frac{\sigma_{p-i+2}^{(k-2)}}{(k-2)!} & \dots & & & \frac{\sigma_{p-1}^{(k-i+1)}}{(k-i+1)!} \end{vmatrix} \tag{135}$$

Этотъ детерминантъ выражается, какъ извѣстно, такъ:

$$D_i = (-1)^{\frac{i(i-1)}{2}} \frac{\sigma_{p-i}^{(k)} \, \sigma_{p-i+1}^{(k)} \cdots \sigma_{p-1}^{(k)}}{(k!)^i}. \tag{136}$$

Очевидно, что D_i есть постоянное.

Если теперь чрезъ Δ_k обозначимъ детерминантъ миноръ D_i для k-го элемента перваго столбца, то изъ первыхъ i уравненій (134) будемъ имѣть:

$$B_{p-i} = -\frac{1}{D_i}\left[\frac{\Delta_1}{p!}\,\theta_p^{(p)}(x) + \frac{\Delta_2\,\theta_p^{(p-1)}(x)}{(p-1)!} + \frac{\Delta_3\,\theta_p^{(p-2)}(x)}{(p-2)!} + \cdots + \frac{\Delta_i\,\theta_p^{(p-i+1)}(x)}{(p-i+1)!}\right]. \tag{137}$$

Найдя функціи B_0, B_1, B_2, $\cdots$, B_{p-1}, остается лишь внести ихъ выраженія въ k послѣднихъ уравненій (134) и тогда мы получимъ A_1, A_2, $\cdots$, A_k. Такимъ образомъ справедливость соотношенія (108) доказана.

Для полученія уравненія, которому удовлетворяютъ интегралы вида (105), надо обѣ части соотношенія (108) продифференцировать k

разъ, исключая всякій разъ, при помощи уравненія для η, производныя порядка высшаго, чѣмъ $k-1$. Исключивъ изъ полученныхъ $k+1$ уравненій k количествъ η, $\frac{d\eta}{dx}$, $\frac{d^2\eta}{dx^2}$, $\cdots$ $\frac{d^{k-1}\eta}{dx^{k-1}}$, мы и получимъ искомое дифференціальное уравненіе k-го порядка, которое будетъ линейное, однородной формы.

Относительно степени функціи $\theta_p(u, x)$ можно сдѣлать одно интересное замѣчаніе. Эту степень, какъ впервые обнаружилъ П. А. Некрасовъ [1]), можно сдѣлать меньше k, если только она больше или равна k.

Пользуясь соотношеніями (120), интегралъ (105) можемъ написать такъ:

$$(138)\qquad y =$$
$$= \int_L f\,[\theta_p(u) - B_{k-1} N_{k-1} - B_k N_k (u-x) - \cdots - B_{p-1} N_{p-1} (u-x)^{p-k}]\, du.$$

При этомъ $N_r(u)$ выражается по формулѣ (127').

Выраженіе въ скобкахъ [ ] представляетъ полиномъ степени p. Приравнявъ нулю коэффиціенты при первыхъ $p-k+1$ старшихъ степеняхъ $u-x$, мы получимъ $p-k+1$ линейныхъ неоднородныхъ уравненій, изъ которыхъ опредѣлятся B_{k-1}, B_k, $\cdots$, B_{p-1}. Тогда въ скобкахъ окажется цѣлая алгебраическая функція степени $k-1$.

Примѣчаніе. Легко убѣдиться, что въ свою очередь интегралъ η выражается чрезъ интегралъ y по формулѣ:

$$(139)\qquad \eta = B_k y + B_{k-1} \frac{dy}{dx} + \cdots + B_1 \frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}},$$

гдѣ B_1, B_2, $\cdots$, B_k суть нѣкоторыя функціи x, которыя опредѣляются по способу, изложенному при опредѣленіи A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_k.

Можно задаться и рѣшеніемъ обратнаго вопроса. Пусть интегралъ y связанъ съ интеграломъ η при помощи соотношенія (108). Если далѣе интегралъ η имѣетъ видъ (106), то легко обнаружить, что интегралъ y можетъ быть представленъ въ формѣ (105), гдѣ $p = k - 1$. Въ самомъ дѣлѣ, тогда придется рѣшить $2k-1$ линейныхъ и неодно-

---

[1]) „Линейныя дифференціальныя уравненія" и пр., стр. 93—94.

родныхъ уравненій съ таковымъ же числомъ неизвѣстныхъ: B_0, B_1, B_2, $\cdots$, B_{k-2}, и k коэффиціентовъ полинома $\theta_{k-1}(u, x)$,—и эти уравненія мы получимъ, если въ соотношеніи (122) приравняемъ нулю коэффиціенты при различныхъ степеняхъ u.

Мы пришли такимъ образомъ въ случаѣ, который исключительно насъ интересуетъ, къ инымъ, болѣе простымъ выраженіямъ тѣхъ преобразованій, которыя подлежали изслѣдованію нѣкоторыхъ выдающихся математиковъ, какъ напр.: Apell'я [1]), Poincaré [2]) и Goursat [3]).

§ 9.

Въ этомъ параграфѣ мы имѣемъ въ виду указать тѣснѣйшую связь, существующую между гипергеометрическимъ уравненіемъ L. Pochhammer'a и линейнымъ уравненіемъ въ конечныхъ разностяхъ, коэффиціенты котораго суть цѣлыя линейныя функціи. Это послѣднее уравненіе легко получается изъ того же соотношенія (102), которое привело насъ къ уравненію (104). Въ самомъ дѣлѣ, полагая:

$$\lambda - n = z, \tag{140}$$

$$\int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-\alpha)^{z-1}\, du = U_z, \tag{141}$$

непосредственно получаемъ изъ (102) искомое уравненіе:

$$\sum_{k=0}^{k=n} \left[\frac{\psi^{(k-1)}(\alpha)}{(k-1)!} + z\,\frac{\varphi^{(k)}(\alpha)}{k!} \right] U_{z+k} = 0, \tag{142}$$

или въ раскрытой формѣ:

$$z\varphi(\alpha)\, U_z + \tag{143}$$

$$+ \left[\psi(\alpha) + \frac{z\varphi'(\alpha)}{1} \right] U_{z+1} + \cdots + \left[\frac{\psi^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} + \frac{z\varphi^{(n)}(\alpha)}{n!} \right] U_{z+n} = 0.$$

---

1) Annales de l'École Normale, t. IX, 1881.

2) Comptes rendus, t. XCIV, p. 1402.

3) Annales de l'École Normale, t. XII, 1883, p. 395—430.

При этомъ:

$$\varphi(\alpha) = (\alpha - a_1)(\alpha - a_2) \cdots (\alpha - a_n);$$

(144) $$\psi(\alpha) = \varphi(\alpha)\left[\frac{b_1}{\alpha - a_1} + \frac{b_2}{\alpha - a_2} + \cdots + \frac{b_n}{\alpha - a_n}\right].$$

Такимъ образомъ уравненіе (143) интегрируется при помощи интеграловъ вида (141), гдѣ α предполагается постояннымъ.

За основную систему интеграловъ этого уравненія можно принять слѣдующую группу интеграловъ:

(145) $$\int_c^{(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})} (u - a_1)^{b_1 - 1} \cdots (u - \alpha)^{z-1}\, du,$$

$$\int_c^{(a_1\, a_3\, \overline{a_1}\, \overline{a_3})} (u - a_1)^{b_1 - 1} \cdots (u - \alpha)^{z-1}\, du, \quad \cdots, \quad \int_c^{(a_1\, \alpha\, \overline{a_1}\, \overline{\alpha})} (u - a_1)^{b_1 - 1} \cdots (u - \alpha)^{z-1}\, du.$$

Общій интегралъ уравненія (143) представится тогда въ формѣ:

(146) $$U_z = C_1 \int_c^{(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})} (u - a_1)^{b_1 - 1} \cdots (u - \alpha)^{z-1}\, du +$$

$$+ C_2 \int_c^{(a_1\, a_3\, \overline{a_1}\, \overline{a_3})} (u - a_1)^{b_1 - 1} \cdots (u - \alpha)^{z-1}\, du + \cdots + C_n \int_c^{(a_1\, \alpha\, \overline{a_1}\, \overline{\alpha})} (u - a_1)^{b_1 - 1} \cdots (u - \alpha)^{z-1}\, du,$$

гдѣ $C_1, C_2, \cdots, C_n$ суть произвольныя постоянныя или произвольныя періодическія функціи съ періодомъ, равнымъ единицѣ. Такую форму будетъ имѣть общій интегралъ, если только, какъ мы знаемъ, ни одинъ изъ показателей $b_1, b_2, \cdots, b_n$ не оказывается цѣлымъ положительнымъ числомъ. Въ противномъ случаѣ, какъ извѣстно, число интеграловъ системы (145) меньше n.

Въ этомъ послѣднемъ случаѣ мы будемъ имѣть дѣло съ интеграломъ, обобщеніемъ котораго является:

(147) $$V_z = \int_L (u - a_1)^{b_1 - 1} \cdots (u - a_k)^{b_k - 1} (u - \alpha)^{z-1}\, \vartheta_p(u, z)\, du.$$

При этомъ $b_1, b_2, \cdots, b_k$ суть постоянныя, отличныя отъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ; $\vartheta_p(u, z)$ есть цѣлая алгебраическая функція степени p относительно u, коэффиціенты которой представляютъ произвольныя функціи z.

Обозначимъ далѣе чрезъ W_z интегралъ:

$$W_z = \int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-\alpha)^{z-1} du, \tag{148}$$

и установимъ тутъ справедливость соотношенія:

$$V_z = P_0 W_z + P_1 W_{z+1} + P_2 W_{z+2} + \cdots + P_{k-1} W_{z+k-1}, \tag{149}$$

гдѣ $P_0, P_1, P_2, \cdots, P_{k-1}$ суть нѣкоторыя функціи z.

Для этой цѣли, по пріему, представленному въ концѣ предыдущаго параграфа, соотношеніе (147) приводимъ къ виду:

$$V_z = \int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-\alpha)^{z-1} \partial'_{k-1}(u,z)\, du, \tag{150}$$

гдѣ степень цѣлой функціи $\partial'_{k-1}(u,z)$ есть $k-1$.

Представимъ теперь эту функцію въ формѣ:

$$\begin{gathered} \partial'_{k-1}(u,z) = \\ = C_0(u-\alpha)^{k-1} - (z-1)_1 C_1 (u-\alpha)^{k-2} + (z-1)_2 C_2 (u-\alpha)^{k-3} - \cdots \\ \cdots + (-1)^{k-1}(z-1)_{k-1} C_{k-1}; \end{gathered} \tag{151}$$

при чемъ функціи $C_0, C_1, \cdots, C_{k-1}$ очевиднымъ образомъ опредѣляются изъ соотношенія (151).

Умноживъ обѣ части равенства (151) на $(u-a_1)^{b_1-1} \cdots$ $\cdots (u-a_k)^{b_k-1}(u-\alpha)^{z-1} du$ и взявъ отъ полученнаго результата интегралъ по дозволенному пути L, будемъ имѣть:

$$\begin{gathered} \int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-\alpha)^{z-1} \partial'_{k-1}(u,z)\, du = \\ = C_0 \int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-\alpha)^{z+k-2} - \\ -(z-1)_1 C_1 \int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-\alpha)^{z+k-3} du + \cdots \\ \cdots + (-1)^{k-1} C_{k-1} (z-1)_{k-1} \int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-\alpha)^{z-1} du. \end{gathered} \tag{152}$$

Обозначая:

(153) $C_0 = P_{k-1},\ -(z-1)_1 C_1 = P_{k-2}, \cdots, (-1)^{k-1}(z-1)_{k-1} C_{k-1} = P_0$

и принимая во вниманіе выраженія (148) и (150), мы и получимъ изъ (152) соотношеніе (149).

Для составленія уравненія въ конечныхъ разностяхъ, которому удовлетворяетъ V_z, воспользуемся его выраженіемъ чрезъ W_z, $W_{z+1}, \cdots, W_{z+k-1}$, даннымъ формулою (149). Изъ этой формулы находимъ $V_z, V_{z+1}, \cdots, V_{z+k-1}$, устраняя всякій разъ W_{z+k} при помощи уравненія для W_z. Изъ полученныхъ такимъ образомъ k уравненій и уравненія, которому удовлетворяетъ W_z, исключаемъ $W_z, W_{z+1}, \cdots, W_{z+k-1}$. Тогда и получимъ искомое уравненіе. Очевидно, оно линейное и однородное, порядка k.

§ 10.

Покажемъ теперь, какъ при помощи уравненія (143) можно разрѣшить линейное и разностное уравненія n-го порядка, коэффиціенты котораго суть линейныя цѣлыя функціи независимаго перемѣннаго. Чтобы лучше выяснить процессъ интегрированія, разсмотримъ простѣйшій случай. Положимъ, что требуется объинтегрировать уравненіе 2-го порядка:

(154) $$(A_0+B_0x)\,U_x+(A_1+B_1x)\,U_{x+1}+(A_2+B_2x)\,U_{x+2} = 0,$$

гдѣ A_0, A_1, A_2, B_0, B_1 и B_2 суть произвольныя постоянныя.

При помощи подстановки:

(154′) $$x = z - \frac{A_0}{B_0},$$

очевидно, можно устранить изъ уравненія (154) свободный членъ коэффиціента при искомой функціи. А потому мы не погрѣшимъ противъ общности, если предположимъ, что подлежащее интеграціи уравненіе есть:

(155) $$B_0x\,U_x+(A_1+B_1x)\,U_{x+1}+(A_2+B_2x)\,U_{x+2} = 0.$$

Будемъ при этомъ предполагать, что трехчленъ $B_0+B_1x+B_2x^2$ не имѣетъ равныхъ корней.

Уравненіе (143) въ разсматриваемомъ случаѣ приметъ видъ:

$$x\varphi(\alpha)\,U_x+$$

$$+\left[\psi(\alpha)+x\varphi'(\alpha)\right]U_{x+1}+\left[\psi'(\alpha)+\frac{x\varphi''(\alpha)}{2}\right]U_{x+2}=0, \tag{156}$$

гдѣ полагаемъ:

$$\varphi(\alpha)=(\alpha-a_1)(\alpha-a_2)=\alpha^2+D_1\alpha+D_2; \tag{157}$$

$$\psi(\alpha)=\varphi(\alpha)\left[\frac{b_1}{\alpha-a_1}+\frac{b_2}{\alpha-a_2}\right]=C_0\alpha+C_1. \tag{158}$$

Сопоставляя уравненія (155) и (156), можемъ написать:

$$\frac{\varphi(\alpha)}{B_0}=\frac{\varphi'(\alpha)}{B_1}=\frac{\varphi''(\alpha)}{2B_2}=\frac{\psi(\alpha)}{A_1}=\frac{\psi'(\alpha)}{A_2}=\lambda. \tag{159}$$

Отсюда находимъ:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\alpha)&=\lambda B_0;\\ \varphi'(\alpha)&=\lambda B_1;\\ \varphi''(\alpha)&=2\lambda B_2.\end{aligned}\right|\quad\begin{aligned}\psi(\alpha)&=\lambda A_1;\\ \psi'(\alpha)&=\lambda A_2.\end{aligned} \tag{159'}$$

Положимъ, что

$$B_2u^2+B_1u+B_0=B_2(u-\delta_1)(u-\delta_2). \tag{160}$$

Изъ соотношеній (159') (налѣво) находимъ:

$$\varphi(\alpha)+\frac{(u-\alpha)}{1}\varphi'(\alpha)+\frac{(u-\alpha)^2}{1.2}\varphi''(\alpha)=(u-\alpha)^2+$$

$$+\frac{(u-\alpha)}{1}\frac{B_1}{B_2}+\frac{B_0}{B_2}, \tag{161}$$

или:

$$\varphi(u)=(u-a_1)(u-a_2)=(u-\alpha-\delta_1)(u-\alpha-\delta_2). \tag{161'}$$

Отсюда имѣемъ:

$$a_1=\alpha+\delta_1,\quad a_2=\alpha+\delta_2. \tag{162}$$

Для опредѣленія b_1 и b_2 имѣемъ соотношенія:

$$
(163) \qquad \begin{aligned} & b_1+b_2=\frac{A_2}{B_2}; \\ & (b_1+b_2)\,\alpha-(b_1 a_2+b_2 a_1)=\frac{A_1}{B_2}. \end{aligned}
$$

Въ виду (162), уравненія (163) представятся такъ:

$$
(163') \qquad \begin{aligned} & b_1+b_2=\frac{A_2}{B_2}; \\ & b_1\,\delta_2+b_2\,\delta_1=-\frac{A_1}{B_2}. \end{aligned}
$$

Изъ этихъ уравненій находимъ b_1 и b_2:

$$
(164) \qquad \begin{aligned} & b_1=\frac{A_1+\delta_1 A_2}{B_2(\delta_1-\delta_2)}; \\ & b_2=\frac{A_1+\delta_2 A_2}{B_2(\delta_2-\delta_1)}. \end{aligned}
$$

Такимъ образомъ мы нашли постоянныя, входящія въ подъинтегральную функцію интеграла:

$$
(165) \qquad U_x=\int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-\alpha)^{x-1}\,du
$$

уравненія (155). Если b_1 и b_2, опредѣляемыя по формуламъ (164), различны и не суть цѣлыя положительныя числа, то за основные интегралы можно принять слѣдующіе:

$$
(166) \qquad \begin{aligned} & \int\limits_c^{(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})} (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-\alpha)^{x-1}\,du, \\ & \int\limits_c^{(a_1\, \alpha\, \overline{a_1}\, \overline{\alpha})} (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-\alpha)^{x-1}\,du. \end{aligned}
$$

Общимъ интеграломъ уравненія (155) тогда будетъ:

$$U_x = C_1 \int\limits_c^{(a_1\, a_2\, \overline{a}_1\, \overline{a}_2)} (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-\alpha)^{x-1}\, du + \tag{167}$$

$$+ C_2 \int\limits_c^{(a_1\, \alpha\, \overline{a}_1\, \overline{\alpha})} (u-a_1)^{b_1-1}(u-u_2)^{b_2-1}(u-\alpha)^{x-1}\, du,$$

гдѣ C_1 и C_2 суть произвольныя постоянныя или произвольныя періодическія функціи съ періодомъ единица.

Относительно интеграла (167) намъ слѣдуетъ сдѣлать одно замѣчаніе. Въ немъ повидимому присутствуетъ третье произвольное постоянное (оно можетъ быть произвольной періодической функціей съ періодомъ единица), а именно α. Но не трудно убѣдиться, что эта излишняя общность только кажущаяся. Въ самомъ дѣлѣ, при значеніяхъ a_1 и a_2, данныхъ формулами (162), интегралъ (165) напишется такъ:

$$U_x = \int\limits_L (u-\alpha-\delta_1)^{b_1-1}(u-\alpha-\delta_2)^{b_2-1}(u-\alpha)^{x-1}\, du. \tag{168}$$

Введемъ теперь въ этомъ интегралѣ новое перемѣнное интеграціи v при помощи подстановки:

$$u - \alpha = v. \tag{169}$$

Тогда интегралъ (168) преобразуется въ слѣдующій:

$$U_x = \int\limits_{L_1} v^{x-1}(v-\delta_1)^{b_1-1}(v-\delta_2)^{b_2-1}\, dv. \tag{170}$$

При этомъ L_1 есть отображеніе на плоскости v пути L.

Что же касается до основныхъ интеграловъ (166), то они представятся такъ:

$$\int\limits_{c_1}^{(\delta_1\, \delta_2\, \overline{\delta}_1\, \overline{\delta}_2)} v^{x-1}(v-\delta_1)^{b_1-1}(v-\delta_2)^{b_2-1}\, dv, \quad \int\limits_{c_1}^{(\delta_1\, 0\, \overline{\delta}_1\, \overline{0})} v^{x-1}(v-\delta_1)^{b_1-1}(v-\delta_2)^{b_2-1}\, dv, \tag{171}$$

гдѣ принято:

$$c_1 = c - \alpha. \tag{172}$$

Интегралы (171) не зависятъ отъ c_1. А потому зависимость интеграловъ (166) и, слѣдовательно, интеграла (167) отъ c только кажущаяся.

Разобранный нами частный случай достаточно говоритъ, какъ надо поступать, когда требуется объинтегрировать уравненіе вида:

(173) $$(A_0+B_0 x)\,U_x+(A_1+B_1 x)\,U_{x+1}+\cdots+(A_n+B_n x)\,U_{x+n}=0.$$

Это уравненіе при помощи подстановки (154′) приводится къ виду:

(174) $$B_0 x U_x+(A_1+B_1 x)U_{x+1}+\cdots+(A_n+B_n x)U_{x+n}=0.$$

Допустимъ, что для случая уравненія (174), корни полинома $B_0+B_1 x+B_2 x^2+\cdots+B_n x^n$ различны, а именно:

(175) $$B_0+B_1 x+B_2 x^2+\cdots+B_n x^n=B_n(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_n).$$

Сопоставляя уравненіе (174) съ уравненіемъ (143) (послѣ замѣны въ немъ z чрезъ x), можемъ написать:

(175′) $$\begin{array}{l|l}
\varphi(\alpha)=\lambda B_0; & \psi(\alpha)=\lambda A_1 \\
\varphi'(\alpha)=\lambda B_1; & \psi'(\alpha)=\lambda A_2; \\
\varphi''(\alpha)=1.2\lambda B_2; & \psi''(\alpha)=1.2\lambda A_3; \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
\varphi^{(n)}(\alpha)=1.2.3\cdots n\lambda B_n. & \psi^{(n-1)}(\alpha)=1.2\cdots(n-1)\lambda A_n.
\end{array}$$

Принимая во вниманіе составъ функціи $\varphi(\alpha)$, данный формулой (144), находимъ изъ послѣдняго уравненія налѣво (175′):

(176) $$\lambda=\frac{1}{B_n}.$$

Изъ формулы (175′) налѣво имѣемъ:

$$\varphi(\alpha)+\frac{u-\alpha}{1}\varphi'(\alpha)+\frac{(u-\alpha)^2}{1.2}\varphi''(\alpha)+\cdots+\frac{(u-\alpha)^n}{1.2\cdots n}\varphi^{(n)}(\alpha)=$$

(177) $$=\frac{B_0}{B_n}+\frac{(u-\alpha)}{1}\frac{B_1}{B_n}+\cdots+(u-\alpha)^n,$$

или:

$$(u-a_1)(u-a_2)\cdots(u-a_n)=$$

(178) $$(u-\alpha-\beta_1)(u-\alpha-\beta_2)\cdots(u-\alpha-\beta_n).$$

Отсюда находимъ:

$$a_1 = \alpha+\beta_1,\ a_2 = \alpha+\beta_2,\ \cdots,\ a_n = \alpha+\beta_n. \tag{179}$$

Что же касается до $b_1, b_2, \cdots, b_n$, то эти количества опредѣляются изъ уравненій (175') налѣво, если въ нихъ $\psi(\alpha)$ замѣнимъ его выраженіемъ по формулѣ (144) и $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ и a_n замѣнимъ ихъ значеніями (179). Будемъ имѣть для опредѣленія этихъ количествъ уравненія:

$$b_1\beta_2\beta_3\cdots\beta_n+b_2\beta_1\beta_3\cdots\beta_n+\cdots+b_n\beta_1\cdots\beta_{n-1} = (-1)^{n-1}\frac{A_1}{B_n};$$

$$b_1(\beta_3\cdots\beta_n+\beta_2\beta_4\cdots\beta_n+\cdots+\beta_2\cdots\beta_{n-1})+\cdots \tag{180}$$

$$\cdots+b_n(\beta_2\cdots\beta_{n-1}+\beta_1\beta_3\cdots\beta_{n-1}+\cdots+\beta_1\cdots\beta_{n-2}) = (-1)^{n-2}\frac{A_2}{B_n};$$

. . . .

. . . .

$$b_1+b_2+\cdots+b_n = \frac{A_n}{B_n}.$$

ГЛАВА III.

Интегралы вида $\int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1}\ldots(u-a_k)^{b_k-1}(u-x_1)^{\lambda_1-1}\ldots(u-x_m)^{\lambda_m-1}\,du$ и ихъ свойства. Полная система дифференціальныхъ уравненій, которымъ удовлетворяютъ эти интегралы. Полная система уравненій въ конечныхъ разностяхъ, частные интегралы которыхъ выражаются въ формѣ: $\int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1}\ldots(u-a_k)^{b_k-1}(u-\alpha_1)^{z_1-1}\ldots$ $\ldots(u-\alpha_m)^{z_m-1}\,du$.

§ 1.

Естественнымъ обобщеніемъ интеграла, изученіемъ котораго мы занимались въ предыдущей главѣ, является слѣдующій интегралъ:

$$z = \tag{1}$$

$$=\int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}(u-x_1)^{\lambda_1-1}\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-1}\,du,$$

гдѣ $a_1, a_2, \cdots, a_k, b_1, b_2, \cdots, b_k, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ суть нѣкоторыя постоянныя, $x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}$ и x_m перемѣнные параметры, а L путь интеграціи. Какъ и въ § 1 главѣ II, мы и тутъ на первыхъ порахъ предположимъ, что показатели $b_1, b_2, \cdots, b_k, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ ограничены условіями: каждый изъ нихъ въ отдѣльности и сумма ихъ отличны отъ цѣлыхъ чиселъ и нуля.

Условимся количества $a_1, a_2, \cdots, a_k, x_1, x_2, \cdots, x_m$ изображать точками плоскости перемѣннаго u. Тогда за путь L надо принять любой изъ путей съ двойнымъ обходомъ, построеніе которыхъ было дано нами въ § 1 главы II. Между этими путями мы особенно отмѣтимъ тѣ, которыя содержатъ внутри себя лишь по двѣ особыхъ точки подъинтегральной функціи:

$$\varphi(u) = (u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}(u-x_1)^{\lambda_1-1}\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-1}. \tag{2}$$

Эти пути слѣдующіе:

$$\begin{array}{l}
(a_1\,a_2\,\overline{a_1}\,\overline{a_2}),\ (a_1\,a_3\,\overline{a_1}\,\overline{a_3}),\ ,\cdots\ (a_1\,a_k\,\overline{a_1}\,\overline{a_k}),\ \cdots,\\
\qquad\qquad \cdots,\ (a_1\,x_m\,\overline{a_1}\,\overline{x_m}),\ (a_1\,\infty\,\overline{a_1}\,\overline{\infty});\\
(a_2\,a_3\,\overline{a_2}\,\overline{a_3}),\ \cdots,\ (a_2\,a_k\,\overline{a_2}\,\overline{a_k}),\ \cdots,\ (a_2\,x_m\,\overline{a_2}\,\overline{x_m}),\\
\qquad\qquad (a_2\,\infty\,\overline{a_1}\,\overline{\infty});\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(x_m\,\infty\,\overline{x_m}\,\overline{\infty}).
\end{array} \tag{3}$$

Число ихъ, очевидно, $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, гдѣ принято:

$$k+m = n+1. \tag{4}$$

Интегралы, взятые по путямъ (3), будутъ:

$$\begin{array}{l}
[(a_1\,a_2\,\overline{a_1}\,\overline{a_2})],\ [(a_1\,a_3\,\overline{a_1}\,\overline{a_3})],\ \cdots,\ [(a_1\,\infty\,\overline{a_1}\,\overline{\infty})];\\
[(a_2\,a_3\,\overline{a_2}\,\overline{a_3})],\ \cdots,\ [(a_2\,\infty\,\overline{a_2}\,\overline{\infty})];\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
[(x_m\,\infty\,\overline{x_m}\,\overline{\infty})].
\end{array} \tag{5}$$

При этомъ предполагается, что выбрана какая-либо опредѣленная вѣтвь подъинтегральной функціи за исходную, а именно та, которая для $u = c$ принимаетъ значеніе $\varphi_0(c)$.

Допустимъ, что $x_1, x_2, \cdots, x_m$ суть нѣкоторыя неподвижныя точки плоскости перемѣннаго u, не совпадающія съ $a_1, a_2, \cdots, a_k$ и не лежащія на пути интеграціи разсматриваемаго интеграла. Тогда, ясное дѣло, всѣ результаты первыхъ четырехъ параграфовъ главы II примѣняются къ данному случаю. Мы ограничимся лишь указаніемъ ихъ.

Подъ $[(\alpha' \alpha'' \overline{\alpha'} \overline{\alpha''})]$, гдѣ α' и α'' берутся изъ ряда количествъ: $a_1, a_2, \cdots, a_k\ x_1, x_2, \cdots, x_m$, будемъ разумѣть любой изъ интеграловъ (5). Далѣе, чрезъ $e^{2\pi\lambda' i}$ и $e^{2\pi\lambda'' i}$ обозначимъ множители, которые принимаетъ функція $\varphi(u)$ послѣ обхода перемѣннымъ u точекъ α' и α'' въ положительномъ направленіи. Тогда формулы (6) и (7) напишутся слѣдующимъ образомъ:

$$[(\alpha' \alpha'' \overline{\alpha'} \overline{\alpha''})] = (1 - e^{2\pi\lambda'' i})\,[(\alpha')] - (1 - e^{2\pi\lambda' i})\,[(\alpha)]; \tag{6}$$

$$\begin{aligned}[(\alpha' \alpha'' \overline{\alpha'} \overline{\alpha''})] = (1 - e^{2\pi\lambda'' i}) \int\limits_{(K_{\alpha'})} \varphi\, du - (1 - e^{2\pi\lambda' i}) \int\limits_{(K_{\alpha''})} \varphi\, du + \\ + (1 - e^{2\pi\lambda' i})\,(1 - e^{2\pi\lambda'' i}) \int\limits_{p'}^{q'} \varphi\, du.\end{aligned} \tag{7}$$

Для большей ясности представимъ чертежъ:

Черт. 12.

Формула (7) обнаруживаетъ, что интегралъ $[(\alpha' \alpha'' \overline{\alpha'} \overline{\alpha''})]$ не зависитъ отъ начала c; такъ что консервативность этого интеграла будетъ сохраняться, если c станетъ перемѣщаться въ плоскости перемѣннаго u, не встрѣчая особыхъ точекъ $\varphi(u)$. При этомъ надо принимать во вниманіе тѣ указанія относительно значенія функціи $\varphi(u)$ для новаго начала, которыя были даны въ § 1 главы II.

Разсужденіями, одинаковыми съ тѣми, которыя представлены въ § 2 предыдущей главы, убѣждаемся, что существуетъ система n основныхъ интеграловъ, и за таковые можно принять, напр., одну изъ слѣдующихъ группъ:

$$\begin{array}{l}
[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})],\ \cdots,\ [(a_1\, a_k\, \overline{a_1}\, \overline{a_k})],\ [(a_1\, x_1\, \overline{a_1}\, \overline{x_1})],\ \cdots,\ [(a_1\, x_m\, \overline{a_1}\, \overline{x_m})];\\
[(a_2\, a_1\, \overline{a_2}\, \overline{a_1})],\ \cdots,\ [(a_2\, a_k\, \overline{a_2}\, \overline{a_k})],\ [(a_2\, x_1\, \overline{a_2}\, \overline{x_1})],\ \cdots,\ [(a_2\, x_m\, \overline{a_2}\, \overline{x_m})];\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
[(x_m\, a_1\, \overline{x_m}\, \overline{a_1})],\ \cdots,\ [(x_m\, a_k\, \overline{x_m}\, \overline{a_k})],\ [(x_m\, x_1\, \overline{x_m}\, \overline{x_1})],\ \cdots,\ [(x_m\, x_{m-1}\, \overline{x_m}\, \overline{x_{m-1}})].
\end{array} \tag{8}$$

Само собою разумѣется, что, кромѣ (8), возможны еще и другія основныя системы.

Если показатели $b_1, b_2, \cdots, b_k, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ удовлетворяютъ условіямъ:

$$R(b_1) > 0,\ R(b_2) > 0,\ \cdots,\ R(\lambda_1) > 0,\ \cdots,\ R(\lambda_m) > 0; \tag{9}$$

$$R(b_1)+R(b_2)+\cdots+R(\lambda_m) < n, \tag{10}$$

то имѣютъ мѣсто интегралы:

$$z_1 = \int_{\alpha'}^{\alpha''} \varphi(u)\, du, \tag{11}$$

которыми, для случая $k=2$ и $m=2$, занимались нѣкоторые выдающіеся математики, какъ, напр., Apell[1]) и É. Picard[2]).

Примѣняя къ интегралу (11) формулы (24) и (28) главы II, можемъ написать:

---

[1]) Journal de Mathématiques, 1881.

[2]) Annales de l'École Normale, 1881.

Annales de l'École Normale, 1885, p. 357—384.

$$[(\alpha' \alpha'' \overline{\alpha'} \overline{\alpha''})] = (1-e^{2\pi\lambda' i})(1-e^{2\pi\lambda'' i}) \int\limits_{\alpha''}^{\alpha'} \varphi\, du; \tag{12}$$

$$[(\alpha' \infty \overline{\alpha'} \overline{\infty})] = (1-e^{2\pi\lambda' i})(1-e^{2k'\pi i}) \int\limits_{\infty}^{\alpha'} \varphi\, du. \tag{13}$$

При этомъ принято:

$$-k' = \sum_{q=1}^{q=k} b_q + \sum_{q=1}^{q=m} \lambda_q. \tag{14}$$

Исключительные случаи, когда одинъ или нѣсколько изъ количествъ $b_1, b_2, \cdots, b_k, \lambda_1, \cdots, \lambda_m$, а равно какъ и сумма ихъ обращается въ цѣлое число или нуль, изслѣдуются буквально такъ, какъ это выполнено въ § 4 предыдущей главы. Не желая повторять старое, мы на этомъ останавливаться не станемъ.

§ 2.

Въ предыдущемъ параграфѣ мы предполагали $x_1, x_2, \cdots, x_m$ неподвижными точками въ плоскости перемѣннаго u. Допустимъ же теперь, что $x_1, x_2, \cdots, x_m$ перемѣнныя и изслѣдуемъ измѣняемость интеграловъ какой-либо одной основной системы, напр., первой (8) въ зависимости отъ непрерывнаго перемѣщенія $x_1, x_2, \cdots, x_m$ въ плоскости перемѣннаго u. Для этой цѣли примѣнимъ методъ П. А. Некрасова, который выясненъ въ предшествующей главѣ. Представимъ, что чрезъ точки $a_1, a_2, \cdots, a_k, x_1, x_2, \cdots, x_m$ проходятъ оси круглыхъ цилиндрическихъ стержней перпендикулярно къ плоскости u. Размѣры поперечныхъ сѣченій этихъ стержней настолько малы, что каждый изъ нихъ прикрываетъ лишь одну изъ этихъ особыхъ точекъ. Какъ и въ § 5 главы II, такъ и тутъ пути интеграціи, выходящіе изъ общаго начала c и огибающіе стержни $a_1, a_2, \cdots, a_k, x_1, x_2, \cdots, x_m$, мы будемъ представлять въ видѣ гибкихъ, удобоподвижныхъ, растяжимыхъ и сжимаемыхъ нитей.

При такомъ построеніи, перемѣнныя $x_1, x_2, \cdots, x_m$ способны описывать лишь такіе пути въ плоскости u, при которыхъ они не могутъ ни совпадать другъ съ другомъ, ни вступать на путь интеграціи. Посмотримъ, какъ будетъ измѣняться интегралъ (1) при этихъ условіяхъ, если перемѣнныя $x_1, x_2, \cdots, x_m$ станутъ непрерывно перемѣщаться въ плоскости u.

Пусть перемѣнныя $x_1, x_2, \cdots, x_m$ первоначально имѣютъ соотвѣтственно значенія: $x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{m0}$. Допустимъ, что $x_{11}, x_{12}, x_{13}, \cdots$ суть послѣдовательныя и смежно прилегающія другъ къ другу точки пути, описываемаго перемѣннымъ x_1; далѣе, $x_{20}, x_{21}, x_{22}, \cdots$ таковыя же точки пути, описываемаго x_2 и т. д.; наконецъ, $x_{m0}, x_{m1}, x_{m2}, \cdots$ суть послѣдовательныя и смежно примыкающія другъ къ другу точки линіи, пробѣгаемой перемѣннымъ x_m. Значитъ, подъ $x_{1s}, x_{2s}, \cdots, x_{ms}$ разумѣемъ совмѣстныя значенія перемѣнныхъ $x_1, x_2, \cdots, x_m$ на соотвѣтственныхъ путяхъ. Условимся $(x_{1s}\, x_{2s} \cdots x_{ms})$ называть точкой разсматриваемой функціи.

Теперь допустимъ, что наша система стержней $x_1, x_2, \cdots, x_m$ совершила какое-либо произвольное движеніе. Сталкиваясь же со стержнями $a_1, a_2, \cdots, a_k$, перемѣщающіеся стержни отбрасываются этими послѣдними. Благодаря особенностямъ путей интеграціи, о которыхъ была рѣчь выше, начало c на первыхъ порахъ, при такомъ движеніи стержней, можемъ предположить неподвижнымъ.

Докажемъ, что въ области любой точки $(x_{1s}\, x_{2s} \cdots x_{ms})$ функція (1) голоморфна. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ точку безконечно смежную къ $(x_{1s}\, x_{2s} \cdots x_{ms})$, именно: $(x_{1s}+\Delta x_1, x_{2s}+\Delta x_2, \cdots, x_{ms}+\Delta x_m)$. Тогда будемъ имѣть:

$$\Delta z_1 = \tag{15}$$

$$= \int\limits_L [\varphi(u, x_{1s}+\Delta x_1, \cdots, x_{ms}+\Delta x_m) - \varphi(u, x_{1s}, \cdots, x_{ms})]\, du.$$

Мы сохранили для обѣихъ точекъ одинъ и тотъ же путь интеграціи L, что, само собою разумѣется, позволительно:

Но имѣемъ:

$$\varphi(u, x_{1s}+\Delta x_1, \cdots, x_{ms}+\Delta x_m) - \varphi(u, x_{1s}, x_{2s}, \cdots, x_{ms}) =$$

$$= \Delta x_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_{1s}} + \Delta x_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_{2s}} + \cdots + \Delta x_m \frac{\partial\varphi}{\partial x_{ms}} +$$

$$+ \frac{1}{1.2}\left[\Delta x_1^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_{1s}^2} + \Delta x_2^2 \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_{2s}^2} + \cdots + \Delta x_m^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_{ms}^2} + \right. \tag{16}$$

$$\left. + 2\Delta x_1 \Delta x_2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_{1s}\partial x_{2s}} + \cdots\right] + \cdots.$$

. . . .

Внеся выраженіе (16) въ (15), получимъ:

$$\Delta z_1 =$$

$$= -(\lambda_1 - 1)\,\Delta x_1 \int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-x_{1s})^{\lambda_1-2} \cdots (u-x_{ms})^{\lambda_m-1}\, du -$$

$$-(\lambda_2 - 1)\,\Delta x_2 \int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-x_{1s})^{\lambda_1-1} (u-x_{2s})^{\lambda_2-2} \cdots$$

$$\cdots (u-x_{ms})^{\lambda_m-1}\, du -$$

. . . .

. . . .

$$-(\lambda_m - 1)\,\Delta x_m \int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-x_{1s})^{\lambda_1-1} \cdots (u-x_{ms})^{\lambda_m-2}\, du +$$

$$+ \frac{1}{1.2} \Big[\Delta x_1^2 (\lambda_1 - 1)(\lambda_1 - 2) \int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-x_{1s})^{\lambda_1-3} \cdots$$

$$\cdots (u-x_{ms})^{\lambda_m-1}\, du + \cdots \Big] + \cdots \tag{17}$$

. . . .

. . . .

Формула (17) обнаруживаетъ, что въ точкѣ $(x_{1s}\; x_{2s} \cdots x_{ms})$ функція z_1 непрерывна.

Изъ формулы (17) прямо находимъ:

$$dz_1 =$$

$$= -(\lambda_1 - 1)\, dx_1 \int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-x_{1s})^{\lambda_1-2} \cdots (u-x_{ms})^{\lambda_m-1}\, du -$$

$$-(\lambda_2 - 1)\, dx_2 \int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-x_{1s})^{\lambda_1-1} (u-x_{2s})^{\lambda_2-2} \cdots du -$$

. . . . (18)

. . . .

$$-(\lambda_m - 1)\, dx_m \int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-x_{1s})^{\lambda_1-1} \cdots (u-x_{ms})^{\lambda_m-2}\, du.$$

Отсюда находимъ:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_{1s}} = -(\lambda_1 - 1)\int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}(u-x_{1s})^{\lambda_1-2}\cdots(u-x_{ms})^{\lambda_m-1}\,du;$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_{2s}} = -(\lambda_2 - 1)\int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}(u-x_{1s})^{\lambda_1-1}(u-x_{2s})^{\lambda_2-2}\cdots du;$$

(19) . . . .

. . . .

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_{ms}} = -(\lambda_m - 1)\int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}(u-x_{1s})^{\lambda_1-1}\cdots(u-x_{ms})^{\lambda_m-2}\,du.$$

Такимъ образомъ для точки $(x_{1s}\; x_{2s} \cdots x_{ms})$ существуютъ первыя частныя производныя по $x_1, x_2, \cdots, x_m$.

Далѣе, вполнѣ очевидно, что для разсматриваемой точки z_1 представляетъ функцію конечную и однозначную. Все это вмѣстѣ показываетъ, что $(x_{1s}\; x_{2s} \cdots x_{ms})$ оказывается простою точкой функціи z_1.

Мы исключили изъ своего изслѣдованія случай перемѣщенія начала c. Но, въ виду той истины, что при неподвижности $x_1, x_2, \cdots, x_m$, отъ перемѣщенія c значеніе интеграла (1) не мѣняется (при соблюденіи извѣстныхъ условій), наши предшествующіе выводы остаются въ силѣ, если и начало c приходитъ въ движеніе.

Нашъ анализъ приводитъ насъ къ слѣдующему выводу: всякая система $(x_1\; x_2\; x_3 \cdots x_m)$, гдѣ количества $x_1, x_2, \cdots, x_m$ различны между собою и не совпадаютъ съ $a_1, a_2, \cdots, a_k$ и ∞, служитъ простою точкою функціи (1). Значитъ, особыми точками интеграла (1) могутъ быть только такія совокупности $(x_1\; x_2 \cdots x_m)$, гдѣ между количествами $x_1, x_2, \cdots, x_m$ есть равныя или совпадающія съ $a_1, a_2, \cdots, a_k$ и ∞. На разсмотрѣніи этого послѣдняго случая мы теперь и остановимся. Для лучшаго уясненія дѣла интегралы разсматриваемой основной системы (первой изъ группъ (8)) раздѣлимъ на двѣ категоріи. Къ первой отнесемъ интегралы $[(a_1\; a_2\; \overline{a_1}\; \overline{a_2})]$, $\cdots$, $[(a_1\; a_k\; \overline{a_1}\; \overline{a_k})]$, а ко второй: $[(a_1\; x_1\; \overline{a_1}\; \overline{x_1})]$, $[(a_1\; x_2\; \overline{a_1}\; \overline{x_2})]$, $\cdots$, $[(a_1\; x_m\; \overline{a_1}\; \overline{x_m})]$. Такъ какъ изслѣдованіе интеграловъ каждой изъ этихъ категорій, очевидно, должно производиться по одному и тому же пріему, то для насъ достаточно объизслѣдовать по одному интегралу каждой изъ этихъ двухъ группъ, напр.: $[(a_1\; a_2\; \overline{a_1}\; \overline{a_2})]$ и $[(a_1\; x_1\; \overline{a_1}\; \overline{x_1})]$.

Остановимся прежде всего на интегралѣ $[(a_1\; a_2\; \overline{a_1}\; \overline{a_2})]$. Пусть $x_2, x_3, \cdots, x_m$ представляютъ $m - 1$ неподвижныхъ различныхъ точекъ плоскости u. Въ виду той методы, которой мы придерживаемся, онѣ не могутъ совпадать съ $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ и a_n. Тогда мы будемъ имѣть дѣло съ интеграломъ $[(a_1\ a_2\ \overline{a_1}\ \overline{a_2})]$, который былъ изученъ нами въ главѣ II. Для него $a_3, a_4, \cdots, a_k, x_2, x_3, \cdots, x_m$ служатъ простыми точками плоскости u. Что же касается до a_1, a_2 и ∞, то онѣ оказываются единственными особыми точками разсматриваемой функціи.

Если теперь x_1 совершитъ обходъ въ положительномъ направленіи около a_1, то интегралъ $[(a_1\ a_2\ \overline{a_1}\ \overline{a_2})]$ измѣнится по формулѣ (50) главы II. Значитъ, будемъ имѣть:

$$[(A\ a_2\ \overline{A}\ \overline{a_2})]_1 =$$

$$= [(a_1\ a_2\ \overline{a_1}\ \overline{a_2})]_1 - (1 - e^{2\pi b_1 i})\ [(a_1\ x_1\ \overline{a_1}\ \overline{x_1})]_1. \tag{20}$$

Если же x_1 обойдетъ точку a_2 въ положительномъ направленіи, то интегралъ $[(a_1\ a_2\ \overline{a_1}\ \overline{a_2})]_1$ измѣнится по формулѣ (54) той же главы:

$$[(a_1\ A_1\ \overline{a_1}\ \overline{A_1})]_1 =$$

$$= e^{2\pi\lambda_1 i}\ [(a_1\ a_2\ \overline{a_1}\ \overline{a_2})]_1 + (1 - e^{2\pi b_1 i})\ [(a_1\ x_1\ a_1\ \overline{x_1})]_1. \tag{21}$$

Далѣе, $[(a_1\ a_2\ \overline{a_1}\ \overline{a_2})]_1$ приметъ значеніе $e^{2\pi\lambda_1 i}\ [(a_1\ a_2\ \overline{a_1}\ \overline{a_2})]_1$, если x_1 обойдетъ въ положительномъ направленіи одновременно обѣ точки a_1 и a_2.

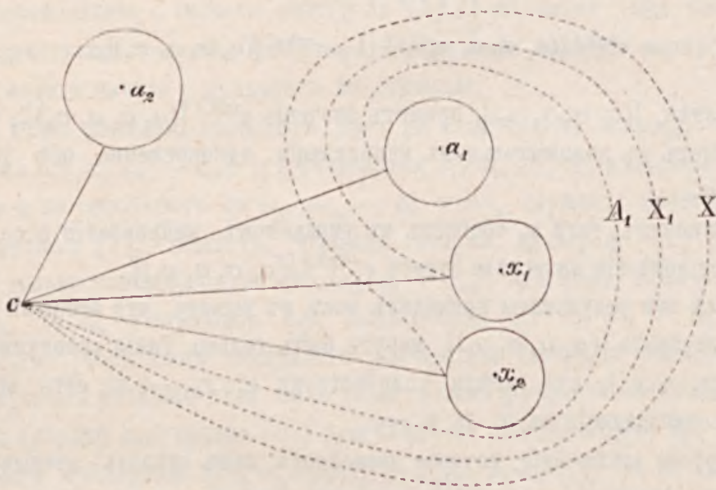
Наконецъ, если x_1 обогнетъ въ указанномъ направленіи $u = \infty$, то новое значеніе интеграла будетъ $e^{-2\pi\lambda_1 i}\ [(a_1\ a_2\ \overline{a_1}\ \overline{a_2})]_1$.

Всѣ эти результаты приводятъ насъ къ выводу, что особыми точками интеграла $[(a_1\ a_2\ \overline{a_1}\ \overline{a_2})]$ могутъ быть только такія совокупности $(x_1\ x_2\ x_3 \cdots x_m)$, гдѣ между количествами $x_1, x_2, \cdots, x_m$ есть обязательно совпадающія съ a_1, a_2 и ∞.

Другое заключеніе, которое позволяетъ намъ сдѣлать предыдущій анализъ, слѣдующее: если одно изъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \cdots, x_m$ совершаетъ обходъ въ положительномъ (или отрицательномъ) направленіи около точекъ a_1 и a_2 въ отдѣльности, между тѣмъ какъ остальныя перемѣнныя или вовсе не мѣняютъ своихъ значеній, или же пробѣгаютъ въ плоскости u пути, не огибающіе вполнѣ точекъ a_1, a_2 и ∞, то разсматриваемый интегралъ мѣняетъ свое аналитическое выраженіе по формуламъ (20) и (21) [или имъ аналогичнымъ]. Если-же какое-либо изъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \cdots, x_m$ обойдетъ въ положительномъ направленіи одновременно точки a_1 и a_2 или же въ отрицательномъ направленіи $u = \infty$, между тѣмъ какъ прочія перемѣнныя въ своемъ движеніи подчинены предыдущимъ условіямъ, то интегралъ приметъ только множитель $e^{2\pi\lambda_k i}$; при совершеніи же обхода въ противоположномъ направленіи, разсматриваемый интегралъ приметъ факторъ $e^{-2\pi\lambda_k i}$. Полученные выводы примѣняются и къ прочимъ интеграламъ той же категоріи, къ которой мы относимъ $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$.

Въ предыдущемъ своемъ анализѣ мы предполагали, что только одно изъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \cdots, x_m$ совершаетъ обходы около особыхъ точекъ a_1, a_2 и ∞. Но допустимъ, что x_1 и x_2 способны выполнять подобные обходы. Посмотримъ, прежде всего, къ чему приведетъ ихъ одновременный обходъ около a_1. Въ концѣ движенія положеніе контуровъ (a_1), (x_1) и (x_2) окажется такимъ, какъ указано на чертежѣ:

Черт. 13.



Здѣсь A_1, X_1 и X_2 соотвѣтственно представляютъ въ концѣ движенія положенія контуровъ (a_1), (x_1) и (x_2). Новое аналитическое значеніе интеграла $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$ будетъ $[(A_1\, a_2\, \overline{A_1}\, \overline{a_2})]$, которое легко выразить чрезъ $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$, $[(a_1\, x_1\, \overline{a_1}\, \overline{x_1})]$ и $[(a_1\, x_2\, \overline{a_1}\, \overline{x_2})]$. Въ самомъ дѣлѣ, путь A_1 эквивалентенъ слѣдующему: $(x_2\, x_1\, a_1\, \overline{x_1}\, \overline{x_2})$. А посему имѣемъ:

$$[(A_1\, a_2\, \overline{A}_1\, \overline{a}_2)] =$$

$$= (1-e^{2\pi b_2 i})\,[(A_1)] - (1-e^{2\pi b_1 i})\,[(a_2)]. \tag{22}$$

Далѣе, имѣемъ:

$$[(A_1)] = (1-e^{2\pi b_1 i})\,[(x_2)] + e^{2\pi\lambda_2 i}(1-e^{2\pi b_1 i})\,[(x_1)] + e^{2\pi(\lambda_1+\lambda_2)i}\,[(a)]. \tag{23}$$

Внеся выраженіе (23) въ формулу (22), найдемъ:

$$[(A_1\, a_2\, \overline{A}_1\, \overline{a}_2)] =$$

$$= (1-e^{2\pi b_2 i})\left\{(1-e^{2\pi b_1 i})\,[(x_2)] + e^{2\pi\lambda_2 i}(1-e^{2\pi b_1 i})\,[(x_1)] + e^{2\pi(\lambda_1+\lambda_2)i}\,[(a_1)]\right\} -$$

$$-(1-e^{2\pi b_1 i})\,[(a_2)]. \tag{24}$$

Пользуясь формулами:

$$[(a_2)] = \frac{(1-e^{2\pi b_2 i})\,[(a_1)] - [(a_1\, a_2\, \overline{a}_1\, \overline{a}_2)]}{1-e^{2\pi b_1 i}};$$

$$[(x_1)] = \frac{(1-e^{2\pi\lambda_1 i})\,[(a_1)] - [(a_1\, x_1\, \overline{a}_1\, \overline{x}_1)]}{1-e^{2\pi b_1 i}}; \tag{25}$$

$$[(x_2)] = \frac{(1-e^{2\pi\lambda_2 i})\,[(a_1)] - [(a_1\, x_2\, \overline{a}_1\, \overline{x}_2)]}{1-e^{2\pi b_1 i}},$$

которыя для разсматриваемаго случая даетъ формула (9′) главы II, получимъ:

$$[(A_1\, a_2\, \overline{A}_1\, \overline{a}_2)] = \tag{26}$$

$$= [(a_1\, a_2\, \overline{a}_1\, \overline{a}_2)] - e^{2\pi\lambda_2 i}(1-e^{2\pi b_2 i})\,[(a_1\, x_1\, \overline{a}_1\, \overline{x}_1)] - (1-e^{2\pi b_2 i})\,[(a_1\, x_2\, \overline{a}_1\, \overline{x}_2)].$$

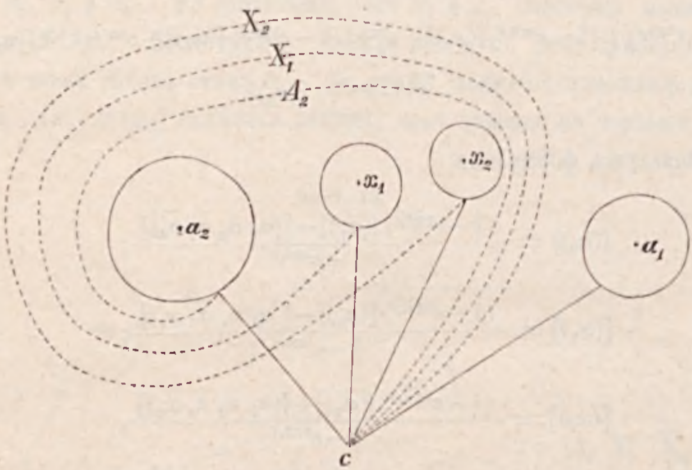
Ясно, что, если k перемѣнныхъ, напр.: $x_1, x_2, \cdots, x_k$ одновременно совершатъ обходъ въ положительномъ направленіи около точки a_1 (предполагается, что пути, описываемые перемѣнными, оставляютъ внѣ себя точку a_2), то новое значеніе интеграла $[(a_1\, a_2\, \overline{a}_1\, \overline{a}_2)]$ представится линейною и однородною формулой съ постоянными коэффиціентами отъ $[(a_1\, a_2\, \overline{a}_1\, \overline{a}_2)]$, $[(a_1\, x_1\, \overline{a}_1\, \overline{x}_1)]$, $\cdots$, $[(a_1\, x_k\, \overline{a}_1\, \overline{x}_k)]$. Къ аналогичнымъ выводамъ мы пришли бы, если бы предположили, что обходъ совершается въ отрицательномъ направленіи.

Допустимъ, что x_1 и x_2 обогнули одновременно a_2 въ положительномъ направленіи. Тогда новое значеніе интеграла легко напишется по формулѣ (26), именно:

$$(27)\qquad [(a_1\, A_2\, \overline{a}_1\, \overline{A}_2)] =$$
$$= [(a_1\, a_2\, \overline{a}_1\, \overline{a}_2)] + e^{2\pi\lambda_2 i}\,(1-e^{2\pi b_1 i})\,[(a_2\, x_1\, \overline{a}_2\, \overline{x}_1)] + (1-e^{2\pi b_1 i})\,[(a_2\, x_2\, \overline{a}_2\, \overline{x}_2)].$$

Расположеніе путей до обхода и послѣ него слѣдующее:

Черт. 14.



A_2, X_1 и X_2 суть новыя положенія контуровъ (a_2), (x_1) и (x_2); при чемъ A_2 эквивалентенъ $(x_2\, x_1\, a_2\, \overline{x}_1\, \overline{x}_2)$. При помощи формулъ:

$$[(a_2\, x_1\, \overline{a}_2\, \overline{x}_1)] = \frac{(1-e^{2\pi b_2 i})\,[(a_1\, x_1\, \overline{a}_1\, \overline{x}_1)] - (1-e^{2\pi\lambda_1 i})\,[(a_1\, a_2\, \overline{a}_1\, \overline{a}_2)]}{1-e^{2\pi b_1 i}};$$
$$(28)$$
$$[(a_2\, x_2\, \overline{a}_2\, \overline{x}_2)] = \frac{(1-e^{2\pi b_2 i})\,[(a_1\, x_2\, \overline{a}_1\, \overline{x}_2)] - (1-e^{2\pi\lambda_1 i})\,[(a_1\, a_2\, \overline{a}_1\, \overline{a}_2)]}{1-e^{2\pi b_1 i}},$$

которыя даетъ формула (11) главы II, соотношеніе (27) представимъ въ формѣ:

$$[(a_1\, A_2\, \overline{a}_1\, \overline{A}_2)] =$$
$$= e^{2\pi(\lambda_1+\lambda_2)i}\,[(a_1\, a_2\, \overline{a}_1\, \overline{a}_2)] + e^{2\pi\lambda_2 i}(1-e^{2\pi b_1 i})\,[(a_1\, x_1\, \overline{a}_1\, \overline{x}_1)] +$$
$$(29)\qquad + (1-e^{2\pi b_1 i})\,[(a_1\, x_2\, \overline{a}_1\, \overline{x}_2)].$$

Если бы k перемѣнныхъ, напр.: $x_1, x_2, \cdots, x_k$ совершили обходъ въ положительномъ направленіи около a_2, то новое аналитическое значеніе $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$ выразилось бы линейною и однородною формулой съ постоянными коэффиціентами отъ интеграловъ $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$, $[(a_1\, x_1\, \overline{a_1}\, \overline{x_1})], \cdots, [(a_1\, x_k\, \overline{a_1}\, \overline{x_k})]$.

Къ подобнымъ выводамъ мы пришли бы, допустивъ, что обходы производятся въ отрицательномъ направленіи.

Пусть теперь x_1 и x_2 совершатъ одновременно обходъ въ положительномъ направленіи около точекъ a_1 и a_2. Тогда путь интеграціи останется безъ перемѣны; но начальное значеніе функціи $\varphi(u)$ приметъ множитель $e^{2\pi(\lambda_1+\lambda_2)i}$. А потому новое значеніе интеграла будетъ $e^{2\pi(\lambda_1+\lambda_2)i}\,[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$.

Если же $x_1, x_2, \cdots, x_k$ одновременно опишутъ замкнутые пути около a_1 и a_2, то новое значеніе $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$ будетъ $e^{2\pi(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k)i}\,[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$. Наконецъ, предположимъ, что тѣ же k перемѣнныхъ совершатъ по обходу около $u=\infty$. Тогда $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$ преобразуется въ $e^{-2\pi(\lambda_1+\cdots+\lambda_k)}\,[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$. Чтобы рѣшить вопросъ, какое аналитическое значеніе приметъ $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$ послѣ всевозможныхъ обходовъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m$ около a_1, a_2 и ∞, надо предварительно объизслѣдовать интегралъ $[(a_1\, x_1\, \overline{a_1}\, \overline{x_1})]$.

§ 3.

Особыми точками интеграла $[(a_1\, x_1\, \overline{a_1}\, \overline{x_1})]$ могутъ быть только такія системы $(x_1\, x_2 \cdots x_m)$, гдѣ между количествами $x_1, x_2, \cdots, x_m$ встрѣчаются равныя или совпадающія съ $a_1, a_2, \cdots, a_n$ и ∞. Остановимся на изысканіи этихъ особыхъ точекъ.

Пусть $x_2, x_3, \cdots, x_m$ будутъ нѣкоторыми неподвижными точками конечной плоскости u. Въ виду метода, котораго мы придерживаемся, эти послѣднія не совпадаютъ съ $a_1, a_2, \cdots, a_k$ и различны другъ отъ друга. При такомъ условіи, будемъ интегралъ $[(a_1\, x_1\, \overline{a_1}\, \overline{x_1})]$ обозначать: $[(a_1\, x_1\, \overline{a_1}\, \overline{x_1})]_1$. Возьмемъ любую изъ точекъ $a_2, a_3, \cdots, a_n$, напр.: a_2, и допустимъ, что перемѣнное x_1 совершило обходъ въ положительномъ направленіи около этой точки. Тогда интегралъ $[(a_1\, x_1\, \overline{a_1}\, \overline{x_1})]_1$ приметъ новое свое аналитическое значеніе $[(a_1\, X\, \overline{a_1}\, \overline{X})]_1$, которое по формулѣ (57′) главы II напишется такъ:

$$[(a_1\, X\, \overline{a}_1\, \overline{X})]_1 =$$

$$= (1 - e^{2\pi\lambda_1 i})\, [(a_1\, a_2\, \overline{a}_1\, \overline{a}_2)]_1 + e^{2\pi b_2 i}\, [(a_1\, x_1\, \overline{a}_1\, \overline{x}_1)]_1. \tag{30}$$

Этотъ результатъ позволяетъ намъ сдѣлать заключеніе, что каждая изъ системъ $(x_1\, x_2 \cdots x_m)$, гдѣ x_1 совпадаетъ съ однимъ изъ количествъ $a_2, a_3, \cdots, a_k$, представляетъ особую точку функціи $[(a_1\, x_1\, \overline{a}_1\, \overline{x}_1)]$.

Другой выводъ, который мы также въ правѣ сдѣлать, слѣдующій: если перемѣнное x_1 совершаетъ обходъ въ положительномъ направленіи около a_2 или любой точки: $a_3, a_4, \cdots, a_k$, между тѣмъ какъ остальныя перемѣнныя описываютъ какіе-либо пути, не огибающіе вполнѣ точекъ $a_1, a_2, \cdots, a_k$ и ∞ и самихъ себя, то новыя значенія интеграла $[(a_1\, x_1\, \overline{a}_1\, \overline{x}_1)]$ выражаются по формулѣ вида (30).

Если теперь, при вышеуказанныхъ перемѣщеніяхъ перемѣнныхъ $x_2, x_3, \cdots, x_m$, стержень x_1 совершитъ обходъ въ положительномъ направленіи около нѣсколькихъ изъ точекъ $a_2, a_3, \cdots, a_k$, напр.: $a_2, a_3, \cdots, q_{q+1}$, гдѣ $q+1 \leqq k$, то новое значеніе интеграла $[(a_1\, x_1\, a_1\, x_1)]$ представится линейной и однородной формулою съ постоянными коэффиціентами отъ интеграловъ $[(a_1\, a_3\, a_1\, \overline{a}_3)], \cdots, [(a_1\, a_{q+1}\, \overline{a}_1\, \overline{a}_{q+1})]$ и $[(a_1\, x_1\, \overline{a}_1\, \overline{x}_1)]$.

Само собою разумѣется, что къ аналогичнымъ заключеніямъ мы пришли бы, предположивъ, что обходы производятся въ отрицательномъ направленіи.

Предположимъ теперь, что стержень x_1 совершилъ обходъ въ положительномъ направленіи около одной изъ точекъ: $x_2, x_3, \cdots, x_m$, напр., около x_2. Для большей ясности пусть x_2 будетъ неподвижной точкою. Тогда, очевидно, новое значеніе разсматриваемаго интеграла напишется по формулѣ (30):

$$[(a_1\, X_2\, \overline{a}_1\, \overline{X}_2)]_1 =$$

$$= (1 - e^{2\pi\lambda_1 i})\, [(a_1\, x_2\, \overline{a}_1\, \overline{x}_2)]_1 + e^{2\pi\lambda_2 i}\, [(a_1\, x_1\, \overline{a}_1\, \overline{x}_1)]_1. \tag{31}$$

Этотъ результатъ приводитъ насъ къ заключенію, что совокупности $(x_1\, x_2\, x_3 \cdots x_m)$, гдѣ x_1 совпадаетъ съ любымъ количествомъ: $x_2, x_3, \cdots, x_m$, обязательно являются особыми точками функціи $[(a_1\, x_1\, \overline{a}_1\, \overline{x}_1)]$.

Далѣе, если перемѣнное x_1 совершитъ около одной изъ точекъ $x_2, x_3, \cdots, x_m$ обходъ въ положительномъ направленіи, между тѣмъ какъ эти послѣднія перемѣнныя или неподвижны, или же совершаютъ движенія въ плоскости u, но только не по замкнутымъ путямъ около особыхъ точекъ $\varphi(u)$, то новое аналитическое значеніе интеграла $[(a_1\, x_1\, \overline{a_1}\, \overline{x_1})]$ напишется по формулѣ (31).

Вообще, если x_1 совершитъ обходъ въ положительномъ направленіи около точекъ: $a_2, a_3, \cdots, a_q$ и $x_2, x_3, \cdots, x_p$, между тѣмъ какъ перемѣнныя $x_2, \cdots, x_m$ въ своихъ перемѣщеніяхъ подчиняются предыдущимъ условіямъ, то новое аналитическое значеніе $[(a_1\, x_1\, \overline{a_1}\, \overline{x_1})]$ представляется линейной и однородной формулою съ постоянными коэффиціентами отъ интеграловъ: $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})], \cdots, [(a_1\, a_p\, \overline{a_1}\, \overline{a_p})]$ и $[(a_1\, x_1\, \overline{a_1}\, \overline{x_1})], \cdots, [(a_1\, x_p\, \overline{a_1}\, \overline{x_p})]$.

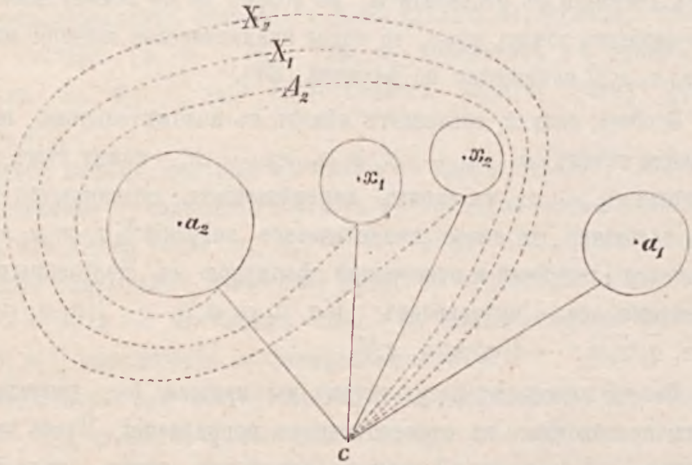
Къ аналогичнымъ результатамъ мы пришли бы, допустивъ, что обходы производятся въ отрицательномъ направленіи. Пусть теперь перемѣнное x_1 (стержень x_1) опишетъ замкнутую линію около a_1 въ положительномъ направленіи, между тѣмъ какъ остальныя перемѣнныя въ своемъ движеніи выполняютъ условія, о которыхъ говорилось выше. Очевидно, что тогда интегралъ $[(a_1\, x_1\, \overline{a_1}\, \overline{x_1})]$ приметъ множитель $e^{2\pi(\lambda_1+b_1)i}$. Въ случаѣ прохожденія перемѣннымъ x_1 того же замкнутаго пути въ отрицательномъ направленіи, этотъ интегралъ приметъ, ясное дѣло, множитель $e^{-2\pi(b_1+\lambda_1)i}$. Мы въ правѣ заключить, что всякая система $(x_1\, x_2 \cdots x_m)$, гдѣ любое изъ количествъ $x_1, x_2, \cdots, x_m$ совпадаетъ съ a_1, представляетъ обязательно особую точку функціи $[(a_1\, x_1\, \overline{a_1}\, \overline{x_1})]$.

Точно также совокупность $(x_1\, x_2 \cdots x_m)$, гдѣ $x_k = \infty$, представляетъ особую точку интересующей насъ функціи.

Указанныя точки представляютъ единственныя особыя точки интеграла $[(a_1\, x_1\, \overline{a_1}\, \overline{x_1})]$.

Мы до сихъ поръ предполагали, что только одна изъ перемѣнныхъ, а именно: x_1 совершаетъ обходы около точекъ: $a_1, a_2, \cdots, a_k, \infty, x_2, \cdots, x_m$. Допустимъ же теперь, что точки x_1 и x_2 совершили обходъ въ положительномъ направленіи около одной изъ точекъ: $a_2, a_3, \cdots, a_k, x_3, \cdots, x_m$, напр.: около a_2, и посмотримъ, какое аналитическое значеніе приметъ интегралъ $[(a_1\, x_1\, \overline{a_1}\, \overline{x_1})]$. Въ концѣ обхода старое и новое положеніе путей интеграціи представится такъ:

Черт. 15.



A_2, X_1, X_2 представляютъ соотвѣтственно контуры (a_1), (x_1) и (x_2) въ ихъ новыхъ положеніяхъ. Интегралъ $[(a_1\, x_1\, \bar{a}_1\, \bar{x}_1)]$ преобразуется въ $[(a_1\, X_1\, \bar{a}_1\, \bar{X}_1)]$, или, какъ легко сообразить изъ чертежа, въ $[(a_1\, x_2\, x_1\, a_2\, \bar{x}_1\, \bar{x}_2\, \bar{a}_1\, \bar{x}_2\, \bar{x}_1\, \bar{a}_2\, x_1\, x_2)]$. Раскрывая это выраженіе, находимъ:

$$[(a_1\, X_1\, \bar{a}_1\, \bar{X}_1)] = (1-e^{2\pi b_2 i})\,[(a_1)] - (1-e^{2\pi b_1 i})\,[(X_1)]. \tag{32}$$

Далѣе:

$$[(X_1)] = (1-e^{2\pi b_2 i})\,[(x_2)] + e^{2\pi\lambda_2 i}\,(1-e^{2\pi b_1 i})\,[(x_1)] + e^{2\pi(\lambda_1+\lambda_2)i}\,[(a_2)]. \tag{33}$$

Внеся выраженія для $[(x_2)]$, $[(x_1)]$ и $[(a_2)]$, данныя формулой (25), въ соотношеніе (33), а полученный результатъ для $[(X_1)]$ въ (32), будемъ имѣть:

$$[(a_1\, X_1\, \bar{a}_1\, \bar{X}_1)] =$$

$$\begin{aligned} &= e^{2\pi(\lambda_1+\lambda_2)i}\,[(a_1\, \bar{a}_2\, \bar{a}_1\, a_2)] + e^{2\pi\lambda_2 i}\,(1-e^{2\pi b_2 i})\,[(a_1\, x_1\, \bar{a}_1\, \bar{x}_1)] + \\ &\quad + (1-e^{2\pi b_1 i})\,[(a_1\, x_2\, \bar{a}_1\, \bar{x}_2)]. \end{aligned} \tag{34}$$

Замѣтимъ однако, что на аналитическое выраженіе $[(a_1\, x_1\, \overline{a}_1\, \overline{x}_1)]$ перемѣнное x_2 оказало свое вліяніе не обходомъ около a_2, а тѣмъ, что, какъ видно изъ чертежа, ему пришлось обойти точку x_1.

Легко также убѣдиться такимъ же путемъ, что, если перемѣнныя $x_1, x_2, \cdots, x_k$ обогнутъ въ какомъ-либо направленіи точку a_2, при чемъ всякая послѣдующая перемѣнная огибаетъ при своемъ движеніи предыдущую, то новое аналитическое выраженіе для $[(a_1\, x_1\, \overline{a}_1\, \overline{x}_1)]$ представится линейною и однородною формулой съ постоянными коэффиціентами отъ функцій: $[(a_1\, a_2\, \overline{a}_1\, \overline{a}_2)]$, $[(a_1\, x_1\, \overline{a}_1\, \overline{x}_1)]$, $\cdots$, $[(a_1\, x_k\, \overline{a}_1\, \overline{x}_k)]$.

Подобный же результатъ будетъ имѣть мѣсто, если въ числѣ этихъ неподвижныхъ особыхъ точекъ есть также a_1.

Мы предполагали, что обходы совершаются около одной изъ особыхъ конечныхъ точекъ $\varphi(u)$. Но тѣмъ же пріемомъ можемъ безъ труда убѣдиться въ справедливости слѣдующаго положенія: если перемѣнныя $x_1, x_2, \cdots, x_m$ перемѣщаются въ плоскости u по произвольнымъ путямъ, не встрѣчающимъ особыхъ точекъ функціи $\varphi(u)$ и пути интеграціи разсматриваемаго интеграла, то интегралъ $[(a_1\, x_1\, \overline{a}_1\, \overline{x}_1)]$ будетъ видоизмѣняться; при этомъ новыя его аналитическія значенія выражаются чрезъ основные интегралы линейными и однородными формулами съ постоянными коэффиціентами. То же самое надо сказать и относительно всякаго дозволеннаго интеграла.

§ 4.

Въ предыдущихъ двухъ параграфахъ мы дали общую картину измѣненія основныхъ интеграловъ [первой строки (8)] и, слѣдовательно, всякаго дозволеннаго интеграла въ зависимости отъ непрерывнаго измѣненія перемѣнныхъ $x_1, x_2, \cdots, x_m$. Теперь же мы остановимся на представленіи этихъ интеграловъ въ области ихъ особыхъ точекъ. При этомъ, обнаружится сходство этихъ разложеній съ таковыми же разложеніями гипергеометрическихъ интеграловъ, изученію которыхъ посвящена нами II-ая глава.

Мы ограничимся разложеніями особыхъ группъ интеграловъ, которые мы назовемъ главными, такъ какъ чрезъ эти послѣдніе прочіе дозволенные интегралы могутъ быть по извѣстнымъ пріемамъ представлены линейными и однородными формулами съ постоянными коэффиціентами.

Подъ главными интегралами разумѣемъ слѣдующія группы функцій:

$$[(a_1\, x_1\, \overline{a}_1\, \overline{x}_1)],\ [(a_1\, x_2\, \overline{a}_1\, \overline{x}_2)],\ \cdots,\ [(a_1\, x_m\, \overline{a}_1\, \overline{x}_m)],$$
$$[(a_2\, a_3\, \overline{a}_2\, \overline{a}_3)],\ \cdots,\ [(a_2\, \infty\, \overline{a}_2\, \overline{\infty})];$$

$$[(a_2\, x_1\, \overline{a}_2\, \overline{x}_1)],\ [(a_2\, x_2\, \overline{a}_2\, \overline{x}_2)],\ \cdots,\ [(a_2\, x_m\, \overline{a}_2\, \overline{x}_m)],$$
$$[(a_1\, a_3\, \overline{a}_1\, \overline{a}_3)],\ \cdots,\ [(a_1\, \infty\, \overline{a}_1\, \overline{\infty})];$$

. . . .

. . . .

$$[(a_k\, x_1\, \overline{a}_k\, \overline{x}_1)],\ [(a_k\, x_2\, \overline{a}_k\, \overline{x}_2)],\ \cdots,\ [(a_k\, x_m\, \overline{a}_k\, \overline{x}_m)],$$
$$[(a_1\, a_2\, \overline{a}_1\, \overline{a}_2)],\ \cdots,\ [(a_1\, \infty\, \overline{a}_1\, \overline{\infty})];$$

$$(35)\qquad [(x_1\, x_2\, \overline{x}_1\, \overline{x}_2)],\ [(x_1\, x_3\, \overline{x}_1\, \overline{x}_3)],\ \cdots,\ [(x_1\, x_m\, \overline{x}_1\, \overline{x}_m)],$$
$$[(a_1\, a_2\, \overline{a}_1\, \overline{a}_2)],\ \cdots,\ [(a_1\, \infty\, \overline{a}_1\, \overline{\infty})];$$

. . . .

. . . .

$$[(x_m\, x_1\, \overline{x}_m\, \overline{x}_1)],\ [(x_m\, x_2\, \overline{x}_m\, \overline{x}_2)],\ \cdots,\ [(x_m\, x_{m-1}\, \overline{x}_m\, \overline{x}_{m-1})],$$
$$[(a_1\, a_2\, \overline{a}_1\, \overline{a}_2)],\ \cdots,\ [(a_1\, \infty\, \overline{a}_1\, \overline{\infty})];$$

$$[(\infty\, x_1\, \overline{\infty}\, \overline{x}_1)],\ [(\infty\, x_2\, \overline{\infty}\, \overline{x}_2)],\ \cdots,\ [(\infty\, x_m\, \overline{\infty}\, \overline{x}_m)],$$
$$[(a_1\, a_2\, \overline{a}_1\, \overline{a}_2)],\ \cdots,\ [(a_1\, a_k\, \overline{a}_1\, \overline{a}_k)].$$

При этомъ будемъ говорить, что интегралы первой строки принадлежатъ къ особой точкѣ $(a_1\, a_1 \cdots a_1)$; интегралы второй строки къ точкѣ $(a_2\, a_2 \cdots a_2)$, и т. д.; наконецъ интегралы послѣдней строки принадлежатъ къ особой точкѣ $(\infty\, \infty\, \infty \cdots \infty)$.

Для того, чтобы получить искомыя разложенія, достаточно представить разложенія главныхъ интеграловъ для особыхъ точекъ $(a_1\, a_1 \cdots a_1)$, $(x_2\, x_2 \cdots x_2)$ и $(\infty\, \infty \cdots \infty)$, такъ какъ разложенія прочихъ главныхъ интеграловъ для ихъ точекъ легко получаются изъ этихъ послѣднихъ. Но и тутъ нѣтъ нужды выполнять разложенія всѣхъ интеграловъ (35) для этихъ трехъ точекъ, — достаточно будетъ представить эти разложенія для слѣдующихъ интеграловъ:

$[(a_1\, x_1\, a_1\, x_1)]$, $[(a_2\, a_3\, a_2\, a_3)]$ и $[(a_2\, \infty\, a_2\, \infty)]$ для точки $(a_1\, a_1 \cdots a_1)$;

$[(x_2\, x_1\, x_2\, x_1)]$, $[(a_1\, a_2\, a_1\, a_2)]$ и $[(a_1\, \infty\, a_1 \infty)]$ для точки $(x_2\, x_2 \cdots x_2)$;

Наконецъ, $[(\infty\, x_1\, \infty\, x_1)]$ и $[(a_1\, a_2\, a_1\, a_2)]$ для $(\infty\, \infty \cdots \infty)$.

Остановимся прежде всего на интегралѣ $[(a_1\, x_1\, \overline{a_1}\, \overline{x_1})]$. Преобразовавъ его къ новому перемѣнному интеграціи v при помощи подстановки:

$$u = a_1 + (x_1 - a_1)\, v, \tag{36}$$

будемъ имѣть:

$$[(a_1\, x_1\, a_1\, x_1)] = \int\limits_{c}^{(a_1\, x_1\, \overline{a_1}\, \overline{x_1})} (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-x_1)^{\lambda_1-1} \cdots (u-x_m)^{\lambda_m-1} du =$$

$$= A (x-a_1)^{b_1+\lambda_1-1} (x_2-a_1)^{\lambda_2-1} \cdots (x_m-a_1)^{\lambda_m-1} \int\limits_{c_1}^{(1 0 \bar{1} \bar{0})} v^{b_1-1} (1-v)^{\lambda_1-1} \left[1 - \right.$$

$$\left. - \frac{x_1-a_1}{a_2-a_1} v\right]^{b_2-1} \cdots \cdots \left[1 - \frac{x_1-a_1}{x_m-a_1} v\right]^{\lambda_m-1} dv, \tag{37}$$

гдѣ принято:

$$A = (-1)^{b_2+b_3+\cdots+b_k+\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m-n+1} (a_2-a_1)^{b_2-1} (a_3-a_1)^{b_3-1} \cdots$$

$$\cdots (a_k-a_1)^{b_k-1}; \tag{38}$$

$$c_1 = \frac{c-a_1}{x-a_1}. \tag{39}$$

Пусть выполняются условія:

$$\left|\frac{x_1-a_1}{a_2-a_1} v\right| < 1, \quad \left|\frac{x_1-a_1}{a_3-a_1} v\right| < 1, \ \cdots, \quad \left|\frac{x_1-a_1}{x_m-a_1} v\right| < 1. \tag{40}$$

Тогда можемъ написать:

$$\left(1 - \frac{x_1-a_1}{a_2-a_1} v\right)^{b_2-1} \left(1 - \frac{x_1-a_1}{a_3-a_1} v\right)^{b_3-1} \cdots\cdots \left(1 - \frac{x_1-a_1}{x_m-a_1} v\right)^{\lambda_m-1} =$$

$$= 1 - C_1 (x_1-a_1) v + C_2 (x_1-a_1)^2 v^2 - \cdots + (-1)^k C_k (x_1-a_1)^k v^k + \cdots. \tag{41}$$

Здѣсь C_l имѣетъ такой составъ:

$$C_l =$$

$$= \frac{[b_2-1]_l}{(a_2-a_1)^l} + \frac{[b_3-1]_l}{(a_3-a_1)^l} + \cdots + \frac{[\lambda_m-1]_l}{(x_m-a_1)^l} + \tag{42}$$

$$+\frac{[b_2-1]_{l-1}\,[b_3-1]_1}{(a_2-a_1)^{l-1}\,(a_3-a_1)}+\cdots+\frac{[\lambda_{m-1}-1]_{l-1}\,[\lambda_m-1]_1}{(x_{m-1}-x_1)^{l-1}\,(x_m-x_1)}+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{[b_2-1]_1\,[b_3-1]_1\cdots[b'_{l+1}-1]_1}{(a_2-a_1)\,(a_3-a_1)\cdots(y-a_1)}+\cdots; \tag{42}$$

при этомъ подъ y разумѣемъ l-тую букву между слѣдующими: $a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_k,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m$.

Внеся (41) въ соотношеніе (37), получимъ:

$$[(a_1\ x_1\ \overline{a_1}\ \overline{x_1})]=$$

$$=A(x_1-a_1)^{b_1+\lambda_1-1}(x_2-a_1)^{\lambda_2-1}\cdots(x_m-a_1)^{\lambda_m-1}\Bigg[\int\limits_{c_1}^{(10\overline{1}\overline{0})}v^{b_1-1}(1-v)^{\lambda_1-1}\,dv-$$

$$-C_1(x_1-a_1)\int\limits_{c_1}^{(10\overline{1}\overline{0})}v^{b_1}\,(1-v)^{\lambda_1-1}\,dv+\cdots$$

$$\cdots+(-1)^l\,C_l(x_1-a_1)^l\int\limits_{c_1}^{(10\overline{1}\overline{0})}v^{b_1+l-1}\,(1-v)^{\lambda_1-1}\,dv+\cdots\Bigg]. \tag{43}$$

При помощи формулъ (3) и (31) главы I, соотношенію (43) дадимъ видъ:

$$[(a_1\ x_1\ \overline{a_1}\ \overline{x_1})]=$$

$$=A'(x_1-a_1)^{\lambda_1+b_1-1}\,(x_2-a_1)^{\lambda_2-1}\cdots(x_m-a_1)^{\lambda_m-1}\Bigg[1-C_1\frac{b_1}{b_1+\lambda_1}(x_1-a_1)+$$

$$+C_2\frac{b_1\,(b_1+1)}{(\lambda_1+b_1)\,(\lambda_1+b_1+1)}\,(x_1-a_1)^2-\cdots \tag{44}$$

$$\cdots+(-1)^l\,C_l\,\frac{b_1\,(b_1+1)\cdots(b_1+l-1)}{(b_1+\lambda_1)\,(b_1+\lambda_1+1)\cdots(b_1+\lambda_1+l-1)}\,(x_1-a_1)^l+\cdots\Bigg].$$

При этомъ обозначено:

$$A'=A\,E(b_1,\lambda_1)\,e^{\pi(b_1+\lambda_1)i}. \tag{45}$$

Разсмотримъ теперь интегралъ $[(a_2\, a_3\, \overline{a_2}\, \overline{a_3})]$. Имѣемъ:

$$[(a_2\, a_3\, \overline{a_2}\, \overline{a_3})] =$$

$$= \int\limits_c^{(a_2\, a_3\, \overline{a_2}\, \overline{a_3})} (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-x_1)^{\lambda_1-1} \cdots (u-x_m)^{\lambda_m-1}\, du =$$

$$= \int\limits_c^{(a_2\, a_3\, \overline{a_2}\, \overline{a_3})} (u-a_1)^{b_1+\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m-m-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} \left[1-\frac{x_1-a_1}{u-a_1}\right]^{\lambda_1-1} \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \left[1-\frac{x_m-a_1}{u-a_1}\right]^{\lambda_m-1} du =$$

$$= \int\limits_c^{(a_2\, a_3\, \overline{a_2}\, \overline{a_3})} (u-a_1)^{b_1+\lambda_1+\cdots+\lambda_m-m-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1}\, du -$$

$$- D_1 \int\limits_c^{(a_2\, a_3\, \overline{a_2}\, \overline{a_3})} (u-a_1)^{b_1+\lambda_1+\cdots+\lambda_m-m-2} \cdots (u-a_k)^{b_k-1}\, du + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^l D_l \int\limits_c^{(a_2\, a_3\, \overline{a_2}\, \overline{a_3})} (u-a_1)^{b_1+\lambda_1+\cdots+\lambda_m-m-l-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1}\, du + \cdots, \tag{46}$$

гдѣ D_l имѣетъ составъ:

$$D_l =$$

$$= [\lambda_1-1]_l (x_1-a_1)^l + [\lambda_2-1]_l (x_2-a_1)^l + \cdots + [\lambda_m-1]_l (x_m-a_1)^l +$$

$$[\lambda_1-1]_{l-1} [\lambda_2-1]_1 (x_1-a_1)^{l-1} (x_2-a_2) + \cdots$$

$$\cdots + [\lambda_{m-1}-1]_{l-1} [\lambda_m-1]_1 (x_{m-1}-a_1)^{l-1} (x_m-a_1) +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ [\lambda_1-1]_1 [\lambda_2-1]_1 \cdots [\lambda_l-1]_1 (x_1-a_1) \cdots (x_l-a_1) + \cdots \tag{47}$$

Далѣе, подразумѣваются условія:

$$\left|\frac{x_1-a_1}{u-a_1}\right| < 1, \quad \left|\frac{x_2-a_1}{u-a_1}\right| < 1, \ \cdots, \ \left|\frac{x_m-a_1}{u-a_1}\right| < 1. \tag{47'}$$

Полагая:

$$F_1(l) = (-1)^l D_l \int\limits_c^{(a_2\, a_3\, \overline{a_2}\, \overline{a_3})} (u-a_1)^{b_1+\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m-m-l-1} \ldots (u-a_k)^{b_k-1}\, du, \tag{48}$$

формулѣ (46) дадимъ видъ:

$$[(a_2\, a_3\, \overline{a_2}\, \overline{a_3})] = F_1(0) + F_1(1) + F_1(2) + \cdots + F_1(l) + \cdots \tag{49}$$

Далѣе, имѣемъ:

$$[(a_2 \infty \overline{a_2}\, \overline{\infty})] =$$

$$= \int\limits_c^{(a_2 \infty \overline{a_2}\, \overline{\infty})} (u-a_1)^{b_1-1} \ldots (u-a_k)^{b_k-1} (u-x_1)^{\lambda_1-1} \ldots (u-x_m)^{\lambda_m-1}\, du =$$

$$= \int\limits_c^{(a_2 \infty \overline{a_2}\, \overline{\infty})} (u-a_1)^{b_1+\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m-m-1} \ldots (u-a_k)^{b_k-1} \left[1 - \frac{x_1-a_1}{u-a_1}\right]^{\lambda_1-1} \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \left[1 - \frac{x_m-a_1}{u-a_1}\right]^{\lambda_m-1} du =$$

$$= \int\limits_c^{(a_2 \infty \overline{a_2}\, \overline{\infty})} (u-a_1)^{b_1+\lambda_1+\cdots+\lambda_m-m-1} \ldots (u-a_k)^{b_k-1}\, du -$$

$$- D_1 \int\limits_c^{(a_2 \infty \overline{a_2}\, \overline{\infty})} (u-a_1)^{b_1+\lambda_1+\cdots+\lambda_m-m-2} \ldots (u-a_k)^{b_k-1}\, du +$$

$$+ D_2 \int\limits_c^{(a_2 \infty \overline{a_2}\, \overline{\infty})} (u-a_1)^{b_1+\lambda_1+\cdots+\lambda_m-m-3} \ldots (u-a_k)^{b_k-1}\, du - \cdots =$$

$$= F'_1(0) + F'_1(1) + F'_1(2) + \cdots + F'_1(l) + \cdots \tag{50}$$

При этомъ положено:

$$F'_1(l) = (-1)^l D_l \int\limits_c^{(a_2 \infty \overline{a_2}\, \overline{\infty})} (u-a_1)^{b_1+\lambda_1+\cdots+\lambda_m-m-l-1} \ldots (u-a_k)^{b_k-1}\, du, \tag{51}$$

а D_l имѣетъ значеніе (47).

Замѣтимъ также, что и тутъ подразумѣваются условія (47′).

Перейдемъ теперь къ интегралу $[(x_2\, x_1\, \overline{x_2}\, \overline{x_1})]$. Введемъ въ немъ новое перемѣнное интеграціи v при помощи подстановки:

$$u = x_2 + (x_1 - x_2)\, v. \tag{52}$$

Будемъ имѣть:

$$[(x_2\, x_1\, \overline{x_2}\, \overline{x_1})] =$$

$$= \int_c^{(x_2\, x_1\, \overline{x_2}\, \overline{x_1})} (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-x_1)^{\lambda_1-1} \cdots (u-x_m)^{\lambda_m-1}\, du =$$

$$= M (x_1 - x_2)^{\lambda_1+\lambda_2-1} (x_3 - x_2)^{\lambda_3-1} \cdots$$

$$\cdots (x_m - x_2)^{\lambda_m-1} \int_{c_2}^{(10\bar{1}\bar{0})} v^{\lambda_2-1} (1-v)^{\lambda_1-1} \left[1 - \frac{x_1 - x_2}{a_1 - x_2}\, v\right]^{b_1-1} \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \left[1 - \frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_2}\, v\right]^{\lambda_3-1} \cdots\cdots du =$$

$$= M(x_1 - x_2)^{\lambda_1+\lambda_2-1} \cdots (x_m - x_2)^{\lambda_m-1} \int_{c_2}^{(10\bar{1}\bar{0})} v^{\lambda_2-1} (1-v)^{\lambda_1-1} \Big[1 - \Delta_1 (x_1 - x_2)\, v + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^l \Delta_l (x_1 - x_2)^l v^l + \cdots\Big]\, dv =$$

$$= M(x_1 - x_2)^{\lambda_1+\lambda_2-1} \cdots (x_m - x_2)^{\lambda_m-1} \Bigg[\int_{c_2}^{(10\bar{1}\bar{0})} v^{\lambda_2-1} (1-v)^{\lambda_1-1}\, dv -$$

$$- \Delta_1 (x_1 - x_2) \int_{c_2}^{(10\bar{1}\bar{0})} v^{\lambda_2} (1-v)^{\lambda_1-1}\, dv + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^l \Delta_l (x_1 - x_2)^l \int_{c_2}^{(10\bar{1}\bar{0})} v^{\lambda_2+l-1} (1-v)^{\lambda_1-1}\, dv + \cdots\Bigg]. \tag{53}$$

Здѣсь положено:

$$M = (-1)^{b_1+b_2+\cdots+b_k+\lambda_1+\lambda_3+\cdots+\lambda_m-n+1} (a_1 - x_2)^{b_1-1} \cdots$$
$$\cdots (a_k - x_2)^{b_k-1}; \tag{54}$$

$$\Delta_l = \frac{[b_1-1]_l}{(a_1-x_2)^l} + \frac{[b_2-1]_l}{(a_2-x_2)^l} + \cdots + \frac{[\lambda_m-1]_l}{(x_m-x_1)^l} +$$

$$(55) \qquad + \frac{[b_1-1]_{l-1}\,[b_3-1]_1}{(a_1-x_2)^{l-1}\,(a_3-x_2)} + \cdots + \frac{[\lambda_{m-1}-1]_{l-1}\,[\lambda_m-1]_1}{(x_{m-1}-x_2)^{l-1}\,(x_m-x_2)} + \cdots$$

. . . .

$$(55') \qquad \left|\frac{x_1-x_2}{a_1-x_2}v\right| < 1, \quad \left|\frac{x_1-x_2}{a_2-x_2}v\right| < 1, \quad \ldots, \quad \left|\frac{x_1-x_2}{x_m-x_2}v\right| < 1.$$

При помощи формулъ (3) и (31) главы I, находимъ окончательно:

$$[(x_2\, x_1\, \overline{x_2}\, \overline{x_1}\,] =$$

$$= M'(x_1-x_2)^{\lambda_1+\lambda_2-1}\cdots(x_m-x_2)^{\lambda_m-1}\Big[1-(x_1-x_2)\,\Delta_1\,\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} +$$

$$+(x_1-x_2)^2\,\Delta_2\,\frac{\lambda_2\,(\lambda_2+1)}{(\lambda_1+\lambda_2)\,(\lambda_1+\lambda_2+1)} - \cdots$$

$$(56) \qquad \cdots + (-1)^l\,(x_1-x_2)^l\,\frac{\lambda_2\,(\lambda_2+1)\,\cdots\,(\lambda_2+l-1)}{(\lambda_1+\lambda_2)\,\cdots\,(\lambda_1+\lambda_2+l-1)}\,\Delta_l + \cdots\Big],$$

гдѣ принято:

$$(57) \qquad M' = M\,\overline{E}(\lambda_2, \lambda_1)\, e^{\pi(\lambda_1+\lambda_2)i}$$

Далѣе, имѣемъ:

$$[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})] =$$

$$= \int_c^{(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})} (u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}\,(u-x_1)^{\lambda_1-1}\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-1}\,du =$$

$$= \int_c^{(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})} (u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}\,(u-x_2)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m-m}\left[1-\frac{x_1-x_2}{u-x_2}\right]^{\lambda_1-1}\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\left[1-\frac{x_m-x_2}{u-x_2}\right]^{\lambda_m-1} du =$$

$$= \int_c^{(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})} (u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}\,(u-x_2)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m-m}\Big[1-\frac{P_1}{u-x_2} +$$

$$+\frac{P_2}{(u-x_2)^2}-\cdots$$

$$\cdots+(-1)^l\frac{P_l}{(u-x_2)^l}+\cdots\Big]du=$$

$$=\int\limits_c^{(a_1\,a_2\,\overline{a_1}\,\overline{a_2})}u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}(u-a_2)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m-m}\,du-$$

$$-\;P_1\int\limits_c^{(a_1\,a_2\,\overline{a_1}\,\overline{a_2})}u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-x_2)^{\lambda_1+\cdots+\lambda_m-m-1}\,du+$$

$$\cdots+(-1)^l P_l\int\limits_c^{(a_1\,a_2\,\overline{a_1}\,\overline{a_2})}(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-x_2)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m-m-l}\,du+\cdots, \tag{58}$$

гдѣ принято:

$$P_l=$$

$$=[\lambda_1-1]_l\,(x_1-x_2)^l+[\lambda_3-1]_l\,(x_3-x_2)^l+\cdots$$

$$\cdots+[\lambda_m-1]_l\,(x_m-x_2)^l+$$

$$+[\lambda_1-1]_{l-1}\,[\lambda_3-1]_1\,(x_1-x_2)^{l-1}\,(x_3-x_2)+\cdots$$

$$\cdots+[\lambda_{m-1}-1]_{l-1}\,[\lambda_m-1]_1\,(x_{m-1}-x_2)^{l-1}\,(x_m-x_2+ \tag{59}$$

. . . .

. . . .

Обозначимъ чрезъ $\varphi_2(l)$ слѣдующую функцію:

$$\varphi_2(l)=(-1)^l P_l\int\limits_c^{(a_1\,a_2\,\overline{a_1}\,\overline{a_2})}u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-x_2)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m-m-l}\,du. \tag{60}$$

Тогда соотношеніе (58) напишется въ формѣ:

$$[(a_1\,a_2\,\overline{a_1}\,\overline{a_2})]=$$

$$=\varphi_2(0)+\varphi_2(1)+\varphi_2(2)+\cdots+\varphi_2(l)+\cdots \tag{61}$$

Замѣтимъ, что интегралъ правой части (60) представляетъ гипергеометрическій интегралъ k-го порядка (по терминологіи L. Pochhammer'a).

Точно также, полагая:

$$(62)\qquad \psi_2(l) = (-1)^l P_l \int\limits_c^{(a_1 \infty \overline{a_1} \overline{\infty})} (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-x_2)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m-m-l}\,du,$$

находимъ:

$$[(a_1 \infty \overline{a_1} \overline{\infty})] =$$

$$(63)\qquad = \psi_2(0) + \psi_2(1) + \psi_2(2) + \cdots + \psi_2(l) + \cdots$$

Формулы (61) и (63) имѣютъ мѣсто при условіяхъ:

$$(64)\qquad \left|\frac{x_1-x_2}{u-x_2}\right| < 1, \quad \left|\frac{x_3-x_2}{u-x_2}\right| < 1, \quad \cdots, \quad \left|\frac{x_m-x_2}{u-x_2}\right| < 1.$$

Далѣе, имѣемъ:

$$[(\infty\, x_1\, \overline{\infty}\, \overline{x_1})] =$$

$$= \int\limits_c^{(\infty\, x_1\, \overline{\infty}\, \overline{x_1})} (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-x_1)^{\lambda_1-1} \cdots (u-x_m)^{\lambda_m-1}\,du =$$

$$= x_1^{b_1+b_2+\cdots+\lambda_m-n} \int\limits_{c_1}^{(1 0 \overline{1} \overline{0})} v^{-b_1-b_2-\cdots-\lambda_1-\cdots-\lambda_m+n-1} (1-v)^{\lambda_1-1} \cdots$$

$$\cdots \left(1-\frac{x_2}{x_1}v\right)^{\lambda_2-1} \cdots\cdots \left(1-\frac{x_m}{x_1}v\right)^{\lambda_m-1} dv =$$

$$= x_1^{\sum\limits_{q=1}^{q=k} b_q + \sum\limits_{q=1}^{q=m} \lambda_q - n} \int\limits_{c_1}^{(1 0 \overline{1} \overline{0})} v^{-\sum\limits_{q=1}^{q=k} b_q - \sum\limits_{q=1}^{q=m} \lambda_q + n-1} (1-v)^{\lambda_1-1} \left[1 - \frac{N_1 v}{x_1} + \frac{N_2 v^2}{x_1^2} - \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + (-1)^l \frac{N_l v^l}{x_1^l} + \cdots\right] dv =$$

$$= x_1^{\mu} \left[\int\limits_{c_1}^{(1 0 \overline{1} \overline{0})} v^{-\mu-1} (1-v)^{\lambda_1-1}\,dv - \frac{N_1}{x_1} \int\limits_{c_1}^{(1 0 \overline{1} \overline{0})} v^{-\mu} (1-v)^{\lambda_1-1}\,dv + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + (-1)^l \frac{N_l}{x_1^l} \int\limits_{c_1}^{(1 0 \overline{1} \overline{0})} v^{-\mu+l-1} (1-v)^{\lambda_1-1}\,dv + \cdots\right] =$$

$$= C\, x_1^{\mu} \left[1 - \frac{1}{x_1} \frac{N_1 \mu}{\mu-\lambda_1} + \frac{1}{x_1^2} \frac{N_2 \mu(\mu-1)}{(\mu-\lambda_1)(\mu-\lambda_1-1)} - \cdots\right.$$

$$\cdots + (-1)^l \frac{1}{x_1^l} N_l \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-l+1)}{(\mu-\lambda_1)(\mu-\lambda_1-1)\cdots(\mu-\lambda_1-l+1)} + \cdots\Bigg] \quad (65)$$

При этомъ положено:

$$u = \frac{x_1}{v}; \quad (66)$$

$$\left|\frac{a_1}{x_1} v\right| < 1, \cdots, \quad \left|\frac{a_k v}{x_1}\right| < 1, \quad \left|\frac{x_2 v}{x_1}\right| < 1, \cdots, \quad \left|\frac{x_m v}{x_1}\right| < 1; \quad (67)$$

$$\begin{aligned} N_l = [b_1-1]_l\, a_1^l + [b_2-1]_l\, a_2^l + \cdots \\ \cdots + [\lambda_m-1]_l\, x_m^l + [b_1-1]_{l-1}\,[b_2-1]_1\, a_1^{l-1}\, a_2 + \cdots \\ \cdots + [\lambda_{m-1}-1]_{l-1}\,[\lambda_m-1]_1\, x_{m-1}^{l-1}\, x_m + \end{aligned} \quad (68)$$

. . . .

. . . .

$$C = e^{\pi(\lambda_1-\mu)i}\, \overline{E}(-\mu, \lambda_1); \quad (69)$$

$$\mu = \sum_{q=1}^{q=k} b_q + \sum_{q=1}^{q=m} \lambda_q - n. \quad (70)$$

Далѣе, находимъ:

$$[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})] =$$

$$= \int_c^{(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})} (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-x_1)^{\lambda_1-1} \cdots (u-x_m)^{\lambda_m-1} du =$$

$$= (-1)^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m-m}\, x_1^{\lambda_1-1}\, x_2^{\lambda_1-1} \cdots x_m^{\lambda_m-1} \int_c^{(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})} (u-a_1)^{b_1-1} \cdots$$

$$\cdots (u-a_k)^{b_k-1} \left(1-\frac{u}{x_1}\right)^{\lambda_1-1} \cdots \left(1-\frac{u}{x_m}\right)^{\lambda_m-1} du =$$

$$= (-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m-m}\, x_1^{\lambda-1} \cdots x_m^{\lambda_m-1} \Bigg[\int_c^{(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})} (u-a_1)^{b_1-1} \cdots$$

$$\cdots (u-a_k)^{b_k-1} du - K_1 \int_c^{(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})} u\,(u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} du + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^l K_l \int_c^{(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})} u^l (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} du + \cdots\Bigg] \quad (71)$$

При этомъ:

$$K_l =$$

$$= \frac{[\lambda_1-1]_l}{x_1^{\,l}} + \frac{[\lambda_2-1]_l}{x_2^{\,l}} + \cdots + \frac{[\lambda_m-1]_l}{x_m^{\,l}} + \frac{[\lambda_1-1]_{l-1}\,[\lambda_2-1]_1}{x_1^{\,l-1}\,x_2} +$$

$$(72)\qquad \frac{[\lambda_1-1]_{l-1}\,[\lambda_3-1]_1}{x_1^{\,l-2}\,x_3} + \cdots + \frac{[\lambda_{m-1}-1]_{l-1}\,[\lambda_m-1]_1}{x_{m-1}^{\,l-1}\,x_m} + \cdots$$

. . . .

. . . .

$$(73)\qquad \left|\frac{u}{x_1}\right| < 1,\quad \left|\frac{u}{x_2}\right| < 1,\quad \cdots,\quad \left|\frac{u}{x_m}\right| < 1.$$

Положимъ:

$$\Phi(l) =$$

$$(74)\qquad = (-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m-m+l} K_l \int\limits_c^{(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})} u^l (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1}\, du.$$

Тогда формула (71) напишется такъ:

$$[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})] =$$

$$(75)\qquad = x_1^{\lambda_1-1}\, x_2^{\lambda_2-1} \cdots x_m^{\lambda_m-1}\, [\Phi(0)+\Phi(1)+\cdots+\Phi(l)+\cdots].$$

§ 5.

Приступимъ теперь къ изысканію дифференціальныхъ уравненій, которымъ удовлетворяетъ интегралъ (1).

Предварительно разсмотримъ случай, когда $k=2$ и, слѣдовательно, интегралъ имѣетъ видъ:

$$(76)\qquad z = \int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1} (u-a_2)^{b_2-1} (u-x_1)^{\lambda_1-1} \cdots (u-x_m)^{\lambda_m-1}\, du.$$

Безъ труда убѣждаемся прежде всего, что интегралъ (76) удовлетворяетъ $\frac{m(m-1)}{2}$ уравненіямъ вида:

$$(77)\qquad (x_i-x_j)\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\,\partial x_j} + (\lambda_j-1)\frac{\partial z}{\partial x_i} + (1-\lambda_i)\frac{\partial z}{\partial x_j} = 0,$$

гдѣ для i и j надо давать различныя значенія отъ 1 до m включительно.

Обозначимъ далѣе чрезъ $G(u)$ слѣдующую функцію:

$$G(u) =$$
$$= (u-a_1)^{b_1}(u-a_2)^{b_2}(u-x_1)^{\lambda_1-2}(u-x_2)^{\lambda_2-1}\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-1}. \tag{78}$$

Взявъ производную отъ обѣихъ частей (78) по u, послѣ надлежащихъ упрощеній, получимъ:

$$\frac{dG(u)}{du} =$$
$$= (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x_1)^{\lambda_1-3}\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-2}\{(b_1+b_2+\lambda_1+\cdots$$
$$\cdots+\lambda_m-m-1)(u-x_1)^2(u-x_2)\cdots(u-x_m)+[(x_1-a_1)(b_2+\lambda_1+\cdots$$
$$\cdots+\lambda_m-m-1)+(x_1-a_2)(b_1+\lambda_1-2)](u-x_1)\cdots(u-x_m)+$$
$$+(\lambda_2-1)(x_2-a_2)(u-x_1)^2(u-x_3)\cdots(u-x_m)+$$
$$+(\lambda_3-1)(x_3-a_2)(u-x_1)^2(u-x_2)(u-x_4)\cdots$$
$$\cdots(\lambda_m-1)(x_m-a_2)(u-x_1)^2(u-x_2)\cdots(u-x_{m-1})+$$
$$+(\lambda_1-2)(x_1-a_1)(x_1-a_2)(u-x_2)\cdots(u-x_m)+$$
$$+(\lambda_2-1)(x_1-a_1)(x_2-a_2)(u-x_1)(u-x_3)\cdots(u-x_m)+\cdots$$
$$\cdots+(\lambda_m-1)(x_1-a_1)(x_m-a_2)(u-x_1)\cdots(u-x_{m-1})\}. \tag{79}$$

Умноживъ обѣ части соотношенія (79) на du и производя интегрированіе по дозволенному пути L, получимъ:

$$(b_1+b_2+\lambda_1+\lambda_2+\cdots$$
$$\cdots+\lambda_m-m-1)\int_L(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x_1)^{\lambda_1-1}\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-1}\,du+$$
$$+[(x_1-a_1)(b_2+\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m-m-1)+ \tag{80}$$
$$+(x_1-a_2)(b_1+\lambda_1-2)]\int_L(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x_1)^{\lambda_1-2}\cdots du+$$

$$+(\lambda_2-1)(x_2-a_2)\int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x_1)^{\lambda_1-1}\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-1}du+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+(\lambda_m-1)(x_m-a_2)\int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x_1)^{\lambda_1-1}\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-2}du+$$

$$+(\lambda_1-2)(x_1-a_1)(x_1-a_2)\int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x_1)^{\lambda_1-3}\cdots du+$$

$$+(\lambda_2-1)(x_1-a_1)(x_2-a_2)\int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x_1)^{\lambda_1-2}\cdots du+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+(\lambda_m-1)(x_1-a_1)(x_m-a_2)\int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x_1)^{\lambda_1-2}\cdots du=$$

$$(80) \qquad\qquad = 0.$$

Изъ соотношенія (80) получимъ еще $m-1$ соотношеній подобнаго рода, если въ немъ выполнимъ взаимное перемѣщеніе слѣдующихъ количествъ: x_1 и x_2, λ_1 и λ_2; x_1 и x_3, λ_1 и λ_3; $\cdots$; x_1 и x_m, λ_1 и λ_m.

Имѣя въ виду выраженіе (76), соотношеніе (80) представимъ въ формѣ:

$$(x_1-a_1)(x_1-a_2)\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+(x_1-a_1)(x_2-a_2)\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_2}+\cdots$$

$$\cdots+(x_1-a_1)(x_m-a_2)\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_m}+[(a_1-x_1)(b_2+\lambda_1+\lambda_2+\cdots$$

$$\cdots+\lambda_m-m-1)+(a_2-x_1)(b_1+\lambda_1-2)]\frac{\partial z}{\partial x_1}+[(a_2-x_2)\frac{\partial z}{\partial x_2}+$$

$$+(a_2-x_3)\frac{\partial z}{\partial x_3}+\cdots+(a_2-x_m)\frac{\partial z}{\partial x_m}](\lambda_1-1)+$$

$$(81) \qquad +(\lambda_1-1)(b_1+b_2+\lambda_1+\cdots+\lambda_m-m-1)z=0.$$

Другія уравненія суть:

$$(x_2-a_1)(x_2-a_2)\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^{\,2}}+(x_2-a_1)(x_1-a_2)\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_2}+\cdots$$

$$\cdots+(x_2-a_1)(x_m-a_2)\frac{\partial^2 z}{\partial x_2\,\partial x_m}+[(a_1-x_2)(b_2+\lambda_1+\lambda_2+\cdots$$

$$\cdots+\lambda_m-m-1)+(a_2-x_2)(b_1+\lambda_2-2)]\frac{\partial z}{\partial x_2}+[(a_2-x_1)\frac{\partial z}{\partial x_1}+$$

$$+(a_2-x_3)\frac{\partial z}{\partial x_3}+\cdots+(a_2-x_m)\frac{\partial z}{\partial x_m}](\lambda_2-1)+$$

$$+(\lambda_2-1)(b_1+b_2+\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m-m-1)z=0;$$

. . . .

. . . .

$$(x_m-a_1)(x_m-a_2)\frac{\partial^2 z}{\partial x_m^{\,2}}+(x_m-a_1)(x_2-a_2)\frac{\partial^2 z}{\partial x_2\,\partial x_m}+\cdots$$

$$\cdots+(x_m-a_1)(x_1-a_2)\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_m}+[(a_1-x_m)(b_2+\lambda_1+\cdots$$

$$\cdots+\lambda_m-m-1)+(a_2-x_m)(b_1+\lambda_m-2)]\frac{\partial z}{\partial x_m}+$$

$$+[(a_2-x_2)\frac{\partial z}{\partial x_2}+(a_2-x_3)\frac{\partial z}{\partial x_3}+\cdots$$

$$\cdots+(a_2-x_1)\frac{\partial z}{\partial x_1}](\lambda_m-1)+$$

$$+(\lambda_m-1)(b_1+b_2+\lambda_1+\cdots+\lambda_m-m-1)z=0. \tag{82}$$

Итакъ, искомая система состоитъ изъ $\frac{m(m+1)}{2}$ уравненій (77), (81) и (82).

Обозначимъ далѣе чрезъ v_1 и v_2 слѣдующія функціи:

$$\begin{aligned} v_1 &= C_1[(a_1\,a_2\,\overline{a_1}\,\overline{a_2})]+C_2[(a_1\,x_1\,\overline{a_1}\,\overline{x_1})]+\cdots+C_{m+1}[(a_1\,x_m\,\overline{a_1}\,\overline{x_m})];\\ v_2 &= D_1[(a_1\,a_2\,\overline{a_1}\,\overline{a_2})]+D_2[(a_1\,x_1\,\overline{a_1}\,\overline{a_1})]+\cdots+D_{m+1}[(a_1\,x_m\,\overline{a_1}\,\overline{x_m})]. \end{aligned} \tag{83}$$

Здѣсь C и D произвольныя постоянныя. Каждая изъ этихъ функцій представляетъ полный интегралъ найденной системы уравненій. Интересно найти уравненія, которымъ удовлетворяетъ функція:

$$V = \frac{v_1}{v_2} = \frac{C_1\,[(a_1 a_2 \bar{a}_1 \bar{a}_2)] + \cdots + C_{m+1}\,[(a_1 x_m \bar{a}_1 \bar{x}_m)]}{D_1[(a_1 a_2 \bar{a}_1 \bar{a}_2)] + \cdots + D_{m+1}\,[(a_1 x_m \bar{a}_1 \bar{x}_m)]}. \tag{84}$$

Для своихъ цѣлей введемъ слѣдующія обозначенія:

$$M_{ij} = \frac{(x_i - x_j)\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} + (\lambda_j - 1)\dfrac{\partial V}{\partial x_i} + (1 - \lambda_i)\dfrac{\partial V}{\partial x_j}}{x_i - x_j};$$

$$N_1 = (x_1 - a_1)(x_1 - a_2)\frac{\partial^2 V}{\partial {x_1}^2} +$$

$$+ (x_1 - a_1)(x_2 - a_2)\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} + \cdots + (x_1 - a_1)(x_m - a_2)\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_m} +$$

$$+ [(a_1 - x_1)(b_2 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_m - m - 1) + (a_2 - x_1)(b_1 + \lambda_1 - 2)]\frac{\partial V}{\partial x_1} +$$

$$+ (\lambda_1 - 1)\left[(a_2 - x_2)\frac{\partial V}{\partial x_2} + \cdots + (a_2 - x_m)\frac{\partial V}{\partial x_m}\right];$$

. . . .

. . . .

$$N_m = (x_m - a_1)(x_m - a_2)\frac{\partial^2 V}{\partial {x_m}^2} + (x_m - a_1)(x_2 - a_2)\frac{\partial^2 V}{\partial x_m \partial x_2} + \cdots$$

$$\cdots + [(a_1 - x_m)(b_2 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_m - m - 1) +$$

$$+ (a_2 - x_m)(b_1 + \lambda_m - 2)]\frac{\partial V}{\partial x_m} +$$

$$+ (\lambda_m - 1)\left[(a_2 - x_2)\frac{\partial V}{\partial x_2} + \cdots + (a_2 - x_1)\frac{\partial V}{\partial x_1}\right]. \tag{85}$$

Внеся въ уравненія (77), (81) и (82) на мѣсто z функцію $v_1 = Vv_2$, будемъ имѣть:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial v_2}{\partial x_j} + \frac{\partial V}{\partial x_j}\frac{\partial v_2}{\partial x_i} + v_2 M_{ij} = 0; \tag{86}$$

$$2(x_1 - a_1)(x_1 - a_2)\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\frac{\partial V}{\partial x_1} +$$

$$+ (x_1 - a_1)(x_2 - a_2)\left[\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right] +$$

$$+ (x_1 - a_1)(x_3 - a_2)\left[\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial V}{\partial x_3}\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right] + \cdots$$

$$\cdots + (x_1 - a_1)(x_m - a_2)\left[\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_m} + \frac{\partial V}{\partial x_m}\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right] + v_2 N_1 = 0;$$

. . . .

. . . .

$$2(x_m - a_1)(x_m - a_2)\frac{\partial V}{\partial x_m}\frac{\partial v_2}{\partial x_m} +$$

$$+ (x_m - a_1)(x_2 - a_2)\left[\frac{\partial V}{\partial x_m}\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_m}\right] +$$

$$+ (x_m - a_1)(x_3 - a_2)\left[\frac{\partial V}{\partial x_m}\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial V}{\partial x_3}\frac{\partial v_2}{\partial x_m}\right] + \cdots$$

$$+ (x_m - a_1)(x_1 - a_2)\left[\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_m} + \frac{\partial V}{\partial x_m}\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right] + v_2 N_m = 0. \qquad (87)$$

Въ виду (86), уравненія (87) напишутся такъ:

$$2(x_1 - a_2)\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_1} =$$

$$= \left[(x_2 - a_2)M_{12} + (x_3 - a_2)M_{13} + \cdots + (x_m - a_2)M_{1m} - \frac{N_1}{x_1 - a_1}\right]v_2;$$

$$2(x_2 - a_2)\frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_2} =$$

$$= \left[(x_1 - a_2)M_{21} + (x_3 - a_2)M_{23} + \cdots + (x_m - a_2)M_{2m} - \frac{N_2}{x_2 - a_1}\right]v_2;$$

. . . . (88)

. . . .

$$2(x_m - a_2)\frac{\partial V}{\partial x_m}\frac{\partial v_2}{\partial x_m} =$$

$$= \left[(x_1 - a_2)M_{m1} + (x_2 - a_2)M_{m2} + \cdots + (x_{m-1} - a_2)M_{m\,m-1} - \frac{N_m}{x_m - a_1}\right].$$

Полагаемъ далѣе:

$$K_l = (x_1 - a_2)\, M_{l1} + (x_2 - a_2)\, M_{l2} + \cdots + (x_{l-1} - a_1)\, M_{ll-1} +$$

$$(89) \qquad + (x_{l+1} - a_2)\, M_{l\,l+1} + \cdots + (x_m - a_2)\, M_{l\,m} - \frac{N_l}{x_l - a_1}.$$

Тогда, пользуясь соотношеніями:

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_i} = \frac{K_i v_2}{2(x_i - a_2)\dfrac{\partial V}{\partial x_i}};$$

$$(90) \qquad \frac{\partial v_2}{\partial x_j} = \frac{K_j v_2}{2(x_j - a_2)\dfrac{\partial V}{\partial x_j}},$$

которыя получаются изъ (88) при обозначеніи (89), уравненію (86) дадимъ видъ:

$$(x_i - a_2)\, K_j \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + (x_j - a_2)\, K_i \left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\right)^2 +$$

$$(91) \qquad + 2\, M_{ij}\, (x_i - a_2)\, (x_j - a_2)\, \frac{\partial V}{\partial x_i}\, \frac{\partial V}{\partial x_j} = 0.$$

Число уравненій (91) $\dfrac{m(m-1)}{2}$, и они суть нелинейныя 2-го порядка. Для нихъ функція (84) представляетъ полный интегралъ.

Въ случаѣ $m = 2$, получается одно уравненіе вида (91). Оно напишется въ слѣдующей формѣ:

$$(x_1 - a_2) \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 \left[(x_1 - a_2)\, M'_{12} - \frac{N'_2}{x_2 - a_1}\right] +$$

$$(92) \qquad + (x_2 - a_2) \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2 \left[(x_2 - a_2)\, M'_{12} - \frac{N'_1}{x_1 - a_1}\right] +$$

$$+ 2\, M'_{12}\, (x_1 - a_2)\, (x_2 - a_2)\, \frac{\partial V}{\partial x_1}\, \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0,$$

гдѣ M'_{12}, N'_1 и N'_2 находятся изъ формулъ (85) при условіи $m = 2$.

Полный интегралъ этого уравненія будетъ:

$$V = \frac{C_1\,[(a_1 a_2 \overline{a_1} \overline{a_2})] + C_2\,[(a_1 x_1 \overline{a_1} \overline{x_1})] + C_3\,[(a_1 x_2 \overline{a_1} \overline{x_2})]}{D_1\,[(a_1 a_2 \overline{a_1} \overline{a_2})] + D_2\,[(a_1 x_1 \overline{a_1} \overline{x_1})] + D_3\,[(a_1 x_1 \overline{a_1} \overline{x_1})]}. \tag{93}$$

При этомъ интегралъ $[(\alpha' \alpha'' \overline{\alpha'} \overline{\alpha''})]$ въ разсматриваемомъ случаѣ имѣетъ выраженіе:

$$[(\overline{\alpha'} \overline{\alpha''} \overline{\alpha'} \overline{\alpha''})] =$$

$$= \int_c^{(\alpha' \overline{\alpha''} \overline{\alpha'} \overline{\alpha''})} (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-x_1)^{\lambda_1-1}(u-x_2)^{\lambda_2-1}\,du. \tag{94}$$

Соотношеніе (80) приводитъ насъ къ системѣ m уравненій въ конечныхъ разностяхъ, которымъ удовлетворяетъ интегралъ:

$$U_{z_1, z_2, \cdots, z_m} = \int_L (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-\alpha_1)^{z_1-1}\cdots(u-\alpha_m)^{z_m-1}\,du. \tag{95}$$

Въ самомъ дѣлѣ, исключая изъ этого соотношенія $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ на основаніи уравненій:

$$\lambda_1 - 2 = z_1,\ \lambda_2 - 2 = z_2, \cdots, \lambda_m - 2 = z_m \tag{96}$$

и замѣняя $x_1, x_2, \cdots, x_m$ чрезъ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$, будемъ имѣть:

$$(b_1+b_2+z_1+z_2+\cdots+z_m+m-1)\int_L (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-\alpha_1)^{z_1+1}\cdots$$

$$\cdots(u-\alpha_m)^{z_m+1}\,du + [(\alpha_1-a_1)(b_2+z_1+z_2+\cdots+z_m+m-1) +$$

$$+(\alpha_1-a_2)(b_1+z_1)]\int_L (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-\alpha_1)^{z_1}(u-\alpha_2)^{z_2+1}\cdots du$$

$$+(z_2+1)(\alpha_2-a_2)\int_L (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-\alpha_1)^{z_1+1}(u-\alpha_2)^{z_2}$$

$$[\ (u-\alpha_3)^{z_3+1}\cdots(u-\alpha_m)^{z_m+1}\,du +$$

$$+(z_m+1)(\alpha_m-a_2)\int_L (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-\alpha_2)^{z_1+1}\cdots$$

$$[\ \cdots(u-\alpha_{m-1})^{z_{m-1}+1}(u-\alpha_m)^{z_m}\,du +$$

$$+z_1(\alpha_1-a_1)(\alpha_1-a_2)\int\limits_L(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-\alpha_1)^{z_1-1}(u-\alpha_2)^{z_2+1}\ldots$$

$$\ldots(u-\alpha_m)^{z_m+1}du+$$

$$+(z_2+1)(\alpha_1-a_1)(\alpha_2-a_2)\int\limits_L(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-\alpha_1)^{z_1}(u-\alpha_2)^{z_2}$$

$$\ldots(u-a_3)^{z_3+1}\ldots du$$

. . . .

. . . .

$$+(z_m+1)(\alpha_1-a_1)(\alpha_m-a_2)\int\limits_L(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-\alpha_1)^{z_1}(u-\alpha_2)^{z_2+1}\ldots$$

$$\ldots(u-\alpha_m)^{z_m}du=0. \tag{97}$$

Принимая во вниманіе выраженіе (95), будемъ имѣть:

$$(b_1+b_2+z_1+z_2+\cdots+z_m+m-1)\,U_{z_1+2,\,z_2+2,\ldots,\,z_m+2}+$$

$$+\,[(\alpha_1-a_1)(b_2+z_1+z_2+\cdots+z_m+m-1+)$$

$$+(\alpha_1-a_2)(b_1+z_1)\,U_{z_1+1,\,z_2+2,\ldots,\,z_m+2}+$$

$$+(z_2+1)(\alpha_2-a_2)\,U_{z_1+2,\,z_2+1,\,z_3+2,\ldots,\,z_m+2}+\cdots$$

$$\cdots+(z_m+1)(\alpha_m-a_2)\,U_{z_1+2,\ldots,\,z_m+1}+$$

$$+z_1(\alpha_1-a_1)(\alpha_1-a_2)\,U_{z_1,\,z_2+2,\ldots,\,z_m+2}+$$

$$+(z_2+1)(\alpha_1-a_1)(\alpha_2-a_2)\,U_{z_1+1,\,z_2+1,\ldots,\,z_m+2}+$$

. . . .

. . . .

$$(z_m+1)(\alpha_1-a_1)(\alpha_m-a_2)\,U_{z_1+1,\,z_2+2,\ldots,\,z_m+1}=0. \tag{98}$$

Остальныя $m-1$ уравненій получаются изъ (98) чрезъ взаимное перемѣщеніе количествъ: z_1 и z_2, α_1 и α_2; z_1 и z_3, α_1 и α_3; $\cdots$; z_1 и z_m, α_1 и α_m.

Но эти m уравненій еще не составляютъ полной системы. Ее мы получимъ, если къ предыдущимъ уравненіямъ присоединимъ слѣдующія $\frac{m(m-1)}{2}$:

$$U_{z_1+1, z_2, \ldots, z_m} = U_{z_1, z_2+1, \ldots, z_m} + (\alpha_2 - \alpha_1)\, U_{z_1, z_2, \ldots, z_m}; \cdots$$

$$\cdots; U_{z_1+1, z_2, \ldots, z_m} = U_{z_1, z_2, \ldots, z_m+1} + (\alpha_m - \alpha_1)\, U_{z_1, z_2, \ldots, z_m};$$

$$U_{z_1, z_2+1, \ldots, z_m} = U_{z_1, z_2, z_3+1, \ldots, z_m} + (\alpha_3 - \alpha_2)\, U_{z_1, z_2, \ldots, z_m}; \cdots$$

$$U_{z_1, z_2+1 \ldots} = U_{z_1, \ldots, z_m+1} + (\alpha_m - \alpha_2)\, U_{z_1, z_2, \ldots, z_m}; \tag{99}$$

. . . .

. . . .

$$U_{z_1, z_2, \ldots, z_{m-1}+1, z_m} = U_{z_1, z_2, \ldots, z_m+1} + (\alpha_m - \alpha_{m-1})\, U_{z_1, z_2, \ldots, z_m}.$$

Эти послѣднія уравненія вмѣстѣ съ предшествующими m составляютъ полную систему $\frac{m(m+1)}{2}$ уравненій, для которыхъ полнымъ интеграломъ служитъ функція:

$$U_{z_1, z_2, \ldots, z_m} =$$

$$= C_1 \int\limits_c^{(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})} (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-\alpha_m)^{z_m-1}\, du +$$

$$+ C_2 \int\limits_c^{(a_1\, a_3\, \overline{a_1}\, \overline{a_3})} (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-\alpha_m)^{z_m-1}\, du +$$

$$\cdots + C_{m+1} \int\limits_c^{(a_1\, a_m\, \overline{a_1}\, \overline{a_m})} (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-\alpha_m)^{z_m-1}\, du, \tag{100}$$

гдѣ $C_1, C_2, \cdots, C_{m+1}$ суть произвольныя постоянныя или произвольныя періодическія функціи отъ $x_1, x_2, \cdots, x_m$ съ періодомъ равнымъ единицѣ.

Само собою разумѣется, что количества b_1 и b_2 тутъ предполагаются отличными отъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ.

§ 6.

Выведемъ теперь систему дифференціальныхъ уравненій, которымъ удовлетворяетъ интегралъ (1). Для этой цѣли поступаемъ такъ же, какъ и въ предыдущемъ параграфѣ. Прежде всего, очевидно, этотъ интегралъ удовлетворяетъ $\frac{m(m-1)}{2}$ уравненіямъ (77). Далѣе обозначимъ чрезъ $G_1(u)$ функцію:

$$G_1(u) = (u-a_1)^{b_1}(u-a_2)^{b_2}\cdots(u-a_k)^{b_k}(u-x_1)^{\lambda_1-k}(u-x_2)^{\lambda_2-1}\cdots$$

$$\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-1}. \tag{101}$$

Взявъ производную отъ $G_1(u)$ и произведя надлежащія преобразованія, будемъ имѣть:

$$\frac{dG_1(u)}{du}$$

$$= \Lambda\,[\theta(u)(u-x_1)(u-x_2)\cdots(u-x_m)+(\lambda_1-k)\,\vartheta(x_1)(u-x_2)\cdots(u-x_m)+$$

$$+(\lambda_2-1)\,\vartheta(x_2)(u-x_1)(u-x_3)\cdots(u-x_m)+\cdots$$

$$\cdots+(\lambda_m-1)\,\vartheta(x_m)(u-x_1)(u-x_2)\cdots(u-x_{m-1})]. \tag{102}$$

При этомъ принято:

$$\theta(u) =$$

$$= b_1(u-a_2)\cdots(u-a_k)+b_2(u-a_1)(u-a_3)\cdots(u-a_k)+\cdots$$

$$\cdots+b_k(u-a_1)\cdots(u-a_{k-1})+\varsigma(u-a_1)\cdots(u-a_{k-1})+(u-a_1)\cdots$$

$$\cdots(u-a_{k-2})\,[(\lambda_1-k)(x_1-a_k)+(\lambda_2-1)(x_2-a_k)+\cdots$$

$$\cdots+(\lambda_m-1)(x_m-a_k)]+(u-a_1)\cdots$$

$$\cdots(u-a_{k-3})\,[(\lambda_1-k)(x_1-a_k)(x_1-a_{k-1})+\cdots$$

$$\cdots+(\lambda_m-1)(x_m-a_k)(x_m-a_{k-1})]+\cdots. \tag{103}$$

$$[(\lambda_1-k)(x_1-a_k)(x_1-a_{k-1})\cdots(x_1-a_2)+(\lambda_2-1)(x_2-a_k)\cdots$$

$$\cdots(x_2-a_2)+\cdots(\lambda_m-1)(x_m-a_k)\cdots(x_m-a_2)];$$

$$\vartheta(u) = (u-a_1)(u-a_2)\cdots(u-a_k); \tag{104}$$

$$\varsigma = \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m-n; \tag{105}$$

$$\Lambda = (u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}(u-x_1)^{\lambda_1-k-1}(u-x_2)^{\lambda_2-2}\cdots \tag{106}$$
$$\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-2}.$$

Разлагая $\theta(u)$ по строкѣ Тэйлора, находимъ:

$$\theta(u) = \theta(x_1) + \frac{u-x_1}{1}\theta'(x_1)+\cdots+\frac{(u-x_1)}{1\cdot 2\cdots(k-1)}\theta^{(k-1)}(x_1). \tag{107}$$

Въ силу этой послѣдней формулы, а также (106) соотношенію (102) дадимъ видъ:

$$\frac{dG_1(u)}{du} =$$
$$= \theta(x_1)(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}(u-x_1)^{\lambda_1-k}(u-x_2)^{\lambda_2-1}\cdots$$
$$\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-1}+$$
$$+\frac{\theta'(x_1)}{1}(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}(u-x_1)^{\lambda_1-k+1}(u-x_2)^{\lambda_2-1}\cdots$$
$$\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-1}+$$
$$+\frac{\theta''(x_1)}{1.2}(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}(u-x_1)^{\lambda_1-k+2}(u-x_2)^{\lambda_2-1}\cdots$$
$$\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-1}+$$

. . . .

. . . .

$$+\frac{\theta^{(k-1)}(x_1)}{1\cdot 2\cdots(k-1)}(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}(u-x_1)^{\lambda_1-1}(u-x_2)^{\lambda_2-1}\cdots$$
$$\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-1}+$$
$$+(\lambda_1-k)\,\vartheta(x_1)(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}(u-x_1)^{\lambda_1-k-1}(u-x_2)^{\lambda_2-1}\cdots$$
$$\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-1}+$$
$$+(\lambda_2-1)\,\vartheta(x_2)(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}(u-x_1)^{\lambda_1-k}(u-x_2)^{\lambda_2-2}\cdots$$
$$\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-1}+ \tag{108}$$

. . . .

. . . .

$$+(\lambda_m-1)\,\vartheta(x_m)\,(x-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}(u-x_1)^{\lambda_1-k}(u-x_2)^{\lambda_2-1}\cdots$$
$$\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-2}.$$

Умноживъ обѣ части соотношенія (108) на du и взявъ отъ полученнаго результата интегралъ по дозволенному пути L, будемъ имѣть:

$$+(\lambda_1-k)\,\vartheta(x_1)\int_L(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}(u-x_1)^{\lambda_1-k-1}(u-x_2)^{\lambda_2-1}\cdots$$
$$\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-1}\,du\,+$$

$$+(\lambda_2-1)\,\vartheta(x_2)\int_L(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}(u-x_1)^{\lambda_1-k}(u-x_2)^{\lambda_2-2}$$
$$(u-x_3)^{\lambda_3-1}\cdots du\,+$$

. . . .

. . . .

$$+(\lambda_m-1)\,\vartheta(x_m)\int_L(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}(u-x_1)^{\lambda_1-k}(u-x_2)^{\lambda_2-1}\cdots$$
$$\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-2}\,du\,+$$

$$+\,\theta(x_1)\int_L(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}(u-x_1)^{\lambda_1-k}(u-x_2)^{\lambda_2-1}\cdots$$
$$\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-1}\,du\,+$$

$$+\frac{\theta'(x_1)}{1}\int_L(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_k)^{b_k-1}(u-x_1)^{\lambda_1-k+1}(u-x_2)^{\lambda_2-1}\cdots$$
$$(109)\qquad\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-1}\,du\,+$$

. . . .

. . . .

$$\frac{\theta^{(k-1)}(x_1)}{1\cdot2\cdots(k-1)}\int_L(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}(u-x_1)^{\lambda_1-1}\cdots$$
$$\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-1}\,du=0.$$

Въ виду (1), этому соотношенію можно дать видъ:

$$\vartheta(x_1)\frac{\partial^k z}{\partial x_1^{\,k}}+\vartheta(x_2)\frac{\partial^k z}{\partial x_1^{\,k-1}\partial x_2}+\cdots+\vartheta(x_m)\frac{\partial^k z}{\partial x_1^{\,k-1}\partial x_m}-$$

$$- \theta(x_1) \frac{\partial^{k-1} z}{\partial x_1^{k-1}} + (\lambda_1 - k + 1) \frac{\theta'(x_1)}{1 \cdot 2} \frac{\partial^{k-2} z}{\partial x_1^{k-2}} - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^k (\lambda_1 - 1)_{k-1} \frac{\theta^{(k-1)}(x_1)}{1 \cdot 2 \cdots (k-1)} z = 0. \tag{110}$$

Изъ этого уравненія получается еще $m-1$ уравненій чрезъ взаимное перемѣщеніе буквъ: x_1 и x_2, λ_1 и λ_2; x_1 и x_3, λ_1 и λ_3; $\cdots$; x_1 и x_m, λ_1 и λ_m.

Эти m уравненій, а также (77) представляютъ полную систему уравненій, которымъ удовлетворяютъ интегралы вида (1).

То же самое соотношеніе (109) приводитъ насъ также къ m уравненіямъ въ конечныхъ разностяхъ, которымъ удовлетворяетъ интегралъ:

$$U_{z_1, z_2, \cdots, z_m} = \int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-\alpha_1)^{z_1-1} \cdots$$
$$\cdots (u-\alpha_m)^{z_m-1} du, \tag{111}$$

гдѣ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ суть нѣкоторыя постоянныя.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая въ соотношеніи (109):

$$x_1 = \alpha_1, \; x_2 = \alpha_2, \; \cdots, \; x_m = \alpha_m;$$
$$\lambda_1 - k = z_1, \; \lambda_2 - k = z_2, \cdots \lambda_m - k = z_m, \tag{112}$$

будемъ имѣть:

$$z_1 \vartheta(\alpha_1) \int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-\alpha_1)^{z_1-1} (u-\alpha_2)^{z_2+k-1} \cdots$$
$$\cdots (u-\alpha_m)^{z_m+k-1} du +$$
$$+ (z_2+k-1) \vartheta(a_2) \int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-\alpha_1)^{z_1} (u-\alpha_2)^{z_2+k-2} \cdots$$
$$\cdots (u-\alpha_m)^{z_m+k-1} du +$$

. . . .

. . . .

$$+ (z_m+k-1) \vartheta(\alpha_m) \int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-\alpha_1)^{z_1} (u-\alpha_1)^{z_2+k-1} \cdots$$
$$\cdots (z-\alpha_m)^{z_m+k-2} du +$$
$$+ \theta_1(\alpha_1) \int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-\alpha_k)^{b_k-1} (u-\alpha_1)^{z_1} (u-\alpha_2)^{z_2+k-1} \cdots$$
$$\cdots (u-\alpha_m)^{z_m+k-1} du +$$

$$+\theta_1'(\alpha_1)\int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}(u-\alpha_1)^{z_1+1}(u-\alpha_2)^{z_2+k-1}\cdots$$
$$\cdots(u-\alpha_m)^{z_m+k-1}\,du+$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$+\frac{\theta_1^{(k-1)}(\alpha_1)}{1.2\cdots(k-1)}\int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}(u-\alpha_1)^{z_1+k-1}\cdots$$
$$\cdots(u-\alpha_m)^{z_m+k-1}\,du=0, \tag{113}$$

гдѣ $\theta_1(u)$ есть $\theta(u)$ послѣ замѣны въ немъ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ чрезъ z_1, $z_2, \cdots, z_m$ по формуламъ (112).

Принимая во вниманіе (111), соотношеніе (113) представимъ въ слѣдующей формѣ:

$$z_1\,\vartheta(\alpha_1)\,U_{z_1,\,z_2+k,\,\cdots,\,z_m+k}+(z_2+k-1)\,\vartheta(\alpha_2)\,U_{z_1+1,\,z_2+k-1,\,\cdots,\,z_m+k}+\cdots$$
$$\cdots+(z_m+k-1)\,\vartheta(\alpha_m)\,U_{z_1+1,\,z_2+k,\,\cdots,\,z_m+k-1}+\theta_1(\alpha_1)\,U_{z_1+1,\,z_2+k,\,\cdots,\,z_m+k}+$$
$$+\frac{\theta_1'(\alpha_1)}{1}\,U_{z_1+2,\,z_2+k,\,\cdots,\,z_m+k}+\cdots$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$+\frac{\theta_1^{(k-1)}(\alpha_1)}{1.2\cdots(k-1)}\,U_{z_1+k,\,z_2+k,\,\cdots,\,z_m+k}=0. \tag{114}$$

Изъ этого уравненія получается еще $m-1$ чрезъ взаимное перемѣщеніе количествъ: α_1 и α_2, z_1 и z_2; α_1 и α_3, z_1 и z_3; $\cdots$; α_1 и α_m, z_1 и z_m.

Эти уравненія вмѣстѣ съ (99) составляютъ полную систему уравненій, которымъ удовлетворяетъ интегралъ (111). Легко написать полный интегралъ этой системы.

Въ заключеніе этой главы, укажемъ одно соотношеніе. Обозначимъ чрезъ z_1 слѣдующій интегралъ:

$$z_1 = \tag{115}$$
$$=\int\limits_L (u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_k)^{b_k-1}(u-x_1)^{\lambda_1-1}\cdots(u-x_m)^{\lambda_m-1}\,\theta_p(u)\,du,$$

гдѣ $\theta_p(u)$ представляетъ полиномъ степени p, коэффиціенты котораго суть произвольныя функціи отъ $x_1, x_2, \cdots, x_m$.

Тогда по пріему предыдущей главы находимъ слѣдующую формулу:

$$z_1 = A_0 z + A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + A_m \frac{\partial z}{\partial x_m} + B_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} +$$

$$+ B_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + \cdots + B_s \frac{\partial^2 z}{\partial x_m^2} +$$

. . . .

. . . .

$$+ L_1 \frac{\partial^{k-1} z}{\partial x_1^{k-1}} + L_2 \frac{\partial^{k-1} z}{\partial x_1^{k-2} \partial x_2} + \cdots + L_\lambda \frac{\partial^{k-1} z}{\partial x_m^{k-1}}, \tag{116}$$

гдѣ $A, B, \cdots, L$ суть нѣкоторыя функціи $x_1, x_2, \cdots, x_m$, которыя безъ труда опредѣляются по способу, указанному въ предшествующей главѣ. Пользуясь формулой (116), можно найти полную систему $\frac{m(m+1)}{2}$ уравненій, которымъ удовлетворяетъ функція (115).

ГЛАВА IV.

Интегралъ $\int\limits_L e^W (u-a_1)^{b_1-1} \dots (u-a_k)^{b_k-1} (u-\alpha_1)^{\lambda_1-1} \dots (u-\alpha_m)^{\lambda_m-1} (u-x)^{\lambda-1} du$ и его свойства. Дифференціальное линейное уравненіе, которому удовлетворяетъ этотъ интегралъ. Связь между этимъ уравненіемъ и линейнымъ уравненіемъ въ конечныхъ разностяхъ съ линейными цѣлыми коэффиціентами. Интегрированіе этого послѣдняго посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ во всѣхъ случаяхъ. Интегралъ $\int\limits_L e^W (u-a_1)^{b_1-1} \dots (u-a_k)^{b_k-1} (u-\alpha_1)^{d_1-1} \dots (u-\alpha_e)^{d_e-1} (u-x_1)^{\varkappa_1-1} \dots$ $\dots (u-x_m)^{\lambda_m-1} du$ и его свойства. Полная система дифференціальныхъ линейныхъ уравненій, которымъ удовлетворяетъ этотъ интегралъ. Дифференціальныя нелинейныя уравненія, полные интегралы которыхъ зависятъ отъ опредѣленныхъ интеграловъ. Полная система уравненій въ конечныхъ частныхъ разностяхъ, частные интегралы которыхъ выражаются въ формѣ:
$\int\limits_L e^W (u-a_1)^{b_1-1} \dots (u-a_k)^{b_k-1} (u-\alpha_1)^{d_1-1} \dots (u-\alpha_e)^{d_e-1} (u-\beta_1)^{\varepsilon_1-1} \dots (u-\beta_m)^{\varepsilon_m-1} du.$

§ 1.

Здѣсь мы обобщимъ результаты предыдущихъ двухъ главъ. Предварительно займемся изслѣдованіемъ интеграла:

(1) $$y =$$
$$= \int_L e^W (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-\alpha_1)^{\lambda_1-1} \cdots (u-\alpha_m)^{\lambda_m-1} (u-x)^{\lambda-1} du,$$

гдѣ принято:

$$W = \theta_p(u) + \frac{\beta_1'}{(u-\alpha_1)} + \frac{\beta_2'}{(u-\alpha_1)^2} + \cdots + \frac{\beta_{s_1}'}{(u-\alpha_1)^{s_1}} +$$
$$+ \frac{\beta_1''}{u-\alpha_2} + \frac{\beta_2''}{(u-\alpha_2)^2} + \cdots + \frac{\beta_{s_2}''}{(u-\alpha_2)^{s_2}} +$$
. . . .
. . . .

(2) $$+ \frac{\beta_1^{(m)}}{u-\alpha_m} + \frac{\beta_2^{(m)}}{(u-\alpha_m)^2} + \cdots + \frac{\beta_{s_m}^{(m)}}{(u-\alpha_m)^{s_m}}.$$

Замѣтимъ, что $b_1, b_2, \cdots, b_k, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m, a_1, a_2, \cdots, a_k, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1', \beta_2', \cdots, \beta_{s_m}^{(m)}$ суть постоянныя; $s_1, s_2, \cdots, s_m$ суть цѣлыя положительныя числа; $\theta_q(u)$ представляетъ полиномъ степени q съ постоянными коэффиціентами вида:

(3) $$\theta_q(u) = A_0 x^q + A_1 x^{q-1} + \cdots + A_q.$$

Показатели $b_1, b_2, \cdots, b_k, \lambda_1, \cdots, \lambda_m$ и λ на первыхъ порахъ будемъ предполагать отличными отъ цѣлыхъ чиселъ или нуля; тому же условію пусть удовлетворяетъ и сумма этихъ количествъ.

При выборѣ пути интеграціи будемъ имѣть въ виду четыре требованія, которыя были указаны въ § 1 главы II. Въ число таковыхъ путей прежде всего войдутъ пути съ двойными обходами, огибающіе точки $a_1, a_2, \cdots, a_k, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$. Но эти послѣдніе не исчерпываютъ всѣхъ дозволенныхъ путей въ плоскости перемѣннаго u. Есть еще въ этой плоскости иные пути, которые, удовлетворяя вышеуказаннымъ четыремъ требованіямъ, должны быть приняты какъ дозволенные. Эти пути связаны съ существенно особыми точками $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ и ∞ подъинтегральной функціи:

(4) $$\theta(u) =$$
$$= e^W (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-\alpha_1)^{\lambda_1-1} \cdots (u-\alpha_m)^{\lambda_m-1} (u-x)^{\lambda-1},$$

и для нихъ построенія поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Обратимъ вниманіе на какую-либо существенно особую конечную точку функціи $\theta(u)$, напр.: на α_1. Положимъ:

$$u-\alpha_1=\rho_1 e^{\varphi_1 i};$$

$$\beta'_{s_1}=r_1 e^{\psi_1 i}. \tag{5}$$

Тогда членъ въ W, содержащій наивысшую степень $\frac{1}{u-\alpha_1}$, представится такъ:

$$\frac{\beta_{s_1}}{(u-\alpha_1)^{s_1}}=r_1\rho_1^{-s_1}e^{-(s_1\varphi_1-\psi_1)i}. \tag{6}$$

Если u станетъ приближаться къ α_1, то, смотря по направленію послѣдняго элемента его пути, W будетъ стремиться или къ положительной, или же отрицательной безконечности. Насъ интересуютъ лишь такіе пути перемѣннаго u, которые приводятъ W къ отрицательной безконечности. Найти ихъ можно слѣдующимъ образомъ. Дѣйствительная часть $e^{-(s_1\varphi_1-\psi_1)i}$ обращается въ нуль, очевидно, при значеніяхъ φ_1, опредѣляемыхъ уравненіемъ:

$$\psi_1-s_1\varphi_1=-\frac{(2k+1)\pi}{2}. \tag{7}$$

Отсюда находимъ:

$$\varphi_1=\frac{\psi_1+(k+\frac{1}{2})\pi}{s_1}. \tag{7'}$$

Давая k значенія: $0, 1, 2, \cdots, 2s_1-1$, получимъ для φ_1 рядъ количествъ:

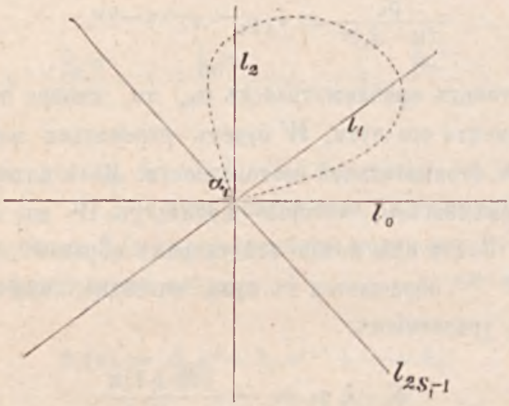
$$\varphi_1=\frac{\psi_1+\frac{\pi}{2}}{s_1},\quad \frac{\psi_1+\frac{3\pi}{2}}{s_1},\ \cdots,\ \frac{\psi_1+\frac{4s_1-1}{2}}{s_1}. \tag{7''}$$

Проведемъ изъ точки α_1 $2s_1$ прямыхъ, направленія которыхъ опредѣляются величинами φ_1 (7″). (См. черт. 16).

Эти прямыя въ послѣдовательномъ порядкѣ обозначены чрезъ $l_0, l_1, l_2, \cdots, l_{2s_1-1}$.

Ясно, что искомыми областями будутъ углы $l_0 l_1, l_2 l_3, \cdots, l_{2s_1-2} l_{2s_1-1}$. Значитъ, W будетъ стремиться къ $-\infty$, если u, приближаясь къ α_1, все время будетъ оставаться внутри одного изъ этихъ s_1 угловъ. Всякій путь, который выходитъ изъ точки α_1 внутри одного какого-либо изъ этихъ угловъ u, не встрѣчая особыхъ точекъ функціи $\theta(u)$ и не пересѣкая самого себя, возвращается къ той же точкѣ внутри другого изъ этихъ угловъ, можетъ считаться дозволеннымъ. Мы особенно отмѣчаемъ пути такого рода, которые внутри себя не содержатъ особыхъ точекъ $\theta(u)$, и будемъ называть таковые простыми дозволенными

Черт. 16.



путями. На чертежѣ 16 представленъ одинъ изъ такихъ путей. Условимся углы $l_0\, l_1$, $l_2\, l_3$, $\cdots$, $l_{2s_1-2}\, l_{2s_1-1}$ короче обозначать такъ: 0, 1, 2, $\cdots$, $s_1 - 1$. Далѣе, простой путь, выходящій изъ α_1 внутри k и приводящій въ α_1 внутри l, будемъ обозначать чрезъ $(kl)_{\alpha_1}$. Самый же интегралъ, взятый по этому пути, условимся называть: $[(kl)]_{\alpha_1}$.

Построеніе, выполненное нами для точки α_1, примѣняется къ любой изъ конечныхъ существенно особыхъ точекъ функціи $\theta(u)$. Такъ что простыми дозволенными путями для точки α_q, гдѣ q равно любому изъ чиселъ 1, 2, 3, $\cdots$, m, оказываются $(kl)_{\alpha_q}$, гдѣ k и l могутъ принимать любыя различныя значенія 0, 1, 2, 3, $\cdots$, $s_q - 1$.

Кромѣ указанныхъ, возможны еще другіе дозволенные пути. Такъ, всякій путь, идущій изъ точки α_q внутри какого-либо изъ дозволенныхъ угловъ (такъ будемъ называть углы 0, 1, 2, $\cdots$, $s_q - 1$) и приводящій въ точку α_p, гдѣ $p \neq q$, не пересѣкая самого себя и не встрѣчая особыхъ точекъ $\theta(u)$, также внутри какого-либо дозволеннаго угла, можетъ быть принятъ нами какъ искомый. Таковой путь согласимся обозначать чрезъ $(kl)_{\alpha_q}^{\alpha_p}$, а интегралъ, взятый по нему, чрезъ $[(kl)]_{\alpha_q}^{\alpha_p}$. Точно также путь, выходящій изъ α_q внутри дозволеннаго угла, который, огибая одну или нѣсколько конечныхъ особыхъ точекъ $\theta(u)$ и не встрѣчая таковыхъ точекъ, возвращается въ точку α_q внутри того же самаго угла, можетъ считаться дозволеннымъ путемъ.

Если $q \neq 0$, т. е., $\theta_q(u)$ есть полиномъ, а не постоянное, то $u = \infty$ является также существенно особою точкою функціи $\theta(u)$. Тогда возникаетъ вопросъ объ изысканіи дозволенныхъ путей, связанныхъ съ этой послѣдней. Для этого мы поступаемъ такъ же, какъ это мы дѣлали съ точками $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$.

Пусть будетъ:

$$u = Re^{\Phi i};$$
$$A_0 = re^{\varphi i}. \tag{8}$$

Старшій членъ полинома $\theta_q(u)$ поэтому напишется такъ:

$$A_0 u^q = R^q r\, e^{(q\Phi+\varphi)i}. \tag{9}$$

Полагая:

$$q\Phi+\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{2}, \tag{10}$$

найдемъ значеніе Φ, для котораго дѣйствительная часть выраженія (9) обращается въ нуль:

$$\Phi = \frac{\frac{(2k+1)\pi}{2}-\varphi}{q}. \tag{10'}$$

Дозволенные углы и пути для $u = \infty$ отмѣчаются такъ же, какъ и для точекъ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$. Эти углы будемъ обозначать чрезъ 0, 1, 2, $\cdots$, $q-1$. Простой путь, выходящій изъ $u = \infty$ внутри угла k и идущій къ той же самой точкѣ внутри угла l, условимся обозначать чрезъ $(kl)_{\infty}$. Далѣе, интегралъ, взятый по этому пути, будемъ писать такъ: $[(kl)]_{\infty}$. Путь же, выходящій изъ $u = \infty$ внутри угла k и входящій въ точку α_q внутри угла l, будемъ называть $(kl)_{\infty}^{\alpha_q}$, а интегралъ, взятый по этому пути, $[(kl)]_{\infty}^{\alpha_q}$.

Кромѣ представленныхъ, возможны еще иные пути. Такъ, всякій путь, выходящій изъ любой существенно особой точки функціи $\theta(u)$ внутри дозволеннаго угла и, огибая одну или нѣсколько точекъ a_1, $a_2, \cdots, \alpha_m$, возвращающійся въ ту же точку внутри того же угла, оказывается дозволеннымъ.

Замѣтимъ, что пути съ двойными обходами имѣютъ общее начало c. Что же касается до значеній подъинтегральной функціи на прочихъ путяхъ, то они устанавливаются при помощи вспомогательныхъ линій, идущихъ къ этимъ путямъ изъ c, какъ это выяснено на стр. 61—62 работы П. А. Некрасова: „Линейныя дифференціальныя уравненія и проч.“.

Обозначимъ далѣе чрезъ n слѣдующее число:

$$n = k+q+(s_1+1)+(s_2+1)+\cdots+(s_m+1). \tag{11}$$

Легко обнаружить, что между дозволенными интегралами существуетъ n такихъ, что всѣ прочіе выражаются чрезъ нихъ линейными и однородными формулами съ постоянными коэффиціентами.

За таковые можно принять слѣдующіе:

$$[(a_1\, a_2\, \bar{a}_1\, \bar{a}_2)],\ [(a_1\, a_3\, \bar{a}_1\, \bar{a}_3)],\ \cdots,\ [(a_1\, a_k\, \bar{a}_1\, \bar{a}_k)],\ [(a_1\, x\, \bar{a}_1\, \bar{x})];$$

$$[(a_1\, \alpha_1\, \bar{a}_1\, \bar{\alpha}_1)],\ [(01)]_{\alpha_1},\ [(12)]_{\alpha_1},\ \cdots,\ [(s_1-2\ s_1-1)]_{\alpha_1},\ [(s_1-1\,0)]_{\alpha_1};$$

. . . .

. . . .

$$[(a_1\, \alpha_m\, \bar{a}_1\, \bar{\alpha}_m)],\ [(01)]_{\alpha_m},\ [(12)]_{\alpha_m},\ \cdots,\ [(s_m-2\ s_m-1)]_{\alpha_m},\ [(s_m-1\,0)]_{\alpha_m};$$

$$[(01)]_\infty,\ [(12)]_\infty,\ \cdots,\ [(q-2\ q-1)]_\infty,\ [(q-1\,0)]_\infty. \tag{12}$$

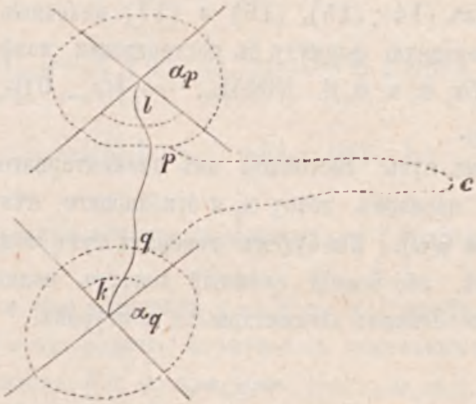
Убѣдиться въ этомъ не представляетъ трудности. Прежде всего интегралъ $[(L_1\, L_2\, \bar{L}_1\, \bar{L}_2)]$, гдѣ L_1 и L_2 представляютъ сложные контуры съ общимъ началомъ c, огибающіе точки $a_1, a_2, \cdots, a_k$, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$, выражается чрезъ интегралы $[(a_1\, a_2\, \bar{a}_1\, \bar{a}_2)], \cdots,$ $\cdots, [(a_1\, a_k\, \bar{a}_1\, \bar{a}_k)]$, $[(a_1\, \alpha_1\, \bar{a}_1\, \bar{\alpha}_1)]$, $\cdots$, $[(a_1\, x\, \bar{a}_1\, \bar{x})]$ линейными и однородными формулами съ постоянными коэффиціентами, — въ этомъ мы убѣждаемся по пріему, изложенному въ главѣ II.

Далѣе, всякій интегралъ вида $[(kl)]_{\alpha_q}$ можетъ быть представленъ суммой интеграловъ:

$$[(kl)]_{\alpha_q} = [(k\,k+1)]_{\alpha_q} + [(k+1\;k+2)]_{\alpha_q} + \cdots + [(l-1\;l)]_{\alpha_q}. \qquad (13)$$

Разсмотримъ теперь интегралъ $[(kl)]_{\alpha_q}^{\alpha_p}$. Представимъ на чертежѣ пути $(kl)_{\alpha_q}^{\alpha_p}$ и $(\alpha_p\,\alpha_q\,\overline{\alpha}_p\,\overline{\alpha}_q)$.

Черт. 17.



Допустимъ при этомъ, что между путями $(\alpha_p\,\alpha_q\,\overline{\alpha}_p\,\overline{\alpha}_q)$ и $(kl)_{\alpha_q}^{\alpha_p}$ нѣтъ особыхъ точекъ функціи $\theta(u)$. Пользуясь формулою (7) главы II, имѣемъ:

$$[(\alpha_p\,\alpha_q\,\overline{\alpha}_p\,\overline{\alpha}_q)] =$$

$$= (1-e^{2\pi\lambda_q i})\int\limits_{(K_{\alpha_p})}\theta(u)\,du - (1-e^{2\pi\lambda_p i})\int\limits_{(K_{\alpha_q})}\theta(u)\,du +$$

$$+ (1-e^{2\pi\lambda_p i})\,(1-e^{2\pi\lambda_q i})\int\limits_{q'}^{p'}\theta(u)\,du. \qquad (14)$$

Очевидно, что правая часть (14) сохранитъ свое значеніе, если точки p' и q' сближаимъ съ α_p и α_q внутри угловъ l и k. Тогда будемъ имѣть:

$$\int\limits_{(K_{\alpha_q})}\theta(u)\,du = [(k\,k+1)]_{\alpha_q} + [(k+1\;k+2)]_{\alpha_q} + \cdots + [(k-1\;k)]_{\alpha_q}; \qquad (15)$$

(16) $$\int\limits_{(K_{\alpha_p})} \theta(u)\,du = [(l\ l+1)]_{\alpha_p} + [(l+1\ l+2)]_{\alpha_p} + \cdots + [(l-1\ l)]_{\alpha_p}.$$

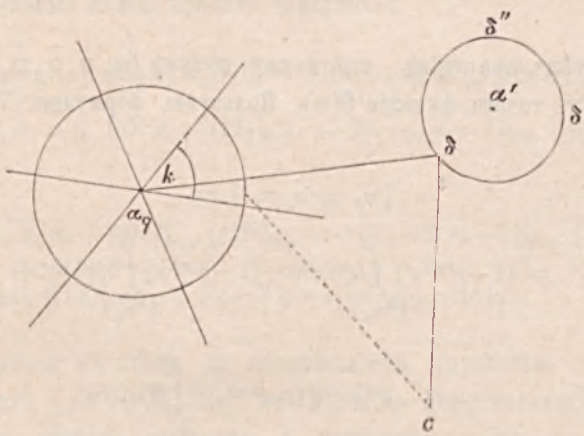
Далѣе:

(17) $$lim. \int\limits_{q'}^{p'} \theta(u)\,du = [(kl)]_{\alpha_q}^{\alpha_p}.$$

Изъ формулъ (14), (15), (16) и (17) находимъ $[(kl)]_{\alpha_q}^{\alpha_p}$ какъ линейную и однородную формулу съ постоянными коэффиціентами отъ интеграловъ: $[(\alpha_p\ \alpha_q\ \bar{\alpha}_p\ \bar{\alpha}_q)]$, $[(01)]_{\alpha_q}$, ..., $[(s_{q-1}\ 0)]_{\alpha_q}$, $[(01)]_{\alpha_p}$, ..., ..., $[(s_p - 10)]_{\alpha_p}$.

Разсмотримъ путь, состоящій изъ элементарнаго контура, имѣющаго своимъ началомъ точку α_q и огибающаго нѣкоторую особую точку α' функціи $\theta(u)$. Мы будемъ говорить тутъ только объ элементарномъ контурѣ, ибо всякій сложный контуръ эквивалентенъ, очевидно, суммѣ нѣсколькихъ элементарныхъ контуровъ.

Черт. 18.



Построимъ также путь съ двойнымъ обходомъ $(\alpha'\ \alpha_q\ \bar{\alpha}'\ \bar{\alpha}_q)$. При этомъ предположимъ, что между этими путями нѣтъ особыхъ точекъ функціи $\theta(u)$.

Имѣемъ:

(18) $$[(\alpha'\ \alpha_q\ \bar{\alpha}'\ \bar{\alpha}_q)] = (1 - e^{2\pi\lambda_q i})\,[(\alpha')] - (1 - e^{2\pi\lambda' i})\,[(\alpha_q)],$$

гдѣ $e^{2\pi\lambda' i}$ есть множитель, который принимаетъ $\theta(u)$ послѣ обхода перемѣннаго u точки α' въ положительномъ направленіи. Такъ какъ интегралъ $[(\alpha'\, \alpha_q\, \overline{\alpha'}\, \overline{\alpha_q})]$ не зависитъ отъ начала c (въ этомъ убѣждаетъ насъ формула (14)), то точку c можно привести въ совпаденіе съ точкой α_q, заставивъ ее приближаться къ α_q внутри дозволеннаго угла k. Въ предѣлѣ мы будемъ имѣть:

$$[(\alpha'\, \alpha_q\, \overline{\alpha'}\, \overline{\alpha_q})] =$$

$$= (1-e^{2\pi\lambda_q i}) \int_{\alpha_q}^{(\alpha')} \theta(u)\, du - (1-e^{2\pi\lambda' i}) \left\{ [(01)]_{\alpha_q} + \right.$$

$$\left. + [(12)]_{\alpha_q} + \cdots + [(s_q-10)]_{\alpha_q} \right\}. \tag{19}$$

Отсюда находимъ искомое выраженіе для $\int_{\alpha_q}^{(\alpha')} \theta(u)\, du$. Далѣе, безъ труда убѣждаемся, что интегралъ $[(\infty\, \alpha'\, \overline{\infty}\, \overline{\alpha'})]$ можетъ быть представленъ линейною и однородною формулой съ постоянными коэффиціентами отъ интеграловъ: $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$, $\cdots$, $[(a_1\, a_k\, \overline{a_1}\, \overline{a_k})]$, $[(a_1\, \alpha_1\, \overline{a_1}\, \overline{\alpha_1})]$, $\cdots$, $[(a_1\, \alpha_m\, \overline{a_1}\, \overline{\alpha_m})]$ и $[(a_1\, x\, \overline{a_1}\, \overline{x})]$.

Отсюда легко выразить дозволенный интегралъ $\int_{\infty}^{(\alpha')} \theta(u)\, du$ по формулѣ вида (19).

Всѣ эти результаты подтверждаютъ основныя свойства системы интеграловъ (12). Само собою разумѣется, что такая система какъ (12) не единственная, — основныхъ системъ интеграловъ множество. Случай, когда нѣкоторыя изъ количествъ $b_1, b_2, \cdots, b_k, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ являются цѣлыми отрицательными числами или нулями, не требуетъ особаго изслѣдованія въ виду тѣхъ результатовъ, которые добыты нами въ § 4 главы II. На случаѣ же, когда нѣкоторыя изъ этихъ количествъ суть цѣлыя положительныя числа, впослѣдствіи мы еще нѣсколько остановимъ свое вниманіе.

§ 2.

Въ послѣдующихъ изслѣдованіяхъ мы будемъ имѣть въ виду преимущественно основные интегралы (12). Въ настоящемъ параграфѣ мы рѣшимъ вопросъ о характерѣ измѣняемости этихъ интеграловъ на всей плоскости независимаго перемѣннаго u въ зависимости отъ непрерывнаго измѣненія x. Для этой цѣли мы прибѣгаемъ къ методу П. А. Некрасова, о чемъ была рѣчь въ двухъ предыдущихъ главахъ. Построеніе стержней мы допускаемъ прежнее. Стержень a_1, a_2, $\cdots$, a_k, α_1, α_2, $\cdots$, α_m неподвижны; подвижнымъ является только стержень x.

Мы не станемъ изслѣдовать тутъ тѣхъ интеграловъ (12), которые берутся по путямъ съ двойными обходами, такъ какъ этотъ вопросъ можно считать рѣшеннымъ въ §§ 5 и 6 главы II. Наше вниманіе займутъ лишь прочіе интегралы основной системы (12). Но изъ этихъ послѣднихъ, очевидно, достаточно объизслѣдовать въ намѣченномъ направленіи только два, напр.: $[(kl)]_{\alpha_q}$ и $[(kl)]_{\infty}$, такъ какъ прочіе изъ интеграловъ (12) подходятъ подъ эти два типа.

Остановимся предварительно на интегралѣ $[(kl)]_{\alpha_q}$. Соображенія, одинаковыя съ тѣми, которыя были представлены нами въ §§ 5 и 6 главы II, убѣждаютъ насъ, что любая точка плоскости перемѣннаго u, не совпадающая съ особою точкою функціи $\theta(u)$, оказывается простою точкой разсматриваемаго интеграла. Значитъ, намъ надо изслѣдовать характеръ особыхъ точекъ функціи $\theta(u)$.

Возьмемъ какую-либо особую точку α' функціи $\theta(u)$, отличную отъ α_q. Предположимъ, что стержень x совершилъ около α' обходъ въ положительномъ направленіи. При этомъ мы допускаемъ, что внутри пути Λ, которое пробѣгаетъ перемѣнное x, нѣтъ иныхъ особыхъ точекъ, кромѣ α'. Тогда окажется слѣдующее. Подъинтегральная функція (опредѣленная вѣтвь ея) $\theta(u)$ въ концѣ движенія приметъ свое первоначальное значеніе $\theta_0(c)$. Что же касается до пути интеграціи $(kl)_{\alpha_q}$, то онъ или не измѣнится, или же претерпитъ консервативную деформацію. Въ виду этихъ двухъ результатовъ, интегралъ $[(kl)]_{\alpha_q}$ не измѣнитъ своего аналитическаго выраженія. Отсюда слѣдуетъ, что въ области точки α' и, слѣдовательно, въ области любой изъ конечныхъ особыхъ точекъ, кромѣ α_q, функціи $\theta(u)$, интегралъ $[(kl)]_{\alpha_q}$ представляетъ функцію однозначную. Далѣе, совершенно простыми соображеніями удостовѣряемся, что для точки α' интегралъ $[(kl)]_{\alpha_q}$ представляетъ функцію непрерывную, конечную и имѣетъ опредѣленную производную. Все это убѣждаетъ насъ, что α' и, значитъ, любая изъ особыхъ конечныхъ точекъ $\theta(u)$, помимо α_q, оказывается простою точкой для $[(kl)]_{\alpha_q}$.

Остается теперь изслѣдовать характеръ точекъ α_q и ∞. Пусть стержень x совершитъ обходъ въ положительномъ направленіи около стержня α_q. Тогда путь интеграціи $(kl)_{\alpha_q}$ останется безъ перемѣны. Подъинтегральная же функція приметъ множитель $e^{2\pi\lambda_q i}$. А посему новое значеніе интеграла будетъ $e^{2\pi\lambda_q i}[(kl)]_{\alpha_q}$. Отсюда слѣдуетъ, что α_q представляетъ особую точку для $[(kl)]_{\alpha_q}$. Характеръ этой точки таковъ, что, послѣ дѣленія $[(kl)]_{\alpha_q}$ на $(x-\alpha_q)^{\lambda_q}$, эта функція въ ея области однозначна. Безконечно удаленная точка плоскости u является также особою, такъ какъ послѣ обхода около нея перемѣннымъ x въ положительномъ направленіи интегралъ $[(kl)]_{\alpha_q}$ принимаетъ множитель $e^{-2\pi\lambda_q i}$. Итакъ, единственными особыми точками функціи $[(kl)]_{\alpha_q}$ оказывается α_q и ∞. Аналогичныя разсужденія приводятъ насъ къ заключенію, что особою точкою интеграла $[(kl)]_\infty$ служитъ лишь $x=\infty$.

Для полной характеристики интеграловъ (12), намъ надо еще найти ихъ разложенія въ области ихъ особыхъ точекъ. Но мы не станемъ заниматься разложеніемъ интеграловъ $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$, $[(a_1\, a_3\, \overline{a_1}\, \overline{a_3})]$, $\cdots$, $[(a_1\, \alpha_m\, \overline{a_1}\, \overline{\alpha_m})]$ и $[(a_1\, x\, \overline{a_1}\, \overline{x})]$, ибо это было бы въ сущности повтореніемъ того, что было дано въ § 7 главы II. Насъ интересуютъ въ этомъ отношеніи лишь остальные интегралы (12). Но и тутъ мы ограничимся разсмотрѣніемъ только $[(kl)]_{\alpha_q}$ и $[(kl)]_\infty$.

Интегралъ $[(kl)]_{\alpha_q}$, какъ знаемъ, имѣетъ своими особыми точками α_q и ∞. Для полученія его разложенія для точки α_q, поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Имѣемъ:

$$[(kl)]_{\alpha_q} =$$

$$= (-1)^{\lambda-1}(x-\alpha_q)^{\lambda-1}\int\limits_L e^W(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-\alpha_m)^{\lambda_m-1}\left(1-\frac{u-\alpha_q}{x-\alpha_q}\right)^{\lambda-1}du =$$

$$= (-1)^{\lambda-1}(x-\alpha_q)^{\lambda-1}\left\{\int\limits_L e^W(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-\alpha_m)^{\lambda_m-1}du -\right.$$

$$\left. -\frac{[\lambda-1]_1}{x-\alpha_q}\int\limits_L e^W(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-\alpha_q)^{\lambda_q}\cdots du+\cdots\right\} =$$

$$= (x-\alpha_q)^{\lambda-1}\left[\Phi(0)+\frac{1}{x-\alpha_q}\Phi(1)+\frac{1}{(x-\alpha_q)^2}\Phi(2)+\cdots\right]. \qquad (20)$$

При этомъ положено:

(21) $$\Phi(l) = (-1)^{\lambda+l-1}[\lambda-1]_l \int\limits_L e^W (u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-\alpha_q)^{\lambda_q+l-1}\cdots du;$$

(22) $$\left|\frac{u-\alpha_q}{x-\alpha_q}\right| < 1.$$

Далѣе, тотъ же самый интегралъ можетъ быть написанъ такъ:

$$[(kl)]_{\alpha_q} =$$

$$= (-1)^{\lambda-1} x^{\lambda-1} \int\limits_L e^W (u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-\alpha_m)^{\lambda_m-1}(1-\frac{u}{x})^{\lambda-1}du =$$

$$= (-1)^{\lambda-1} x^{\lambda-1} \Big\{ \int\limits_L e^W (u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-\alpha_q)^{\lambda_q-1}\cdots du -$$

$$- \frac{[\lambda-1]_1}{x} \int\limits_L e^W u(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-\alpha_q)^{\lambda_q-1}\cdots du + \cdots \Big\} =$$

(23) $$= x^{\lambda-1}\left[F(0) + \frac{F(1)}{x} + \frac{F(2)}{x^2} + \cdots\right],$$

гдѣ принято:

(24) $$\left|\frac{u}{x}\right| < 1;$$

$$F(l) =$$

(25) $$= (-1)^{\lambda-1}[\lambda-1]_l \int\limits_L e^W u^l (u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-\alpha_m)^{\lambda_m-1}du.$$

Перейдемъ теперь къ интегралу $[(kl)]_\infty$. Для полученія его разложенія въ области единственной его особой точки $x=\infty$, поступаемъ такъ:

$$[(kl)]_\infty =$$

$$= \int\limits_L e^W u^{\lambda-1}(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-\alpha_m)^{\lambda_m-1}(1-\frac{x}{u})^{\lambda-1}du =$$

(26) $$= \int\limits_L e^W u^{\lambda-1}(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-\alpha_m)^{\lambda_m-1}du -$$

$$-[\lambda-1]_1\, x \int\limits_L e^W u^{\lambda-2} (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-\alpha_m)^{\lambda_m-1}\, du + \cdots$$

$$= F(0) + x\, F(1) + x^2\, F(2) + \cdots$$

При этомъ положено:

$$\left| \frac{u}{x} \right| > 1; \tag{27}$$

$$F(l) =$$

$$= (-1)^l\, [\lambda-1]_l \int\limits_L e^W u^{\lambda-l-1} (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-\alpha_m)^{\lambda_m-1}\, du. \tag{28}$$

Такимъ образомъ вопросъ о представленіи интеграловъ (12) и, слѣдовательно, всякаго дозволеннаго интеграла въ области его особыхъ точекъ можемъ считать рѣшеннымъ.

§ 3.

Изслѣдованія предыдущаго параграфа обнаруживаютъ, что всякій дозволенный интегралъ (1), послѣ всевозможныхъ обходовъ перемѣннаго x около особыхъ его точекъ, принимаетъ новое аналитическое значеніе, которое выражается чрезъ основные интегралы (12) линейными и однородными формулами съ постоянными коэффиціентами. Опираясь на теорему Таннери, о которой у насъ уже была рѣчь, заключаемъ, что всякій дозволенный интегралъ удовлетворяетъ дифференціальному линейному уравненію съ однозначными коэффиціентами. При этомъ порядокъ уравненія есть n. Для составленія этого уравненія, поступаемъ по тому же пріему, которому мы слѣдовали въ главѣ II при нахожденіи гипергеометрическаго уравненія L. Pochhammer'а.

Обозначимъ чрезъ $g(u)$ слѣдующую функцію:

$$g(u) = e^W (u-a_1)^{b_1} \cdots (u-a_k)^{b_k} (u-\alpha_1)^{s_1+\lambda_1} \cdots (u-x)^{\lambda-n}. \tag{29}$$

Взявъ производную отъ обѣихъ частей этого соотношенія по u, будемъ имѣть:

$$\frac{dg(u)}{du} =$$

$$= e^W (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-\alpha_1)^{\lambda_1-1} \cdots$$

$$(u-x)^{\lambda-n-1} \left[R(u)\,(u-x)+(\lambda-n)\,Q(u)\right]. \tag{30}$$

При этомъ принято:

$$R(u) = \theta_q'(u)\,(u-a_1)\cdots(u-a_k)\cdots(u-\alpha_1)^{s_1+1}\cdots(u-\alpha_m)^{s_m+1}+$$

$$+\,Q_p(u)\,(u-a_1)\cdots(u-a_k)+b_1\,(u-a_2)\cdots(u-a_k)\,(u-\alpha_1)^{s_1+1}\cdots$$

$$\cdots(u-\alpha_m)^{s_m+1}+\cdots+b_k\,(u-a_1)\cdots(u-a_{k-1})\,(u-\alpha_1)^{s_1+1}\cdots$$

$$(u-\alpha_m)^{s_m+1}+(\lambda_1+s_1)\,(u-a_1)\cdots(u-a_k)\,(u-\alpha_k)\,(u-\alpha_1)^{s_1}\,(u-\alpha_2)^{s_2+1}\cdots$$

$$\cdots(u-\alpha_m)^{s_m+1}+$$

. . . .

. . . .

$$(\lambda_m+s_m)\,(u-a_1)\cdots(u-a_k)\,(u-\alpha_1)^{s_1+1}\cdots(u-\alpha_m)^{s_m}; \tag{31}$$

$$Q(u) = (u-a_1)\cdots(u-a_k)\,(u-\alpha_1)^{s_1+1}\cdots(u-\alpha_m)^{s_m+1}; \tag{32}$$

$$Q_p(u) = -\left\{(u-\alpha_2)^{s_2+1}\cdots(u-\alpha_m)^{s_m+1}\left[\beta_1'\,(u-\alpha_1)^{s_1-1}+\cdots+s_1\,\beta_{s_1}'\right]+\right.$$

$$+\,(u-\alpha_1)^{s_1+1}\cdots(u-\alpha_m)^{s_m+1}\left[\beta_1''\,(u-\alpha_2)^{s_2-1}+\cdots+s_2\,\beta_{s_2}''\right]+$$

. . . .

. . . .

$$\left.(u-\alpha_1)^{s_1+1}\cdots(u-\alpha_{m-1})^{s_{m-1}+1}\left[\beta_1^{(m)}\,(u-\alpha_m)^{s_m-1}+\cdots+s_m\,\beta_{s_m}'\right]\right\}; \tag{32'}$$

$$p = s_1+s_2+\cdots+s_m+m-2. \tag{33}$$

Разлагая $R(u)\,(u-x)+(\lambda-n)\,Q(u)$ въ рядъ Тэйлора, соотношенію (30) даемъ видъ:

$$\frac{dg(u)}{du} =$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n}\left[\frac{R^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}+(\lambda-n)\,\frac{Q^{(k)}(x)}{k!}\right] e^W\,(u-a_1)^{b_1-1}\cdots \tag{34}$$

$$\cdots(u-\alpha_1)^{\lambda_1-1}\cdots(u-x)^{\lambda+k-n-1},$$

Изъ соотношенія (34) находимъ:

$$\sum_{k=0}^{k=n}\left[\frac{R^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}+(\lambda-n)\frac{Q^{(k)}(x)}{k!}\right]\int_L e^W(u-a_1)^{b_1-1}\cdots \tag{35}$$

$$\cdots(u-x)^{\lambda+k-n-1}\,du=0.$$

Принимая во вниманіе (1), послѣдней формулѣ дадимъ видъ:

$$\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k(\lambda-n+k-1)\cdots(\lambda-n)\left[\frac{R^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}+\right. \tag{36}$$

$$\left.+(\lambda-n)\frac{Q^{(k)}(x)}{k!}\right]\frac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}}=0.$$

Полученное уравненіе есть не что иное, какъ уравненіе C. Jordan'a *).

Въ предыдущемъ мы предполагали показатели b_1, b_2, $\cdots$, b_k, λ_1, λ_2, $\cdots$ λ_m и λ отличными отъ цѣлыхъ чиселъ и нуля. Но, видоизмѣняя пути съ двойными обходами, какъ это было выяснено въ § 4 главы II, можемъ допустить, что интегралы вида (1) удовлетворяютъ уравненію (36) и въ томъ случаѣ, когда нѣкоторыя изъ этихъ показателей представляютъ числа цѣлыя отрицательныя или нули.

Остановимся нѣсколько на случаѣ, когда нѣкоторыя изъ этихъ показателей суть цѣлыя положительныя числа. Интегралъ (1) тогда можетъ быть представленъ въ формѣ:

$$y_1=\int_L e^W(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_m)^{\lambda_m-1}(u-x)^{\lambda-1}\varphi_p(u)\,du, \tag{37}$$

гдѣ $\varphi_p(u)$ — полиномъ степени p относительно u, коэффиціенты котораго будемъ считать произвольными функціями x.

Поступая по извѣстному способу, эту функцію можемъ выразить чрезъ y по формулѣ:

---

*) Cours d'Analyse, t. III (1887), p. 241.

(38) $$y_1 = A'_n\, y + A'_{n-1} \frac{dy}{dx} + \cdots + A_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

гдѣ A'_n, A'_{n-1}, $\cdots$, A_1 суть функціи отъ x, опредѣляемыя по методу, изложенному нами въ главѣ II. Въ свою очередь и y можетъ быть выражено чрезъ y_1 по формулѣ:

(39) $$y = B'_n\, y_1 + B'_{n-1} \frac{dy_1}{dx} + \cdots B'_1 \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}},$$

гдѣ B'_n, B'_{n-1}, $\cdots$, B'_1 также нѣкоторыя функціи x, опредѣляемыя по тому же самому методу.

Соотношеніе (35) легко приводитъ къ линейному уравненію въ конечныхъ разностяхъ съ линейными цѣлыми коэффиціентами, по существу болѣе общее, чѣмъ то, которое дано нами въ § 9 главы II. Полагаемъ для этой цѣли:

$$\lambda - n = z;$$

(40) $$x = \alpha.$$

Тогда равенство (35) напишется такъ:

(41) $$\sum_{k=0}^{k=n} \left[\frac{R^{(k-1)}(\alpha)}{(k-1)!} + z \frac{Q^{(k)}(\alpha)}{k!} \right] \int_L e^W (u-a_1)^{b_1-1} \cdots$$
$$\cdots (u-\alpha_m)^{\lambda_m-1} (u-\alpha)^{z+k-1}\, du = 0.$$

Если теперь положимъ:

(42) $$U_z = \int_L e^W (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_k)^{b_k-1} (u-\alpha_1)^{\lambda_1-1} \cdots$$
$$\cdots (u-\alpha_m)^{\lambda_m-1} (u-\alpha)^{z-1}\, du,$$

то будемъ имѣть:

(43) $$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{R^{(k-1)}(\alpha)}{(k-1)!} + z \frac{Q^{(k)}(\alpha)}{k!} \Big] U_{z+k} = 0,$$

или:

$$z\,Q(\alpha)\,U_z+\left[R(\alpha)+z\frac{Q'(\alpha)}{1}\right]U_{z+1}+\left[\frac{R'(\alpha)}{1}+z\frac{Q''(\alpha)}{1\cdot 2}\right]U_{z+2}+\cdots$$

$$\cdots+\left[\frac{R^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}+z\frac{Q^{(n)}(\alpha)}{n!}\right]U_{z+n}=0. \qquad (43')$$

Въ случаѣ, если ни одинъ изъ показателей $b_1, b_2, \cdots, b_k, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ и λ не есть цѣлое положительное число, то общій интегралъ уравненія $(43')$ напишется въ формѣ:

$$U_z=C_1\int_c^{(a_1\ \alpha\ a_1\ \overline{\alpha})} e^W(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-\alpha)^{z-1}\,du+\cdots$$

$$\cdots+C_k\int_c^{(a_1\ \alpha\ a_1\ \alpha)} e^W(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-\alpha)^{z-1}\,du\cdots \qquad (44)$$

$$\cdots C_{k+1}\underset{\lambda=z,\,x=\alpha}{[(01)]}+\cdots+C_n\underset{\lambda=z,\,x=\alpha}{[(q-10)]_\infty},$$

гдѣ $C_1, C_2, \cdots, C_n$ произвольныя постоянныя или произвольныя періодическія функціи съ періодомъ единица.

§ 4.

Въ § 10 главы II нами былъ данъ способъ интегрировать уравненіе:

$$B_0\,x\,U_n+(A_1+B_1x)\,U_{x+1}+\cdots+(A_n+B_nx)\,U_{x+n}=0 \qquad (45)$$

въ томъ случаѣ, когда полиномъ $B_0+B_nx+B_2x^2+\cdots+B_nx^n$ не имѣетъ равныхъ корней. Но, пользуясь результатами, добытыми нами въ концѣ предшествующаго параграфа, съ помощью однѣхъ алгебраическихъ операцій можемъ объинтегрировать его также и въ томъ случаѣ, когда корни вышеуказаннаго многочлены кратны.

Предварительно разсмотримъ слѣдующее уравненіе:

$$B_0x\,U_x+(A_1+B_1x)\,U_{x+1}+(A_2+B_2x)\,U_{x+2}+$$
$$+(A_3+B_3x)\,U_{x+3}=0. \qquad (46)$$

Полагаемъ:

$$B_3\,z^3+B_2\,z^2+B_1\,z+B_0=B_3\,(z-\delta_1)\,(z-\delta_2)^2. \qquad (47)$$

Уравненіе (43′) для разсматриваемаго случая приметъ видъ:

$$x\,Q(\alpha)\,U_x+\left[R(\alpha)+x\frac{Q'(\alpha)}{1}\right]U_{x+1}+\left[\frac{R'(\alpha)}{1}+x\frac{Q''(\alpha)}{1\cdot 2}\right]U_{x+2}+$$

$$(48)\qquad +\left[\frac{R''(\alpha)}{1\cdot 2}+x\frac{Q'''(\alpha)}{1\cdot 2\cdot 3}\right]U_{x+3}=0.$$

Сопоставляя уравненія (46) съ (48), можемъ написать:

$$(49)\qquad \frac{Q(\alpha)}{B_0}=\frac{Q'(\alpha)}{B_1}=\frac{Q''(\alpha)}{2B_2}=\frac{Q'''(\alpha)}{6B_3}=$$

$$=\frac{R(\alpha)}{A_1}=\frac{R'(\alpha)}{A_2}=\frac{R''(\alpha)}{2A_3}=\lambda,$$

или:

$$(49')\qquad \begin{array}{l|l} Q(\alpha)=B_0\lambda; & R(\alpha)=A_1\lambda; \\ Q'(\alpha)=B_1\lambda; & R'(\alpha)=A_2\lambda; \\ Q''(\alpha)=2B_2\lambda; & R''(\alpha)=2A_3\lambda. \\ Q'''(\alpha)=6B_3\lambda. & \end{array}$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ функція $Q(u)$ степени третьей, а $R(u)$ второй. Ясно также, что цѣлая функція $\theta_q(u)$ представляетъ постоянную величину. Изъ послѣдняго соотношенія налѣво (49′) слѣдуетъ, что $\lambda=\frac{1}{B_3}$. А посему изъ соотношеній (49′) налѣво находимъ:

$$(50)\qquad Q(\alpha)+(z-\alpha)\frac{Q'(\alpha)}{1}+\frac{(z-\alpha)^2}{1\cdot 2}Q''(\alpha)+\frac{(z-\alpha)^3}{1\cdot 2\cdot 3}Q'''(\alpha)=$$

$$=\frac{B_0}{B_3}+(z-\alpha)\frac{B_1}{B_3}+(z-\alpha)^2\frac{B_2}{B_3}+(z-\alpha)^3,$$

или:

$$(50')\qquad Q(z)=(z-\alpha-\delta_1)(z-\alpha-\delta_2)^2.$$

Принимая во вниманіе составъ $Q(z)$ (32), изъ соотношенія (50′) находимъ;