3418
7+a

ИЗВѢСТІЯ

ВАРШАВСКАГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКАГО ИНСТИТУТА
ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II.

ВЫПУСКЪ I.—1900 г.

ВАРШАВА.

ВЪ ТИПОГРАФІИ ВАРШАВСКАГО УЧЕБНАГО ОКРУГА,
Краковское-Предмѣстье № 3.

1900

Печатано по опредѣленію Совѣта Варшавскаго Политехническаго Института Императора Николая II.

Директоръ *А. Лагоріо.*

СОДЕРЖАНІЕ.

Редакторъ *И. И. Иванюковъ*

ОФФИЦІАЛЬНЫЙ ОТДѢЛЪ.

ОТЧЕТЪ

о состоянiи Варшавскаго Политехническаго Института ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II

за 1898—1899 и 1899—1900 учебные годы.

ВЫСОЧАЙШЕЕ повелѣнiе объ открытiи Варшавскаго Политехническаго Института Императора Николая II состоялось 8 Iюня 1898 года и вслѣдъ затѣмъ начался прiемъ прошенiй отъ лицъ, желающихъ поступить въ Институтъ. Всего подано было 621 прошенiе. Такъ какъ число желающихъ поступить въ Институтъ значительно превышало число вакансiй на I-мъ курсѣ, то были назначены во второй половинѣ августа состязательныя испытанiя по математикѣ, физикѣ и русскому языку въ объемѣ гимназическаго курса. Къ этимъ испытанiямъ явилось 359 лицъ, изъ коихъ по комплекту было принято 250 человѣкъ, и такъ какъ большая часть изъ оставшихся непринятыми удовлетворила условiямъ прiема, то было исходатайствовано разрѣшенiе Господина Министра Финансовъ о принятiи 17 лицъ сверхъ комплекта. Такимъ образомъ всего было принято 267 человѣкъ, а именно:

на механическое отдѣленiе. . . .	111
„ инженерно-строительное . . .	94
„ химическое	62
Итого. . . .	267 чел.

Освященiе временнаго помѣщенiя и открытiе Института состоялось 4 Сентября 1898 года. На торжественное открытiе прибыли: Главный Начальникъ Края, Директоръ Департамента Торговли и Мануфактуръ, Дѣйствительный Статскiй Совѣтникъ В. И.

Ковалевскій, высшіе гражданскіе и военные чины, а также представители мѣстныхъ торгово-промышленныхъ сферъ не только изъ Варшавы, но и изъ Лодзи и Сосновицъ. На торжественномъ актѣ открытія Института были произнесены рѣчи Главнымъ Начальникомъ Края, Директоромъ Департамента Торговли и Мануфактуръ и Директоромъ Института А. Е. Лагоріо.

Въ слѣдующій затѣмъ день, 5 сентября, начались лекціи и прочія учебныя занятія на всѣхъ отдѣленіяхъ Института во временномъ помѣщеніи—въ зданіи любезно уступленномъ Институту Дѣйствительнымъ Статскимъ Совѣтникомъ Бліохомъ впредь до устройства собственнаго помѣщенія Института. Въ этомъ зданіи были устроены 2 большихъ аудиторіи для слушанія лекцій, читаемыхъ одновременно нѣсколькимъ отдѣленіямъ, и нѣсколько малыхъ аудиторій, далѣе:—химическая лабораторія, физическій, механическій, геодезическій, минералогическій и ботаническій кабинеты, а также чертежныя и рисовальныя залы.

1898—1899 учебный годъ.

Личный составъ Института.

Въ 1898—1899 учебномъ году въ Институтѣ состояли на службѣ слѣдующіе лица:

1. Директоръ, онъ же ординарный профессоръ Института по каѳедрѣ геологіи и минералогіи, докторъ минералогіи и геогнозіи *А. Е. Лагоріо.*

Ординарные профессора:

2. По каѳедрѣ химіи—докторъ химіи, Ординарный Профессоръ Императорскаго Варшавскаго Университета *Е. Е. Вагнеръ.*

3. По каѳедрѣ теоретической механики—докторъ прикладной математики, Ординарный Профессоръ Императорскаго Варшавскаго Университета *П. О. Сомовъ.*

4. По каѳедрѣ математики—доктора чистой математики, Ординарные Профессора Императорскаго Варшавскаго Университета *В. А. Анисимовъ* и *Г. Ѳ. Вороной.*

Штатные преподаватели:

5. Черченія—Инженеръ Технологъ *С. А. Окольскій.*

6. Рисованія—Классный Художникъ первой степени *Э. В. Невдомскій.*

7. Архитектурнаго черченія—Военный Инженеръ *С. А. Забо-ровскій.*

Временные преподаватели по найму:

8. Неорганической химіи — магистръ химіи, Экстраординарный Профессоръ Императорскаго Варшавскаго Университета *И. И. Бевадъ.*

9. Ботаники — докторъ ботаники, Ординарный Профессоръ Императорскаго Варшавскаго Университета *В. И. Палладинъ.*

10. Геодезіи — кандидатъ физико-математическихъ наукъ, окончившій геодезическое отдѣленіе Николаевской Академіи Генеральнаго Штаба, Генералъ Маіоръ *С. Д. Рыльке.*

11. Физики—кандидатъ физико-математическихъ наукъ *В. А. Бернацкій.*

12. Начертательной геометріи—кандидатъ физико-математическихъ наукъ *Э. В. Гляссъ.*

13. Математики—окончившій физико-математическій факультетъ Императорскаго С.-Петербургскаго Университета *Д. Д. Мордухай-Болтовской.*

14. Теоретической механики—магистрантъ прикладной математики Императорскаго Варшавскаго Университета *Д. А. Гонтаревъ.*

15. Черченія—Военный Топографъ, Подполковникъ *П. И. Добровольскій.*

16. Французскаго языка—Баккалавръ филологическихъ наукъ Дижонской Академіи *К. А. Перу.*

17. Нѣмецкаго языка—Ординарный Профессоръ Императорскаго Варшавскаго Университета, магистръ филологіи *О. Ѳ. Базинеръ.*

Штатные лаборанты:

18. Старшій — *К. С. Славинскій.*
19. Младшій — *А. Ѳ. Флеровъ.*

Временные лаборанты по найму:

По химіи:
20. *В. В. Лавровъ* и 21. *А. К. Семеновъ.*

22. Инспекторъ Студентовъ *К. Н. Капустинъ.*
23. Его Помощникъ *И. А. Максименко.*
24. Библіотекарь *Е. П. Добржинскій.*
25. Его Помощникъ *Г. О. Чайковскій.*

26. Смотритель зданій *Л. М. Киткинъ.*
27. Дѣлопроизводитель *В. О. Конашинскій.*
28. Его Помощникъ *Ѳ. Е. Малицкій.*
29. Бухгалтеръ *Л. Я. Радзивановскій.*
30. Его Помощникъ *А. А. Терещенко.*
31. Врачъ *Б. Н. Корыбутъ-Дашкевичъ.*
и 32. Фельдшеръ *С. К. Зярекъ.*

И. о. Декановъ были назначены—механическаго и инженерно-строительнаго отдѣленій—ординарный профессоръ П. О. Сомовъ и химическаго отдѣленія—ординарный профессоръ Е. Е. Вагнеръ, при чемъ профессоръ Сомовъ исполнялъ обязанности декана безвозмездно.

Правленіе Института состояло, подъ предсѣдательствомъ Директора, изъ 2 ординарныхъ профессоровъ, назначенныхъ и. о. декановъ и Инспектора студентовъ. Оно имѣло въ отчетномъ году 42 засѣданія.

Совѣтъ Института, подъ предсѣдательствомъ Директора, въ составѣ всѣхъ наличныхъ профессоровъ Института, имѣлъ 11 засѣданій.

Секретаремъ Совѣта временно былъ назначенъ ординарный профессоръ В. А. Анисимовъ.

Преподаваніе.

Въ I-мъ полугодіи 1898—1899 акад. года.

А. На соединенныхъ отдѣленіяхъ механическомъ и инженерно-строительномъ преподавались:

1. Высшая математика (алгебраическій анализъ, аналитическая геометрія, дифференціальное и интегральное исчисленіе) при 6 часахъ въ недѣлю, — ординарными профессорами Института Г. Ѳ. Воронымъ и В. А. Анисимовымъ.

2. Физика, при 3 часахъ въ недѣлю, — временнымъ преподавателемъ Института В. А. Бернацкимъ.

3. Теоретическая механика, при 3 часахъ въ недѣлю, ординарнымъ профессоромъ Института П. О. Сомовымъ.

4. Начертательная геометрія, при 4 часахъ въ недѣлю, —временнымъ преподавателемъ Э. В. Гляссомъ.

5. Геодезія, при 2 часахъ въ недѣлю,—временнымъ преподавателемъ, Начальникомъ Съемки Юго-Западнаго Пограничнаго Пространства, Генералъ-Маіоромъ С. Д. Рыльке.

6. Химія, при 3 часахъ въ недѣлю,—ординарнымъ профессоромъ Института Е. Е. Вагнеромъ.

Для занятій черченіемъ и рисованіемъ студенты означенныхъ

2 отдѣленій были раздѣлены на 6 группъ. Руководство занятіями каждой группы поручалось преподавателямъ, которые могли посвящать достаточно времени для занятій съ каждымъ изъ слушателей отдѣльно.

Для занятій черченіемъ было назначено 6 часовъ, а для рисованія 4 часа въ каждой группѣ. Руководство занятіями по черченію было поручено штатному преподавателю С. А. Окольскому и временнымъ преподавателямъ — С. А. Заборовскому и П. И. Добровольскому. Занятіями по рисованію руководилъ штатный преподаватель Э. В. Невядомскій.

Практическія упражненія на каждомъ изъ означенныхъ отдѣленій, при 3 группахъ, велись: по математикѣ, 2 часа въ недѣлю,— временнымъ преподавателемъ Д. Д. Мордухай-Болтовскимъ, подъ руководствомъ ординарныхъ профессоровъ Вороного и Анисимова; по механикѣ, 2 часа въ недѣлю, — временнымъ преподавателемъ Д. А. Гонтаревымъ, подъ руководствомъ ординарнаго профессора П. О. Сомова, и по начертательной геометріи, 1 часъ въ недѣлю,— временнымъ преподавателемъ Э. В. Гляссомъ.

Б. На химическомъ отдѣленіи преподавались слѣдующіе предметы:

1. Высшая математика, при 4 часахъ въ недѣлю,—ординарнымъ профессоромъ Института В. А. Анисимовымъ.

2. Физика, при 4 часахъ въ недѣлю,—временнымъ преподавателемъ Института В. А. Бернацкимъ.

3. Начертательная геометрія, при 2 часахъ въ недѣлю, —временнымъ преподавателемъ Института Э. В. Гляссомъ.

4. Химія, при 4 часахъ въ недѣлю,—профессоромъ Императорскаго Варшавскаго Университета, преподавателемъ Института И. И. Бевадомъ.

5. Ботаника, при 2 часахъ въ недѣлю, ординарнымъ профессоромъ Императорскаго Варшавскаго Университета, преподавателемъ Института В. И. Палладинымъ.

6. Кристаллографія, при 1 часѣ въ недѣлю,—ординарнымъ профессоромъ Института А. Е. Лагоріо.

Занятіями по черченію на означенномъ отдѣленіи, при 2 группахъ, руководилъ штатный преподаватель Института С. А. Окольскій—по 4 часа въ недѣлю для каждой группы.

Практическія упражненія на этомъ отдѣленіи происходили по математикѣ, начертательной геометріи, кристаллографіи, ботаникѣ и физикѣ съ раздѣленіемъ студентовъ на 2 группы. Означенныя упражненія велись для каждой группы: по математикѣ ординарнымъ профессоромъ Института В. А. Анисимовымъ -2 часа въ недѣлю (безъ дѣленія на группы), по начертательной геометріи—временнымъ преподавателемъ Э. В. Глясcомъ по 1 часу, по кристаллографіи—ординарнымъ профессоромъ А. Е. Лагоріо—по 1 часу, по ботаникѣ—профессоромъ—преподавателемъ Института В. И. Палладинымъ — по 1 часу, по физикѣ — временнымъ преподавателемъ В. А. Берпацкимъ—по 3 часа.

Во 2-мъ полугодіи 1898—1899 акад. года.

Продолжались лекціи и практическія занятія, начатыя въ 1898 году, при чемъ профессоръ Вагнеръ продолжалъ чтеніе лекцій по химіи совмѣстно студентамъ I курса механическаго и инженерно-строительнаго отдѣленій по 4 часа въ недѣлю.

На инженерно-строительномъ отдѣленіи началось чтеніе лекцій по общимъ началамъ строительнаго искусства, при 4 часахъ въ недѣлю, ординарнымъ профессоромъ Института, Гражданскимъ Инженеромъ В. І. Дейчъ. Онъ же продолжалъ чтеніе лекцій по геодезіи, при 2 часахъ въ недѣлю, студентамъ I курса механическаго и инженерно-строительнаго отдѣленій.

Переходныя испытанія начались 10 мая, причемъ, нѣкоторые студенты, по уважительнымъ причинамъ, Совѣтомъ были оставлены на 2-й годъ,—другимъ были отложены экзамены на осень. Такимъ образомъ переведено студентовъ на II курсъ:

	Переведено на II курсъ.	Оставлено на 2-й годъ на I к.	Всего студентовъ.
Механическаго отдѣленія . .	85	5	90
Инженерно-строительнаго . .	51	14	65
Химическаго	41	1	42
Итого .	177	20	197

Лѣтняя геодезическая практика происходила подъ руководствомъ ординарнаго профессора В. І. Дейчъ и преподавателя П. И. Добровольскаго въ іюнѣ мѣсяцѣ, въ окрестностяхъ посада Гродискъ,—для студентовъ механическаго отдѣленія съ 1 по 10 іюня, для инженерно-строительнаго—съ 11 до конца мѣсяца.

На механическомъ отдѣленіи студенты раздѣлены были на 9 группъ отъ 9—10 человѣкъ въ группѣ; всего участвовало въ занятіяхъ 84 человѣка. Каждая группа студентовъ выполнила слѣдующія задачи:

1. Съемка обходомъ астролябіей участка, площадью не меньше 100 десятинъ (1 кв. вер.), съ нанесеніемъ полигона на бумагу по транспортиру, въ масштабѣ 50 саж. въ 1 дюймѣ.

2. Съемка подробностей внутри контура: главнѣйшихъ — астролябіей и эккеромъ съ цѣпью, второстепенныхъ — глазомѣрно.

3. Мензульная съемка подробностей внутри контура, неснятыхъ другими инструментами.

4. Нивеллировка по контуру или по средней дорогѣ, замкнутымъ ходомъ, на протяженіи не меньше двухъ верстъ, съ составленіемъ профиля.

На инженерно-строительномъ отдѣленіи студенты были раздѣлены на 6 группъ, по 7—9 человѣкъ въ группѣ; всего принимали участіе 44 студента. Практиканты выполнили слѣдующія задачи:

1. Съемка обходомъ астролябіей полигона, площадью до 200 десятинъ (2 кв. версты), съ нанесеніемъ полигона на бумагу въ масшт. 50 саж. въ 1 дюймѣ по вычисленнымъ координатамъ вершинъ полигона, по магнитному меридіану.

2. Съемка подробностей внутри полигона съ астролябіей, эккеромъ съ цѣпью и глазомѣрно.

3. Геометрическая тріангуляція на мензулѣ съ кипрегелемъ на площади I-го планшета (4 кв. версты при масштабѣ 50 саж. въ 1 дюймѣ).

4. Нивеллировка по заданному направленію на протяженіи 1 версты, съ пикетами черезъ 50 саж., съ промежуточными точками и съ обратнымъ повѣрочнымъ ходомъ.

Достоинство работы каждой группы повѣрялось смыканіемъ полигоновъ, имѣющихъ общія границы, и сличеніемъ подробностей по планамъ механическаго и инженерно-строительнаго отдѣленій, такъ какъ оба отдѣленія работали въ одной и той же мѣстности. Результатомъ такого сличенія является сборный планъ съемокъ, предъявленный въ Совѣтъ и выполненный двумя студентами Института въ масштабѣ 100 саж. въ 1 дюймѣ.

Для повѣрки степени участія въ занятіяхъ каждаго студента, помимо непосредственнаго руководства занятіями, служилъ экзаменъ практическаго характера по представляемымъ отчетамъ для каждой группы въ отдѣльности; на такомъ экзаменѣ студентамъ предлагались вопросы, касающіеся практики съемокъ, степени знакомства съ снятою мѣстностью и съ тѣми пріемами, при помощи которыхъ была снята на планъ та или другая подробность. Какъ показываетъ опытъ, такое собесѣдованіе даетъ вполнѣ ясное представленіе о томъ, въ какой мѣрѣ практикующійся принималъ участіе въ общей работѣ, а слѣдовательно выясняетъ, въ какой степени онъ освоился съ практическими пріемами геодезіи.

Служебныя перемѣны.

Въ личномъ составѣ Института за отчетное время произошли слѣдующія перемѣны.

А. Назначены:

1. Ординарнымъ Профессоромъ по каѳедрѣ строительнаго искусства, по отдѣлу гидротехническихъ сооруженій, адъюнктъ-профессоръ Ново-Александрійскаго Института В. І. Дейчъ.

Б. Утверждены:

Временный преподаватель архитектурнаго черченія С. А. Заборовскій штатнымъ преподавателемъ Института по предмету строительной механики и графической статики.

В. Умеръ.

Временный преподаватель геодезіи, Начальникъ съемки Юго-Западнаго пограничнаго пространства, Генеральнаго Штаба Генералъ-Маіоръ С. Д. Рыльке.

Командировки.

Для подготовленія къ преподавательской дѣятельности были командированы, съ начала учебнаго года, въ Россію и за границу 8 лицъ, а именно:

1. Инженеръ-Технологъ В. К. Задарновскій, подготовляющійся къ преподаванію технологіи волокнистыхъ веществъ.

2. Кандидатъ естественныхъ наукъ В. И. Исаевъ, подготовляющійся къ преподаванію химической технологіи (съ исключеніемъ технологіи красильныхъ веществъ, нефти и сухой перегонки дерева).

3. Кандидатъ математическихъ наукъ, Инженеръ-Технологъ А. Я. Касьминъ, подготовляющійся къ преподаванію прикладной механики (паровыя машины и котлы).

4. Инженеръ-Технологъ М. И. Лисянскій, подготовляющійся къ преподаванію заводскихъ машинъ, а также машинъ и орудій для обработки металловъ и дерева.

5. Технологъ, докторъ Женевскаго Университета, Д. А. Хардинъ, подготовляющійся къ преподаванію химической технологіи (производство пигментовъ, окрашиваніе и печатаніе тканей, технологія нефти и сухой перегонки дерева).

6. Кандидатъ физико-математическихъ наукъ И. Ѳ. Чорба, подготовляющійся къ преподаванію практической механики (гидравлика и подъемныя машины).

7. Кандидатъ естественныхъ наукъ Г. І. Ерчиковскій, подготовляющійся къ преподаванію физико-химіи и электро-химіи.

8. Военный Инженеръ С. А. Заборовскій, подготовляющійся къ преподаванію строительной механики и графической статики.

Кромѣ того въ теченіе отчетнаго времени были командированы съ ученою цѣлью какъ въ Россію, такъ и за границу, слѣдующія лица:

1. Ординарный профессоръ Е. Е. Вагнеръ,—за границу для осмотра химическихъ лабораторій, на зимнее вакаціонное время.

2. Ординарный профессоръ В. I. Дейчъ,—въ Воронежскую губ., для организаціи работъ по окончанію устройства опытнаго орошенія въ Каменной Степи, на мѣсяцъ съ 20 Іюля 1899 г.

3. Преподаватель В. А. Бернацкій—за границу, для пріобрѣтеній по оборудованію физическаго кабинета, на срокъ съ 20 Іюля по 15 августа 1898 г.

4. Штатный преподаватель С. А. Окольскій—за границу съ ученою цѣлью, для ознакомленія съ постановкой преподаванія машиностроенія и черченія машинъ, а также для осмотра важнѣйшихъ машиностроительныхъ и механическихъ заводовъ, на лѣтнее вакаціонное время.

5. Лаборантъ А. Ѳ. Флеровъ—за границу въ г. Цюрихъ, для основательнаго ознакомленія съ методами химическаго изслѣдованія растеній, а также для доставленія свѣдѣній о постановкѣ дѣла въ бактеріологическихъ лабораторіяхъ высшихъ спеціальныхъ учебныхъ заведеній заграницей, на срокъ съ 1 мая по 1 сентября 1899 г.

6. Лаборантъ К. С. Славинскій—за границу для ознакомленія съ постановкой практическихъ занятій по органической химіи въ спеціальныхъ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ, на срокъ съ 15 мая по 15 августа 1899 года.

1899—1900 учебный годъ.

Съ 15 Іюня 1899 года начался пріемъ прошеній отъ лицъ, желающихъ поступить въ Институтъ.

Въ теченіе періода времени, назначеннаго для пріема упомянутыхъ прошеній, поступило 611 прошеній, въ томъ числѣ отъ 11 лицъ, имѣющихъ право быть принятыми безъ экзамена. На основаніи письменныхъ состязательныхъ испытаній по русскому языку и математикѣ и устныхъ по физикѣ, было пряняно въ число студентовъ 270 человѣкъ. Къ 1 Января 1900 года на 2 курсахъ всѣхъ 3 отдѣленій числилось студентовъ:

Отдѣленія	Общее число студентовъ.		
	I курсъ	II курсъ	Итого.
Механическое.	101	93	194
Инженерно-строительное.	107	49	156
Химическое	64	48	112
Всего. . .	272	190	462

Личный составъ.

Въ личномъ составѣ за отчетное время произошли слѣдующія перемѣны:

А. Назначены:

1. Ординарнымъ профессоромъ по каѳедрѣ прикладной механики—докторъ прикладной математики Н. Б. Делоне.

2. Экстраординарнымъ профессоромъ по каѳедрѣ химіи—магистръ химіи В. А. Солонина.

3. Штатнымъ преподавателемъ политической экономіи—докторъ политической экономіи и статистики—профессоръ И. И. Иванюковъ.

4. Штатнымъ преподавателемъ черченія — гражданскій инженеръ Л. С. Васильевъ.

5. Штатнымъ преподавателемъ рисованія—художникъ 3-й степени І. К. Маньковскій.

6. Временными преподавателями черченія—военный инженеръ В. Н. Короткевичъ-Почевной и инженеръ-механикъ В. К. Рофе.

7. Временнымъ преподавателемъ по деталямъ машинъ—инженеръ-технологъ А. Я. Касьминъ.

8. Штатнымъ преподавателемъ геодезіи и руководителемъ практическими занятіями по математикѣ — магистрантъ астрономіи, младшій астрономъ-наблюдатель обсерваторіи Императорскаго Варшавскаго Университета В. Э. Эренфейхтъ.

9. Вретеннымъ руководителемъ практическими занятіями по химіи—кандидатъ физико-математическихъ наукъ В. И. Стржембошъ.

10. Старшими лаборантами: окончившій Имп. С.-Петербургскій Университетъ по естественному отдѣленію физико - математическаго факультета Н. Н. Нагорновъ, кандидатъ естественныхъ на-

укъ Ѳ. И. Милобендзкій, младшій лаборантъ Института магистрантъ Имп. Варш. Университета А. Ѳ. Флеровъ и кандидатъ математическихъ наукъ А. П. Поспѣловъ.

11. Младшими лаборантами: кандидатъ естественныхъ наукъ Д. Н. Соболевъ и окончившій Императорскій С.-Петербургскій Университетъ по естественному разряду физико-математическаго факультета В. В. Чепинскій.

12. Помощникомъ Инспектора—В. И. Голоскевичъ.

Временно исправляющій обязанности Секретаря Совѣта ординарный профессоръ В. А. Анисимовъ—и. об. декана механическаго отдѣленія.

Ординарный профессоръ В. І. Дейчъ—и. об. декана инженерно-строительнаго отдѣленія.

Секретаремъ избранъ экстраординарный профессоръ В. А. Солонина.

Въ отчетномъ году было засѣданій Правленія—52 и Совѣта—12.

Б. Утверждены.

Ординарный профессоръ П. О. Сомовъ — заслуженнымъ профессоромъ Института.

Временный руководитель практическими занятіями по механикѣ Д. А. Гонтаревъ—штатнымъ преподавателемъ механики.

Временный преподаватель начертательной геометріи Э. В. Гляссъ—штатнымъ преподавателемъ начертательной геометріи.

Временный руководитель практическими занятіями по математикѣ Д. Д. Мордухай-Болтовской — штатнымъ преподавателемъ математики.

В. Уволены.

Временно испр. об. Декана механическаго отдѣленія профессоръ П. О. Сомовъ, согласно прошенію, отъ должности Декана.

Временный преподаватель неорганической химіи профессоръ И. И. Бевадъ прекратилъ чтеніе лекцій въ Институтѣ, и оставили занятія въ Институтѣ лаборанты В. В. Лавровъ и А. К. Семеновъ.

Командировки.

Для подготовленія къ преподавательской дѣятельности были командированы за границу въ 1899 году (кромѣ командированныхъ въ 1898 году) слѣдующія лица:

1. Инженеръ Путей Сообщенія Ю. В. Ломоносовъ, подготовляющійся къ преподаванію прикладной механики (паровозы).

2. Инженеръ-Технологъ В. И. Мейеръ, подготовляющійся къ

преподаванію прикладной механики, главнымъ образомъ по предмету сопротивленія матеріаловъ.

Преподаваніе.

Въ оба полугодія 1899—1900 учеб. года.

А. На I и II курсахъ механическаго и инженерно-строительнаго отдѣленія читались совмѣстно лекціи по слѣдующимъ предметамъ:

1. Высшая математика: ординарными профессорами Г. Ѳ. Воронымъ и В. А. Анисимовымъ—на I курсѣ 6 часовъ и II курсѣ 4 часа въ недѣлю.

2. Начертательная геометрія — штатнымъ преподавателемъ Э. В. Гляссомъ на I курсѣ 2 часа въ недѣлю.

3. Теоретическая механика — заслуженнымъ ординарнымъ профессоромъ Института П. О. Сомовымъ—на I курсѣ 3 часа и II курсѣ 2 часа.

4. Физика—временнымъ преподавателемъ В. А. Бернацкимъ по 3 часа въ недѣлю на I и столько же на II курсѣ.

5. Химія—экстраординарнымъ профессоромъ В. А. Солониной—на I курсѣ 3 часа въ 1-омъ полугодіи, а во 2-омъ 2 часа, и ординарнымъ профессоромъ Е. Е. Вагнеромъ во 2-омъ полугодіи 2 часа.

6. Низшая геодезія — штатнымъ преподавателемъ В. Э. Эренфейхтомъ—на I курсѣ 2 часа и кромѣ того студентамъ II курса инженерно-строительнаго отдѣленія—Высшая геодезія по 2 часа въ недѣлю.

7. Сопротивленіе матеріаловъ—штатнымъ преподавателемъ С. А. Заборовскимъ на II курсѣ 2 часа.

8. Строительное искусство— ординарнымъ профессоромъ В. I. Дейчъ—на II курсѣ механическаго отдѣленія 3 часа и II курса инженерно-строительнаго отдѣленія 2 часа въ недѣлю.

9. Политическая экономія, при 2 часахъ въ недѣлю, и Статистика, при одномъ часѣ въ недѣлю, для студентовъ II курса механическаго и инженерно-строительнаго отдѣленій —преподавателемъ Института, профессоромъ И. И. Иванюковымъ.

10. Во 2-мъ полугодіи на II курсѣ механическаго отдѣленія читались, при 6 часахъ въ недѣлю, лекціи по деталямъ машинъ временнымъ преподавателемъ А. Я. Касьминымъ.

Для занятій черченіемъ и рисованіемъ студенты двухъ отдѣленій были раздѣлены на 3 группы. На черченіе было назначено на I курсѣ обоихъ отдѣленій по 6 часовъ, на II курсѣ механическаго отдѣленія 4 часа и на инженерно-строительномъ отдѣленіи 5 часовъ, а для рисованія—на I курсѣ механическаго отдѣленія 4 часа и инженерно-строительнаго отдѣленія на I курсѣ—3 часа и II курса 2 часа. Руководство занятіями по черченію было поручено преподавателямъ—С. А. Окольскому, В. К. Рофе, Л. С. Васильеву, В. Н. Короткевичу-Ночевному и П. И. Добровольскому. Занятіями по рисованію руководили штатные преподаватели Э. В. Невядомскій и I. К. Маньковскій.

Такъ какъ по черченію и рисованію для руководства занятіями были назначены вечерніе часы, то чертежные и рисовальные залы были открыты для студентовъ ежедневно до 9 часовъ вечера, за исключеніемъ дней неприсутственныхъ.

Практическія занятія на означенныхъ отдѣленіяхъ, при 3 группахъ на I-хъ к. обоихъ отдѣленій и 3 группахъ на II к. механ. и 2 группахъ на II к. инж.-строит. отдѣленій, велись:

1. По математикѣ—преподавателями Д. Д. Мордухай-Болтовскимъ и Э. В. Эренфейхтомъ, подъ руководствомъ ординарныхъ профессоровъ Г. Ѳ. Вороного и В. А. Анисимова, по 2 часа на I курсѣ и по 1 часу на II курсѣ.

2. По начертательной геометріи — преподавателемъ Э. В. Гляссомъ на I курсѣ по 1 часу.

3. По физикѣ — преподавателемъ В. А. Бернацкимъ на II курсѣ по 3 часа.

4. По механикѣ—преподавателемъ Д. А. Гонтаревымъ на I курсѣ—по 1 часу и на II курсѣ—по 1 часу, подъ руководствомъ профессора П. О. Сомова.

5. По строительной механикѣ—преподавателемъ С. А. Заборовскимъ по 2 часа на II курсѣ инженерно-строительнаго отдѣленія.

6. По практической механикѣ—профессоромъ Н. Б. Делоне 4 часа на II курсѣ механическаго отдѣленія.

Б. На химическомъ отдѣленіи I и II курса преподавались слѣдующіе предметы:

1. Высшая математика—ординарнымъ профессоромъ В. А. Анисимовымъ на I курсѣ—4 часа въ недѣлю.

2. Начертательная геометрія — штатнымъ преподавателемъ Э. В. Гляссомъ на I курсѣ 2 часа.

3. Теоретическая механика — профессоромъ Н. Б. Делоне на II курсѣ 4 часа въ недѣлю въ 1-мъ полугодіи и практическая механика по 4 часа въ недѣлю во 2-мъ полугодіи.

4. Физика — преподавателемъ В. А. Бернацкимъ на I и II курсахъ по 3 часа въ недѣлю.

5. Кристаллографія—на I курсѣ 1 часъ и Минералогія на II курсѣ 4 часа—ординарнымъ профессоромъ А. Е. Лагоріо.

6. Ботаника — преподавателемъ Института, профессоромъ В. И. Палладинымъ на I курсѣ 2 часа.

7. Неорганическая химія — экстраординарнымъ профессоромъ В. А. Солонина на I курсѣ 4 часа въ 1-мъ полугодіи и 5 часовъ во 2-мъ.

8. Органическая химія —ординарнымъ профессоромъ Е. Е. Вагнеромъ на II курсѣ 4 часа.

9. Сопротивленіе матеріаловъ—преподавателемъ С. А. Заборовскимъ на II курсѣ 2 часа.

Черченіями техническимъ и архитектурнымъ руководили штатные преподаватели Л. С. Васильевъ, С. А. Окольскій и В. К. Рофе при 6 часахъ на I курсѣ и 4 часахъ на II курсѣ.

Практическія упражненія въ этомъ отдѣленіи при дѣленіи студентовъ I курса на 2 группы велись:

1. По математикѣ—на I курсѣ, подъ руководствомъ профессора В. А. Анисимова, преподавателемъ Эренфейхтомъ по 2 часа въ недѣлю (безъ дѣленія на группы).

2. По начертательной геометріи — на I курсѣ штатнымъ преподавателемъ Э. В. Гляссомъ по 1 часу.

3. По физикѣ—на I курсѣ преподавателемъ В. А. Бернацкимъ по 3 часа.

4. По кристаллографіи—на I курсѣ профессоромъ А. Е. Лагоріо по 1 часу; по Минералогіи же на II курсѣ эти занятія были необязательны.

5. По ботаникѣ—на I курсѣ преподавателемъ В. И. Палладинымъ по 2 часа.

6. Занятія по Аналитической химіи на II курсѣ производились во всѣ учебные дни, за исключеніемъ субботъ, отъ 3 до 8 часовъ вечера, подъ руководствомъ профессора В. А. Солонины.

Командировки.

Въ теченіе отчетнаго времени были командированы съ ученою цѣлью какъ въ Россію, такъ и за границу слѣдующія лица:

1. Преподаватель В. А. Бернацкій—въ С.-Петербургъ на первый Всероссійскій Съѣздъ Электротехниковъ, съ 27 Декабря 1899 г. по 7 января 1900 года.

2. Старшій лаборантъ А. Ѳ. Флеровъ - заграницу для изученія технической бактеріологіи, съ 15 апрѣля по 15 августа 1900 г.

3. Экстраординарный профессоръ В. А. Солонина—заграницу на зимнее вакаціонное время и 8 дней для осмотра лабораторій.

4. Преподаватель С. А. Заборовскій—въ г. Берлинъ для слушанія лекцій лѣтняго семестра въ Шарлотенбургскомъ Политехникумѣ, съ 25 Марта 1900 г.

5. Экстраординарный профессоръ В. А. Солонина—заграницу съ ученой цѣлью на лѣтнее вакаціонное время.

6. Старшій лаборантъ Ѳ. И. Милобендзкій—заграницу съ ученой цѣлью, съ 1 мая по 20 августа 1900 г.

7. Ординарный профессоръ Н. Б. Делонс—за границу для выбора новѣйшихъ машинъ и моделей для механическаго кабинета съ 1 іюля по 1 сентября 1899 г.;—на Парижскую всемірную выставку съ ученой цѣлью, съ 15 іюля по 15 августа 1900 года.

8. Преподаватель В. А. Бернацкій—въ г. Парижъ для осмотра тамошнихъ физическихъ лабораторій и физическаго отдѣленія на Парижской выставкѣ, на лѣтнее вакаціонное время.

9. Преподаватель С. А. Окольскій—на Парижскую выставку для изслѣдованія постановки преподаванія техническаго черченія въ профессіональномъ отдѣленіи, на лѣтнее вакаціонное время.

10. Младшій лаборантъ Д. Н. Соболевъ—въ Кѣлецкую и Радомскую губерніи для производства геологическихъ изслѣдованій съ цѣлью собранія коллекцій для минералогическаго кабинета, на іюнь и іюль мѣсяцы 1900 г.

11. Испр. д. младшаго лаборанта В. В. Чепинскій — за границу съ ученой цѣлью съ 1 января по 1 іюля 1900 года для занятій по электро-химіи.

12. Испр. д. старшаго лаборанта А. П. Поспѣловъ—въ г. С.-Петербургъ на первый Всероссійскій Съѣздъ Электротехниковъ, съ 27 декабря 1899 г. по 7 января 1900 года.

Переходныя испытанія.

Переходныя испытанія начались 10 мая, причемъ нѣкоторые студенты, по уважительнымъ причинамъ, Совѣтомъ были оставлены на 2-й годъ, другимъ были отложены экзамены на осень. Такимъ образомъ переведено студентовъ на II-й и III курсы:

Отдѣленія.	Оставлено на 2-й годъ на томъ же курсѣ.		Переведено на слѣдующіе курсы.	
	I	II	II	III
Механическое.	9	19	118	63
Инженерно-строительное. . .	16	13	57	29
Химическое	8	9	60	34
Всего. .	33	41	235	126

Лѣтняя геодезическая практика.

Съ 3 іюня по 1 іюля 1900 года студенты I курса и нѣкоторые студенты инженерно-строительнаго и механическаго отдѣленій производили геодезическія работы въ окрестностяхъ посада Гродиска подъ руководствомъ преподавателей Эренфейхта и Добровольскаго, капитана Богданова, агронома Доброславина и студентовъ II курса Грабовскаго, Райкевича, Рефоровскаго и Тржцинскаго. Въ работахъ участвовало 123 человѣка.

Всѣ студенты были раздѣлены на 15 группъ, изъ которыхъ каждая получила участокъ приблизительно въ 1 кв. версту, обошла его съ астролябіей и цѣпью, нанесла полигонъ на планъ по координатамъ и, снявъ подробности, представила окончательный планъ своего участка. Подробности снимались: студентами механическаго отдѣленія помощью эккера, студентами же инженерно-строительнаго отдѣленія отчасти мензулой, отчасти эккеромъ; каждая группа студентовъ инженерно-строительнаго отдѣленія получила 2 точки на планшетѣ рѣшеніемъ задачи Потенота, нѣсколько точекъ засѣчками, остальныя полярнымъ способомъ помощью кипрегеля-дальномѣра.

Каждая изъ 15 группъ произвела продольную нивеллировку на протяженіи 4 верстъ.

Этимъ работы студентовъ механическаго отдѣленія и ограничились.

Студенты инженерно-строительнаго отдѣленія занимались еще измѣреніемъ угловъ 2-хъ треугольниковъ съ повѣрочнымъ визированіемъ по діагонали съ цѣлью уравновѣшенія потомъ этой сѣти 2-хъ треугольниковъ. Углы измѣрялись 10 секунднымъ теодолитомъ. Наконецъ тѣ же студенты упражнялись въ разбивкѣ закругленій по координатамъ отъ касательной и по хордамъ и угламъ.

За весьма немногими единичными исключеніями студенты работали дружно и очень охотно, чему способствовала необыкновенно пріятная погода.

Точность работъ контролировалась полученными невязками и засѣчками. Нѣкоторыя группы должны были дѣлать вторичный обходъ или повѣрять часть обхода.

Лѣтняя строительная практика.

Всѣ студенты, кои обязаны были отбыть въ текущемъ году строительную практику, частью были размѣщены Институтомъ на работахъ при постройкѣ казенныхъ, общественныхъ и частныхъ сооруженій, частью же сами пріискали себѣ мѣста для означенной практики. Отчеты вмѣстѣ съ планами должны были быть представлены къ 10 августа и подлежали оцѣнкѣ г.г. профессоровъ соотвѣтствующихъ каѳедръ.

Практическія занятія:

За все отчетное время практическія занятія студентовъ заключались въ слѣдующемъ:

I. По математикѣ:

Въ 1 и 2 семестрѣ 1898—1899 учебнаго года на инженерно-строительномъ и механическомъ отдѣленіяхъ занятія велись, при 2-хъ часахъ въ недѣлю, подъ руководствомъ профессоровъ Г. Ѳ. Вороного и В. А. Анисимова, преподавателемъ Д. Д. Мордухай-Болтовскимъ по 3-мъ отдѣламъ: алгебраическому анализу, аналитической геометріи, включая сюда сферическую тригонометрію, которая читалась въ курсѣ какъ отдѣльная ея глава, дифференціальному и интегральному исчисленіямъ.

Въ I-мъ полугодіи 1898—1899 учебнаго года студенты занимались рѣшеніемъ задачъ по алгебрѣ, сферической тригонометріи и дифференціальному исчисленію. Занятія по этому послѣднему отдѣлу продолжались и во 2-мъ полугодіи, къ которымъ присоединились еще занятія по интегральному исчисленію и по аналитической геометріи. Задачи рѣшались какъ въ аудиторіи, такъ и предлагались для рѣшенія на домъ. При этомъ разъяснялись наиболѣе трудныя части курса, пріобрѣтался студентами навыкъ въ самостоятельномъ рѣшеніи различныхъ задачъ и, вмѣстѣ съ тѣмъ, получалась повѣрка степени усвоенія студентами курса.

На химическомъ отдѣленіи въ томъ же учебномъ году, при 2-хъ часахъ въ недѣлю, студенты, подъ руководствомъ профессора В. А. Анисимова, самостоятельно рѣшали разнообразныя задачи какъ по аналитической геометріи, такъ и по дифференціальному и интегральному исчисленію. При этомъ главное вниманіе обращалось на отчетливое выясненіе началъ указанныхъ математическихъ дисциплинъ, а равнымъ образомъ и на усвоеніе основныхъ формулъ, имѣющихъ наиболѣе важное значеніе въ приложеніяхъ.

Въ 1899—1900 академическомъ году практическія занятія на I к. механическаго и инженерно-строительнаго отдѣленій по алгебраическому анализу и аналитической геометріи производились преподавателемъ В. Э. Эренфейхтомъ по 1 часу въ недѣлю для каждой группы—всего 6 часовъ въ недѣлю, при чемъ 1-я недѣля посвящалась алгебраическому анализу, 2-я геометріи; кромѣ того, по просьбѣ студентовъ инженерно строительнаго отдѣленія, былъ прибавленъ 1 необязательный часъ въ недѣлю. Практическія занятія эти заключались въ слѣдующемъ: 1) въ рѣшеніи возможно легкихъ задачъ, 2) повѣркѣ нѣкоторыхъ теоремъ на частныхъ примѣрахъ помощью вычисленій, 3) геометрическомъ толкованіи нѣкоторыхъ теоремъ алгебраическаго анализа и 4) разъясненіи болѣе трудныхъ отдѣловъ теоретическаго курса.

Занятія по дифференціальному и интегральному исчисленію на I и II к.к. механическаго и инженерно-строительнаго отдѣленій велъ преподаватель Д. Д. Мордухай Болтовской, при 6 часахъ въ недѣлю на I к. и 5 часахъ на II к., слѣдующимъ образомъ: послѣ предварительныхъ разъясненій преподавателемъ на частныхъ примѣрахъ методовъ рѣшенія задачъ извѣстныхъ типовъ, желающіе изъ студентовъ выходили къ доскѣ и рѣшали тѣхъ же типовъ задачи, пользуясь указаніями преподавателя. Болѣе трудныя задачи предлагались преподавателемъ для рѣшенія на домъ, возвращались исправленными и часто служили темою для бесѣдъ преподавателя съ студентами. На I к. въ 1-мъ полугодіи, идя параллельно курсу, читаемому профессоромъ Г. Ѳ. Вороннымъ, студенты занимались вычисленіемъ предѣловъ и дифференцированіемъ функцій; во 2-мъ полугодіи занимались интегрированіемъ функцій.

На II к. въ 1-мъ полугодіи занимались задачами, относящимися къ приложенію дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія къ геометріи (на плоскости) и къ аналитическимъ ихъ приложеніямъ; во 2-мъ полугодіи занимались задачами относящимися къ приложенію обоихъ исчисленій къ геометріи (въ пространствѣ) и къ интегрированію дифференціальныхъ уравненій.

На I к. химическаго отдѣленія практическія занятія по математикѣ велись преподавателемъ В. Э. Эренфейхтомъ, подъ руководствомъ В. А. Анисимова, по 2 часа въ недѣлю, при чемъ 1 часъ посвящался анализу, 2-й геометріи. Задачи рѣшались по всѣмъ основнымъ отдѣламъ, какъ то: аналитической геометріи на плоскости и въ пространствѣ, по дифференцированію и интегрированію функцій съ приложеніями, при чемъ предлагались возможно простыя задачи.

2. *По теоретической механикѣ:*

Практическія занятія велись преподавателемъ Д. А. Гонтаревымъ, подъ руководствомъ проф. П. О. Сомова, при 6 часахъ въ недѣлю на I курсѣ и 5-ти часахъ на II к., и состояли въ рѣшеніи задачъ, непосредственно относящихся къ слушаемому курсу. Главное вниманіе было обращано на слѣдующіе отдѣлы: 1) на равновѣсіе твердаго тѣла, 2) на связь между кинетической энергіей и работой, 3) на кинематику плоскаго движенія, 4) на составленіе дифференціальныхъ уравненій динамики точки и 5) на рѣшеніе задачъ статики по способу возможныхъ перемѣщеній.

3. *По начертательной геометріи:*

Практическія занятія въ 1898—1899 академическомъ году велись подъ руководствомъ преподавателя В. Э. Глясса, при 8 часахъ въ недѣлю для всѣхъ 3-хъ отдѣленій Института, и состояли въ черченіи эпюръ по курсу. Работы были поданы аккуратно и выполнены довольно тщательно.

Въ 1899—1900 академическомъ году—въ 1-мъ полугодіи практическія занятія состояли въ рѣшеніи на доскахъ въ аудиторіи различныхъ задачъ, согласно проходимому курсу, а во 2-мъ полугодіи кромѣ того—въ вычерчиваніи эпюръ на листахъ. Каждый студентъ начертилъ 2 листа, на каждомъ по 4 эпюра. Задачи на листахъ состояли въ проэктированіи и нахожденіи пересѣченія многогранниковъ и поверхностей.

4. *По физикѣ:*

Практическія занятія въ 1898—1899 академическомъ году велись подъ руководствомъ завѣдующаго лабораторіей преподавателя В. А. Бернацкаго съ студентами I к. химическаго отдѣленія по прилагаемой при семъ программѣ задачъ (№ 1). Практиканты были разбиты на 2 группы; каждая група занималась еженедѣльно по 3 часа.

Въ 1899—1900 академическомъ году занятія велись подъ руководствомъ того же преподавателя, при содѣйствіи старшаго лаборанта при каѳедрѣ физикѣ А. П. Поспѣлова, по прилагаемой программѣ (№ 2).

Для возможнаго облегченія труда какъ руководителямъ, такъ и практикантамъ, составлено подробное описаніе каждой задачи съ рисунками имѣющихся для этого въ лабораторіи приборовъ необходимыми таблицами и т. д.; всѣ эти свѣдѣнія имѣются въ переплетенныхъ тетрадкахъ, предлагаемыхъ каждому практиканту вмѣстѣ съ приборами.

Каждый практикантъ обязанъ представить ходъ рѣшенія предложенной ему задачи въ имѣющейся для этого у каждаго спеціальной записной тетради. Полученные имъ результаты, если окажутся удовлетворительными, вносятся въ имѣющуюся въ лабораторіи контрольную книгу. Кромѣ того задача подписывается въ записной книжкѣ практиканта руководителемъ. Пока это не сдѣлано, практикантъ не можетъ получить другой задачи. Записныя книжки представляются практикантами въ концѣ каждаго полугодія для составленія по нимъ необходимаго отчета. Такимъ образомъ подписано:

въ 1898—1899 академическомъ году студентамъ I к. химическаго отдѣленія—680 задачъ.

Въ 1899—1900 академическомъ году—студентамъ I к. химическаго отдѣленія—970 задачъ; студентамъ II к. механическаго отдѣленія—1913 задачъ и инженерно-строительнаго отдѣленія—1005 задачъ.

Занятія велись ежедневно отъ 4-хъ до 8-ми часовъ по-полудни. Студенты химическаго отдѣленія были раздѣлены на 2 группы. Каждая група механическаго и инженерно строительнаго отдѣленій занималась въ лабораторіи еженедѣльно; студенты химики разъ въ 2 недѣли. Кромѣ того практиканты, выдающіеся аккуратностью и тщательностью въ исполненіи предлагаемыхъ имъ задачъ, допускались въ лабораторію на утреннее время.

Изъ работъ спеціальныхъ, производимыхъ въ физической лабораторіи, можно указать на работы г. Цаузмера, студента механическаго отдѣленія, надъ поляризаціей электродовъ (1898—1899 годъ), и его же работы въ I полугодіи 1899—1900 года съ жидкими прерывателями для тока. Старшій лаборантъ А. П. Поспѣловъ повторялъ опыты Рентгена; завѣдующій кабинетомъ преподаватель В. А. Берпацкій выработалъ методъ демонстрированія опытовъ Герца помощью лампочки накаливанія и видоизмѣнилъ приборъ Дюлонга и Пти для опредѣленія термическаго коэффиціента расширенія ртути. Во многихъ этихъ работахъ принималъ дѣятельное участіе студентъ механическаго отдѣленія А. Соколовскій.

5. *По химіи:*

Практическія занятія во 2-ой половинѣ 1898—1899 г. и въ 1899—1900 академическомъ году происходили во временномъ помѣщеніи Института въ химической лабораторіи, устроенной на 96 мѣстъ со всѣми необходимыми принадлежностями.

Занятія производились съ студентами II к. всѣхъ отдѣленій и I к. химическаго отдѣленія.

Студенты II к. химическаго отдѣленія, въ количествѣ 48 человѣкъ, занимались въ лабораторіи каждый день, кромѣ праздниковъ и субботъ, до 8 часовъ вечера. По субботамъ же лабораторія была открыта для занятій только до 3 часовъ дня. Въ началѣ занятія ихъ состояли въ систематическомъ прохожденіи качественнаго химическаго анализа, къ чему пособіемъ имъ служила аналитическая химія Меншуткина. Кромѣ постояннаго руководства каждый студентъ время отъ времени подвергался провѣрочному испытанію по пройденному и продѣланному имъ анализу и затѣмъ только получалъ на каждую аналитическую группу для рѣшенія одну или двѣ задачи, состоявшія въ опредѣленіи качественнаго состава неизвѣстной ему смѣси. Затѣмъ получалъ для изслѣдованія или минералъ, или руду, или сплавъ, давалъ полный отчетъ въ продѣланномъ имъ анализѣ этихъ веществъ и наконецъ подвергался испытанію по полному курсу качественнаго анализа.

Окончившіе качественный анализъ приступали затѣмъ къ занятіямъ по количественному анализу, состоявшимъ въ количественномъ опредѣленіи состава различныхъ соединеній вѣсовымъ способомъ, а также и титтрованіемъ. Трудъ по веденію этихъ занятій раздѣлялъ съ профессоромъ В. А. Солониной старшій лаборантъ Ѳ. И. Милобендзкій.

Студенты I к. химическаго отдѣленія, въ количествѣ 61 человѣка, занимались въ лабораторіи во 2-ой половинѣ 1899—1900 академическаго года 5 дней въ недѣлю до 8 часовъ вечера, причемъ они были раздѣлены на 2 группы. Занятія ихъ состояли въ систематическомъ прохожденіи качественнаго химическаго анализа, пособіемъ къ чему имъ служила аналитическая химія профессора Меншуткина. Кромѣ постояннаго руководства каждый студентъ время отъ времени подвергался провѣрочному испытанію по пройденному и продѣланному имъ анализу и затѣмъ только получалъ на каждую аналитическую группу 1 или 2 задачи, состоявшія въ опредѣленіи качественнаго состава неизвѣстной ему смѣси. Было пройдено 2 аналитическихъ группы и лишь немногими студентами 3. Труды по веденію этихъ занятій раздѣлялъ съ профессоромъ В. А. Солониной преподаватель В. И. Стржембошъ.

Студенты II к. механическаго и инженерно-строительнаго отдѣленій занимались въ лабораторіи, вслѣдствіе недостатка мѣстъ, только въ 1-ой половинѣ 1899—1900 академическаго года. Всѣхъ занимавшихся было 141 человѣкъ. Они были раздѣлены на 5 группъ, причемъ каждая занималась 1 разъ въ недѣлю отъ 3 до 8 часовъ вечера. Занятія ихъ состояли въ качественномъ испытаніи важнѣйшихъ химическихъ соединеній, какъ, напр., поваренная соль, селитра, сѣрная кислота, нашатырь и т. п., и въ ознакомленіи съ важнѣйшими ихъ свойствами. Пособіемъ для этого имъ служила аналитическая химія Бейльштейна и Явейна.

Трудъ по веденію этихъ занятій раздѣлялъ съ профессоромъ В. А. Солониной преподаватель В. И. Стржембошъ.

б. По кристаллографіи и минералогіи:

Практическія занятія велись въ 1898—1899 академическомъ году профессоромъ А. Е. Лагоріо по кристаллографіи обязательно по 2 часа въ недѣлю для студентовъ I к. химическаго отдѣленія; въ 1899—1900 акад. году велись еще кромѣ этого необязательныя занятія по минералогіи съ студентами II к. химическаго отдѣленія, при участіи лаборанта Д. Н. Соболева.

Студенты занимались практическимъ ознакомленіемъ съ свойствами минераловъ и ихъ кристаллографическою формою по имѣющимся въ кабинетѣ коллекціямъ и кристаллографическимъ моделямъ.

Кромѣ того въ кабинетѣ занимались спеціально: профессоръ А. Е. Лагоріо—изслѣдованіями надъ распредѣленіемъ изверженныхъ горныхъ породъ Таврическаго полуострова и составленіемъ геологическихъ профилей Крымскихъ горъ; лаборантъ Соболевъ —микроскопическимъ изслѣдованіемъ осадочныхъ палеозойскихъ породъ Кѣлецко-Сандомирскаго кряжа, а также составленіемъ тектонической карты и геологическаго профиля того же кряжа.

7. *По ботаникѣ:*

Практическія занятія въ 1898-1899 акад. году велись подъ руководствомъ преподавателя профессора Палладина, при 4 часахъ въ недѣлю, для двухъ группъ и состояли въ изученіи анатоміи растеній; кромѣ того нѣкоторые студенты проходили курсъ анатоміи самостоятельно.

Въ 1899-1900 акад. году велись практическія занятія по бактеріологіи и анатоміи растеній. По микробіологіи требовалось знакомство съ главнѣйшими представителями плѣсеней, дрожжей и бактерій, имѣющими техническое значеніе. Вмѣстѣ съ тѣмъ въ область практическихъ занятій входило приготовленіе микроскопическихъ аппаратовъ.

Весной студенты занимались опредѣленіемъ растеній по цвѣтущимъ экземплярамъ.

Кромѣ студентовъ въ кабинетѣ занимались—по бактеріологіи: ассистенты Варшавскаго университета В. А. Траншель и Н. В. Морковинъ и по сельско-хозяйственному анализу: И. П. Жабькинъ — главный садовникъ Варшавскаго Помологическаго сада.

8. *По геодезіи:*

Практическія занятія съ студентами I к. инженерно-строительнаго отдѣленія велись преподавателемъ Эренфейхтомъ во 2-мъ полугодіи по 2 часа въ недѣлю. Единовременно, по недостатку мѣста, могло заниматься только 17 студентовъ.

Для практическихъ занятій съ студентами I к. механическаго отдѣленія было посвящено 12 вечеровъ въ 1-мъ полугодіи и 5 во 2-мъ.

Практическія занятія состояли въ ознакомленіи съ теоріей геодезическихъ инструментовъ. Студенты занимались измѣреніемъ горизонтальныхъ и вертикальныхъ угловъ, рѣшеніемъ задачи Потенота, изслѣдованіемъ и исправленіемъ разныхъ инструментальныхъ погрѣшностей.

Практическія занятія посѣщались весьма охотно; очень часто приходилось студентамъ отказывать по недостатку мѣста.

9. *По практической механикѣ:*

Практическія занятія велись профессоромъ Н. В. Делоне, по 4 часа въ недѣлю, съ студентами II к. механическаго отдѣленія и состояли въ построеніи студентами кинематическихъ моделей разныхъ механизмовъ. Эти модели, несмотря на простоту и дешевизну матеріала (картонъ и струна), весьма поучительны, совершаютъ надлежащія движенія и описываютъ достаточно точно различныя кривыя. Нѣкоторые изъ студентовъ практиковались въ токарномъ и слесарномъ искусствахъ.

Студентъ Липецъ изобрѣлъ и выполнилъ новый механизмъ для черченія улитокъ Паскаля.

10. По строительной механикѣ:

Практическія занятія велись преподавателемъ С. А. Заборовскимъ съ студентами II к. инженерно-строительнаго отдѣленія при 4 часахъ въ недѣлю.

Предметомъ занятій было: рѣшеніе задачъ на опредѣленіе опорочныхъ реакцій, опредѣленіе напряженій въ частяхъ статически опредѣлимыхъ сочлененныхъ системъ, разсчетъ деревянныхъ балокъ въ гражданскихъ сооруженіяхъ, разсчетъ желѣзныхъ двутавровыхъ балокъ, графическій разсчетъ подпорныхъ стѣнъ. Занятія эти посѣщались студентами очень аккуратно.

11. По топографическому черченію:

Въ 1898-1899 акад. году занятія съ студентами инженерно-строительнаго и механическаго отдѣленій велись подъ руководствомъ преподавателя П. И. Добровольскаго при 5 часахъ въ недѣлю. Они состояли: 1) въ иллюмировкѣ примѣрнаго плана для ознакомленія съ условными знаками въ краскахъ, 2) въ знакомствѣ съ планами въ горизонталяхъ и рѣшеніи соотвѣтственныхъ задачъ на нихъ, 3) въ знакомствѣ съ планами, сдѣланными штрихами, и рѣшеніи соотвѣтственныхъ задачъ на нихъ, 4) въ выраженіи рельефа мѣстности горизонталями по данной модели.

Въ 1899-1900 акад. году студенты I к. инженерно-строительнаго отдѣленія изучали условныя знаки и илюминовку примѣрнаго плана; студенты II к.—выраженіе рельефа мѣстности горизонталями по данной модели; студенты I к. механическаго отдѣленія—условные знаки и илюминовку примѣрнаго плана, а также составленіе фигуры обхода по примѣрному полевому астролябическому плану.

12. По техническому черченію:

Практическія занятія на I к. механическаго отдѣленія велись подъ руководствомъ преподавателя С. А. Окольскаго при 10 часахъ въ недѣлю.

Занятія состояли въ обученіи пріемамъ черченія машинъ, какъ подготовительной ступени къ разсчету и проектированію машинъ на слѣдующихъ курсахъ. Обученіе начиналось съ практическаго ознакомленія съ техникою черченія и одновременно съ началами ученія о параллельныхъ проекціяхъ и перспективѣ посредствомъ 3-хъ первыхъ работъ (1-ая работа: условныя обозначенія по вычерченнымъ преподавателемъ на доскѣ эскизамъ, составленнымъ по простымъ моделямъ, 2-ая работа: чертежъ на калькѣ по заводскому образцу, 3-ья работа: составленіе чертежа по эскизу, снабженному необходимыми размѣрами), состояло дальше въ выработкѣ умѣнія самостоятельно составлять эскизы, а по нимъ рабочіе чертежи машинныхъ частей трехъ степеней сложности въ слѣдующихъ за симъ 3-хъ работахъ (4-ая работа—по модели первой степени сложности, 5-ая работа—по модели 2-й степени сложности и 6-ая работа—по модели 3-й степени сложности) и переходу къ составленію чертежа безъ моделей по таблицѣ нормальными размѣрами или на основаніи элементарнаго расчета по употребляемымъ эмпирическимъ формуламъ (7-ая работа—соединенія трубъ); одна изъ работъ по моделямъ сопровождалась разсчетомъ теоретическаго вѣса и провѣркою результата путемъ непосредственнаго взвѣшиванія. Двѣ работы по собственному выбору студента вычерчивались имъ лишь въ карандашѣ безъ обводки тушью и исполнялись на дешевыхъ сортахъ бумаги (сѣрой, писчей и т. п.).

Образцами служили изданные профессоромъ Дидлеромъ (изъ Берлинскаго политехникума) чертежи машинъ въ $^1/_5$ или $^1/_{10}$ н. в., образцы Ecole Centrale des arts et Manufactures и чертежи, изданные профессоромъ Ф. Линкс (Дармштатскаго политехникума) по деталямъ машинъ, равно образецъ подлинника изданнаго г. Окольскимъ.

На I к. химическаго отдѣленія студентами были исполнены подъ руководствомъ преподавателя В. К. Рофе слѣдующія работы:

На I к. химическаго отдѣленія: 1) условныя обозначенія матеріаловъ, 2) вычерчиваніе на калькѣ, 3) вычерчиваніе на увеличенномъ масштабѣ по предложенному образцу, 4) составленіе эскиза и чертежа по несложнымъ моделямъ, 5) составленіе эскиза и чертежа по 2-ой степени сложности.

На II к. химическаго отдѣленія: 1) различныя соединенія трубъ, 2) задвижки, краны и клапаны, 3) арматура паровыхъ котловъ, 4) разсчетъ и вычерчиваніе болтовыхъ или клиновыхъ соединеній, 5) разсчетъ и вычерчиваніе оси и вала, или цилиндрической зубчатой передачи, или же разсчетъ и вычерчиваніе ременной передачи.

На II к. механическаго отдѣленія: 1) задвижки, краны и клапаны, 2) арматура паровыхъ котловъ (по эмпирическимъ формуламъ), 3) разсчетъ и вычерчиваніе болтовыхъ или клиновыхъ соединеній, 4) разсчетъ и вычерчиваніе оси и вала, 5) разсчетъ и вычерчиваніе цилиндрической зубчатой передачи, 6) разсчетъ и вычерчиваніе ременной передачи.

Въ общемъ практическія занятія посѣщались студентами исправно, многіе проявляли любовь къ дѣлу, выбирая наиболѣе сложныя работы.

13. По конструктивно-строительному черченію:

Практическія занятія велись подъ руководствомъ преподавателя Н. В. Короткевича-Ночевного на I и II кк. инженерно-строительнаго отдѣленія и состояли:

На I к.—въ перечерчиваніи съ оригиналовъ плановъ и разрѣзовъ зданій, а также деталей деревянныхъ, каменныхъ и смѣшанныхъ конструкцій. Всего было исполнено студентами 4 листа чертежей.

На II к.—въ проектированіи по эскизамъ деревянныхъ конструкцій (стропильныхъ фермъ, мостовъ, фермъ и пр.), разрѣзовъ деревянныхъ и каменныхъ зданій и разрѣзка сводовъ. Всего было исполнено студентами 4 листа чертежей.

Студенты посѣщали занятія исправно и оказали хорошіе успѣхи.

14. По архитектурному черченію:

Практическія занятія велись подъ руководствомъ преподавателя Л. С. Васильева.

Работы студентовъ I курса инженерно-строительнаго отдѣленія заключались въ перечерчиваніи съ издаваемымъ Институтомъ чертежей классическихъ архитектурныхъ ордеровъ. Требовалось на полулистѣ ватманской бумаги исполнить въ большемъ масштабѣ части ордера и въ меньшемъ масштабѣ весь ордеръ.

Кромѣ этого черченія для большаго усвоенія студентами архитектурныхъ формъ на I курсѣ инженерно-строительнаго отдѣленія было устроено полугодовое письменное испытаніе по архитектурнымъ ордерамъ. Испытаніе состояло въ требованіи въ опредѣленный срокъ на память и отъ руки (безъ линейки и циркуля) исполнить въ заданномъ масштабѣ одинъ изъ архитектурныхъ ордеровъ.

На II к. этого же отдѣленія работы заключались въ вычерчиваніи архитектурныхъ деталей (двери и окна) и фасадовъ съ оригиналовъ, издаваемыхъ Институтомъ; но отъ студентовъ уже не требовалось строгаго копированія оригиналовъ, а позволялось, подъ руководствомъ преподавателя, детали разрабатывать самимъ.

На механическомъ и химическомъ отдѣленіяхъ черченіе ордеровъ устранено и послѣ 1-го чертежа (обломы и массы) было сразу приступлено къ черченію простѣйшихъ архитектурныхъ деталей (двери и окна), а также простѣйшихъ плановъ, фасадовъ и разрѣзовъ деревянныхъ и каменныхъ зданій, съ оригиналовъ, издаваемыхъ также Институтомъ;—такимъ образомъ, прямо перешли къ программѣ II курса инженерно-строительнаго отдѣленія. Разница заключалась въ меньшемъ объемѣ и менѣе сложныхъ образцахъ. Программы для механическаго и химическаго отдѣленій были почти одинаковы, выдавались только болѣе простые образцы. Въ среднемъ, успѣхи студентовъ вполнѣ удовлетворительны.

15. По рисованію:

Практическія занятія въ теченіе 1898—1899 академическаго года велись преподавателемъ Э. В. Невядомскимъ, а съ 1899—1900 академическаго года кромѣ того преподавателемъ-художникомъ І. К. Маньковскимъ.

На I к. инженерно-строительнаго отдѣленія занятія состояли въ рисованіи съ гипсовыхъ моделей, начиная отъ геометрическихъ тѣлъ и кончая рельефными орнаментами (преимущественно—капителями) готическаго и классическихъ стилей. Изъ общаго числа 7 работъ, въ 1 полугодіи подлежало подачѣ 4 листа, во 2-мъ—3 листа.

На II к. того же отдѣленія студенты рисовали части лица и головы съ гипсовыхъ моделей. Въ 1-мъ полугодіи подлежало подачѣ 4 листа, во 2-мъ—два.

На химическомъ отдѣленіи занятія состояли въ рисованіи геометрическихъ тѣлъ и несложныхъ архитектурныхъ мотивовъ, по 3 листа на каждое полугодіе. Всѣ рисунки на химическомъ отдѣленіи исполнялись въ однихъ контурахъ (безъ тушевки).

На I к. механическаго отдѣленія занятія состояли въ рисованіи съ натуры (гипсовыя модели), начиная съ простыхъ геометрическихъ тѣлъ и несложныхъ архитектурныхъ мотивовъ и кончая несложнымъ орнаментомъ, классическими и готическими капителями. Всего исполнено 4 листа.

Учебно-вспомогательныя учрежденія.

1. Библіотека Института открыта для пользованія съ 1 января 1899 года. Въ теченіе отчетнаго года поступило въ библіотеку всего книгъ, періодическихъ изданій, атласовъ и проч. 1764 названія въ 3026 томахъ, на сумму 10794 руб. 59 коп. По категоріямъ эти книги распредѣляются слѣдующимъ образомъ:

	названія	томовъ	на сумму
Книгъ	1102	1640	6656, 63
Брошюръ	414	443	229, 52
Періодическихъ изданій.	115	708	2336, 33
Атласовъ	104	128	1209, 63
Справочныхъ книгъ . .	12	81	334, 93
Дублетовъ	17	26	27, 55
Всего. .	1764	3026	10794, 59

Изъ означеннаго числа пріобрѣтено за деньги 871 названіе на сумму 7725 руб. Остальныя книги, въ числѣ 893 названій, на сумму 3569 руб. 54 коп. поступили въ библіотеку въ даръ отъ различныхъ лицъ и учрежденій.

Наиболѣе значительныя пожертвованія въ книгахъ поступили отъ слѣдующихъ учрежденій: Департамента Торговли и Мануфактуръ, Императорской Академіи Наукъ, Императорской Академіи Художествъ, Императорскихъ Университетовъ: С. Петербургскаго и Новороссійскаго, Института Инженеровъ Путей Сообщенія, Привислянской и Самаро-Златоустовской ж. д. и отъ частныхъ лицъ:—г. Кона, наслѣдниковъ Генералъ-Маіора Рыльке, г-жи Слупской, г. Ранда, г. Кетте, г. Езіоровскаго и отъ технической по охраненію Бакинскихъ нефтяныхъ промысловъ коммисіи.

Особенно цѣнное пожертвованіе принадлежитъ г-жѣ Слупской, которая прислала въ библіотеку свыше 200 названій книгъ и періодическихъ изданій по архитектурѣ, между ними много очень дорогихъ. Кромѣ того редакціи многихъ газетъ и журналовъ доставляли безвозмездно свои изданія въ студенческую читальню, благодаря чему студенты находили въ ней достаточный матеріалъ для чтенія.

За отчетное время библіотекою пользовались 265 лицъ, а именно 25 лицъ служащихъ въ Институтѣ и 240 студентовъ, при чемъ было выдачъ 1546.

Изъ 1764 названій, имѣющихся въ библіотекѣ, выдавалось на домъ только 640, т. е. 42% всего числа книгъ.

Дѣятельность библіотечнаго персонала, кромѣ текущей работы по выпискѣ, выдачѣ и пріему книгъ, состояла въ составленіи каталоговъ.

Въ силу § 4 библіотечныхъ правилъ были заведены слѣдующіе каталоги:

1) Неподвижный хронологическій каталогъ, раздѣленный на 9 частей, означенныхъ буквами A, B, C, D, E, F, G, H, I.

2) Карточный систематическій каталогъ.

3) Алфавитный каталогъ книгъ, печатанныхъ русскимъ шрифтомъ.

4) Алфавитный каталогъ книгъ, печатанныхъ иностранными шрифтами.

5) Алфавитный каталогъ дублетовъ.

6) Печатный систематическій каталогъ книгъ поступившихъ въ библіотеку въ 1899 году.

2. Кабинетъ теоретической механики состоялъ въ завѣдываніи ординарнаго профессора П. О. Сомова.

3. Кабинетъ практической механики состоялъ въ завѣдываніи ординарнаго профессора Н. Б. Делоне.

Къ 1 му января 1900 года состояло на лицо 22 номера на сумму 1278 руб. 55 коп.

4. Геодезическій кабинетъ въ 1898 году состоялъ въ завѣдываніи генералъ-маіора Рыльке. Вслѣдствіе его смерти завѣдываніе кабинетомъ временно было поручено преподавателю военному топографу подполковнику П. И. Добровольскому, а съ 1899—1900 академическаго года преподавателю В. Э. Эренфейхту.

Къ 1-му января 1900 года состояло на лицо 150 номеровъ на сумму 4886 руб. 65 коп.

5. Физическій кабинетъ состоялъ въ завѣдываніи преподавателя В. А. Бернацкаго.

Къ 1-му января 1900 года состояло на лицо 723 номера на сумму 20.490 руб. 68 коп.

6. Лабораторія неорганической химіи состояла въ завѣдываніи профессора В. А. Солонины.

Къ 1-му января 1900 года состояло на лицо 245 номеровъ на сумму 10247 руб. 69 коп.

7. Минералогическій кабинетъ состоялъ въ завѣдываніи директора института профессора А. Е. Лагоріо.

Къ 1-му января 1900 года состояло на лицо 112 номеровъ (5233 предмета) на сумму 11152 руб., въ томъ числѣ книги и нѣсколько значительныхъ коллекцій, принесенныхъ въ даръ разными лицами и учрежденіями.

8. Ботаническій кабинетъ состоялъ въ завѣдываніи преподавателя института профессора В. И. Палладина.

Къ 1-му января 1900 года состояло на лицо 102 номера на сумму 4544 рублей.

9. Чертежныя института состояли въ 1898/9 академическомъ году въ завѣдываніи преподавателя С. А. Окольскаго, а въ 1899—1900 году въ завѣдываніи ординарнаго профессора В. І. Дейчъ.

Къ 1-му января 1900 года состояло на лицо 458 номеровъ на сумму 4080 руб. 16 коп.

10. Рисовальный залъ состоялъ въ завѣдываніи преподавателя Э. В. Невядомскаго.

Къ 1-му января 1900 года состояло на лицо 141 номеръ на сумму 993 руб. 64 коп.

11. Музей строительнаго искусства, въ которомъ, кромѣ обычнаго для подобнаго рода музеевъ собранія моделей и приборовъ, составляется еще систематическая коллекція образцовъ строительныхъ матеріаловъ, добываемыхъ, какъ въ мѣстномъ краѣ, такъ и во всей Россіи. Помимо учебныхъ цѣлей, такая коллекція будетъ имѣть интересъ для производителей строительныхъ матеріаловъ, могущихъ выставить свои произведенія въ залахъ музея, доступныхъ не только для студентовъ института, но и для постороннихъ лицъ. Завѣдываніе музеемъ возложено на профессора В. І. Дейчъ.

ВѢДОМОСТЬ

о личномъ составѣ Варшавскаго Политехническаго Института Императора Николая II къ 1-му Іюля 1900 года.

	Директоръ.	Профессора: Ординарные.	Профессора: Экстра-ордин.	Преподаватели и руководители.	Лаборанты: Старшіе.	Лаборанты: Младшіе.	Инспекторъ.	Его помощники.	Библіотекарь.	Его помощникъ.	Дѣлопроизводитель.	Его помощникъ.	Бухгалтеръ.	Его помощникъ.	Смотритель зданій.	Врачъ.	Фельдшеръ.	Лица, приглашенныя преподавать изъ платы по найму.	Всего.
Къ 1-му іюля 1900 года состояло на лицо . .	1	6	1	11	5	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	46
Въ томъ числѣ назначено въ 1900 году	—	—	—	3	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	5

СПИСОКЪ

трудовъ Г.г. профессоровъ и преподавателей Варшавскаго Политехническаго Института ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II.

Проф. Е. Вагнеръ

1) Къ строенію терпеновъ и имъ родственныхъ соединеній; глава XIX и XX (Сообща съ А. Гинсбергомъ). Журналъ Русскаго Физико-химическаго Общества.

2) Къ реакціи окисленія алициклическихъ соединеній: окисленіе ацетилтриметилена. (Сообща съ М. Идзьковской). Тамъ же.

3) О продуктахъ дѣйствія хлорноватистой кислоты на лѣвый пиненъ. (Сообща съ К. Славинскимъ). Тамъ же.

4) О гидроксиламинѣ. Тамъ же.

5) Къ вопросу о вліяніи состава и строенія спиртовыхъ радикаловъ на теченіе нѣкоторыхъ реакцій. Тамъ же.

6) О дегидратаціи α—гликолей въ непредѣльные спирты. (Сообща съ студ. Боровскимъ). Труды Варш. Общества Естествоиспытателей.

7) Атомъ и частица. (Отдѣльная брошюра).

8) Сдѣлалъ сообщеніе на X съѣздѣ естествоиспытателей въ Кіевѣ о нѣкоторыхъ работахъ, произведенныхъ подъ его руководствомъ, а именно: 1) о соотношеніи между моногалоидгидратами пинена и галоидангидритами борнеола на основаніи работъ К. Славинскаго, И. Дембицкаго, Ѳ. Милобендзкаго и В. Брикнера; 2) О регенераціи терпеновъ отъ ихъ бромюровъ на основаніи работъ И. Годлевскаго и—И. Годлевскаго съ Рожановичемъ.

9) О стереоизомерныхъ 1, 2, 3 триоксиментанахъ. Журналъ Рус. Физ.-Хим. Общ.

10) О строеніи камфена. Тамъ же.

11) Zur Constitution des Pinens. (Сообща съ К. Славинскимъ) Berichte d. deut. chem. Gesellschaft.

12) Ueber die Beziehung der Pinenhaloidhydrate zu den Haloidanhydriden des Borneols. (Сообща съ Брикнеромъ). Тамъ же.

13) Профессору Вагнеру отдѣленіемъ физико-химическаго Общества единогласно присуждена большая премія имени Александра Михайловича Бутлерова.

Проф. П. О. Сомовъ.

1) Къ вопросу о винтовыхъ скоростяхъ твердаго тѣла, связи котораго выражаются неравенствами. Протоколы Общ. Естествоиспытателей при Императорскомъ Варшавскомъ Университетѣ № 2. 1898 г.

2) Объ ограниченіи и уничтоженіи винтовыхъ перемѣщеній твердаго тѣла помощью опорныхъ поверхностей. Сообщено на съѣздѣ Естествоиспытателей въ Кіевѣ. Дневникъ X съѣзда Естествоиспытателей въ Кіевѣ № 3—4, 1898 г.

3) Объ одномъ пріемѣ для опредѣленія областей возможныхъ винтовыхъ скоростей твердаго тѣла, опирающагося на нѣсколько поверхностей. Протоколы Общества Естествоиспытателей № 5. 1898 г.

4) О механизмахъ для изображенія движенія нѣкоторыхъ измѣняемыхъ системъ. Протоколы Физ.-Хим. Отд. Общ. Ест. за 1900 г.

5) О нѣкоторыхъ приложеніяхъ кинематики измѣняемыхъ тѣлъ къ шарнирнымъ механизмамъ. Варш. Унив. Извѣстія 1900 г. № 7.

6) О механизмахъ, основанныхъ на кинематикѣ измѣняемыхъ тѣлъ. Проток. Общ. Естеств. за 1900 г.

7) Ueber Gebiete von Schraubengeschwindigkeiten eines starren Körpers bei verschiedener Zahl von Stützflächen. Zeitschr. für Mathematik u. Physik, Bd. 45, H. 5, 6.

Проф. В. А. Анисимовъ.

1) Объ одной формулѣ, относящейся къ опредѣлителямъ, и объ одномъ ея приложеніи къ теоріи дифференціальныхъ уравненій. Варш. Универ. Изв. № 1, 1898 г.

2) Къ теоріи кривыхъ двойной кривизны. Варш. Унив. Изв. № 3, 1898 г.

3) О высотахъ наибольшаго освѣщенія данныхъ площадей. Варш. Унив. Изв. № 8, 1898 г.

4) Къ теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій. Матем. Сбор. т. XX вып. 2, 1898 г.

5) Къ вопросу о формѣ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій съ періодическими коэффиціентами. Мат. Сбор. т. XX вып. 3, 1898 г.

6) Sur les méthodes d'intégration des équations différentielles ordinaires et quelques applications de la méthode de différentiation. Mathem. Annalen, Bd. 51, H. 2.

7) Sur une formule nouvelle relative aux déterminants et son application à la théorie des équations différentielles linéaires. Mathematische Annalen, Bd. 51, H. 3.

8) О формѣ интеграловъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій съ періодическими коэффиціентами (изъ переписки съ Ch. Hermité-омъ. Мат. Сборн., т. XXI, вып. 1, 1899 года.

Кромѣ того сдѣлалъ сообщенія въ засѣданіяхъ Отдѣленія физики и химіи Варшавскаго Общества Естествоиспытателей: 1) О наивыгоднѣйшихъ высотахъ лампъ, фонарей и другихъ источниковъ свѣта при освѣщеніи данныхъ площадей. 2) Къ теоріи дифференціальныхъ уравненій.

Проф. Н. Б. Делоне.

1) Графическое изображеніе періодической законности химическихъ элементовъ. Журн. Русск. Физ.-Химич. Общ. т. XXX, вып. 9.

2) Ueber Tschebyscheff'schen Arbeiten in der Theorie der Gelenkmechanismen. Zeitschrift für Mathematik und Physik 1899, Heft 4.

3) Начальное руководство къ самостоятельному изученію высшей математики и механики (изданіе Риккера).

4) Law of atomic Weigts. Chemical News, Vol. 81, № 2098.

Проф. В. И. Палладинъ.

1) Физіологія растеній. 3-е изд. Варшава, 1898 г.

2) Анатомія растеній. 2-е изд. Варшава, 1898 г.

3) Синтезъ бѣлковыхъ веществъ въ растеніяхъ. (Труды Харьк. Общ. Испытателей природы).

4) Условія образованія бѣлковыхъ веществъ, неперевàримыхъ въ желудочномъ сокѣ, и ихъ значеніе для дыханія растеній. (Варш. Унив. Изв.).

5) Вліяніе температуры на дыханіе растеній. (Варш. Унив. Изв.).

6) Influence de la lumière sur la formation des matières protéiques actives et sur l'énergie de la respiration des parties vertes des végétaux. Révue générale de Botanique. 1899.

7) Influence des changements de température sur la respiration des plantes. Revue générale de Botanique. 1899.

8) Курсъ ботаники, читаемый на химическомъ отдѣленіи Варшавскаго Политехническаго Института, съ 181 рис. въ текстѣ.

9) Микробіологія съ 56 рис. въ текстѣ.

Преп. В. А. Бернацкій.

1) Ueber die Cagnard de la Tourschen Röhren. Zeitschrift für d. physik. und chemischen Unterricht, 1898, H. 3.

2) Nowe dziedziny widma. (Популярно-научное сочиненіе о лучахъ Рентгена, электрическихъ лучахъ и телеграфѣ безъ проволокъ) Варшава, 1898 г.

3) Перевелъ на польскій языкъ On light Тиндаля. Варшава, 1898 г.

4) Къ вопросу о магнитномъ наклоненіи въ древности. Протоколы Варшавскаго Общества Естествоиспытателей.

5) О примѣненіи лампочки накаливанія для демонстрированія опытовъ Герца. (Журналъ Русскаго физико-химич. общ. 1900 г.).

6) Ueber die Anwendung einer Glühlampe zur Demonstration der Hertzschen und Marconischen Versuche. Zeitschrift für physik. und chemischen Unterricht, 1900.

7) Ein Apparat sur Bestimmung des Wärmeausdehnungscoefficient des Queksilbers. Zeitschrift für physik.-und chemischen Unterricht, 1900.

Препод. С. Окольскій.

1) Die Maschinenfabrik Augsburg.

2) Die Metall-Bearbeitungs Maschinen auf der II-er Kraft und Arbeitsmaschinen. Austellung zu München 1898. Beide in Excursions-Berichte der Maschinenbauschule der Technischen Hochschule zu Darmstadt, hrsg. von Prof. Linke, 1899.

3) Напечаталъ критику сочиненія H. Fischer, Die Werkzeugmaschinen (Die Metallbearbeitungsmaschinen).

Преп. Э. В. Невядомскій.

1) Статьи изъ области художественной критики въ газетѣ Kurjer Codzienny.

2) Towarzystwo Zachęty sztuk pięknych w Królestwie Polskiem.

Лабор. А. Флеровъ.

1) Einfluss der Nahrung auf die Athmung der Pilze. Botanisches Centralblatt.

2) Ueber einen histon-ähnlichen Körper aus Thymus. Ztschrft. für physiolog. Chemie von Hoppe-Seyler.

3) Torfmoor und Birkenbrüch „Berendejewo“ im Wladimir'schen Gouvernement. Botanisches Centralblatt, 1898.

4) Образованіе болотъ и заростаніе озеръ Сѣверо-Западной части Владимірской губерніи. Землевѣдѣніе.

5) Берендѣево болото и Заболотье. Землевѣдѣніе.

6) Списокъ растеній цвѣтковыхъ и споровыхъ во Владимірской губ.

7) Краткій отчетъ объ изслѣдованіяхъ во Владимірской губ. лѣтомъ 1898 г. Годичный отчетъ Императорскаго Московскаго Общ. Испытателей природы за 1898 г.

8) Вліяніе питанія на дыханіе грибовъ.

9) О гистонѣ и парагистонѣ.

Лабор. К. Славинскій.

1) Zur Constitution des Pinens. Сообща съ Е. Е. Вагнеромъ.

2) О пиногликоляхъ. Журн. Русск. Химич. Общества.

3) О продуктахъ дѣйствій хлорноватистой кислоты на пиненъ. Сообща съ Е. Е. Вагнеромъ. Тамъ же.

4) Сдѣлалъ сообщеніе въ Варш. Обществѣ Естествоиспытателей о нѣкоторыхъ производныхъ пинола.

Лабор. Ѳ. Милобендзкій.

1) Объ отношеніи изомерныхъ спиртовъ къ треххлористому фосфору. Журн. Русск. Физ.-Хим. Общества.

2) О камфенгликолѣ. Тамъ же.

Стипенд. Г. Ерчиковскій.

1) О нѣкоторыхъ производныхъ камфенилона и камфенилоновой кислоты. Труды Варш. Общ. Естествоиспытателей.

2) Объ окисленіи α-пиноновой кислоты въ пиноилмуравьиную кислоту. Тамъ же.

Кромѣ того были изданы литографированные курсы лекцій, а именно:

I курсъ.

Теоретическая механика, проф. Сомовъ.

Дифференціальное исчисленіе, проф. Вороной.

Задачи по дифференціальному и интегральному исчисленію, препод. Мордухай-Болтовской.

Алгебраическій анализъ
Аналитическая геометрія
Аналит. геом. для хим. отдѣл.
Математика для химическ. отд. } проф. Анисимовъ.

Физика, преп. Бернацкій.

Геодезія, преп. Эренфейхтъ.

Дополн. къ курсу геодезіи для инж.-строит. отд., преп. Эренфейхтъ.

II курсъ.

Теоретическая механика, проф. Сомовъ.

Математика, проф. Вороной.

Задачи по математикѣ, преп. Мордухай-Болтовской.

Теоретическая механика для химич. отд., проф. Делоне.

Сопротивленіе матеріаловъ, проф. Кирпичева (переиздано).

Практическая механика
Атласъ практич. механики } проф. Делоне.

Детали машинъ, преп. Касьминъ.

Физика, преп. Бернацкій.

Строительная механика, преп. Заборовскій.

Строительное искусство
Атласъ строит. искусства } проф. Дейчъ.

Геодезія высшая, преп. Эренфейхтъ.

Органическая химія (не окончена) проф. Вагнеръ.

Дополненіе къ курсу сопротивленія матеріаловъ (химическое отдѣл.), преп. Заборовскій.

Дополненіе къ курсу Кирпичева (химическое отдѣленіе), преп. Заборовскій).

Дополненіе къ курсу Кирпичева (механ. и инж.-строит. отдѣл.), преподаватель Заборовскій.

Пособіе по техническому черченію, преп. Рофе.

Пособіе по техническому черченію, преп. Окольскій.

УЧАЩІЕСЯ ВЪ ИНСТИТУТѢ

за 1899 гражданскій годъ.

Распредѣленіе по курсамъ и отдѣленіямъ.	ОТДѢЛЕНІЯ. Механическое. I	Механическое. II	Инженер-но-строительное. I	Инженер-но-строительное. II	Химическое. I	Химическое. II	ИТОГО. I	ИТОГО. II	ВСЕГО.
СОСТОЯЛО НА ЛИЦО:									
къ 1 января 1899 года	112	—	98	—	60	—	270	—	270
Въ теченіе отчетнаго года:									
выбыло	27	—	49	—	19	—	95	—	95
поступило	102	1	109	5	62	7	273	13	286
Въ томъ числѣ оставшихся на второй годъ на курсѣ	27	—	30	—	14	—	71	—	71
Переведено на старшіе курсы .	—	91 [1]	—	44	—	41	—	176	176
Состояло на лицо къ 1 января 1900 года	102	92	108	49	62	48	272	189	461
Распредѣленіе учащихся:									
А. по вѣроисповѣданію:									
православныхъ	5	3	15	9	7	6	27	18	45
римско-католиковъ . .	85	56	65	34	42	35	192	125	317
лютеранъ	8	3	4	3	1	1	13	7	20
единовѣрцевъ	—	—	—	—	—	—	—	—	—
армяно-григоріанъ . . .	—	—	1	—	—	—	1	—	1
іудеевъ	3	30	23	2	12	5	38	37	75
англиканскаго	—	—	—	—	—	—	—	—	—
реформатскаго	1	—	—	1	—	1	1	2	3
караимовъ.	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	102	92	108	49	62	48	272	189	461
Б. по сословіямъ:									
Дворянъ и сыновей чиновниковъ .	69	40	60	37	34	35	163	112	275
Почетн. гражд. и купц. 1 гильдіи .	1	3	1	—	1	1	3	4	7
Духовнаго званія	—	1	—	1	—	—	—	2	2
Военнаго сословія	1	—	—	—	1	—	2	—	2
Мѣщанъ, купцовъ 2 гильдіи и ремесленниковъ	29	45	46	10	25	10	100	65	165
Крестьянъ	1	3	1	1	1	2	3	6	9

[1]) Примѣчаніе: Въ числѣ 91 студ. мех. отд. 2 к. находится 6 студ. 1 к. инж. стр. отд., переведенныхъ на 2 к. механич. отд.

Распредѣленіе по курсамъ и отдѣленіямъ.	ОТДѢЛЕНІЯ. Механическое. I	II	Инженерно-строительное. I	II	Химическое. I	II	ИТОГО. I	II	ВСЕГО.
Иностранцевъ.	1	—	—	—	—	—	1	—	1
Казаковъ	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	102	92	108	49	62	48	272	189	461
В. по образованію полученному ими до поступленія въ Институтъ:									
Окончившихъ полный курсъ:									
въ университетахъ и другихъ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ:									
(въ томъ числѣ выдержавшихъ полное полукурсовое испытаніе на физико - математе-математическ. факультетѣ Университетовъ) . .	4	3	—	5	—	8	4	16	20
Въ гимназіяхъ	59	49	54	23	27	25	140	97	237
„ Реальныхъ училищахъ съ дополнительнымъ классомъ	37	36	48	17	28	12	113	65	178
„ Коммерческихъ училищахъ . .	—	—	—	—	2	—	2	—	2
„ Военно-учебныхъ заведеніяхъ .	—	—	1	4	—	—	1	4	5
„ Проч. средн. учебн. завед. . . .	2	3	5	—	5	3	12	6	18
Выдержавшихъ испытаніе на аттестатъ зрѣлости:									
При Гимназіяхъ.	—	1	—	—	—	—	—	1	1
„ Реальн. учил. съ дополн. клас.	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	102	92	108	49	62	48	272	189	461
Было освобождено отъ платы за слушаніе лекцій:									
въ 1-мъ полугод. отчетнаго года — полностью . . .	26	—	29	—	24	—	79	—	79
въ 1-мъ полугод. отчетнаго года — отъ половины .	9	—	5	—	2	—	16	—	16
во 2-мъ полугод. отчетнаго года — полностью . . .	—	26	—	20	—	14	—	60	60
во 2-мъ полугод. отчетнаго года — отъ половины .	—	20	—	7	—	6	—	33	33

Именной списокъ служащихъ въ Варшавскомъ Политехническомъ Институтѣ ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II къ 1 Іюля 1900 года.

№ по порядку.	Должность, ученая степень, чинъ, имя, отчество и фамилія.	Классъ должности.	Съ какого времени на службѣ въ Институтѣ.	Съ какого времени считается старшинство.	Когда и какую послѣднюю награду получилъ.
1	Директоръ и ординарный профессоръ Института, докторъ минералогіи и геогнозіи, Дѣйствительный Статскій Совѣтникъ Александръ Евгеніевичъ Лагоріо.	IV	17 Апр. 1898 г.	9 Апр. 1900 г.	Орденъ Св. Равноапост. князя Владиміра 4 ст. 1 Янв. 1898 г.
	Испр. обяз. Декановъ:				
2	Механическаго отдѣленія — ординарный профессоръ по каѳедрѣ математики, докторъ чистой математики, Статскій Совѣтникъ Василій Аѳанасьевичъ Анисимовъ.	V	1 Авг. 1898 г.	1 Авг. 1898 г.	14 Мая 1896 г. орденъ Св. Станисл. 2 ст.
3	Инженерно-строительнаго отдѣленія — ординарный профессоръ по каѳедрѣ строительнаго искусства, гражданскій инженеръ, Статскій Совѣтникъ Викторъ Іосифовичъ Дейчъ.	V	1 Янв. 1899 г.	1 Янв. 1899 г.	1 Янв. 1898 г. орденъ Св. Станисл. 3 ст.
4	Химическаго отдѣленія — ординарный профессоръ по каѳедрѣ химіи, докторъ химіи, Дѣйствительный Статскій Совѣтникъ Егоръ Егоровичъ Вагнеръ.	V	1 Авг. 1898 г.	9 Апр. 1900 г.	14 Мая 1896 г. орденъ Св. Анны 2 ст.

№ по порядку.	Должность, ученая степень, чинъ, имя, отчество и фамилія.	Классъ должности.	Съ какого времени на службѣ въ Институтѣ.	Съ какого времени считается старшинство.	Когда и какую послѣднюю награду получилъ.
	Профессора:				
5	Ординарный профессоръ по каѳедрѣ теоретической механики, заслуж. профессоръ Института, докторъ прикладной математики, Дѣйствительный Статскій Совѣтникъ Павелъ Осиповичъ Сомовъ.	V	1 Авг. 1898 г.	9 Апр. 1900 г.	14 Мая 1896 г. орденъ Св. Анны 2 ст.
6	Ординарный профессоръ по каѳедрѣ математики, докторъ чистой математики, Статскій Совѣтникъ Георгій Ѳеодосьевичъ Вороной.	V	1 Авг. 1898 г.	1 Авг. 1898 г.	1 Янв. 1898 г. орденъ Св. Станисл. 2 ст.
7	Ординарный профессоръ по каѳедрѣ прикладной механики, докторъ механики, Статскій Совѣтникъ Николай Борисовичъ Делоне.	V	1 Іюля 1899 г.	15 Нояб. 1897 г.	27 Марта 1886 г. орд. Св. Станисл. 3 ст.
8	Экстраординарный профессоръ по каѳедрѣ химіи, магистръ химіи, Коллежскій Совѣтникъ Василій Андреевичъ Солонина.	VI	1 Іюля 1899 г.	1 Іюля 1899 г.	14 Мая 1896 г. орденъ Св. Станисл. 3 ст.
	Штатные преподаватели:				
9	Преподаватель техническаго черченія, инженеръ-технологъ, Надворный Совѣтникъ Станиславъ Янъ (2-хъ именъ) Антоновичъ Окольскій.	VII	1 Сент. 1898 г.	1 Сент. 1898 г.	—
10	Преподават. рисованія, классный художникъ 1-й степени, Надворный Совѣтникъ Элигіушъ Іосифъ (2-хъ именъ) Викентьевичъ Невядомскій.	VII	1 Сент. 1898 г.	1 Сент. 1898 г.	—

№ по порядку.	Должность, ученая степень, чинъ, имя, отчество и фамилія.	Классъ должности.	Съ какого времени на службѣ въ Институтѣ.	Съ какого времени считается старшинство.	Когда и какую послѣднюю награду получилъ.
11	Преподаватель прикладной механики, военный инженеръ, Надворный Совѣтникъ Сергѣй Андреевичъ Заборовскій.	VII	8 Нояб. 1899 г.	8 Нояб. 1899 г.	14 Мая 1896 г. орденъ Св. Анны 3 ст.
12	Преподаватель политической экономіи и статистики, докторъ политич. экономіи, Статскій Сов., проф. Иванъ Ивановичъ Иванюковъ.	VII	1 Іюля 1899 г.	7 Апр. 1878 г.	1 Апр. 1890 г. орденъ Св. Владим. 3 ст.
13	Преподаватель, руководитель практическими занятіями по теоретической механикѣ, магистрантъ, Надворный Совѣтникъ Дмитрій Андреевичъ Гонтаревъ.	VII	20 Авг. 1899 г.	20 Авг. 1899 г.	—
14	Преподаватель, руководитель практическими занятіями по математикѣ, окончилъ Имп. С.-Пет. Ун. съ дипломомъ первой ст., Надворный Совѣтн. Дмитрій Дмитріевичъ Мордухай-Болтовской.	VII	4 Окт. 1899 г.	4 Окт. 1899 г.	—
15	Преподаватель начертательной Геометріи, кандидатъ математическихъ наукъ, Статскій Совѣтникъ Эдуардъ - Генрихъ (2-хъ именъ) Владимир. Гляссъ.	VII	19 Авг. 1899 г.	20 Сент. 1899 г.	1 Янв. 1892 г. орденъ Св. Станисл. 2 ст.
16	Преподаватель рисованія, классный художникъ 3-й степени Іосифъ Константиновичъ Маньковскій.	VII	1 Янв. 1900 г	—	—
17	Преподаватель архитектурнаго черченія, гражданскій инженеръ Левъ Степановичъ Васильевъ.	VII	20 Авг. 1899 г.	—	—

№ по порядку.	Должность, ученая степень, чинъ, имя отчество и фамилія.	Классъ должности.	Съ какого времени на службѣ въ Институтѣ.	Съ какого времени считается старшинство.	Когда и какую послѣднюю награду получилъ.
18	Преподаватель геодезіи и руководитель практическими занятіями по математикѣ, магистрантъ, Надворный Совѣтникъ, Викторъ Эмильевичъ Эренфейхтъ.	VII	11 Февр. 1900 г.	8 Мар. 1898 г.	1 Янв. 1898 г. орденъ Св. Станисл. 3 ст.
19	Преподаватель физики, кандидатъ физико математическихъ наукъ, Коллежскій Ассесоръ Викторъ Адольфовичъ Бернацкій.	VII	27 Мар. 1900 г.	15 Сент. 1898 г.	—
	Лица, приглашенныя для занятій въ Институтѣ по найму:				
20	Преподаватель ботаники, ординарный проф. Императорскаго Варшавскаго Университета, докторъ ботаники, Статскій Совѣтникъ Владиміръ Ивановичъ Палладинъ.	—	1 Сент. 1898 г.	30 Дек. 1894 г.	1 Янв. 1895 г. орденъ Св. Станисл. 2 ст.
21	Преподаватель нѣмецкаго языка, ординарный профессоръ Императорскаго Варшавскаго Университета, магистръ классической филологіи, Надворный Совѣтникъ Оскаръ-Рудольфъ (2-хъ именъ) Ѳедоровичъ Базинеръ.	—	1 Сент. 1898 г.	31 Авг. 1884 г.	—
22	Преподаватель французскаго языка, баккалавръ филологическихъ наукъ Дижонской Академіи, Надворный Совѣтникъ Карлъ-Генрихъ-Рудольфъ (3-хъ им.) Андреевичъ Неру.	—	1 Сент. 1898 г.	20 Мар. 1898 г.	1 Янв. 1894 г. орденъ Св. Станисл. 3 ст.

№ по порядку.	Должность, ученая степень, чинъ, имя, отчество и фамилія.	Классъ должности.	Съ какого времени на службѣ въ Институтѣ.	Съ какого времени считается старшинство.	Когда и какую послѣднюю награду получилъ.
23	Преподаватель конструктивнаго черченія, военный инженеръ, Капитанъ Николай Владимировичъ Коротткевичъ Ночевной.	—	1 Сент. 1899 г.	17 Апр. 1894 г.	14 Мая 1896 г. орденъ Св. Анны 3 ст.
24	Преподаватель топографическаго черченія, военный топографъ, Подполковникъ Павелъ Ипполитовичъ Добровольскій.	—	1 Сент. 1898 г.	30 Авг. 1890 г.	14 Мая 1896 г. орденъ Св. Владим. 4 ст.
25	Преподаватель техническаго черченія, инженеръ-механикъ Владиміръ Константиновичъ Рофе.	—	1 Окт. 1899 г.	—	—
26	Преподаватель по курсу деталей машинъ, инженеръ технологъ Александръ Яковлевичъ Касьминъ.	—	1 Февр. 1900 г.	—	—
	Штатные лаборанты:				
27	Старшій лаборантъ при каѳедрѣ химіи, магистръ фармаціи, Коллежскій Ассесоръ Казимиръ Станиславовичъ Славинскій.	VIII	11 Сент. 1898 г.	11 Сент. 1898 г.	—
28	Старшій лаборантъ при каѳедрѣ химіи, окончилъ Императорскій С.-Петерб. Университ. съ дипломомъ 2 ст., Коллежскій Ассесоръ Николай Николаевичъ Нагорновъ.	VIII	1 Іюля 1898 г.	5 Дек. 1897 г.	—
29	Старшій лаборантъ при каѳедрѣ химіи, кандидатъ физико-математич. наукъ, Коллежскій Ассес. Ѳаддей-Бенонъ (2-хъ им.) Игнатьевичъ Милобендзкій	VIII	1 Сент. 1899 г.	25 Авг. 1898 г.	—

№ по порядку.	Должность, ученая степень, чинъ, имя, отчество и фамилія.	Классъ должности.	Съ какого времени на службѣ въ Институтѣ.	Съ какого времени считается старшинство.	Когда и какую послѣднюю награду получилъ.
30	Испр. д. Старшаго лаборанта при каѳедрѣ физики, дѣйствительный студентъ Императорскаго Варшавскаго Университета, Коллежскій Ассес. Александръ Петровичъ Поспѣловъ.	VIII	1 Сент. 1899 г.	1 Сент. 1899 г.	—
31	Старшій лаборантъ при ботаническомъ кабин., магистрантъ физико-математическихъ наукъ, приватъ-доцентъ Императорскаго Варшавскаго Университета, Коллежскій Ассес. Александръ Ѳедоровичъ Флеровъ.	VIII	10 Нояб. 1898 г.	1 Янв. 1900 г.	—
32	Испр. д. младшаго лаборанта при каѳедрѣ физики, оконч. Имп. С.-Пет. Унив. съ дипломомъ 1 ст., Титулярный Совѣтникъ Викентій Викентьевичъ Чепинскій.	IX	1 Авг. 1899 г.	1 Авг. 1899 г.	—
	Лаборанты по найму:				
33	Испр. об. младшаго лаборанта при каѳедрѣ минералогіи и геологіи, кандидатъ физико - математическихъ наукъ Дмитрій Николаевичъ Соболевъ.	"	1 Окт. 1899 г.	—	—
34	Руководитель практическими занятіями по химіи, кандидатъ физико-математическихъ наукъ Викторъ Стржембошъ.	"	1 Сент. 1899 г.	—	—

№ по порядку.	Должность, ученая степень, чинъ, имя, отчество и фамилія.	Классъ должности.	Съ какого времени на службѣ въ Институтѣ.	Съ какого времени считается старшинство.	Когда и какую последнюю награду получилъ.
	Библіотека:				
35	Библіотекарь, Колежскій Секретарь Евгеній Паркиссовичъ Добржинскій.	VIII	9 Іюля 1898 г.	24 Апр. 1898 г.	—
36	Помощникъ библіотекаря, Титулярный Совѣтникъ Георгій Ѳеодосьевичъ Чайковскій.	IX	22 Мар. 1899 г.	2 Іюля 1897 г.	—
	Инспекція:				
37	Инспекторъ, Статскій Совѣтн. Константинъ Николаевичъ Капустинъ.	V	1 Іюля 1898 г.	1 Іюля 1898 г.	1 Янв. 1898 г. орденъ Св. Станисл. 3 ст.
	Помощники инспектора:				
38	а) Коллежскій Ассесоръ Иванъ Андреевичъ Максименко.	VIII	9 Іюля 1898 г.	29 Окт. 1898 г.	—
39	б) Надворный Совѣтникъ Василій Ивановичъ Голоскевичъ.	VIII	1 Авг. 1899 г.	24 Апр. 1900 г.	14 Мая 1896 г. орденъ Св. Станисл. 3 ст.
	Канцелярія:				
40	Дѣлопроизводитель, Коллежскій Ассесоръ Василій Осиповичъ Конашинскій.	VII	30 Окт. 1899 г.	20 Нояб. 1899 г.	—
41	Испр. д. Помощника Дѣлопроизводителя, неимѣющій чина Ѳома Елеазаровичъ Малицкій.	IX	30 Іюля 1898 г.	—	—
42	Бухгалтеръ, неимѣющій чина Людовикъ Янъ (2-хъ именъ) Яковлевичъ Радзивановскій.	VII	11 Іюля 1898 г.	—	—

№ по порядку.	Должность, ученая степень, чинъ, имя, отчество и фамилія.	Классъ должности.	Съ какого времени на службѣ въ Институтѣ.	Съ какого времени считается старшинство.	Когда и какую послѣднюю награду получилъ.
43	Помощникъ Бухгалтера, Коллежскій Секретарь Александръ Андреевичъ Терещенко.	IX	4 Дек. 1898 г.	17 Апр. 1899 г.	—
	Хозяйственная часть:				
44	Смотритель зданій, Губернскій Секрет. Леонидъ Михайловичъ Киткинъ.	VII	1 Сент. 1898 г.	24 Окт. 1874 г.	—
	Пріемный покой:				
45	Врачъ, неимѣющій чина Богданъ - Станиславъ - Густавъ (3-хъ именъ) Конрадовичъ Корыбутъ - Дашкевичъ.	VII	1 Сент. 1898 г.	—	—
46	Фельдшеръ, неимѣющій чина Сигизмундъ Карловичъ Зярекъ.	-	15 Окт. 1898 г.	—	—
	Командированные за-границу для подготовленія къ профессорскому званію:				
1	Кандидатъ естественныхъ наукъ Георгій Іосифовичъ Ерчиковскій, подготовляющійся къ чтенію курса физико-химіи и электро-химіи, въ командировкѣ съ 1 января 1899 г. на 2 года.				
2	Военный Инженеръ, Надворный Совѣтникъ Сергѣй Андреевичъ Заборовскій, подготовляющійся къ чтенію курса прикладной механики, по отдѣлу строительной механики и графической статики, въ командировкѣ съ 1 апрѣля 1899 года на 2 года.				

№ по порядку.	Должность, ученая степень, чинъ, имя, отчество и фамилія.	Классъ должности.	Съ какого времени на службѣ въ Институтѣ.	Съ какого времени считается старшинство.	Когда и какую послѣднюю награду получилъ.
3	Инженеръ-Технологъ Вячеславъ Карловичъ Задарновскій, подготовляющійся къ чтенію курса технологіи волокнистыхъ веществъ, въ командировкѣ со 2-го полугодія 1898 г. на 2 года.				
4	Кандидатъ естественныхъ наукъ Владиміръ Ивановичъ Исаевъ, подготовляющійся къ чтенію курса химической технологіи, въ командировкѣ со 2-го полугодія 1898 г. на 2 года.				
5	Инженеръ-Технологъ Александръ Яковлевичъ Касьминъ, подготовляющійся къ чтенію курса прикладной механики (паровыя машины и котлы) въ командировкѣ со 2-го полугодія 1898 г. на 2 года.				
6	Инженеръ-Технологъ Михаилъ Ивановичъ Лясинскій, подготовляющійся къ чтенію курса заводскихъ машинъ, а также машинъ и орудій для обработки металла и дерева, въ командировкѣ со 2 полугодія 1898 г. на 2 года.				
7	Технологъ, Титулярный Совѣтникъ Дмитрій Андреевичъ Хардинъ, подготовляющійся къ чтенію курса химической технологіи, въ командировкѣ со 2-го полугодія 1898 г. на 2 года.				

№ по порядку.	Должность, ученая степень, чинъ, имя, отчество и фамилія.	Классъ должности.	Съ какого времени на службѣ въ Институтѣ.	Съ какого времени считается старшинство.	Когда и какую послѣднюю награду получилъ.
8	Кандидатъ физико-математическихъ наукъ Иванъ Өеодосьевичъ Чорба, подготовляющійся къ чтенію курса практической механики (гидравлика, подъемныя машины), въ командировкѣ со 2-го полугодія 1898 г. на 2 года.				
9	Инженеръ Путей Сообщенія Юрій Владимировичъ Ломоносовъ, подготовляющійся къ чтенію курса прикладной механики (паровозы), въ командировкѣ съ 29 сентября 1899 г. на 2 года.				
10	Инженеръ-Технологъ Валентинъ Ивановичъ Мейеръ, подготовляющійся къ чтенію курса прикладной механики, главнымъ образомъ по предмету сопротивленія матеріаловъ, въ командировкѣ съ 29 сентября 1899 г. на 2 года.				

Вѣдомость

объ учрежденныхъ въ Варшавскомъ Политехническомъ Институтѣ ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II стипендіяхъ за 1898 и 1899 гражданскіе годы.

Наименованіе стипендій.	Сумма назначенная по смѣтѣ.		Число учрежденныхъ стипендій.	Размѣръ стипендій въ годъ.		Число стипендіатовъ, которые пользовались ими.		
	руб.	к.		руб.	к.	Въ I пол. 1898 г.	Во II пол. 1898 г.	Всего стипендіатовъ.
1898 годъ:								
а) Казенныя стипендіи:								
1. На подготовленіе къ званію профессоровъ Института согласно Высочайше утвержденному 8 Іюня 1898 г. мнѣнію Государственнаго Совѣта	9000	—	5	1800	—	—	5	5
б) Стипендіи на капиталы, завѣщанные и пожертвованные Институту, составляющіе спеціальныя средства Института.—Не было	—	—	—	—	—	—	—	—
в) Капиталы, составляющіе тѣ же спеціальныя средства Института, но имѣющіе назначеніемъ выдачу пособій.—Не было	—	—	—	—	—	—	—	—
г) Стипендіи разныхъ вѣдомствъ учрежденій и лицъ:								
1. Гатчинскаго Сиротскаго Института Императора Николая I-го	140	—	1	140	—	—	1	1
2. По записи Сѣраковской отъ Варшавскаго Учебнаго Округа.	150	—	1	150	—	—	1	1
3. По записи кс. Убыша отъ Варшавскаго Учебнаго Округа	47	—	1	47	—	—	1	1
Итого.	9337	—						

НАИМЕНОВАНІЕ СТИПЕНДІЙ.	Сумма назначенная по смѣтѣ. руб.	к.	Число учрежденныхъ стипендій.	Размѣръ стипендій въ годъ. руб.	к.	Число стипендіатовъ которые пользовались ими. Въ I пол. 1899 г.	Во II пол. 1899 г.	Всего стипендіатовъ.
1899 годъ:								
а) Казенныя стипендіи:								
1. На подготовленіе къ званію Профессоровъ Института, согласно Высочайше утвержденному 8 Іюня 1898 г. мнѣнію Государственнаго Совѣта	18000	—	10	1800	—	10	10	10
б) Стипендій на капиталы, завѣщанные и пожертвованные Институту, составляющіе спеціальныя средства Института:								
1. Имени Дѣйств. Тайнаго Совѣтн. Кербедза	256	50	1	256	50	—	1	1
в) Капиталы, составляющіе тѣ же спеціальныя средства Института, по имѣющіе назначеніемъ выдачу пособій. Не было	—	—	—	—	—	—	—	—
1. По записи Манцевича отъ Минскаго реальнаго училища	252	47	1	252	47	—	1	1
2. Гатчинскаго Сиротскаго Института Императора Николая I	120	—	1	120	—	1	1	1
3. Варшавскаго учебнаго округа по записи кс. Убыша.	47	—	1	47	—	1	1	1
4. Тоже по записи Сѣраковской. .	450	—	3	150	—	1	3	3
5. „ „ „ Орденги . . .	100	—	1	100	—	—	1	1
6. „ „ „ Франца Каминскаго	460	—	4 2	90 50	— —	— —	4 2	6
7. Отъ Госуд. Контроля стипендія имени Статсъ-Секретаря Сольскаго . .	358	6	1	358	6	—	1	1
8. Отъ управл. акцизн. сборами Варшавской и Сѣдлецкой губер. стипендія имени Дѣйств. Стат. Сов. Барона Н. В. Штейнгейля	228	—	1	228	—	—	1	1
Итого	20272	3						

ВѢДОМОСТЬ

о денежныхъ оборотахъ по Варшавскому Политехническому Институту ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II

за 1898 и 1899 гражданскіе годы.

Приходъ денежныхъ средствъ	Предположено было по финансовой смѣтѣ Департамента Министерства Финансовъ.		Дѣйствительныя поступленія.	
	рубли.	коп.	рубли.	коп.
Въ 1898 году				
Изъ суммъ Государственнаго Казначейства:				
На содержаніе Политехническаго Института	43625	—	43625	—
На подготовленіе къ званію профессоровъ Института	9000	—	8100	—
Поступило отъ разныхъ учрежденій и лицъ на выдачу стипендій и пособій студентамъ	—	—	178	50
Поступило платы за слушаніе лекцій со студентовъ и вольнослушателей	—	—	14030	—
Всего въ 1898 году .	—	—	65933	50

Расходъ денежныхъ средствъ.	Предположено было по финансовой смѣтѣ.		Дѣйствительный расходъ.		
	рубли.	коп.	рубли.	коп.	
Въ 1898 г.					
1. На содержаніе личнаго состава преподавателей и служащихъ въ Институтѣ	—	—	23881	15	
2. На пособія служащимъ и студентамъ Института	—	—	3500	—	
3. На содержаніе учебно-вспомогательныхъ учрежденій и учебныя пособія	—	—	1250	—	
4. На пополненіе библіотеки . . .	—	—	2750	—	
5. На отопленіе, освѣщеніе, водоснабженіе, чистоту и прочіе хозяйственные расходы	—	—	3375	—	
6. На канцелярскіе расходы, содержаніе прислуги и прочее . . .	—	—	1750	—	
7. На содержаніе пріемнаго покоя.	—	—	250	—	
8. На подготовленіе къ званію профессоровъ Института	9000	—	8100	—	
9. На выдачу стипендій и пособій изъ капиталовъ, присланныхъ разными учрежденіями и лицами .	—	—	178	50	
10. Внесено въ доходъ казначейства платы за слушаніе лекцій со студентовъ и вольнослушателей . .	—	—	14030	—	
Итого . . .	—	—	59064	65	
11. Къ 1899 г. остатокъ въ суммѣ . поступилъ въ рессурсы казны.	—	—	6868	85	Сумма эта, согласно Высочайше утвержд. 8 іюня 1898 г. мнѣнію Госуд. Сов., отпущена на усиленіе средствъ Института въ 1899 г.; ст. 3 отчета 1899 г.
Всего въ 1898 году . .	—	—	65933	50	

Приходъ денежныхъ средствъ.	Предположено было по финансовой смѣтѣ Департамента Министерства Финансовъ.		Дѣйствительныя поступленія.	
	рубли.	коп.	рубли.	коп.
въ 1899 году:				
Изъ суммъ Государственнаго Казначейства.				
1. На содержаніе Института . .	123607	50	123607	50
2. На подготовленіе къ званію профессоровъ Института. . . .	27000	—	17400	—
3. На усиленіе средствъ Института	—	—	6868	85
3а. На выдачу путевого пособія и разныхъ выдачъ по особымъ ассигнованіямъ	—	—	3000	—
4. Пожертвовано на учрежденіе стипендій	—	—	6000	—
5. Получено %-овъ отъ капиталовъ состоящихъ въ распоряженіи Института	—	—	128	25
6. Присланныхъ отъ разныхъ лицъ и учрежденій на выдачу пособій и стипендій студентамъ Института	—	—	2053	41
7. Платы за слушаніе лекцій со студентовъ и вольнослушателей	—	—	30240	—
Всего за 1899 годъ . .	—	—	189298	01

Расходъ денежныхъ средствъ.	Предположено было по финансовой смѣтѣ. рубли.	коп.	Дѣйствительный расходъ. рубли.	коп.	
Въ 1899 г.					
1. На содержаніе личнаго состава преподавателей и служащихъ въ Институтѣ лицъ	—	—	70580	60	
2. На пособія служащимъ и студентамъ изъ суммъ Института .	—	—	3998	85	
3. На содержаніе учебно-вспомогательныхъ учрежденій, учебныя пособія, командировки и лѣтнія занятія и экскурсіи	—	—	23121	20	
4. На пополненіе библіотеки. . .	—	—	5750	—	
5. На отопленіе, освѣщеніе, чистоту и прочіе хозяйственные расходы	—	—	10251	—	
6. На канцелярскіе расходы, содержаніе прислуги и прочее . . .	—	—	5750	—	
7. На содержаніе пріемнаго покоя.	—	—	500	—	
8. Путевое пособіе и разныя выдачи служащимъ по особымъ ассигнованіямъ	—	—	3000	—	
9. На подготовленіе къ званію профессоровъ Института.	—	—	17400	—	
10. На выдачу стипендій и пособій изъ капиталовъ, присланныхъ разными учрежденіями и лицами.	—	—	1442	50	
11. На выдачу стипендій изъ %-овъ отъ капиталовъ, находящихся въ распоряженіи Института . . .	—	—	85	48	
12. Внесено въ доходъ Государственнаго Казначейства платы за слушаніе лекцій	—	—	30240	—	
Итого . . .	—	—	172118	63	
Остатокъ къ 1900 году:					Сумма 10527 р. 90 к., согласно Высочайше утвержденному мнѣнію Государственнаго Совѣта, разрѣшена на усиленіе средствъ Института въ 1900 г.
13. Поступившіе въ ресурсы казны остатки отъ личныхъ суммъ 1899 года	10527	90	—	—	
Въ распоряженіи Института:					
14. а) Стипендіятскаго капитала .	6040	57	—	—	
б) для выдачи пособій студентамъ	610	91	—	—	
Итого . . .	17179	38	17179	38	
Всего за 1899 годъ .	—	—	189298	01	

СПИСОКЪ

предметовъ, принесенныхъ въ даръ Варшавскому Политехническому Институту ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ II.

1898—1899 учебный годъ.

Минералы.

1. Отъ управленія копей князя Гогенлоэ - 6 ящиковъ образцовъ желѣзной руды, каменнаго угля и горныхъ породъ.

2. Отъ горнаго инженера Кондратовича—образцы мрамора.

3. Отъ южно-русскаго днѣпровскаго металлургическаго общества—18 пудовъ образцовъ руды марганцовой.

4. Отъ Альбрехта (ст. Домброва)—минералы, образцы камня и чугунное литье.

5. Отъ Іона—части машины и колесо чугунное.

6. Отъ Екатерининскаго чугуноплавильнаго, желѣзодѣлательнаго, сталелитейнаго и трубопрокатнаго завода въ Сосновицахъ—образцы продуктовъ изъ сварочнаго и литаго желѣза, и образцы употребляемыхъ сырыхъ матеріаловъ.

1899—1900 учебный годъ.

1. Отъ управленія каменноугольной копи „Антонъ" въ дер. Лагиша—образцы каменнаго угля, а также камня лежащаго надъ и подъ углемъ.

2. Отъ акціонернаго общества сосновицкихъ трубопрокатныхъ и желѣзодѣлательныхъ заводовъ—коллекція, состоящая изъ 43 штукъ образцовъ производствъ сосновицкихъ заводовъ.

3. Отъ М. Гейденвурцеля—препараты постепенной переработки дерева на сульфитъ-целлюлозу.

4. Отъ Домбровскаго управленія франко - русскаго горнаго общества въ Домбровѣ—образцы цинковаго производства изъ завода подъ Бендиномъ.

Книги.

1898—1899 учебный годъ.

1. Отъ лѣснаго департамента—10 экземпляровъ книгъ.

2. Отъ института инженеровъ путей сообщенія—5 экземпляровъ книгъ.

3. Отъ начальника Варшавскаго округа путей сообщенія—5 экземпляровъ книгъ.

4. Отъ инженера Фолькерскаго—4 книги.

5. Отъ профессора Варшавскаго Политехническаго Института Е. Е. Вагнера—6 книгъ.

6. Отъ инженера Кондратовича—1 экземпляръ его сочиненія.

7. Отъ профессора Варшавскаго Политехническаго Института П. О. Сомова—15 экземпляровъ книгъ.

8. Отъ департамента торговли и мануфактуръ—всѣ изданія этого департамента.

9. Отъ Людовика Кона, по завѣщанію его сына Маврикія Кона—44 разныхъ научныхъ изданія.

10. Отъ отдѣла сельской экономіи и сельско-хозяйственной статистики Министерства Земледѣлія и Государственныхъ Имуществъ—1 экземпляръ книги „Отчеты и изслѣдованія по кустарной промышленности въ Россіи“, т. 5.

11. Отъ Императорскаго Германскаго генеральнаго консула барона фонъ-Ванингейма—1 экземпляръ адресной книги Германскихъ вывозныхъ фирмъ.

12. Отъ директора Харьковскаго ветеринарнаго института—„Сборникъ трудовъ, Харьковскаго ветеринарнаго института“.

13. Отъ наслѣдниковъ генералъ-маіора Рыльке—78 томовъ и выпусковъ разныхъ изданій.

14. Отъ библіотеки Императорскаго С.-Петербургскаго Университета—82 тома и выпуска.

15. Отъ Императорскаго Томскаго Университета—8 томовъ.

16. Отъ Политехническаго Общества, состоящаго при Императорскомъ Московскомъ Техническомъ Училищѣ—„Бюллетени его за 1894—1898 г.г.“

17. Отъ Ново-Александрійскаго Института Сельскаго Хозяйства и Лѣсоводства—11 томовъ.

18. Отъ Московскаго Сельско-Хозяйственнаго Института—15 выпусковъ.

19. Отъ Императорскаго Института экспериментальной медицины—выпуски 1—3 тома VII „Архива Біологическихъ Наукъ“.

20. Отъ Императорской Академіи Художествъ—18 изданій.

1899—1900 учебный годъ.

1. Отъ вдовы статскаго совѣтника Екатерины Слупской—220 книгъ.

2. Отъ Ѳаддея Ивановича Венгржиновскаго—различныя книги.

3. Отъ г. Оглоблина—5 экземпляровъ его сочиненія „Колористическій Сборникъ".

4. Отъ Императорскаго С.-Петербургскаго Университета—60 книгъ изданія общества естествоиспытателей.

5. Отъ Юрьевскаго Университета—различныя диссертаціи физико-математическаго содержанія и Ученыя Записки за 1899 годъ.

6. Отъ инженера Юльяна Ранда—различныя книги.

7. Отъ Главнаго Штаба Военно-топографическаго отдѣла—25 томовъ записокъ съ XXXI по XXXV и съ XXXVII по LVI.

8. Отъ Академіи Наукъ—38 экземпляровъ книгъ научнаго содержанія.

9. Отъ Станислава Езіоровскаго—150 названій книгъ.

10. Отъ Императорской С.-Петербургской Академіи Наукъ—500 томовъ книгъ различныхъ изданій и брошюръ.

11. Отъ Библіотеки Общества для содѣйствія улучшенію и развитію мануфактурной промышленности—44 экземпляра брошюръ съ рисунками.

12. Отъ бухгалтера эмиритальной коммисіи въ губерніяхъ Царства Польскаго Антона Коссовскаго—60 томовъ различныхъ книгъ общеобразовательнаго содержанія.

13. Отъ Департамента Земледѣлія и Государственныхъ Имуществъ—по одному экземпляру вышедшихъ изъ обращенія слѣдующихъ брошюръ по энтомологической части.

1) Я. Шрейнеръ—„Новый способъ борьбы съ хлѣбнымъ жукомъ".

2) Его же—„О мохнатой бронзовкѣ въ Южной Россіи".

3) Красильщиковъ—„Люцерновая или Льяная Совка".

и 4) Кулеша—„Отчетъ по командировкѣ въ Самарскую губернію для организаціи правильной борьбы съ сусликомъ".

14. Отъ г. Щепанскаго—различныя книги.

15. Отъ П. Оберга—книги для горнаго отдѣленія Института.

16. Отъ технической по охраненію Бакинскихъ нефтяныхъ промысловъ коммисіи—I, II и III выпуски монографіи буроваго дѣла.

Образцы строительныхъ матеріаловъ.

1. Отъ товарищества для производства гончарныхъ издѣлій барона Бернгейма. 2. Отъ товарищества для производства Глухоозерскаго цемента. 3. Отъ торговаго дома бр. Грибшъ. 4. Отъ анонимнаго общества цемента въ Одессѣ. 5. Отъ Бруно Гофмаркъ. 6. Отъ Робертъ Дитлеръ. 7. Отъ Окско-Волжескаго общества производства строительныхъ матеріаловъ. 8. Отъ товарищества Невскаго механическаго завода. 9. Отъ общества Коломенскаго машиностроительнаго завода. 10. Отъ кирпичнаго завода Б. Бржезинской въ г. Ломжѣ. 11. Отъ кирпичнаго завода въ имѣніи графа С. Г. Грохольскаго. 12. Отъ кирпичнаго завода В. Грозмана и Л. Штейнгеля. 13. Отъ Высочайше утвержденнаго общества Сызранско-Печорской асфальтовой промышленности. 14. Отъ правленія товарищества С.-Петербургскаго вагоно-строительнаго завода. 15. Отъ И. А. Фильякъ. 16. Отъ торговаго дома П. Валленберга.

УЧЕНЫЙ И УЧЕБНЫЙ ОТДѢЛЫ.

О ВЫСОТАХЪ
НАИБОЛЬШАГО ОСВѢЩЕНІЯ
ДАННЫХЪ ПЛОЩАДЕЙ.

В. А. Анисимова.

I.

Въ недавно появившейся книгѣ г-жи *В. Шиффъ* содержится слѣдующая старинная задача [1]):

„На горизонтальномъ столѣ AB помѣщенъ дискъ m, освѣщенный лампою, основаніе которой находится на постоянномъ разстояніи $= a$ отъ центра диска. Опредѣлить высоту, на которой слѣдуетъ помѣстить лампу, чтобы дискъ былъ наиболѣе освѣщенъ".

Въ качествѣ отвѣта на вопросъ предлагается рѣшеніе:

$$\text{„высота равняется } \frac{a}{\sqrt{2}}\text{“.}$$

---

1) *В. Шиффъ.* Сборникъ упражненій и задачъ по дифференціальному и интегральному исчисленіямъ, отд. XVI, зад. 56, стр. 83. Петербургъ, 1898.

Задача вполнѣ точно формулирована еще въ первомъ изданіи извѣстнаго сборника:

F. Frenet. Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal, p. 39—40, solution du problème 94. Paris, 1856.

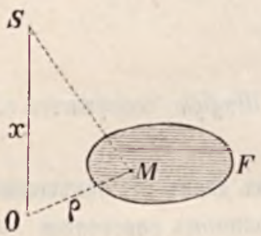
Отвѣтъ этотъ будетъ правильнымъ, но только при дополнительномъ условіи, которое не указано при формулировкѣ задачи,—именно при условіи, что разсматриваемый дискъ имѣетъ безконечно малые размѣры.

Въ другихъ случаяхъ, когда освѣщаемая площадь имѣетъ конечные размѣры, опредѣленіе высотъ наибольшаго освѣщенія является дѣломъ болѣе сложнымъ и труднымъ.

Предполагая, что источникъ свѣта можетъ быть разсматриваемъ какъ свѣтящая точка, мы въ настоящей статьѣ излагаемъ общія соображенія по вопросу о нахожденіи высотъ этого источника подъ условіемъ наибольшаго освѣщенія данныхъ площадей произвольнаго вида и даемъ полное рѣшеніе задачи для нѣкоторыхъ площадей опредѣленной формы.

II.

Пусть свѣтящая точка S, посылающая лучи на данную горизонтальную площадь F, можетъ перемѣщаться по вертикали SO вверхъ отъ точки O ея пересѣченія съ плоскостью фигуры F (черт. 1). На какой высотѣ нужно помѣстить S, чтобы площадь F была наиболѣе освѣщена?



Черт. 1.

Сила освѣщенія I источникомъ S площади F будетъ тѣмъ больше, чѣмъ болѣе получаетъ F свѣтовыхъ лучей отъ S. Для сравненія I при различныхъ высотахъ строимъ сферу радіуса единицы съ центромъ въ S и проводимъ изъ S прямыя къ различнымъ точкамъ контура площади F. Получающаяся при этомъ коническая поверхность вырѣжетъ изъ поверхности сферы нѣкоторую площадь f. Для различныхъ высотъ, *ceteris paribus*, сила освѣщенія I пропорціональна f и потому

$$I = kf, \tag{1}$$

гдѣ k положительное постоянное.

Съ цѣлью вычисленія f, соотвѣтствующей данной высотѣ

$$\overline{SO} = x, \tag{2}$$

беремъ внутри F безконечно малую во всѣхъ направленіяхъ площадку dF. Пусть dF содержитъ точку M, коей разстояніе $\overline{MO}$ до O обозначимъ черезъ ρ

(3) $$\overline{MO} = \rho.$$

Площадкѣ dF будетъ соотвѣтствовать на сферѣ площадка df и легко находимъ

$$df = \frac{\sin SMO}{\overline{SM}^2}\, dF = \frac{x}{\sqrt{(x^2+\rho^2)^3}}\, dF.$$

Такъ какъ f представляетъ сумму площадокъ df, то получаемъ для I выраженіе

(4) $$I = k\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+\rho^2)^3}}\, dF, \qquad x > 0,$$

гдѣ интегрированіе распространяется на всю площадь F.

Формула (4) опредѣляетъ I для высотъ, отличныхъ отъ нуля. Для образованія площадокъ dF можемъ взять 2 произвольныя системы кривыхъ на плоскости F: за dF примемъ тогда элементъ площади, ограниченный 2 парами смежныхъ кривыхъ этихъ 2 системъ. Предѣлъ интеграла будетъ одинъ и тотъ же, какія бы 2 системы кривыхъ мы ни выбирали. Но предполагается при этомъ *implicite*, что контуръ разсматриваемой площади F имѣетъ конечную длину.

Что касается до значенія $x = 0$, то, согласно съ физическими условіями вопроса, должно принять для всякой площади F

(5) $$I = 0, \qquad x = 0.$$

Формула (5) дополняетъ опредѣленіе I, даваемое выраженіемъ (4), указывая значеніе I при $x = 0$, и такимъ образомъ I, какъ функція отъ x, опредѣлена для всѣхъ значеній $x \geqq 0$.

Полагаемъ, что контуръ площади F есть кривая конечной длины. Сила освѣщенія I будетъ, говоря вообще, непрерывною функціею отъ x и производная ея по x будетъ даваться формулою

$$(6) \qquad \frac{dI}{dx} = k \int \frac{\rho^2 - 2x^2}{\sqrt{(x^2+\rho^2)^5}}\, dF.$$

Возможны 2 различныхъ, по своимъ свойствамъ, положенія точки S относительно площади F.

Если *точка O лежитъ внѣ площади F*, то въ этомъ случаѣ радіусъ-векторъ ρ имѣетъ *minimum* и *maximum*

$$\begin{aligned} &minim. \quad \rho = a, \\ &maxim. \quad \rho = b. \end{aligned} \qquad b > a > 0$$

Легко видѣть, что тогда

$$\frac{dI}{dx} > 0, \quad x < \frac{a}{\sqrt{2}};$$

$$\frac{dI}{dx} < 0, \quad x > \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Производная $\frac{dI}{dx}$ съ возрастаніемъ x мѣняетъ свой знакъ, переходя съ $(+)$ на $(-)$. Посему I обязательно для нѣкотораго значенія $x = x_0 > 0$ достигнетъ *maximum*'а. Имѣемъ, слѣдовательно, заключеніе:

Если точка O лежитъ внѣ площади F, то обязательно существуетъ высота ея наибольшаго освѣщенія.

Нѣсколько иначе будетъ обстоять дѣло въ томъ случаѣ, когда O *находится внутри площади F или на ея контурѣ*. При существованіи въ данномъ случаѣ *maximum*'а для ρ

$$maxim. \quad \rho = b, \quad b > 0$$

minimum уже исчезаетъ, обращаясь въ нуль. Посему, имѣя и здѣсь

$$\frac{dI}{dx} < 0, \quad x > \frac{b}{\sqrt{2}},$$

мы не можемъ извлечь изъ нашихъ условій никакихъ указаній относительно знака производной $\frac{dI}{dx}$ для значеній $x < \frac{b}{\sqrt{2}}$. Эта производная при $x < \frac{b}{\sqrt{2}}$ представляется въ видѣ суммы элементовъ какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ, а посему при $x < \frac{b}{\sqrt{2}}$ можетъ оказаться и положительною, и отрицательною. Принимая во вниманіе сказанное, заключаемъ:

Если точка O лежитъ внутри или на контурѣ площади F, то не имѣемъ, въ общемъ случаѣ, положительнаго отвѣта по вопросу о существованіи или несуществованіи высоты наибольшаго освѣщенія.

Особнякомъ можетъ быть поставленъ случай, когда *точка O, находясь на контурѣ, является для контура точкою возврата или точкою съ двойною касательною.* Въ этомъ случаѣ для $\rho < \varepsilon$, гдѣ ε есть число произвольно-малое, площадки dF будутъ относительно ε малыми порядка выше 2-го, какъ нетрудно это видѣть. Разсматривая соотвѣтственные элементы интеграла (4)

$$\frac{x}{\sqrt{(x^2+\rho^2)^3}}\, dF = \frac{x}{\sqrt{x^2+\rho^2}}\, \frac{dF}{x^2+\rho^2},$$

видимъ, что они могутъ быть отброшены, какъ произвольно малые, не только для конечныхъ $x > 0$, но и для x произвольно малыхъ. Но тогда въ интегралѣ (4) на ряду съ высшимъ предѣломъ b для значеній ρ будемъ имѣть и низшій предѣлъ ε для тѣхъ же значеній. Будутъ справедливы прежнія заключенія. Въ разсматриваемомъ случаѣ *будетъ существовать высота наибольшаго освѣщенія.*

Сказанныя заключенія, легко видѣть, не примѣнимы къ общему случаю точки O на контурѣ или внутри площади F. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ площадки dF для $\rho < \varepsilon$ будутъ малыми того же порядка какъ и $x^2+\rho^2$ и потому для x малыхъ въ интегралѣ (4) отброшены быть не могутъ.

Остановимся нѣсколько подробнѣе на томъ случаѣ, когда существуетъ высота наибольшаго освѣщенія. Высота эта, въ силу предыдущихъ соображеній, будетъ корнемъ уравненія

$$\frac{dI}{dx} = 0.$$

Число положительныхъ корней этого уравненія можетъ быть болѣе одного. Въ самомъ дѣлѣ, вторая производная отъ I по x выражается формулою

$$\frac{d^2I}{dx^2} = k \int x \frac{6x^2 - 9\rho^2}{\sqrt{(x^2+\rho^2)^7}} dF.$$

Отсюда ясно, что $\frac{d^2I}{dx^2}$, будучи отрицательною для малыхъ x, для большихъ x дѣлается положительною. Слѣдовательно, $\frac{d^2I}{dx^2}$ не сохраняетъ постояннаго знака $(-)$ съ возрастаніемъ x и потому уравненіе $\frac{dI}{dx} = 0$, имѣя одинъ положительный корень, можетъ ихъ имѣть болѣе одного.

Если число положительныхъ корней конечно, то ихъ будетъ нечетное число. Будетъ существовать нѣсколько *maximum*'овъ силы освѣщенія. Наивыгоднѣйшею высотою для S будетъ высота, соотвѣтствующая *maximum*'у *maximorum*. Мы не имѣемъ основаній, *à priori*, отрицать существованіе даже безконечно большаго числа положительныхъ корней для уравненія $\frac{dI}{dx} = 0$. Теоретически мыслимы случаи, когда имѣемъ

$$\frac{dI}{dx} = 0$$

для значеній x промежутка $x_1 \leqq x \leqq x_2$ при соблюденіи неравенствъ

$$\frac{dI}{dx} > 0, \quad x < x_1$$

$$x_2 > x_1$$

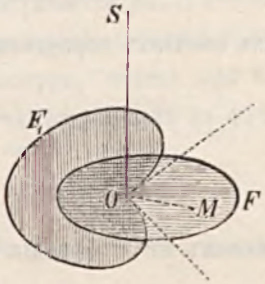
$$\frac{dI}{dx} < 0, \quad x > x_2$$

Для всѣхъ значеній промежутка $x_1 \leqq x \leqq x_2$ функція I будетъ имѣть одно и то же наибольшее значеніе.

Послѣ указанныхъ замѣчаній, относящихся къ площадямъ F произвольнаго вида, разсмотримъ болѣе подробно тѣ площади, для которыхъ радіусы-векторы, выходящіе изъ O, пересѣкаютъ ихъ контуры въ *одной* или *двухъ точкахъ*, отличныхъ отъ O.

III.

Начинаемъ съ случая *одной* точки пересѣченія, какъ болѣе простаго. При сказанномъ условіи *точка O можетъ лежать* только или *внутри* или *на контурѣ* площади F (черт. 2). Положеніе точекъ M площади F на ея плоскости опредѣляемъ полярными координатами ρ и θ относительно полярной системы съ полюсомъ въ O. Принимая $dF = \rho d\rho d\theta$, въ силу формулъ (4) и (5), будемъ имѣть



Черт. 2.

$$(7) \quad \begin{cases} I = kx \int\limits_0^\alpha \int\limits_0^\rho \dfrac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\sqrt{(x^2+\rho^2)^3}}, & x > 0 \\ I = 0 \quad \textit{для значенія} & x = 0. \end{cases}$$

Здѣсь интегрированіе по ρ производится отъ 0 до значеній ρ на контурѣ, которыя, предполагается, опредѣлены уравненіемъ

$$(8) \qquad \rho = \varphi(\theta).$$

Интегрированіе по θ выполняется въ предѣлахъ 0 и α. Въ случаѣ точки O внутренней уголъ $\alpha = 2\pi$, въ случаѣ же O точки контура уголъ $\alpha \leq 2\pi$.

Выполняя въ (7) интегрированіе по ρ, получимъ

$$(9) \quad \begin{cases} I = k \int\limits_0^\alpha \left[1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+\rho^2}}\right] d\theta, & x > 0 \\ I = 0 \quad \textit{для значенія} & x = 0. \end{cases}$$

Производная отъ I по x для $x > 0$, равняясь

$$\frac{dI}{dx} = -k\int\limits_0^\alpha \frac{\rho^2}{\sqrt{(x^2+\rho^2)^3}}\,d\theta,\quad x > 0$$

будетъ отрицательною для всѣхъ $x > 0$. Функція I убываетъ съ возрастаніемъ x, обращаясь при этомъ въ нуль для безконечно-большихъ x. Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ для большихъ $x = \frac{1}{\varepsilon}$ съ точностью до малыхъ высшихъ порядковъ

$$I = \frac{\varepsilon^2}{2}\int\limits_0^\alpha \rho^2\,d\theta,\quad x = \frac{1}{\varepsilon}.$$

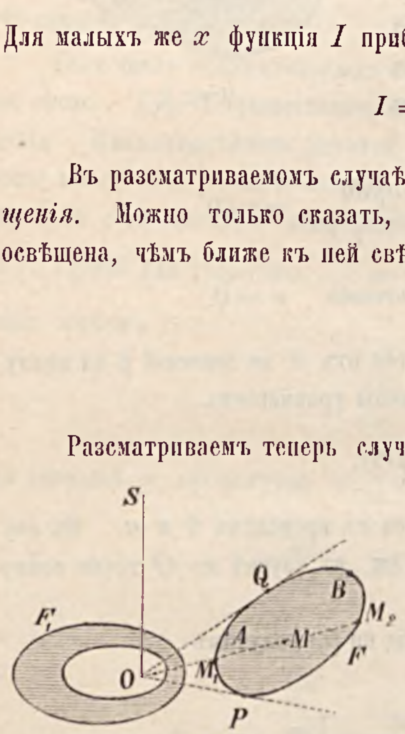
Для малыхъ же x функція I приближается неопредѣленно къ значенію

$$I = k\alpha.$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ *нѣтъ высоты наибольшаго освѣщенія*. Можно только сказать, что площадь F тѣмъ болѣе будетъ освѣщена, чѣмъ ближе къ ней свѣтящая точка S.

IV.

Разсматриваемъ теперь случаи *двухъ* точекъ пересѣченія контура площади F съ радіусами-векторами изъ O. Возможны при этомъ 2 гипотезы: точка O лежитъ внѣ площади F, или же находится на ея контурѣ. Изучаемъ случай *точки O внѣшней* (черт. 3). Употребляя опять полярныя координаты ρ и θ точекъ M площади при полюсѣ O, получимъ изъ (4) и (5) для I выраженія



Черт. 3.

$$(11)\qquad \begin{cases} I = kx \int\limits_0^{\alpha} \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \dfrac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\sqrt{(x^2+\rho^2)^3}}, & x > 0 \\ I = 0 \quad \textit{для значенія} & x = 0. \end{cases}$$

Здѣсь интегрированіе по θ производится въ предѣлахъ 0 и α; α есть уголъ между крайними радіусами-векторами OP и OQ и измѣняется въ предѣлахъ $0 < \alpha \leqq 2\pi$.

Что касается до интегрированія по ρ, то оно происходитъ между предѣлами ρ_1 и ρ_2, причемъ подъ ρ_1 и ρ_2 разумѣются радіусы-векторы при одномъ θ тѣхъ 2 точекъ M_1 и M_2, въ которыхъ, согласно условію, прямая изъ O съ угломъ θ встрѣчаетъ контуръ, считая при этомъ $\rho_1 \leqq \rho_2$. Радіусы-векторы ρ_1 и ρ_2 предполагаются данными въ функціи угла θ

$$(12)\qquad \begin{cases} \rho_1 = \varphi_1(\theta), \\ \rho_2 = \varphi_2(\theta). \end{cases} \qquad \rho_2 \geqq \rho_1$$

Въ данномъ случаѣ ρ, мѣняясь между предѣлами ρ_1 и ρ_2, не можетъ быть нулемъ. Въ силу этого, первая изъ формулъ имѣетъ смыслъ не только для $x > 0$, но и при $x = 0$, давая для I значеніе $I = 0$. Посему вторая изъ формулъ (11) можетъ считаться излишнею.

Выполняемъ въ (11) интегрированіе по ρ. Находимъ

$$(13)\qquad I = k \int\limits_0^{\alpha} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+\rho_1{}^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+\rho_2{}^2}} \right] d\theta, \quad x \geqq 0.$$

Для сужденія о ходѣ измѣненія непрерывной вообще функціи I отъ x, вычисляемъ ея производную по x

$$(14)\qquad \frac{dI}{dx} = k \int\limits_0^{\alpha} \left[\frac{\rho_1{}^2}{\sqrt{(x^2+\rho_1{}^2)^3}} - \frac{\rho_2{}^2}{\sqrt{(x^2+\rho_2{}^2)^3}} \right] d\theta, \quad x \geqq 0.$$

Для малыхъ $x = \varepsilon$ и большихъ $x = \frac{1}{\varepsilon}$ положительныхъ значеній x, получимъ, съ точностью до малыхъ высшихъ порядковъ, приближенныя значенія

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{dI}{dx} = k\displaystyle\int_0^\alpha \left(\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2}\right) d\theta > 0, \quad x = \varepsilon \\ \\ \dfrac{dI}{dx} = k\,\varepsilon^3 \displaystyle\int_0^\alpha (\rho_1^2 - \rho_2^2)\, d\theta < 0, \quad x = \dfrac{1}{\varepsilon}. \end{cases} \qquad \varepsilon > 0$$

Отсюда видно, что $\frac{dI}{dx}$ съ возрастаніемъ x мѣняетъ свой знакъ, переходя съ $(+)$ на $(-)$. Слѣдовательно, въ данномъ случаѣ *существуетъ высота $x = x_0$ наибольшаго освѣщенія.*

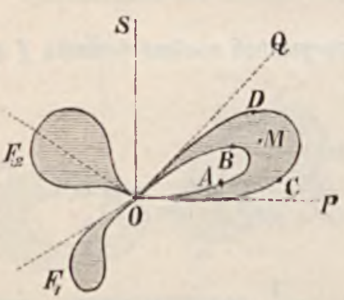
Это значеніе $x = x_0$, такъ какъ $\frac{dI}{dx}$ будетъ, вообще говоря, непрерывною функціею отъ x, является корнемъ уравненія

$$(16)\qquad \int_0^\alpha \left[\frac{\rho_1^2}{\sqrt{(x^2+\rho_1^2)^3}} - \frac{\rho_2^2}{\sqrt{(x^2+\rho_2^2)^3}}\right] d\theta = 0.$$

Уравненіе (16), въ силу ранѣе сказаннаго, обязательно имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ дѣйствительный положительный корень.

V.

Изучаемъ наконецъ вторую гипотезу для случая *двухъ* точекъ пересѣченія контура площади F съ радіусами-векторами изъ O, когда *точка O лежитъ на контурѣ.* Будемъ имѣть дѣло съ площадями одного изъ указанныхъ на черт. 4 типовъ. Точка O для контура можетъ оказаться точкою возврата, угловою и точкою съ двойною касательною.



Черт. 4.

Употребляя и здѣсь полярныя координаты ρ и θ съ полюсомъ въ O для точекъ M площади F, получимъ изъ (4) и (5) формулы

$$(17) \qquad \begin{cases} I = k \int\limits_0^\alpha \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+\rho_1{}^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+\rho_2{}^2}} \right] d\theta, & x > 0 \\ I = 0 \qquad \textit{для значенія} & x = 0 \end{cases}$$

гдѣ въ интегралѣ уничтожаются взаимно элементы, близкіе къ $\rho = 0$, не только для конечныхъ x, но и для x малыхъ, такъ что въ сущности для опредѣленія I достаточно только первой изъ формулъ (17).

Въ этой формулѣ ρ_1 и ρ_2, какъ и прежде, обозначаютъ радіусы-векторы соотвѣтственныхъ точекъ (при одномъ и томъ-же θ) двухъ частей контура $OABO$ и $OCDO$. Подъ α разумѣется уголъ между крайними радіусами-векторами OP и OQ, способный мѣняться въ предѣлахъ $0 < \alpha \leq 2\pi$.

Будемъ имѣть такимъ образомъ формулы предыдущаго отдѣла: примѣнимы будутъ соотвѣтственныя разсужденія. Справедливо будетъ и заключеніе: въ разсматриваемомъ случаѣ *существуетъ высота наибольшаго освѣщенія.*

Высота эта будетъ однимъ изъ положительныхъ корней $x = x_0$ уравненія вида (16).

VI.

Имѣя дѣло съ площадью F произвольнаго вида, мы можемъ ее радіусами-векторами изъ O разбить на отдѣльныя площади $F_1, F_2, \ldots F_n$

$$F = F_1 + F_2 + \cdots + F_n,$$

удовлетворяющія условіямъ, указаннымъ въ отдѣлахъ III, IV и V. Сила освѣщенія I для нашей площади F будетъ представляться выраженіемъ формы

$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n,$$

гдѣ $I_1, I_2, \ldots I_n$ могутъ быть написаны въ формѣ (9) или (13).

Когда точка O лежитъ *внѣ площади* F, будетъ имѣть общее заключеніе отд. II о *существованіи высотъ наибольшаго освѣщенія.* Высоты эти будутъ положительными корнями уравненія

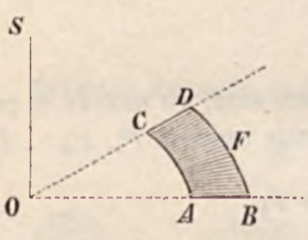
$$\frac{dI}{dx} = \frac{dI_1}{dx} + \frac{dI_2}{dx} + \cdots + \frac{dI_n}{dx} = 0.$$

Когда же точка O лежитъ *внутри или на контурѣ площади* F, то общихъ заключеній нѣтъ. Каждый отдѣльный случай потребуетъ спеціальнаго изученія. *Могутъ существовать или не существовать высоты наибольшаго освѣщенія.* Высоты эти, буде существуютъ, окажутся положительными корнями послѣдняго уравненія настоящаго отдѣла. Категорическому отвѣту даетъ мѣсто, очевидно, тотъ случай, когда O лежитъ на контурѣ F и контуръ площади F имѣетъ вблизи O одинъ изъ видовъ, указанныхъ въ отдѣлѣ V. Для этого исключительнаго случая *высоты наибольшаго освѣщенія будутъ существовать,* являясь опять положительными корнями того же послѣдняго уравненія настоящаго отдѣла $\frac{dI}{dx} = 0$.

VII.

Приложимъ наши общія соображенія къ частнымъ примѣрамъ.

Разсмотримъ прежде всего *кольцевыя площади.* Такъ называемъ мы площади F (черт. 5), ограниченныя двумя концентрическими въ O окружностями и двумя радіусами-векторами изъ O. Обозначаемъ черезъ α уголъ AOC между крайними радіусами-векторами OB и OD. При $\alpha = 2\pi$ будемъ имѣть *кольцо* съ центромъ въ O. Радіусы дугъ AC и BD называемъ соотвѣтственно черезъ a и b



Черт. 5.

$$(18) \qquad \begin{cases} \rho_1 = OA = a, \\ \rho_2 = OB = b. \end{cases} \qquad b > a$$

Уравненіе (16) для даннаго случая будетъ

$$(19)\qquad \frac{a^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \frac{b^2}{\sqrt{(x^2+b^2)^3}}$$

и имѣетъ только одинъ положительный корень

$$(20)\qquad x_0 = \frac{\sqrt[3]{a^2b^2}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}}.$$

Это высота наибольшаго освѣщенія. Соотвѣтственный *maximum* силы освѣщенія I есть

$$(21)\qquad I_0 = k\alpha\sqrt{\frac{\left(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a^2}\right)^3}{b^2-a^2}}.$$

Въ формулѣ (20) параметръ α не фигурируетъ. Тотъ же самый отвѣтъ годенъ и для случая полнаго кольца конечной ширины радіусовъ a и b, что понятно само-собою.

Приближаемъ b неопредѣленно къ a; получимъ кольцевую площадь безконечно малой ширины. При $b=a$ получаемъ

$$(22)\qquad x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

результатъ, годный и для малыхъ α, для малыхъ площадокъ dF на разстояніи a отъ точки O. Это отвѣтъ, указанный г-жею *В. Шиффъ*.

Формула (20) можетъ имѣть разнообразныя приложенія на практикѣ.

На ней можетъ быть обосновано вычисленіе наивыгоднѣйшихъ высотъ лампъ для домашняго употребленія,—фонарей для освѣщенія городскихъ улицъ и площадей.

Та же формула можетъ найти себѣ примѣненіе и въ военномъ дѣлѣ, при опредѣленіи наивыгоднѣйшихъ высотъ электрическихъ прожекторовъ для наибольшаго освѣщенія напередъ заданныхъ кольцевыхъ площадей. Само собою понятно, что при такомъ примѣненіи источникъ свѣта предполагается на столько сильнымъ и воздухъ на столько прозрачнымъ, что съ измѣненіемъ разстоянія, по крайней мѣрѣ въ предѣлахъ разсматриваемой площади, напряженіе, яркость свѣтоваго луча не мѣняется.

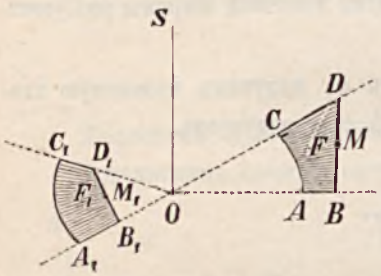
При *большихъ* значеніяхъ отношенія $t = \frac{b}{a}$ вмѣсто (20) можемъ взять значеніе

$$x_0 = a\left[\sqrt[3]{t} - \frac{1}{2\sqrt[3]{t}}\right],$$

приближенное съ точностью членовъ порядка $\frac{a}{t}$.

VIII.

Въ качествѣ втораго примѣра, разсмотримъ *площади* F (черт. 6), *ограниченныя* съ двухъ сторонъ *двумя радіусами-векторами* изъ O, а съ другихъ двухъ — *окружностью* съ центромъ въ O и *прямою*, перпендикулярною къ одному изъ радіусовъ-векторовъ. Если назовемъ черезъ α уголъ между крайними радіусами-векторами и черезъ a и b соотвѣтственно радіусъ окружности и разстояніе прямой до O



Черт. 6.

$$(23) \qquad \begin{cases} OA = a, \\ OB = b, \end{cases}$$

то возможны двѣ гипотезы: $b > a$, $b < a\cos\alpha$, сообразно двумъ видамъ площадей F и F_1. Въ обоихъ случаяхъ будемъ имѣть для точекъ M и M_1 прямыхъ BD и B_1D_1

$$\rho = \frac{b}{\cos\theta}.$$

Но въ то время, какъ для площади F имѣемъ $\rho_1 = a$ и $\rho_2 = \frac{b}{\cos\theta}$, для площади F_1 нужно будетъ положить $\rho_1 = \frac{b}{\cos\theta}$ и $\rho_2 = a$. Посему для площади F сила освѣщенія I будетъ опредѣляться, въ силу (13), формулою

$$(24) \qquad I = k\int_0^\alpha \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{x\cos\theta}{\sqrt{b^2+x^2-x^2\sin^2\theta}}\right]d\theta,$$

для силы освѣщенія I площади F_1 слѣдуетъ взять знакъ противоположный.

Но высота наибольшаго освѣщенія въ обоихъ случаяхъ будетъ положительнымъ корнемъ одного и того же по формѣ уравненія

$$\frac{dI}{dx} = 0.$$

Интегрированіе по θ въ (24) легко выполняется и мы получаемъ

$$(25) \qquad I = k\left[\frac{\alpha x}{\sqrt{x^2+a^2}} - \arcsin\frac{x\sin\alpha}{\sqrt{x^2+b^2}}\right].$$

Уравненіе же для опредѣленія высоты наибольшаго освѣщенія будетъ

$$(26) \qquad \frac{a^2\alpha}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \frac{b^2\sin\alpha}{(x^2+b^2)\sqrt{b^2+x^2\cos^2\alpha}}.$$

Уравненіе (26), какъ легко это видѣть, по уничтоженіи радикаловъ, будетъ 3-й степени относительно x^2. Изслѣдуя полученное такимъ образомъ уравненіе, убѣдимся, что оно при дополнительныхъ условіяхъ

$$(27)\qquad \begin{cases} \dfrac{b}{a} > 1, \\ \\ \dfrac{b}{a} < \cos\alpha \end{cases}$$

даетъ только одно дѣйствительное положительное значенiе для x^2.

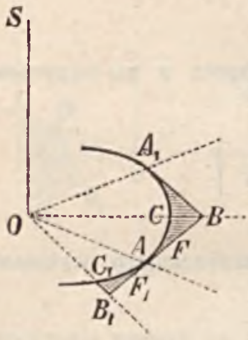
Посему для разсматриваемыхъ площадей F *существуетъ всегда единственная высота наибольшаго освѣщенiя.*

Не останавливаемся на подробномъ доказательствѣ высказаннаго положенiя, на детальномъ изученiи свойствъ корней разсматриваемаго уравненiя и на вопросѣ, объ опредѣленiи единственнаго положительнаго корня уравненiя. Разрѣшенiе этихъ задачъ потребовало бы сложныхъ вычисленiй.

Переходимъ къ разсмотрѣнiю частныхъ случаевъ общей задачи, о которой идетъ рѣчь въ настоящемъ отдѣлѣ,—случаевъ

$$\frac{b}{a} = 1, \quad \frac{b}{a} = \cos\alpha.$$

Разсмотримъ, *во первыхъ,* исходя изъ гипотезы $b > a$, предѣльный ея случай $b = a$. Будемъ имѣть площадь $F = ABC$, изображенную на черт. 7, ограниченную дугою окружности радiуса a, касательною къ ней и радiусомъ-векторомъ изъ O.



Черт. 7.

Уравненiе (26) для опредѣленiя высоты наибольшаго освѣщенiя обратится въ данномъ случаѣ въ

$$\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{a^2+x^2\cos^2\alpha}},$$

и по разрѣшенiи его относительно x даетъ для высоты наибольшаго освѣщенiя формулу

$$(28)\qquad x_0 = \frac{a}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{a^2-\sin^2\alpha}{tg^2\alpha-a^2}}.$$

Соотвѣтственная сила освѣщенія будетъ

(29) $$I_0 = k\left[\sqrt{\frac{\alpha^2}{\sin^2\alpha}-1}-\arccos\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right].$$

Такъ какъ I_0 отъ a не зависитъ, то сила наибольшаго освѣщенія одинакова для всѣхъ площадей разсматриваемаго типа при одномъ углѣ α и различныхъ радіусахъ.

Легко сообразить, что при равенствѣ угловъ AOB_1, AOB и A_1OB высоты наибольшаго освѣщенія площадей AB_1C_1, ABC и A_1BC всѣ будутъ равны между собою и будутъ опредѣляться формулою (28). Та же формула дастъ высоту наибольшаго освѣщенія и для площадей $ACBB_1C_1A$ и ACA_1BA, и вообще любой комбинаціи площадей, одинаковыхъ съ ABC и приложенныхъ къ площади круга $A_1CAC_1\ldots$ но такъ, чтобы эти площади не налегали другъ на друга.

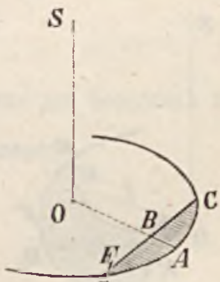
Посему, если мы опишемъ около окружности $A_1CAC_1\ldots$ правильный многоугольникъ объ n сторонахъ, то *для площади F', заключенной между сторонами описаннаго многоугольника и окружностью*, высота наибольшаго освѣщенія будетъ опредѣляться также формулою (28), если положить въ ней

(30) $$\alpha = \frac{\pi}{n}.$$

Соотвѣтственная сила освѣщенія будетъ равняться $2nI_0$, гдѣ I_0 опредѣляется по формулѣ (29) при значеніи $\alpha = \frac{\pi}{n}$.

Полагая, что въ формулѣ (28) уголъ α неопредѣленно приближается къ нулю, будемъ имѣть, какъ и слѣдовало ожидать,

$$\lim_{\alpha=0} x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$



Черт. 8.

Положимъ, *во вторыхъ*, что при условіи $b < a\cos\alpha$ число b стремится къ предѣлу $b = a\cos\alpha$. Получимъ площадь $F = ABC$, изображенную на черт. 8, ограниченную дугою окружности радіуса a, хордою и радіусомъ-векторомъ изъ O, перпендикулярнымъ къ хордѣ. Уравненіе (26) въ данномъ случаѣ напишется въ формѣ

$$\frac{\alpha}{x^2+a^2} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{x^2+a^2\cos^2\alpha},$$

и даетъ для высоты наибольшаго освѣщенія значеніе

$$x_0 = a\cos\alpha\sqrt{\frac{2(tg\alpha-\alpha)}{2\alpha-\sin 2\alpha}}. \tag{31}$$

Соотвѣтственное выраженіе для силы освѣщенія I_0 будетъ

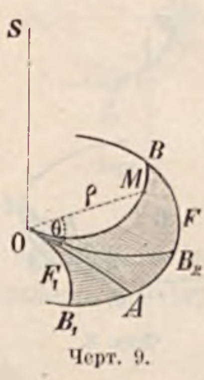
$$I_0 = k\left[\arcsin\sqrt{1-\frac{\alpha}{tg\alpha}} - \sqrt{\frac{\alpha}{tg\alpha}-\frac{\alpha^2}{tg^2\alpha}}\right]. \tag{32}$$

Сила наибольшаго освѣщенія не зависитъ въ данномъ случаѣ отъ радіуса окружности.

Разсуждая такъ же, какъ и ранѣе, найдемъ, что формула (31) даетъ также высоту наибольшаго освѣщенія *для площади F'', заключенной между окружностью* центра O и радіуса a и *вписаннымъ въ нее правильнымъ многоугольникомъ* объ n сторонахъ. Нужно будетъ, какъ и прежде, въ формулѣ (31) положить $\alpha = \frac{\pi}{n}$.

IX.

Наконецъ, въ качествѣ третьяго примѣра, изслѣдуемъ случай *площади F, ограниченной спиралью Архимеда* съ полюсомъ въ O, *касательною къ спирали* въ точкѣ O и *окружностью* радіуса a съ центромъ также въ O (черт. 9). Общая теорія для площадей подобнаго рода была нами изложена въ отд. V. Придется пользоваться формулами (17) и (16) предыдущихъ отдѣловъ.



Черт. 9.

Легко видѣть, что для даннаго случая придется положить $\rho_2 = a$. Что же касается до ρ_1, то замѣтимъ, что уравненіе спирали Архимеда будетъ

$\rho_1 = b\theta$, если принять касательную къ ней въ ея полюсѣ за полярную ось. Уголъ α опредѣляется изъ условія $b\alpha = a$, и, такъ какъ α предполагается не превосходящимъ 2π, то

$$\frac{a}{b} \leqq 2\pi. \tag{33}$$

Тогда формула (17) даетъ намъ

$$I = k \int_0^{\frac{a}{b}} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2\theta^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right] d\theta.$$

Интегрированія здѣсь безъ труда выполняются и мы получаемъ

$$I = \frac{k}{b} \left[x \log \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} - \frac{ax}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right]. \tag{34}$$

Уравненіе для опредѣленія высоты наибольшаго освѣщенія послѣ нѣкоторыхъ преобразованій представится въ формѣ

$$\varphi(x) = \log \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} - a \frac{x^2 + 2a^2}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}} = 0. \tag{35}$$

Изслѣдуемъ это уравненіе. Для малыхъ положительныхъ значеній $x = \varepsilon$ легко найдемъ

$$\varphi(\varepsilon) = \log \frac{a}{\varepsilon} + \log 2 - 2 > 0$$

съ точностью до малыхъ 2-го порядка. Точно также для большихъ положительныхъ значеній $x = \frac{1}{\varepsilon}$ получимъ приближеніе

$$\varphi\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = -\frac{2}{3} a^3 \varepsilon^3 < 0$$

съ точностью малыхъ высшихъ порядковъ. Такимъ образомъ функція $\varphi(x)$ съ возрастаніемъ x отъ ε до $\frac{1}{\varepsilon}$ мѣняетъ свой знакъ, переходя съ (+) на (−), и, будучи непрерывною функціею отъ x, въ сказанномъ промежуткѣ одинъ или нечетное число разъ обращается въ нуль. Разсмотримъ ближе этотъ вопросъ о числѣ положительныхъ корней уравненія $\varphi(x)=0$. Составляя выраженіе для $\varphi'(x)$, находимъ

$$\varphi'(x)=\frac{a^3(2x^2-a^2)}{x\sqrt{(x^2+a^2)^5}}.$$

Функція $\varphi(x)$, убывая съ возрастаніемъ x отъ $x=0$ до $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$, затѣмъ начинаетъ возрастать. Но $\varphi(\varepsilon)>0$ и $\varphi\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)<0$, посему $\varphi(x)$ только однажды обратится въ нуль для нѣкотораго значенія $x_0<\frac{a}{\sqrt{2}}$, а при $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ достигнетъ своего наименьшаго значенія, которое должно быть отрицательнымъ. И дѣйствительно, находимъ

$$\varphi\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=log(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\frac{5\sqrt{6}}{9}=-0{,}21\ldots$$

Такимъ образомъ для разсматриваемой нами площади *существуетъ только одна высота наибольшаго освѣщенія.* Какъ мы видѣли, высота эта $x=x_0$ удовлетворяетъ неравенству

$$x_0<\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Отмѣтимъ одну замѣчательную особенность разсматриваемыхъ площадей. Параметръ b спирали въ уравненіи (35) не фигурируетъ; высота наибольшаго освѣщенія одинакова для всѣхъ спиралей—для площадей AOB_1 и AOB_2 параметровъ b_1 и b_2 та же самая, что и для площади AOB съ параметромъ b. Нужно только, чтобы удовлетворялось требованіе (33).

Прирѣжемъ къ нашей площади AOB площадь AOB_1 по спирали Архимеда съ параметромъ b_1, выходящей изъ O и касательной къ AO. Для новой площади $ABOB_1A$ высота наибольшаго освѣщенія будетъ та же, что и для площади AOB.

Отрѣжемъ отъ площади AOB площадь AOB_2 по спирали Архимеда съ параметромъ b_2. Для новой площади BOB_2, какъ это видно изъ формулы (34), высота наибольшаго освѣщенія будетъ та же, что и для площади AOB.

Имѣемъ такимъ образомъ заключеніе:

Всѣ площади, ограниченныя окружностью и 2 произвольными спиралями Архимеда, касающимися другъ друга въ ихъ общемъ полюсѣ, центрѣ данной окружности, получаютъ наибольшее освѣщеніе съ одной и той же высоты надъ этимъ центромъ.

Въ заключеніе замѣтимъ, что по формулѣ (34) сила освѣщенія I обратно пропорціональна параметру b спирали. Посему, если назовемъ черезъ I_1 силу освѣщенія для площади AOB_1, то найдемъ при одной и той же высотѣ

(36)
$$Ib = I_1 b_1 = Const.,$$

интересный результатъ, относящійся къ площадямъ разсматриваемаго типа.

Довольствуемся указанными примѣрами; ихъ можно было бы подобрать весьма большое число. При заданной напередъ формѣ функцій ρ_1 и ρ_2 отъ θ, наше уравненіе (16) будетъ служить общимъ источникомъ происхожденія такихъ уравненій, которыя имѣютъ по крайней мѣрѣ одинъ дѣйствительный положительный корень.

X.

Во всемъ предыдущемъ изложеніи мы предполагали, что яркость свѣтоваго луча съ измѣненіемъ разстоянія не мѣняется. Коснемся вкратцѣ вопроса объ опредѣленіи высотъ наибольшаго освѣщенія въ томъ случаѣ, когда яркость луча, благодаря присутствію не вполнѣ прозрачной среды, съ возрастаніемъ разстоянія ослабѣваетъ.

Полагаемъ, что *яркость свѣтоваго луча, ceteris paribus, обратно-пропорціональна n-й степени разстоянія.*

Въ этомъ законѣ поглощенія яркости число n должно быть опредѣлено путемъ опытнымъ.

Повторяя наши прежнія разсужденія и держась старыхъ обозначеній, получимъ для силы освѣщенія источникомъ свѣта S площади F при новыхъ условіяхъ формулу

$$(37) \qquad I = k\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+\rho^2)^{n+3}}}\, dF, \qquad x > 0,$$

гдѣ интегрированіе распространяется на всю площадь F, съ дополнительнымъ опредѣленіемъ

$$(38) \qquad I = 0 \qquad \textit{для значенія} \qquad x = 0.$$

Будутъ справедливы, въ общихъ чертахъ, наши прежнія заключенія. Сила освѣщенія I будетъ вообще непрерывною функціею отъ x; ея производная по x будетъ опредѣляться формулою

$$(39) \qquad \frac{dI}{dx} = k\int \frac{\rho^2-(n+2)x^2}{\sqrt{(x^2+\rho^2)^{n+5}}}\, dF,$$

и высоты наибольшаго освѣщенія, буде онѣ существуютъ, будутъ положительными корнями уравненія

$$(40) \qquad \frac{dI}{dx} = 0.$$

Повторяя разсужденія, аналогичныя разсужденіямъ отдѣла II, найдемъ, что уравненіе (40) имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ положительный корень въ слѣдующихъ 2 случаяхъ: 1) если точка O лежитъ *внѣ площади* F и 2) если O есть *точка контура*, въ которой двѣ его вѣтви, касаясь другъ друга, имѣютъ соприкосновеніе выше n-го порядка.

Для площадей другихъ типовъ категорическаго отвѣта въ общемъ случаѣ не имѣется.

Разсматривая подробно случаи, когда контуръ площади F радіусами-векторами изъ O пересѣкается только въ *одной* или въ *двухъ* точкахъ, отличныхъ отъ O, придемъ къ нижеслѣдующимъ результатамъ.

Если радіусы-векторы изъ O пересѣкаютъ контуръ площади F только въ *одной* точкѣ (черт. 2), то получимъ

$$(41)\quad \begin{cases} I = \dfrac{k}{n+1}\displaystyle\int_0^\alpha \left[\frac{1}{x^n} - \frac{x}{\sqrt{(x^2+\rho^2)^{n+1}}}\right] d\theta, & x > 0 \\ I = 0 \qquad \textit{для значенія} & x = 0. \end{cases}$$

Производная отъ I по x

$$\frac{dI}{dx} = -\frac{k}{n+1}\int_0^\alpha \left\{ n\left[\frac{1}{x^{n+1}} - \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+\rho^2)^{n+3}}}\right] + \frac{\rho^2}{\sqrt{(x^2+\rho^2)^{n+3}}}\right\} d\theta,$$
$$x > 0$$

отрицательна для всѣхъ $x > 0$. Посему въ данномъ случаѣ нѣтъ высоты наибольшаго освѣщенія: чѣмъ ближе S къ площади F, тѣмъ болѣе освѣщена послѣдняя.

Если же радіусы-векторы изъ O пересѣкаютъ контуръ площади F въ *двухъ* точкахъ (черт. 3 и 4), то получимъ, сохраняя прежнія обозначенія,

$$(42)\quad \begin{cases} I = \dfrac{k}{n+1}\displaystyle\int_0^\alpha \left[\frac{x}{\sqrt{(x^2+\rho_1{}^2)^{n+1}}} - \frac{x}{\sqrt{(x^2+\rho_2{}^2)^{n+1}}}\right] d\theta, & x > 0 \\ I = 0 \qquad \textit{для значенія} & x = 0. \end{cases}$$

Изъ площадей типа черт. 4 въ данномъ случаѣ не разсматриваются всѣ тѣ, для которыхъ въ O имѣется соприкосновеніе не выше n-го порядка.

Уравненіе для нахожденія высотъ наибольшаго освѣщенія будетъ

$$(43)\quad \int_0^\alpha \left[\frac{\rho_1{}^2 - nx^2}{\sqrt{(x^2+\rho_1{}^2)^{n+3}}} - \frac{\rho_2{}^2 - nx^2}{\sqrt{(x^2+\rho_2{}^2)^{n+3}}}\right] d\theta = 0.$$

Уравненіе (43) всегда имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ положительный корень.

Напримѣръ, для *кольцевыхъ площадей* съ центромъ въ O, имѣемъ уравненіе

(44) $$\frac{a^2-nx^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^{n+3}}}=\frac{b^2-nx^2}{\sqrt{(x^2+b^2)^{n+3}}}.$$

Полагая, что b неопредѣленно приближается къ a, получимъ предѣльное уравненіе

$$(n+2)x^2=a^2,$$

корень коего есть

(45) $$x_0=\frac{a}{\sqrt{n+2}}.$$

Это высота наибольшаго освѣщенія для малой площадки dF въ разстояніи a отъ O въ предположеніи, что яркость свѣтоваго луча уменьшается пропорціонально n-й степени разстоянія. Тотъ же результатъ получается непосредственно изъ выраженія (39) для $\frac{dI}{dx}$.

Въ частномъ случаѣ $n=1$ уравненіе (44) приводится къ биквадратному

(46) $$3x^4+(a^2+b^2)x^2-a^2b^2=0.$$

Единственный положительный корень этого послѣдняго уравненія есть

(47) $$x_0=\sqrt{\frac{\sqrt{(a^2+b^2)^2+12a^2b^2}-a^2-b^2}{6}}.$$

Это высота наибольшаго освѣщенія для кольцевой площади радіусовъ a и b въ предположеніи, что яркость свѣтовыхъ лучей уменьшается пропорціонально 1-й степени разстоянія.

При $b=a$ получаемъ $x_0=\frac{a}{\sqrt{3}}$, согласно съ только что приведенною формулой (45).

Варшава, 8 Октября 1898 г.

ОБЪ ОБЛАСТЯХЪ
ВОЗМОЖНЫХЪ ВИНТОВЫХЪ СКОРОСТЕЙ ТВЕРДАГО ТѢЛА,
опирающагося на нѣсколько поверхностей.

П. О. Сомова.

ГЛАВА I.
Граничная плоскость I-го рода.

1. Предметъ изслѣдованія. Если связи, ограничивающія перемѣщенія твердаго тѣла, могутъ быть представлены въ видѣ нѣсколькихъ поверхностей, на которыя оно опирается, но отъ которыхъ оно можетъ и отходить, то величины, опредѣляющія положенія возможныхъ винтовыхъ осей и параметры винтовой скорости, подчинены нѣсколькимъ неравенствамъ. Въ моей статьѣ: „О винтовыхъ перемѣщеніяхъ твердаго тѣла, связи котораго выражаются неравенствами“ [1]), были указаны способы для опредѣленія помощью такихъ неравенствъ возможныхъ винтовыхъ осей даннаго направленія и предѣловъ для параметра винтовой скорости на этихъ осяхъ при различномъ числѣ опорныхъ поверхностей. Но вопросы: объ изслѣдованіи областей, опредѣляющихъ всю систему возможныхъ винтовыхъ осей, какъ по направленію такъ и по положенію для всякаго даннаго числа опорныхъ поверхностей, объ

---

[1]) Варш. Унив. Изв. 1896 г. VII и VIII.

опредѣленіи условій, при которыхъ эти области возможно больше сокращаются, и наконецъ объ опредѣленіи наименьшаго числа опорныхъ поверхностей и необходимыхъ и достаточныхъ условій, чтобы твердое тѣло было лишено всякой подвижности,—были только намѣчены и оставлены безъ дальнѣйшаго разсмотрѣнія. Настоящая статья имѣетъ цѣлью дать отвѣтъ на эти вопросы въ возможно общемъ видѣ.

Употреблявшіеся въ указанной выше статьѣ синтетическіе, а отчасти и графическіе пріемы, вполнѣ подходящіе по своей наглядности для намѣченной тамъ цѣли, не всегда достаточны и удобны для рѣшенія только-что перечисленныхъ болѣе общихъ вопросовъ. Поэтому придется прежде всего нѣкоторые результаты приведенной выше статьи, на которые мы будемъ опираться, представить въ болѣе общей и притомъ аналитической формѣ, и вмѣстѣ съ тѣмъ сдѣлать къ нимъ нѣкоторыя дополненія [1]).

2. Условія, опредѣляющія возможныя винтовыя оси въ случаѣ одной опорной поверхности. Положеніе винтовой оси будемъ опредѣлять шестью ея координатами, принявъ за таковыя три слагаемыя, ξ, η, ζ, по прямоугольнымъ координатнымъ осямъ (xyz) вектора, изображающаго угловую скорость ω, и три его момента, λ, μ, ν, относительно координатныхъ осей, такъ-что

$$\begin{aligned} \lambda &= y\zeta - z\eta, \\ \mu &= z\xi - x\xi, \\ \nu &= x\eta - y\xi. \end{aligned} \qquad (1)$$

Кромѣ того, такъ какъ въ дальнѣйшемъ будетъ играть существенную роль сфера—указательница направленій угловой скорости, названная по соображеніямъ, изложеннымъ въ [§ 1] и въ [§ 6], сферою параметровъ,—а съ другой стороны абсолютная величина угловой скорости на винтовой оси, или вообще величина отложеннаго на данной прямой вектора, въ дальнѣйшихъ вопросахъ никакого значенія не имѣетъ, то будемъ, для упрощенія формулъ, длину этого вектора принимать равнымъ единицѣ.

---

[1]) Для сокращенія, ссылки на указанную выше статью будутъ ставиться въ такія скобки: [ ], *безъ упоминанія ея заглавія.* Ссылки-же на настоящую статью будутъ дѣлаться въ круглыхъ скобкахъ. Кромѣ того, для удобства справокъ, въ концѣ этой статьи помѣщенъ указатель встрѣчающихся здѣсь обозначеній.

Обратимся теперь къ условію, которому удовлетворяютъ возможныя винтовыя скорости въ случаѣ одной опорной поверхности [§ 4]. Это условіе выражалось одною изъ формулъ

$$p \geqq \delta_1 tg\, \varphi_1, \tag{2}$$

$$p \leqq \delta_1 tg\, \varphi_1, \tag{3}$$

гдѣ p—параметръ винтовой скорости, δ_1—кратчайшее разстояніе винтовой оси l отъ общей нормали n_1 къ поверхностямъ опорной (Σ_1) и поверхности (S_1), принадлежащей двигающемуся твердому тѣлу, φ_1—уголъ между l и n_1, отсчитываемый по принятому въ [§ 2] правилу. Формула (2) соотвѣтствуетъ тому случаю, когда уголъ, образуемый даннымъ направленіемъ угловой скорости, ω, съ положительнымъ направленіемъ нормали n_1 [§ 2] острый, а формула (3)—случаю, когда онъ тупой. Пользуясь извѣстною формулою для относительнаго момента двухъ векторовъ, имѣемъ

$$\delta_1 tg\, \varphi_1 = -\frac{\xi_1\lambda+\eta_1\mu+\zeta_1\nu+\lambda_1\xi+\mu_1\eta+\nu_1\zeta}{\xi_1\xi+\eta_1\eta+\zeta_1\zeta}, \tag{4}$$

гдѣ ξ_1, η_1, ζ_1, λ_1, μ_1, ν_1—координаты прямой n_1; причемъ, для нѣкоторыхъ упрощеній, будемъ предполагать, что ξ_1, η_1, ζ_1 суть слагаемыя вектора, подобно ω, равнаго единицѣ. Такъ какъ въ случаѣ формулы (2)

$$\xi_1\xi+\eta_1\eta+\zeta_1\zeta > 0,$$

а въ случаѣ формулы (3)

$$\xi_1\xi+\eta_1\eta+\zeta_1\zeta < 0,$$

то для обоихъ случаевъ условіе возможности винтовой скорости можно выразить неравенствомъ:

$$(\lambda_1+p\xi_1)\xi+(\mu_1+p\eta_1)\eta+(\nu_1+p\zeta_1)\zeta+\xi_1\lambda+\eta_1\lambda+\zeta_1\nu \geqq 0. \tag{5}$$

Если

$$\xi_1\xi+\eta_1\eta+\zeta_1\zeta = 0, \tag{6}$$

то p можетъ на данной винтовой оси съ заданнымъ направленіемъ угловой скорости или имѣть произвольное значеніе или только быть безконечно-большимъ, смотря по тому, съ которой стороны отъ нормали находится винтовая ось [§ 4]. Аналитически это будетъ обусловливаться знакомъ выраженія

$$(\lambda_1\xi+\mu_1\eta+\nu_1\zeta+\xi_1\lambda+\eta_1\mu+\zeta_1\nu): \tag{7}$$

если оно положительное, то условіе (5) будетъ выполняться при всякомъ p; если-же оно отрицательное, то p можетъ имѣть только безконечно-большое значеніе.

Когда условіе перпендикулярности (6) не существуетъ, то знакъ выраженія (7) играетъ роль при опредѣленіи осей, около которыхъ возможно простое вращеніе; для такихъ осей находимъ, полагая въ неравенствѣ (5) $p=0$:

$$\lambda_1\xi+\mu_1\eta+\nu_1\zeta+\xi_1\lambda+\eta_1\mu+\zeta_1\nu \geqq 0. \tag{8}$$

Это условіе соотвѣтствуетъ сказанному въ [§ 5].

3. Граничная плоскость 1-го рода. Въ случаѣ нѣсколькихъ опорныхъ поверхностей важную роль при опредѣленіи возможныхъ винтовыхъ осей и возможныхъ значеній параметра играютъ плоскости:

$$S_{ik} = A_{ik}x + B_{ik}y + C_{ik}z + D_{ik} = 0, \tag{9}$$

гдѣ

$$A_{ik} = (\eta_i\zeta-\zeta_i\eta)(\xi_k\xi+\eta_k\eta+\zeta_k\zeta)-(\eta_k\zeta-\zeta_k\eta)(\xi_i\xi+\eta_i\eta+\zeta_i\zeta), \tag{10}$$

$$B_{ik} = (\zeta_i\xi-\xi_i\zeta)(\xi_k\xi+\eta_k\eta+\zeta_k\zeta)-(\zeta_k\xi-\xi_k\zeta)(\xi_i\xi+\eta_i\eta+\zeta_i\zeta), \tag{11}$$

$$C_{ik} = (\xi_i\eta-\eta_i\xi)(\xi_k\xi+\eta_k\eta+\zeta_k\zeta)-(\xi_k\eta-\eta_k\xi)(\xi_i\xi+\eta_i\eta+\zeta_i\zeta), \tag{12}$$

$$D_{ik} = (\xi_i\xi+\eta_i\eta+\zeta_i\zeta)(\lambda_k\xi+\mu_k\eta+\nu_k\zeta)-(\xi_k\xi+\eta_k\eta+\zeta_k\zeta)(\lambda_i\xi+\mu_i\eta+\nu_i\zeta). \tag{13}$$

Ниже мы увидимъ, что когда задана система параллельныхъ винтовыхъ осей (ξ, η, ζ), то такія плоскости отдѣляютъ возможныя оси съ однимъ направленіемъ угловой скорости отъ возможныхъ осей съ обратнымъ направленіемъ угловой скорости, или-же отдѣляютъ оси вообще возможныя отъ осей невозможныхъ. Въ обоихъ этихъ случаяхъ условимся называть эти плоскости *дѣйствительными граничными плоскостями 1-го рода* и означать символомъ S'_{ik}. Въ случаѣ m опорныхъ поверхностей число плоскостей вида (9) равно $m(m-1)/1.2$; но, какъ мы увидимъ, не всѣ онѣ будутъ дѣйствительными граничными плоскостями 1-го рода. Тѣ изъ нихъ, которыя не имѣютъ этого значенія, будемъ называть *плоскостями, подобными граничнымъ плоскостямъ 1-го рода* и означать символомъ S''_{ik}. Символъ S_{ik} мы будемъ сохранять для того случая, когда не дѣлается различія между дѣйствительною граничною плоскостью и плоскостью, подобною граничной.

4. Условія, опредѣляющія возможныя винтовыя оси въ случаѣ двухъ опорныхъ поверхностей. Въ случаѣ двухъ опорныхъ поверхностей возможность винтовой скорости обусловливается совмѣстностью неравенствъ: (5) и

$$(\lambda_2+p\xi_2)\xi+(\mu_2+p\eta_2)\eta+(\nu_2+p\zeta_2)\zeta+\xi_2\lambda+\eta_2\mu+\zeta_2\nu \geqq 0. \quad (14)$$

Двумя плоскостями, перпендикулярными къ нормалямъ n_1 и n_2 и проходящими черезъ центръ сферы параметровъ [§ 6], который мы будемъ въ дальнѣйшемъ предполагать находящимся въ началѣ координатъ, поверхность этой сферы раздѣляется на четыре области сферическихъ двуугольниковъ. Этимъ областямъ соотвѣтствуютъ четыре сочетанія знаковъ у косинусовъ

$$\xi_1\xi+\eta_1\eta+\zeta_1\zeta, \quad \xi_2\xi+\eta_2\eta+\zeta_2\zeta. \quad (15)$$

Двумъ областямъ, для которыхъ знаки этихъ величинъ одинаковы, соотвѣтствуютъ такія винтовыя оси, что на каждой изъ нихъ угловая скорость можетъ имѣть то или другое направленіе, смотря по тому [§ 6], будетъ-ли параметръ винтовой скорости больше или меньше каждой изъ величинъ

$$\delta_1 tg\,\varphi_1, \quad \delta_2 tg\,\varphi_2, \quad (16)$$

а двумъ другимъ областямъ—винтовыя оси съ параметромъ, заключеннымъ между величинами (16).

Когда дана система параллельныхъ винтовыхъ осей, принадлежащихъ по своему направленію первой парѣ областей,—т. е. у которыхъ одно направленіе угловой скорости принадлежитъ одной изъ этихъ областей, а противуположное направленіе другой области,—то на каждой такой оси возможныя величины параметра отдѣлены промежуткомъ между величинами (16); но существуютъ и такія оси, для которыхъ величины (16) дѣлаются равными и слѣдовательно p можетъ принимать всякія значенія. Принимая во вниманіе выраженіе (4) и аналогичное ему для $\delta_2 tg\,\varphi_2$, выражая равенство

$$\delta_1 tg\,\varphi_1 - \delta_2 tg\,\varphi_2 = 0, \tag{17}$$

и вводя выраженія (1) для λ, μ, ν, получаемъ уравненіе

$$S_{12} = A_{12}x + B_{12}y + C_{12}z + D_{12} = 0, \tag{18}$$

гдѣ коэффиціенты составлены по схемѣ § 3. Эта плоскость не есть дѣйствительная „граничная“, а только „подобная граничной“, потому-что каждая прямая даннаго направленія служитъ возможною осью и на каждой изъ нихъ возможно вращеніе и въ ту и въ другую сторону, смотря по величинѣ параметра. Согласно сказанному въ § 3, мы должны теперь эту плоскость означить символомъ S''_{12}. Очевидно, что эта плоскость отдѣляетъ оси, для которыхъ

$$\delta_1 tg\varphi_1 > \delta_2 tg\,\varphi_2,$$

отъ осей, удовлетворяющихъ обратному неравенству.

Обращаясь къ двумъ другимъ областямъ на сферѣ параметровъ, соотвѣтствующимъ противуположнымъ знакамъ величинъ (16), находимъ, что винтовыя оси, принадлежащія пучку параллельныхъ прямыхъ, раздѣляются плоскостью S_{12} на двѣ группы, сообразно тому или другому направленію угловой скорости. Теперь такая плоскость становится *дѣйствительною граничною* и должна быть означена символомъ S'_{12}. Оси, лежащія въ такой плоскости, имѣютъ свойство, что для каждой изъ нихъ p имѣетъ одно опредѣленное значеніе, а вращеніе на нихъ становится возможнымъ въ обѣ стороны.

Итакъ, въ случаѣ двухъ опорныхъ поверхностей каждому направленію винтовыхъ осей соотвѣтствуетъ одна параллельная этому направленію плоскость S_{12}, которая будетъ или плоскостью S'_{12} или S''_{12}, смотря по тому, какое направленіе винтовыхъ осей задано. Главный интересъ, ввиду вопроса о возможно бо́льшемъ стѣсненіи перемѣщеній твердаго тѣла помощью опорныхъ поверхностей, представляютъ плоскости S'_{ik}, свойства которыхъ теперь и будутъ подробнѣе разсмотрѣны. Впрочемъ мы увидимъ послѣ, что и плоскости S''_{ik} играютъ полезную роль при рѣшеніи нѣкоторыхъ вопросовъ объ областяхъ возможныхъ винтовыхъ осей.

5. Области $(+\omega)$ и $(-\omega)$. Опредѣлимъ, какое изъ двухъ направленій угловой скорости соотвѣтствуетъ той и другой сторонѣ граничной плоскости. Когда плоскость (18) есть плоскость S'_{12}, то величины (15) противуположныхъ знаковъ; если при этомъ ω такъ направлена, что

$$\xi_1\xi + \eta_1\eta + \zeta_1\zeta > 0, \tag{19}$$

$$\xi_2\xi + \eta_2\eta + \zeta_2\zeta < 0, \tag{20}$$

то должно быть:

$$\delta_1 tg\,\varphi_1 \leqq \delta_2 tg\,\varphi_2; \tag{21}$$

а этому соотвѣтствуетъ неравенство:

$$A_{12}x + B_{12}y + C_{12}z + D_{12} \geqq 0. \tag{22}$$

Точно такъ-же обратному направленію угловой скорости и слѣдовательно условію

$$\delta_1 tg\,\varphi_1 \geqq \delta_2 tg\,\varphi_2 \tag{23}$$

будетъ соотвѣтствовать неравенство:

$$A_{12}x + B_{12}y + C_{12}z + D_{12} \leqq 0. \tag{24}$$

Первую изъ областей, отдѣляемыхъ граничною плоскостью, будемъ называть областью $(+\omega)$, а вторую—областью $(-\omega)$.

Означимъ черезъ α_{12}, β_{12}, γ_{12} углы, образуемые нормалью къ плоскости S'_{12} съ осями координатъ, а черезъ P_{12} длину перпендикуляра, опущеннаго на эту плоскость изъ начала координатъ; тогда

$$\begin{gathered} k_{12}\cos\alpha_{12} = A_{12}, \quad k_{12}\cos\beta_{12} = B_{12}, \quad k_{12}\cos\gamma_{12} = C_{12}, \\ k_{12}P_{12} = -D_{12}, \end{gathered} \tag{25}$$

гдѣ

$$k_{12} = \pm\sqrt{A_{12}^2 + B_{12}^2 + C_{12}^2} = \pm\sqrt{q_1^2 + q_2^2 - 2q_1q_2q_{12}}; \tag{26}$$

причемъ принято во вниманіе, что

$$\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2 = 1 \tag{27}$$

и положено

$$\xi_i\xi + \eta_i\eta + \zeta_i\zeta = q_i, \tag{28}$$

$$\xi_i\xi_k + \eta_i\eta_k + \zeta_i\zeta_k = q_{ik}. \tag{29}$$

Относительно *знака* величины k_{12} замѣтимъ, что *положительному* *значенію ея всегда будетъ соотвѣтствовать направленіе нормали отъ плоскости S'_{12} въ область* $(+\omega)$, а отрицательному значенію k_{12} —направленіе въ область $(-\omega)$. Дѣйствительно, если $D_{12} > 0$, то, по условію (22), начало координатъ лежитъ въ области $(+\omega)$, но въ то-же время, по формуламъ (25) мы должны принять $k_{12} < 0$ для направленія перпендикуляра изъ начала координатъ на плоскость S_{12}, слѣдовательно $k_{12} > 0$ для обратнаго направленія, т. е. въ область $(+\omega)$; если-же $D_{12} < 0$, то начало координатъ, по условію (24), лежитъ въ области $(-\omega)$, но въ то-же время, для направленія перпендикуляра изъ начала координатъ на плоскость S'_{12}, имѣемъ $k_{12} > 0$; а это направленіе совпадаетъ теперь съ направленіемъ нормали отъ этой плоскости въ область $(+\omega)$.

Если заданная винтовая ось, параллельная данному направленію, опредѣляется своими координатами ξ, η, ζ, λ, μ, ν, то для опредѣленія того, которой изъ областей, $(+\omega)$ или $(-\omega)$, она принадлежитъ, имѣемъ, согласно формуламъ (21) и (23) а также по формулѣ (4) и ей аналогичной для $\delta_2 tg\,\varphi_2$, и принимая еще во вниманіе, что q_1 и q_2 противуположныхъ знаковъ, слѣдующее неравенство:

$$(\xi_2 q_1 - \xi_1 q_2)\lambda + (\eta_2 q_1 - \eta_1 q_2)\mu + (\zeta_2 q_1 - \zeta_1 q_2)\nu$$
$$+ (\lambda_2 q_1 - \lambda_1 q_2)\xi + (\mu_2 q_1 - \mu_1 q_2)\eta + (\nu_2 q_1 - \nu_1 q_2)\zeta \geqq 0 \qquad (30)$$

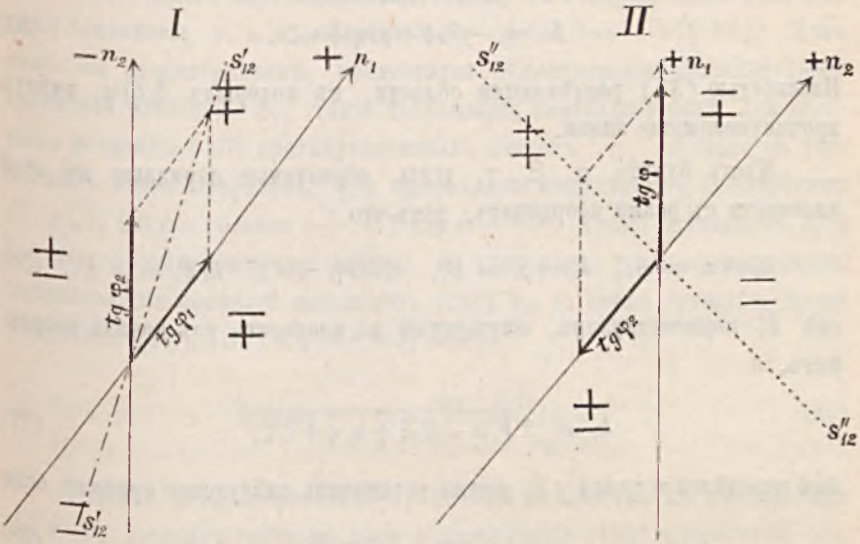
для области $(+\omega)$ и обратное неравенство для области $(-\omega)$.

6. Графическое построеніе слѣда плоскости S_{12}. Въ статьѣ: „О винтовыхъ перемѣщеніяхъ...“ [1]) было введено графическое изображеніе областей $(+\omega)$ и $(-\omega)$ на плоскости, перпендикулярной къ заданному направленію винтовыхъ осей [§ 10]. Примѣнительно къ этому полезно замѣтить себѣ слѣдующее правило для графическаго построенія слѣдовъ s'_{12}, s''_{12} плоскостей S'_{12}, S''_{12} на плоскости чертежа. Такъ какъ прямая s'_{12} дѣлитъ уголъ между $(+n_1)$ и $(-n_2)$ на части, синусы которыхъ обратно пропорціональны тангенсамъ угловъ φ_1 и φ_2, взятымъ по ихъ абсолютной величинѣ [§ 9], то для проведенія прямой s'_{12} можно отложить на прямыхъ $(+n_1)$ и $(-n_2)$, въ указываемыя стрѣлками стороны [§ 10], отрѣзки, пропорціональные абсолют-

---

[1]) Варш. Унив. Изв. 1896 г. VII и VIII.

нымъ величинамъ $tg\,\varphi_1$ и $tg\,\varphi_2$; геометрическая сумма этихъ отрѣзковъ и даетъ (I) направленіе слѣда s'_{12}.



Для построенія слѣда s''_{12} плоскости S''_{12} нужно отрѣзки, пропорціональные $tg\,\varphi_1$ и $tg\,\varphi_2$, отложить не оба въ сторону, указываемую стрѣлкою на проекціи нормали, а только одинъ изъ нихъ, другой-же — въ сторону, обратную стрѣлкѣ (II). Такое измѣненіе построенія обусловливается тѣмъ, что въ углѣ между проекціями $(+n_1)$ и $(+n_2)$ нормалей величины $tg\,\varphi_1$ и $tg\,\varphi_2$ имѣютъ, согласно правилу для отсчитыванія угла φ, противуположные знаки.

7. Плоскости N_i. При изученіи областей, содержащихъ винтовыя оси, существенную роль играетъ плоскость N_i, содержащая нормаль n_i и параллельная заданному направленію винтовыхъ осей (*плоскость нормалей* [§ 9 и слѣд.]). Пусть будетъ

$$A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0 \tag{31}$$

уравненіе плоскости N_i. Такъ какъ всякая прямая, лежащая въ этой плоскости, удовлетворяетъ условію

$$\delta_i\, tg\,\varphi_i = 0,$$

то по формулѣ (4) и принимая во вниманіе выраженія (1), можно написать:

$$A_i = \eta_i \zeta - \zeta_i \eta, \tag{32}$$

$$B_i = \zeta_i \xi - \xi_i \zeta, \tag{33}$$

$$C_i = \xi_i \eta - \eta_i \xi, \tag{34}$$

$$D_i = -(\lambda_i \xi + \mu_i \eta + \nu_i \zeta). \tag{35}$$

Плоскостью (31) раздѣляются области, въ которыхъ $\delta_i tg\varphi_i$ имѣетъ противуположные знаки.

Пусть будутъ α_i, β_i, γ_i углы, образуемые нормалью къ этой плоскости съ осями координатъ, такъ-что

$$k_i cos\alpha_i = A_i, \quad k_i cos\beta_i = B_i, \quad k_i cos\gamma_i = C_i, \quad k_i P_i = -D_i, \tag{36}$$

гдѣ P_i перпендикуляръ, опущенный на плоскость изъ начала координатъ, а

$$k_i = \pm\sqrt{1-(\xi_i\xi+\eta_i\eta+\zeta_i\zeta)^2}\ . \tag{37}$$

Для опредѣленія знака у k_i можно установить слѣдующее правило: если

$$\xi_i\xi+\eta_i\eta+\zeta_i\zeta > 0, \tag{38}$$

то направленію нормали къ плоскости (31) въ область, гдѣ $\delta_i tg\varphi_i > 0$, будетъ соотвѣтствовать $k_i > 0$; если-же

$$\xi_i\xi+\eta_i\eta+\zeta_i\zeta < 0, \tag{39}$$

то названной области будетъ соотвѣтствовать $k_i < 0$. Дѣйствительно, если, при существованіи условія (38), $D_i < 0$, то, какъ это видно изъ формулъ (4), (32), (33), (34) и (35), начало координатъ принадлежитъ области, гдѣ $\delta_i tg\varphi_i$ отрицательное; съ другой стороны, теперь по послѣдней изъ формулъ (36), $k_i > 0$, и этому соотвѣтствуетъ направленіе перпендикуляра P_i изъ начала координатъ на плоскость; но это-же есть и направленіе нормали плоскости (31) въ область положительныхъ значеній $\delta_i tg\varphi_i$. Подобнымъ же образомъ можно видѣть, что при существованіи условія (39) этой области будетъ соотвѣтствовать отрицательное значеніе k_i.

Величина угла ε_{12} между двумя плоскостями N_1 и N_2 зависитъ отъ того направленія винтовыхъ осей, которому эти плоскости параллельны. Опредѣлимъ эту зависимость, подразумѣвая по ε_{12} тотъ изъ двухъ смежныхъ угловъ между плоскостями N_1 и N_2, который заключаетъ въ себѣ граничную плоскость S'_{12}. Эта плоскость проходитъ черезъ прямую пересѣченія плоскостей N_1 и N_2 и лежитъ въ той парѣ образуемыхъ этими плоскостями вертикальныхъ угловъ, въ которой знаки величинъ (16) одинаковы, т. е. въ областяхъ $(+\,+)$ и $(-\,-)$ [§ 10]. Такъ какъ мы разсматриваемъ, предполагая существованіе дѣйствительной граничной плоскости S'_{12}, такія направленія винтовыхъ осей, для которыхъ величины (15) противуположныхъ знаковъ, то, согласно съ указаннымъ выше правиломъ, для направленія нормалей къ плоскостямъ N_1 и N_2 внутрь области $(+\,+)$ или $(-\,-)$, нужно величинамъ k_1 и k_2 дать противуположные знаки. А такъ какъ уголъ между этими направленіями нормалей дополняетъ уголъ ε_{12} до двухъ прямыхъ, то по формуламъ (32), (33) и (34) получаемъ:

$$\cos\varepsilon_{12} = \frac{q_{12} - q_1 q_2}{\sqrt{(1-q_1^2)(1-q_2^2)}}. \tag{40}$$

Углы ε_1 и ε_2, образуемые граничною плоскостью съ плоскостями N_1 и N_2, зависятъ, такъ-же какъ и направленія этихъ плоскостей, отъ того, какою точкою на сферѣ параметровъ опредѣляется направленіе винтовой оси, т. е. отъ величинъ ξ, η, ζ. По формуламъ (25) и (36):

$$\cos\varepsilon_1 = \frac{A_1 A_{12} + B_1 B_{12} + C_1 C_{12}}{k_1 k_{12}}.$$

Такъ какъ ε_1 измѣряется угломъ между направленіемъ нормали къ плоскости N_1 въ сторону, гдѣ $\delta_1\, tg\,\varphi_1 > 0$, и между направленіемъ нормали къ плоскости S'_{12} въ сторону, гдѣ лежитъ область $(+\,\omega)$ (см. черт. [VIII]), то на основаніи указанныхъ выше правилъ для знаковъ k_{12} и k_1 слѣдуетъ, что эти величины должны быть взяты съ противуположными знаками. Съ другой стороны по формуламъ (10), (11), (12), (32), (33) и (34):

$$A_1 A_{12} + B_1 B_{12} + C_1 C_{12} = q_2 - q_1 q_{12};$$

поэтому окончательно

$$\cos\varepsilon_1 = \frac{q_1 q_{12} - q_2}{\sqrt{(1-q_1^2)(q_1^2+q_2^2-2q_1q_2q_{12})}}. \tag{41}$$

Для опредѣленія угла ε_2 нужно принять во вниманіе, что онъ измѣряется угломъ между прежнимъ направленіемъ нормали къ S'_{12} и направленіемъ нормали къ N_2 въ ту сторону, гдѣ $\partial_2 tg\varphi_2 > 0$ (см. черт. [VIII]). Но такъ какъ q_1 и q_2 противуположныхъ знаковъ, то k_2 того-же знака, какъ и k_1; поэтому

$$cos\,\varepsilon_2 = -\frac{q_2 q_{12} - q_1}{\sqrt{(1-q_2^2)(q_1^2+q_2^2-2q_1q_2q_{12})}}. \tag{42}$$

Знаки въ формулахъ (41) и (42) могутъ быть провѣрены еще слѣдующимъ образомъ. Когда уголъ $(n_2\omega)$ дѣлается прямымъ, то S'_{12} приходитъ въ совпаденіе съ N_2 [§ 11]; поэтому выраженія (41) и (40) должны совпасть, а $cos\,\varepsilon_2$ долженъ обратиться въ $+1$, что мы и находимъ въ дѣйствительности.

8. О винтовыхъ осяхъ съ данными предѣлами для параметра и обоими направленіями вращеній. Относительно случая двухъ опорныхъ поверхностей остается сдѣлать еще нѣсколько замѣчаній, касающихся такихъ винтовыхъ осей, параметры которыхъ заключены между данными предѣлами.

Предположимъ сначала, что винтовыя оси принадлежатъ къ той группѣ ихъ, для которой знаки величинъ (15) одинаковы.

Когда заданы всѣ координаты (ξ, η, ζ, λ, η, ν) винтовой оси и мы нашли, что обѣ величины (15) положительныя, то параметру p можно давать всякія значенія, превосходящія бо́льшую изъ величинъ (16), которыя найдутся по формулѣ (7) и ей аналогичной, относящейся ко второй опорной поверхности. Если направленіе угловой скорости измѣнится на обратное, то величины (15) сдѣлаются отрицательными, и тогда параметру p можно давать всякія значенія, не превосходящія меньшей изъ величинъ (16) [§ 7]. Такимъ образомъ, при совпаденіи знаковъ у величинъ (15), предѣлъ для параметра винтовой скорости зависитъ отъ избраннаго на данной винтовой оси направленія угловой скорости. Поэтому, если параметръ тоже напередъ заданъ, то или будетъ возможно винтовое движеніе съ вращеніемъ въ одну только сторону или совсѣмъ не будетъ возможно. Если для параметра будутъ заданы только нѣкоторые предѣлы

$$p_1 \leq p \leq p_2, \tag{43}$$

то винтовое перемѣщеніе на данной оси будетъ возможно или съ обоими направленіями вращенія или только съ однимъ или вовсе не будетъ возможно, смотря по тому, будутъ-ли величины (16) заключены между заданными предѣлами или по крайней мѣрѣ одна изъ нихъ будетъ внѣ этихъ предѣловъ (могутъ и обѣ находиться внѣ предѣловъ, но только съ одной ихъ стороны) или наконецъ данные предѣлы будутъ заключены между величинами (16).

Предполагая, что заданы только три координаты винтовой оси, ξ, η, ζ, удовлетворяющія условію, чтобы знаки величинъ (15) были одинаковы, а остальныя три координаты оставлены произвольными, мы можемъ отыскать такія винтовыя оси, на которыхъ вращеніе будетъ возможно въ обѣ стороны при томъ-же значеніи параметра. Для каждой такой винтовой оси величины (16) должны совпадать; эти величины принадлежатъ поэтому плоскости S''_{12}. Чтобы дѣйствительно было возможно вращеніе въ обѣ стороны, параметру нужно дать для каждой оси, лежащей въ этой плоскости, одно опредѣленное значеніе; поэтому, если для p даны предѣлы (43), то возможныя винтовыя оси въ плоскости S''_{12} будутъ заключены между двумя параллельными прямыми. Положеніе и ширину полосы, образуемой этими осями, нетрудно опредѣлить слѣдующимъ образомъ. Пусть будетъ h разстояніе винтовой оси, взятой въ плоскости S''_{12}, отъ прямой пересѣченія плоскостей N_1 и N_2, считаемое положительнымъ, когда винтовая ось лежитъ въ области $(++)$, и отрицательнымъ, когда она лежитъ въ области $(--)$. Тогда

$$h = \frac{\delta_1}{\sin\varepsilon_1} = \frac{\delta_2}{\sin\varepsilon_2};$$

но для крайнихъ винтовыхъ осей имѣемъ:

$$\delta_1 \, tg\,\varphi_1 = \delta_2 \, tg\,\varphi_2 = p_1,$$

$$\delta'_1 \, tg\,\varphi'_1 = \delta'_2 \, tg\,\varphi'_2 = p_2.$$

При этомъ $\varphi'_1 = \varphi_1$, $\varphi'_2 = \varphi_2$, если p_1 и p_2 одного знака, и $\varphi'_1 = \pi - \varphi_1$, $\varphi'_2 = \pi - \varphi_2$, если p_1 и p_2 противуположныхъ знаковъ (см. правило [§ 2]). Такъ какъ h и p одного знака, то можно написать:

$$h_1 = p_1 \frac{cotg\,\varphi_1}{\sin\varepsilon_1} = p_1 \frac{cotg\,\varphi_2}{\sin\varepsilon_2}, \tag{44}$$

$$h_2 = p_2 \frac{cotg\,\varphi_1}{sin\,\varepsilon_1} = p_2 \frac{cotg\,\varphi_2}{sin\,\varepsilon_2}, \tag{45}$$

беря для $cotg\,\varphi_1$, $cotg\,\varphi_2$, $sin\,\varepsilon_1$ и $sin\,\varepsilon_2$ положительныя значенія. Отсюда ширина полосы

$$b = h_2 - h_1 = (p_2 - p_1) \frac{cotg\,\varphi_1}{sin\,\varepsilon_1} = (p_2 - p_1) \frac{cotg\,\varphi_2}{sin\,\varepsilon_2} \tag{46}$$

или, принимая во вниманіе одну изъ формулъ (41), (42):

$$b = (p_2 - p_1) \sqrt{\frac{q_1{}^2 + q_2{}^2 - 2q_1q_2q_{12}}{1 - q_1{}^2 - q_2{}^2 - q_{12}{}^2 + 2q_1q_2q_{12}}}\,. \tag{47}$$

Нужно помнить, что на осяхъ, лежащихъ въ плоскости S''_{12}, возможна винтовая скорость нетолько съ параметромъ

$$p = \delta_1 tg\,\varphi_1 = \delta_2 tg\,\varphi_2,$$

но и со всякимъ другимъ параметромъ; только въ послѣднемъ случаѣ вращеніе не будетъ уже возможно въ обѣ стороны.

Будемъ теперь предполагать, что знаки величинъ (15) противуположны. Плоскость S''_{12} обращается тогда въ дѣйствительную граничную, S'_{12}. Формулы (44), (45), (46) и (47) сохраняютъ свое значеніе для винтовыхъ осей, заключенныхъ между тѣми-же данными предѣлами и съ тѣмъ-же условіемъ, чтобы вращеніе было возможно въ обѣ стороны. Разница будетъ состоять въ томъ, что теперь около каждой изъ осей полосы (b) будетъ возможно перемѣщеніе только съ однимъ опредѣленнымъ значеніемъ параметра.

9. О винтовыхъ осяхъ съ равною разностью между крайними значеніями параметра. Въ [§ 10] было замѣчено, что для всѣхъ осей, лежащихъ въ плоскости, параллельной граничной, разность между крайними значеніями, въ которыхъ заключены возможные параметры, одинакова и пропорціональна разстоянію между обоими плоскостями. Эти свойства видны теперь непосредственно изъ формулъ (17), (18), (10), (11), (12) и (13). Дѣйствительно, раскрывая условіе

$$\delta_1 tg\,\varphi_1 - \delta_2 tg\,\varphi_2 = a, \tag{48}$$

мы получимъ уравненіе

$$(\xi_2\lambda+\eta_2\mu+\zeta_2\nu+\lambda_2\xi+\mu_2\eta+\nu_2\zeta)(\xi_1\xi+\eta_1\eta+\zeta_1\zeta)$$
$$-(\xi_1\lambda+\eta_1\mu+\zeta_1\nu+\lambda_1\xi+\mu_1\eta+\nu_1\zeta)(\xi_2\xi+\eta_2\eta+\zeta_2\zeta)$$
$$=a(\xi_1\xi+\eta_1\eta+\zeta_1\zeta)(\xi_2\xi+\eta_2\eta+\zeta_2\zeta), \tag{49}$$

которое и можно разсматривать какъ уравненіе вышеуказанной плоскости, если въ немъ координаты x, y, z, входящія въ выраженія моментовъ λ, μ, ν, угловой скорости, считать текущими. Но угловые коэффиціенты въ этомъ уравненіи не отличаются отъ коэффиціентовъ A_{12}, B_{12}, C_{12} въ уравненіи граничной плоскости (18); вмѣсто-же D_{12} мы имѣемъ теперь

$$D'_{12}=(\lambda_2\xi+\mu_2\eta+\nu_2\zeta)(\xi_1\xi+\eta_1\eta+\zeta_1\zeta)-(\lambda_1\xi+\mu_1\eta+\nu_1\zeta)(\xi_2\xi+\eta_2\eta+\zeta_2\zeta)$$
$$-a(\xi_1\xi+\eta_1\eta+\zeta_1\zeta)(\xi_2\xi+\eta_2\eta+\zeta_2\zeta). \tag{50}$$

Далѣе, означая черезъ Δ_a разстояніе этой плоскости отъ граничной и принимая во вниманіе формулу (26), имѣемъ

$$\Delta_a=\frac{D'_{12}-D_{12}}{k_{12}}=-a\frac{q_1q_2}{\sqrt{q_1{}^2+q_2{}^2-2q_1q_2q_{12}}}, \tag{51}$$

откуда и видна указанная выше пропорціональность [1]).

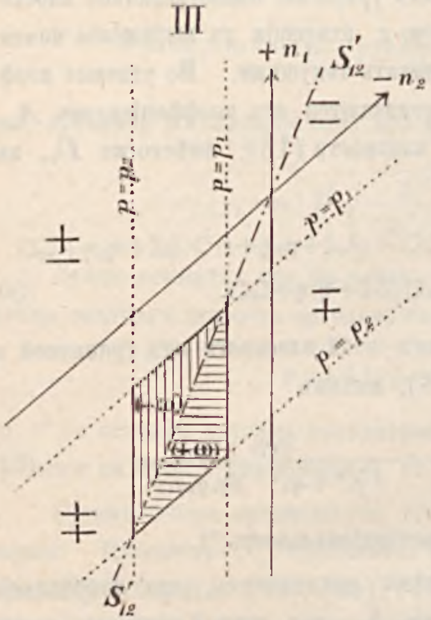
Формула (51) вмѣстѣ съ тѣмъ показываетъ, что направленія (ξ, η, ζ), для которыхъ разстояніе Δ_a, при данной разности между крайними значеніями параметра, одинаково, образуютъ конусъ четвертаго порядка.

10. Полная система винтовыхъ осей, параметры которыхъ не выходятъ изъ данныхъ предѣловъ. Предположимъ теперь, что задана нетолько разность, но и самые предѣлы, $p_1 < p_2$, для параметра винтовой скорости и отыщемъ всѣ винтовыя оси даннаго направленія, на которыхъ параметръ можетъ принимать только значенія, не выходящія изъ этихъ или другихъ, болѣе тѣсныхъ и между ними заключенныхъ предѣловъ. Если-бы существовала только одна опорная поверхность съ нормалью n_1, то всѣ винтовыя оси даннаго направленія, удовлетворяющія условію $p \geqq p_1$, лежали-бы по одну сторону плоскости, параллельной этому направленію и нормали n_1

---

[1]) Знакъ (—) поставленъ потому, что при существованіи дѣйствительной граничной плоскости величины q_1 и q_2 противуположныхъ знаковъ.

и отстоящей отъ послѣдней на величину $p_1 \, cotg \, \varphi_1$, а всѣ винтовыя оси, удовлетворяющія неравенствамъ (43), были-бы заключены между двумя такими параллельными плоскостями, разстояніе между которыми равнялось-бы $\pm (p_2 - p_1) \, cotg \, \varphi_1$. Если-бы существовала только вторая опорная поверхность, то винтовыя оси, удовлетворяющія тѣмъже условіямъ, заключались-бы между двумя плоскостями, параллельными нормали n_2 и заданному направленію осей; разстояніе-же между этими плоскостями опредѣлялось-бы величиною $\pm (p_2 - p_1) \, cotg \, \varphi_2$. Поэтому въ случаѣ двухъ опорныхъ поверхностей искомыя винтовыя оси будутъ заключены внутри призмы, грани которой принадлежатъ четыремъ вышеуказаннымъ плоскостямъ. Эта призма расположена такъ, что одною изъ ея діагональныхъ плоскостей служитъ плоскость S'_{12} (III); это слѣдуетъ изъ того, что два противуположныхъ ребра ея удовлетворяютъ условіямъ:



$$\delta_1 \, tg \, \varphi_1 = \delta_2 \, tg \, \varphi_2 = p_1,$$
$$\delta'_1 \, tg \, \varphi_1 = \delta'_2 \, tg \, \varphi_2 = p_2;$$

а эти равенства возможны только для осей граничной плоскости. Остальныя два ребра этой призмы представляютъ собою такія винтовыя оси, на которыхъ параметръ винтовой скорости можетъ принимать всякія значенія, заключающіяся между данными предѣлами p_1 и p_2. Всѣ другія винтовыя оси, принадлежащія призмѣ, могутъ имѣть значенія параметра, заключенныя лишь между болѣе тѣсными предѣлами p'_1 и p'_2, для которыхъ

$$p_1 \leqq p'_1 \leqq p'_2 \leqq p_2.$$

Наконецъ можно еще видѣть, что если оба предѣла, p_1 и p_2, положительные, то разсматриваемая призма вся лежитъ въ области $(++)$; если онп отрицательные, то призма лежитъ въ области $(--)$; если-же p_1 и p_2 противуположныхъ знаковъ, то эта призма захватываетъ всѣ четыре области $(++)$, $(--)$, $(+-)$ и $(-+)$.

Теперь можно представить себѣ всю систему возможныхъ винтовыхъ осей, на которыхъ параметръ винтовой скорости можетъ принимать значенія, не выходящія изъ данныхъ предѣловъ p_1 и p_2. Извѣстно, что если твердое тѣло нетолько опирается на двѣ неподвижныхъ поверхности, но обязательно къ нимъ касается, то вся система возможныхъ винтовыхъ осей образуетъ комплексъ второго порядка, который слагается изъ конгруэнцій перваго порядка, содержащихъ каждая винтовыя оси одинаковаго параметра. Представимъ себѣ двѣ слѣдующихъ изъ этихъ конгруэнцій: конгруэнцію (p_1), слагающуюся изъ всѣхъ винтовыхъ осей параметра p_1, и конгруэнцію (p_2) осей съ параметромъ p_2. Каждому заданному направленію винтовыхъ осей въ этихъ конгруэнціяхъ соотвѣтствуетъ по одной прямой, которая лежитъ очевидно въ граничной плоскости. Если твердое тѣло только *опирается* на двѣ неподвижныя поверхности, то эти двѣ прямыя служатъ противолежащими ребрами разсмотрѣнной выше призмы, которая и можетъ быть построена, если черезъ эти ребра провести по двѣ плоскости, параллельныхъ нормалямъ къ опорнымъ поверхностямъ. Итакъ, представивъ себѣ конгруэнціи (p_1) и (p_2), беря въ нихъ параллельныя между собою прямыя и строя вышеуказаннымъ образомъ призмы, мы получимъ всю систему винтовыхъ осей, параметры которыхъ могутъ принимать значенія, не выходящія за данные предѣлы.

11. О поверхности, огибаемой плоскостями S_{12}. Положеніе плоскости S_{12} зависитъ отъ заданнаго направленія винтовыхъ осей. Чтобы составить себѣ представленіе о всей системѣ плоскостей S_{12} для тѣла, опирающагося на двѣ поверхности, нужно опредѣлить поверхность, огибаемую всѣми возможными положеніями этой плоскости. Можно напередъ видѣть, что эта поверхность линейчатая, третьяго порядка. Дѣйствительно, прямыя удовлетворяющія равенству (17), образуютъ систему такихъ винтовыхъ осей, которыя возможны для твердаго тѣла, прикасающагося къ двумъ неподвижнымъ поверхностямъ и не могущаго отъ нихъ отходить. Эта система прямыхъ составляетъ, какъ уже выше упомянуто, комплексъ 2-го порядка. Если за начало прямоугольныхъ координатъ принять средину кратчайшаго разстоянія между нормалями къ опорнымъ поверхностямъ, а за оси (x) и (y) биссектриссы угловъ между ними, то уравненіе этого комплекса имѣетъ видъ:

$$(\lambda\eta-\mu\xi)\sin 2\vartheta_{12}+2r_{12}\xi\eta=0, \tag{52}$$

гдѣ $2\vartheta_{12}$ уголъ, а $2r_{12}$ кратчайшее разстояніе между нормалями. Поверхность особенностей (Singularitätenfläche) этого комплекса, будучи въ общемъ случаѣ четвертаго порядка, распадается въ данномъ случаѣ на плоскость и линейчатую поверхность 3-го порядка, такъ какъ по классификаціи Клейна и Вейлера комплексъ (52) принадлежитъ къ т. н. четвертой каноническои формѣ, обозначаемой Вейлеромъ символомъ [11 22], т. е. къ типу, для котораго поверхность особенностей имѣетъ указанный выше видъ [1]). Нужно теперь замѣтить, что плоскости (18) содержатъ пучки прямыхъ комплекса, проведенныхъ къ безконечно-далекимъ точкамъ, такъ какъ содержатъ системы параллельныхъ винтовыхъ осей, возможныхъ для твердаго тѣла, когда оно обязательно касается къ двумъ поверхностямъ. Такимъ образомъ эти плоскости принадлежатъ къ числу „особенныхъ плоскостей" (singuläre Ebenen) и должны поэтому касаться поверхности особенностей [2]), которая является такимъ образомъ поверхностью, огибаемою плоскостями (18).

Опредѣляя эту огибаемую поверхность обыкновенными пріемами, мы найдемъ, что *эта поверхность есть цилиндроидъ, содержащій винты, взаимные съ винтами возможными для твердаго тѣла, когда оно неизмѣнно касается двухъ поверхностей.* А именно, уравненіе плоскости (18) при новомъ положеніи координатныхъ осей получится, если въ уравненіи комплекса (52), прямыя котораго удовлетворяютъ условію (17), подставить

$$\lambda=y\zeta-z\eta,\quad \mu=z\xi-x\zeta \tag{53}$$

---

[1]) Mathem. Ann. 1874 г., стр. 183. Для сравненія см. *Plücker*, Neue Geometrie des Raumes, стр. 342.

Въ приложеніи къ нѣкоторымъ спеціальнымъ вопросамъ о касаніи тѣла къ нѣсколькимъ поверхностямъ комплексъ (52) и другіе комплексы того-же типа разсматривались мною въ статьяхъ: „О перемѣщеніяхъ неизмѣняемой поверхности, прикасающейся къ одной или къ нѣсколькимъ неподвижнымъ поверхностямъ", Варшавскія Унив. Изв. 1893 г. IV, § 14, и „О нѣкоторыхъ системахъ винтовыхъ скоростей". Варш. Унив. Изв. 1895 г., VI и VII, § IV.

[2]) *Plücker*. Neue Geometrie des Raumes, стр. 315.

и считать ξ, η, ζ постоянными, а x, y, z текущими. Итакъ имѣемъ для плоскости (18):

$$\zeta\xi \sin 2\vartheta_{12} . x + \eta\zeta \sin 2\vartheta_{12} . y - (\xi^2 + \eta^2) \sin 2\vartheta_{12} . z + 2r_{12}\xi\eta = 0.$$

Считая-же здѣсь отношенія $\xi : \eta : \zeta$ перемѣнными параметрами, для огибаемой поверхности найдемъ уравненіе:

$$\begin{vmatrix} -2\sin 2\vartheta_{12} . z, & 2r_{12}, & \sin 2\vartheta_{12} . x \\ 2r_{12}, & -2\sin 2\vartheta_{12} . z, & \sin 2\vartheta_{12} . y \\ \sin 2\vartheta_{12} . x, & \sin 2\vartheta_{12} . y, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\sin 2\vartheta_{12} . (x^2 + y^2) z + 2r_{12} xy = 0. \tag{54}$$

Каждой точкѣ A на этомъ цилиндроидѣ соотвѣтствуетъ или дѣйствительная граничная плоскость, S'_{12}, или плоскость, подобная граничной, S''_{12}: это будетъ, въ связи со знаками величинъ (15), зависѣть отъ того, каково направленіе пучка параллельныхъ винтовыхъ осей въ этой плоскости. Чтобы опредѣлить это направленіе для данной точки A на цилиндроидѣ, нужно замѣтить точки P_1 и P_2 пересѣченія плоскости съ нормалями къ опорнымъ поверхностямъ: прямая P_1P_2 есть одна изъ осей искомаго направленія, именно та, для которой параметръ принимаетъ значеніе равное нулю (прямая пересѣченія плоскостей N_1 и N_2, § 7).

Такъ какъ плоскости S_{12} суть „особенныя плоскости" въ комплексѣ (52), т. е. такія, въ которыхъ комплексная кривая обращается въ двѣ точки (центры плоскихъ пучковъ), то въ каждой изъ этихъ плоскостей кромѣ пучка параллельныхъ винтовыхъ осей долженъ быть еще другой пучекъ возможныхъ винтовыхъ осей. Чтобы его найти, примемъ во вниманіе, что плоскость (18), какъ касательная къ цилиндроиду, содержитъ одну изъ его производящихъ, s, которой, какъ и всякой другой производящей цилиндроида, соотвѣтствуетъ опредѣленная величина параметра p. На цилиндроидѣ существуетъ еще одинъ винтъ, s', съ тѣмъ-же параметромъ p; и всѣ винтовыя оси, пересѣкающія обѣ эти производящія, возможны, если ихъ параметру дать значеніе $-p$, какъ винты, взаимные съ разсматриваемыми винтами цилиндроида. Отсюда видно, что центромъ искомаго пучка будетъ точка пересѣченія винта s' съ данною плоскостью S_{12}.

Такъ какъ всякій возможный винтъ, при обязательномъ касаніи тѣла къ двумъ поверхностямъ, долженъ принадлежать одной изъ плоскостей S_{12}, потому-что въ ней содержатся всѣ винты одного и того-же направленія, то винты второго пучка (s') лежатъ еще въ различныхъ другихъ плоскостяхъ S_{12}, пересѣкающихся съ данною по прямымъ этого пучка. Пусть будетъ l' одна изъ этихъ прямыхъ; въ искомой второй плоскости S_{12} лежитъ винтовая ось, параллельная l' и имѣющая параметръ равный нулю; эта ось пересѣкаетъ нормали n_1 и n_2; поэтому, проведя прямую, параллельную l' и пересѣкающую обѣ нормали, а черезъ нее плоскость, касательную къ цилиндроиду (54), мы и получимъ искомую плоскость.

Если тѣло только опирается на двѣ поверхности, т. е. можетъ отъ нихъ и отходить, то на осяхъ l' пучка (s') будетъ возможна винтовая скорость или только съ однимъ значеніемъ параметра $(-p)$ или со всякимъ значеніемъ параметра, смотря по тому, принадлежитъ-ли направленіе оси l' плоскости S'_{12} или S''_{12}. Въ послѣднемъ случаѣ вращеніе въ одну сторону возможно при значеніи параметра, не меньшемъ $-p$, а въ обратную сторону—при значеніи его, не бо́льшемъ $-p$ (§ 4).

12. О поверхности, огибаемой плоскостями равныхъ разностей параметровъ. Въ § 9 разсматривались геометрическія мѣста возможныхъ винтовыхъ осей, для которыхъ разность между крайними значеніями параметра величина постоянная. Для каждаго заданнаго направленія винтовыхъ осей такія оси образовали плоскость, параллельную плоскости S_{12} и отстоящую отъ нея на величину Δ_a, пропорціональную разности a параметровъ (51). Отсюда слѣдуетъ, что совокупность всѣхъ винтовыхъ осей, допускающихъ одинаковую разность a предѣльныхъ значеній параметра, образуетъ комплексъ, имѣющій поверхностью особенностей поверхность, огибаемую всѣми вышеуказанными плоскостями. Уравненіе этого комплекса въ координатной системѣ, принятой въ § 11, мы найдемъ, подставивъ въ условіе (48) координаты возможной винтовой скорости. Вмѣсто того, чтобы преобразовывать къ этой координатной системѣ уравненіе (49), мы воспользуемся готовыми формулами для входящихъ въ условіе (48) величинъ, составленными въ статьѣ: „О перемѣщеніяхъ неизмѣняемой поверхности..." [1]), стр. 43 и 44 [(95), (96), (99) и (100)]. Это даетъ уравненіе

$$\frac{(\lambda-r_{12}\eta)\cos\vartheta_{12}+(\mu+r_{12}\xi)\sin\vartheta_{12}}{\xi\cos\vartheta_{12}+\eta\sin\vartheta_{12}}-\frac{(\lambda+r_{12}\eta)\cos\vartheta_{12}-(\mu-r_{12}\xi)\sin\vartheta_{12}}{\xi\cos\vartheta_{12}-\eta\sin\vartheta_{12}}=a,$$

которое, по приведеніи и по исключеніи изъ разсмотрѣнія винтовыхъ осей, удовлетворяющихъ зависимости

$$\xi^2\cos^2\vartheta_{12}-\eta^2\sin^2\vartheta_{12}=0,$$

т. е. перпендикулярныхъ къ той или другой нормали, принимаетъ видъ:

$$(\lambda\eta-\mu\xi)\sin\vartheta_{12}+2r_{12}\xi\eta+\xi^2 a\cos^2\vartheta_{12}-\eta^2 a\sin^2\vartheta_{12}=0. \tag{55}$$

Этотъ комплексъ принадлежитъ къ тому-же типу, какъ комплексъ (52). Дѣйствительно, его поверхностью особенностей будетъ опять цилиндроидъ, только съ другимъ параметромъ и иначе расположенный, чѣмъ цилиндроидъ (54). Чтобы это показать, зададимъ направленіе (ξ, η, ζ) винтовыхъ осей и, введя въ (55) выраженія (53), будемъ разсматривать уравненіе (55) какъ уравненіе плоскости, содержащей винтовыя оси этого направленія:

$$\zeta\xi\sin2\vartheta_{12}.x+\eta\zeta\sin2\vartheta_{12}.y-(\xi^2+\eta^2)\sin2\vartheta_{12}.z$$
$$+2r_{12}\xi\eta+a\xi^2\cos^2\vartheta_{12}-a\eta^2\sin^2\vartheta_{12}=0.$$

Отсюда для огибаемой поверхности находимъ:

$$\begin{vmatrix} 2(a\cos^2\vartheta_{12}-\sin2\vartheta_{12}.z), & 2r_{12}, & \sin2\vartheta_{12}.x \\ 2r_{12}, & -2(a\sin^2\vartheta_{12}+\sin2\vartheta_{12}.z), & \sin2\vartheta_{12}.y \\ \sin2\vartheta_{12}.x, & \sin2\vartheta_{12}.y, & 0 \end{vmatrix}=0$$

или

$$\sin2\vartheta_{12}.(x^2+y^2)z+2r_{12}xy+a\cos^2\vartheta_{12}.x^2-a\sin^2\vartheta_{12}.y^2=0. \tag{56}$$

Подстановкой

---

[1]) Варш. Унив. Изв. 1893 г.

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$
$$z = z' + h,$$

въ которой

$$h = \frac{a}{2} \cot g\, 2\vartheta_{12}, \quad tg\, 2\alpha = -\frac{a}{2r_{12}}, \tag{57}$$

уравненіе (56) приводится къ виду:

$$\sin 2\vartheta_{12}.(x'^2+y'^2)z' + \sqrt{4r_{12}{}^2+a^2}\,.\,x'y' = 0, \tag{58}$$

т. е. представляетъ цилиндроидъ, отнесенный къ его главнымъ винтамъ. Такъ какъ всѣ цилиндроиды между собою подобны, а коэффиціентъ

$$\frac{\sqrt{4r_{12}{}^2+a^2}}{\sin 2\vartheta_{12}}$$

измѣряетъ высоту цилиндроида, т. е. разстояніе между двумя параллельными плоскостями, между которыми заключены всѣ его производящія, то цилиндроидъ (58) можетъ быть полученъ изъ цилиндроида (54) расширеніемъ въ отношеніи

$$\sqrt{4r_{12}{}^2+a^2} : 2r_{12}$$

и винтовымъ перемѣщеніемъ, опредѣляемымъ формулами (57). Мѣняя a отъ $-\infty$ до $+\infty$, мы получимъ всю систему цилиндроидовъ (58); при этомъ главныя оси ихъ совершатъ поворотъ на прямой уголъ, а высоты цилиндроидовъ отъ безконечно-большихъ дойдутъ до минимума $2r_{12}$ и опять возрастутъ до безконечности.

Изъ всего вышеизложеннаго получается полное представленіе о распредѣленіи возможныхъ винтовыхъ осей для твердаго тѣла, опирающагося на двѣ поверхности, съ указаніемъ для каждой оси разности между крайними значеніями параметра.

ГЛАВА II.

Система трехъ граничныхъ плоскостей I-го рода.

13. Винтовыя оси перваго и второго рода въ случаѣ трехъ опорныхъ поверхностей. Когда твердое тѣло опирается на три неподвижныхъ поверхности, то существуютъ такія направленія винтовыхъ осей, что для каждаго изъ нихъ вся система параллельныхъ осей является возможною, и такія направленія, при которыхъ возможныя оси изъ пучка параллельныхъ прямыхъ отдѣлены отъ невозможныхъ двумя граничными плоскостями. *Оси перваго рода* опредѣляются условіемъ, чтобы углы, образуемые ихъ направленіями съ положительными направленіями нормалей къ тремъ опорнымъ поверхностямъ были или только острые или только тупые; а *оси второго рода* соотвѣтствуютъ такимъ направленіямъ, при которыхъ одинъ или два изъ этихъ угловъ острые, а другіе—тупые [§§ 14, 15 и 16] [1]). При всякомъ направленіи осей существенную роль играютъ 3 плоскости вида (9), S_{23}, S_{31}, S_{12}, которыя являются или какъ дѣйствительныя граничныя S'_{23}, S'_{31}, S'_{12} или какъ подобныя граничнымъ S''_{23}, S''_{31}, S''_{12}. Дѣйствительная граничная плоскость является только тогда, когда изъ двухъ угловъ, образуемыхъ даннымъ направленіемъ осей съ парою нормалей, одинъ острый, а другой тупой; поэтому *при осяхъ 1-го рода всѣ три плоскости могутъ быть только подобными граничнымъ, при осяхъ-же 2-го рода—двѣ плоскости дѣйствительныя граничныя, а третья подобная граничной.* При этомъ, съ измѣненіемъ направленія винтовыхъ осей, роли этихъ плоскостей могутъ взаимно перемѣняться. Такъ какъ отъ относительнаго положенія трехъ указанныхъ плоскостей, находящагося въ зависимости отъ направленія пучка параллельныхъ осей, зависитъ все распредѣленіе возможныхъ

---

[1]) Вмѣсто принятаго въ моей статьѣ: „О винтовыхъ перемѣщеніяхъ твердаго тѣла, связи котораго выражаются неравенствами“ (Вар. Унив. Изв. 1896 г.) раздѣленія всѣхъ винтовыхъ осей для случая трехъ опорныхъ поверхностей на 4 группы, мы будемъ теперь раздѣлять ихъ на два рода, такъ какъ прежнія 4 группы всеравно разсматривались попарно (1 и 4, 2 и 3), какъ соотвѣтствующія на сферѣ параметровъ сопряженнымъ областямъ [§ 14].

винтовыхъ осей и ихъ параметровъ, то мы и обратимся къ изученію свойствъ этихъ трехъ плоскостей.

14. Два основныхъ свойства системы трехъ граничныхъ плоскостей. При какомъ угодно числѣ опорныхъ поверхностей всякой группѣ трехъ изъ нихъ, имѣющихъ n_i, n_k, n_l своими нормалями, соотвѣтствуетъ для всякаго произвольно заданнаго направленія винтовыхъ осей система трехъ граничныхъ плоскостей S_{kl}, S_{li}, S_{ik}. Эти плоскости обладаютъ слѣдующими свойствами.

1) Онѣ пересѣкаются по одной прямой, параллельной заданному направленію, такъ какъ прямая, удовлетворяющая условіямъ:

$$\delta_i \, tg \, \varphi_i = \delta_k \, tg \, \varphi_k = \delta_l \, tg \, \varphi_l, \tag{59}$$

принадлежитъ всѣмъ тремъ граничнымъ плоскостямъ. Эту прямую будемъ означать такъ: σ_{ikl}.

2) Если опорную поверхность и прикасающуюся къ ней часть поверхности двигающагося тѣла измѣнять такимъ образомъ, чтобы общая нормаль въ точкѣ ихъ касанія перемѣщалась параллельно самой себѣ, то всякая граничная плоскость, зависящая отъ этой нормали, перемѣщается также параллельно самой себѣ, такъ какъ ея направленіе зависитъ только отъ направленій, но не отъ положеній, опредѣляющихъ ее двухъ нормалей. Поэтому, если нормаль n_i будетъ перемѣщаться параллельно самой себѣ, то будутъ тоже параллельно самимъ себѣ перемѣщаться плоскости S_{li} и S_{ik}, плоскость-же S_{kl} не будетъ измѣнять своего положенія. Прямая σ_{ikl} будетъ вслѣдствіе этого двигаться, оставаясь параллельною самой себѣ, по плоскости S_{kl}. Подобное же, съ круговою перестановкою значковъ, можно сказать и о нормаляхъ n_k, n_l.

Оба эти свойства будутъ неоднократно имѣть приложеніе.

15. Прямая σ_{ikl}. По изложенному въ § 11, всякая граничная плоскость есть плоскость, касательная къ нѣкоторому цилиндроиду. Въ случаѣ трехъ опорныхъ поверхностей мы имѣемъ три цилиндроида, построенныхъ на нормаляхъ, взятыхъ попарно. Теперь мы видимъ, что касательныя плоскости къ этимъ цилиндроидамъ, параллельныя данному направленію осей, пересѣкаются по одной прямой, которая есть прямая σ_{ikl}.

Еще замѣтимъ, что эта прямая есть та винтовая ось, которая въ пучкѣ параллельныхъ между собою прямыхъ была-бы единственно возможною, если-бы двигающееся тѣло не могло отходить отъ трехъ опорныхъ поверхностей, такъ какъ параметръ такой винтовой оси долженъ, какъ извѣстно, одновременно равняться каждой изъ трехъ величинъ $\delta_i tg\varphi_i$, $\delta_k tg\varphi_k$, $\delta_l tg\varphi_l$.

Пусть будутъ λ_{ikl}, μ_{ikl}, ν_{ikl} моменты прямой σ_{ikl}, соотвѣтствующей заданному направленію (ξ, η, ζ) параллельнаго пучка винтовыхъ осей. Для ихъ опредѣленія мы имѣемъ два уравненія (59), въ которыя нужно ввести координаты нормалей и винтовой оси σ_{ikl}, и условіе:

$$\xi\lambda_{ikl}+\eta\mu_{ikl}+\zeta\nu_{ikl}=0. \tag{60}$$

Беря выраженія (59) попарно и пользуясь формулами (4), (13) и (28), можно написать:

$$\begin{aligned}
(\xi_k q_l-\xi_l q_k)\lambda_{ikl}+(\eta_k q_l-\eta_l q_k)\mu_{ikl}+(\zeta_k q_l-\zeta_l q_k)\nu_{ikl} &= D_{kl},\\
(\xi_l q_i-\xi_i q_l)\lambda_{ikl}+(\eta_l q_i-\eta_i q_l)\mu_{ikl}+(\zeta_l q_i-\zeta_i q_l)\nu_{ikl} &= D_{li},\\
(\xi_i q_k-\xi_k q_i)\lambda_{ikl}+(\eta_i q_k-\eta_k q_i)\mu_{ikl}+(\zeta_i q_k-\zeta_k q_i)\nu_{ikl} &= D_{ik}.
\end{aligned}$$

Эти три уравненія могутъ быть замѣнены слѣдующими:

$$\begin{aligned}
V_{ikl}(\zeta\mu_{ikl}-\eta\nu_{ikl}) &= \xi_i D_{kl}+\xi_k D_{li}+\xi_l D_{ik},\\
V_{ikl}(\xi\nu_{ikl}-\zeta\lambda_{ikl}) &= \eta_i D_{kl}+\eta_k D_{li}+\eta_l D_{ik},\\
V_{ikl}(\eta\lambda_{ikl}-\xi\mu_{ikl}) &= \zeta_i D_{kl}+\zeta_k D_{li}+\zeta_l D_{ik},
\end{aligned}$$

гдѣ

$$V_{ikl}=\begin{vmatrix}\xi_i & \eta_i & \zeta_i\\ \xi_k & \eta_k & \zeta_k\\ \xi_l & \eta_l & \zeta_l\end{vmatrix}. \tag{61}$$

Отсюда, принимая во вниманіе зависимость (60), находимъ:

$$V_{ikl}\lambda_{ikl}=\eta(\zeta_i D_{kl}+\zeta_k D_{li}+\zeta_l D_{ik})-\zeta(\eta_i D_{kl}+\eta_k D_{li}+\eta_l D_{ik}), \tag{62}$$

$$V_{ikl}\mu_{ikl}=\zeta(\xi_i D_{kl}+\xi_k D_{li}+\xi_l D_{ik})-\xi(\zeta_i D_{kl}+\zeta_k D_{li}+\zeta_l D_{ik}), \tag{63}$$

$$V_{ikl}\nu_{ikl}=\xi(\eta_i D_{kl}+\eta_k D_{li}+\eta_l D_{ik})-\eta(\xi_i D_{kl}+\eta_k D_{li}+\zeta_l D_{ik}). \tag{64}$$

16. Система трехъ плоскостей, подобныхъ granич-

нымъ, для винтовыхъ осей перваго рода. Если заданное направленіе пучка параллельныхъ прямыхъ соотвѣтствуетъ винтовымъ осямъ 1-го рода, то (§ 13) всѣ прямыя этого пучка представляютъ оси возможныя, причемъ параметры ихъ должны имѣть значенія, находящіяся внѣ промежутка между меньшею и большею изъ трехъ величинъ

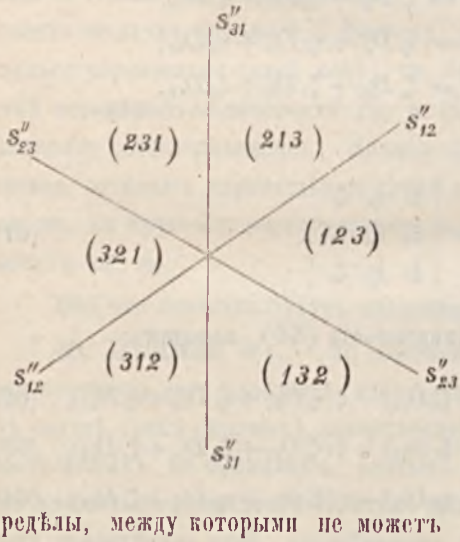
$$\delta_1 tg\,\varphi_1,\quad \delta_2 tg\,\varphi_2,\quad \delta_3 tg\,\varphi_3. \tag{65}$$

Плоскости S''_{23}, S''_{31}, S''_{12} могутъ тогда служить для указанія тѣхъ двухъ изъ этихъ величинъ, которыя являются для данной оси предѣлами возможныхъ значеній параметра. Проведемъ на плоскости, перпендикулярной къ заданному направленію пучка параллельныхъ осей, слѣды s''_{23} и s''_{31} плоскостей S''_{23} и S''_{31}, и найдемъ тотъ уголъ (231) между ними, для осей котораго оправдываются неравенства

$$\delta_2 tg\,\varphi_2 > \delta_3 tg\,\varphi_3 > \delta_1 tg\,\varphi_1. \tag{66}$$

Слѣдъ s''_{12} третьей плоскости S''_{12} не можетъ проходить въ этомъ и вертикальномъ съ нимъ углѣ, которому соотвѣтствуютъ неравенства, обратныя неравенствамъ (66). Проведя этотъ слѣдъ въ парѣ дополнительныхъ къ нимъ угловъ, мы получаемъ для даннаго пучка осей шесть областей, имѣющихъ свойство, что при переходѣ винтовой оси изъ одной области въ смежную съ нею два смежныхъ члена двойнаго неравенства вида (66) совершаютъ взаимную перестановку. На чертежѣ (IV) цифры, поставленныя въ скобкахъ, указываютъ порядокъ, въ которомъ слѣдуютъ величины (65) отъ большей къ меньшей. Двѣ крайнія изъ этихъ величинъ опредѣляютъ каждый разъ предѣлы, между которыми не можетъ находиться величина параметра винтовой скорости.

IV



17. Граничныя плоскости для винтовыхъ осей второго рода. Когда заданное направленіе пучка параллельныхъ прямыхъ такое, что величины q_1, q_2, q_3 не всѣ одного знака, то, какъ было уже выше замѣчено, двѣ изъ плоскостей S_{23}, S_{31}, S_{12} дѣлаются дѣйствительными граничными и одна изъ двухъ паръ вертикальныхъ угловъ между ними опредѣляетъ область возможныхъ винтовыхъ осей даннаго направленія; причемъ одинъ изъ этихъ угловъ опредѣляетъ область $(+\omega)$, а другой—область $(-\omega)$ [§ 16].

Третья плоскость, остающаяся подобною граничной, всегда лежитъ при этомъ внутри этихъ двухъ угловъ. Чтобы это показать, возьмемъ одинъ изъ трехъ возможныхъ теперь случаевъ [§ 14], а именно зададимъ направленіе винтовыхъ осей, которое удовлетворяетъ неравенствамъ

$$q_1 \geqq 0, \quad q_2 \geqq 0, \quad q_3 \leqq 0, \tag{67}$$

или неравенствамъ имъ обратнымъ. Тогда дѣйствительными граничными становятся плоскости S_{23} и S_{31}. Сообразно съ неравенствами (67) мы имѣемъ теперь для возможной винтовой оси въ области $(+\omega)$:

$$\delta_2 tg\,\varphi_2 \leqq p \leqq \delta_3 tg\,\varphi_3, \tag{68}$$

$$\delta_1 tg\,\varphi_1 \leqq p \leqq \delta_3 tg\,\varphi_3, \tag{69}$$

а въ области $(-\omega)$, сообразно съ неравенствами, обратными неравенствамъ (67), и для p имѣемъ неравенства, обратныя неравенствамъ (68) и (69). Въ обоихъ случаяхъ, винтовая ось, удовлетворяющая условію

$$\delta_1 tg\,\varphi_1 = \delta_2 tg\,\varphi_2,$$

т. е. лежащая въ плоскости S''_{12}, подобной граничной, принадлежитъ къ числу возможныхъ, слѣдовательно плоскость S''_{12} лежитъ въ той парѣ вертикальныхъ угловъ между S'_{23} и S'_{31}, которая содержитъ области возможныхъ винтовыхъ осей.

Въ [§ 16] были отмѣчены и изображены точечнымъ пунктиромъ на чертежѣ [XVIII] геометрическія мѣста винтовыхъ осей, для которыхъ разность между предѣлами возможныхъ параметровъ одинакова. Каждое такое геометрическое мѣсто слагается изъ граней двуграннаго угла, образуемаго плоскостями, параллельными дѣйствительнымъ граничнымъ

(§ 9). Легко видѣть, что ребра всѣхъ такихъ двугранныхъ угловъ лежатъ въ плоскости S''_{12}. А именно, для осей, лежащихъ на одной изъ граней этого угла, параллельной плоскости S'_{23},

$$\delta_3 tg\,\varphi_3 - \delta_2 tg\,\varphi_2 = a,$$

а для осей, лежащихъ на другой грани того-же угла, параллельной плоскости S'_{31},

$$\delta_3 tg\,\varphi_3 - \delta_1 tg\,\varphi_1 = a;$$

на ребрѣ этого угла $\delta_3\, tg\,\varphi_3$ имѣетъ въ обоихъ этихъ выраженіяхъ одинаковое значеніе; слѣдовательно $\delta_1\, tg\,\varphi_1$ и $\delta_2\, tg\,\varphi_2$ тоже дѣлаются равными.

Чтобы найти величину угла ε_{12} между дѣйствительными граничными плоскостями, содержащаго возможныя винтовыя оси, воспользуемся сказаннымъ въ § 5 относительно знака величины k_{12}. Въ разсматриваемомъ теперь случаѣ въ области $(+\omega)$ угловая скорость удовлетворяетъ неравенствамъ (68) и (69), и направленіямъ нормалей къ плоскостямъ S'_{23} и S'_{31} въ сторону области $(+\omega)$ соотвѣтствуютъ:

$$k_{23} > 0, \quad k_{31} < 0;$$

но, такъ какъ уголъ между этими нормалями измѣряетъ дополненіе до двухъ прямыхъ къ углу ε_{12}, то мы имѣемъ:

$$\cos\varepsilon_{12} = \frac{A_{23}A_{31} + B_{23}B_{31} + C_{23}C_{31}}{k_{23}\,k_{31}}$$

или, по формуламъ § 3 и § 5:

$$\cos\varepsilon_{12} = \frac{q_3(q_{23}q_1 + q_{31}q_2 - q_{12}q_3) - q_1 q_2}{+\sqrt{(q_2^2 + q_3^2 - 2q_{23}q_2q_3)(q_3^2 + q_1^2 - 2q_{31}q_3q_1)}}. \qquad (70)$$

Подобно углу ε_{12}, въ областяхъ, удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$q_2 \geqq 0, \quad q_3 \geqq 0, \quad q_1 \leqq 0,$$

$$q_3 \geqq 0, \quad q_1 \geqq 0, \quad q_2 \leqq 0,$$

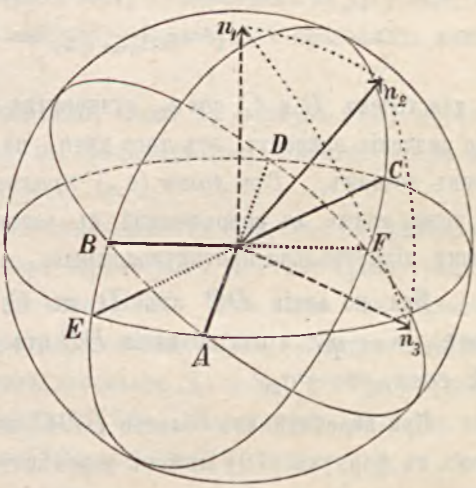
области возможныхъ винтовыхъ осей будутъ опредѣляться соотвѣтственно углами ε_{23} и ε_{31}, для которыхъ:

$$\cos\varepsilon_{23} = \frac{q_1(q_{31}q_2+q_{12}q_3-q_{23}q_1)-q_2q_3}{\sqrt{(q_3^2+q_1^2-2q_{31}q_3q_1)(q_1^2+q_2^2-2q_{12}q_1q_2)}}, \tag{71}$$

$$\cos\varepsilon_{31} = \frac{q_2(q_{12}q_3+q_{23}q_1-q_{31}q_2)-q_3q_1}{\sqrt{(q_1^2+q_2^2-2q_{12}q_1q_2)(q_2^2+q_3^2-2q_{23}q_2q_3)}}. \tag{72}$$

18. Сферическія кривыя: $\varepsilon_{23}=$*пост.*, $\varepsilon_{31}=$*пост.*, $\varepsilon_{12}=$*пост.* Въ вопросѣ о бо́льшемъ или меньшемъ стѣсненіи перемѣщеній твердаго тѣла помощью трехъ опорныхъ поверхностей существенную роль играютъ величины угловъ ε_{23}, ε_{31}, ε_{12}, опредѣляя относительную подвижность твердаго тѣла около осей даннаго параллельнаго пучка. Поэтому представляетъ интересъ изслѣдованіе такихъ направленій осей, для которыхъ эти углы сохраняютъ постоянныя, напередъ заданныя значенія. Опредѣляя-же направленія винтовыхъ осей точками на сферѣ параметровъ (§ 2), мы приходимъ къ разсмотрѣнію сферическихъ кривыхъ, удовлетворяющихъ условіямъ: $\varepsilon_{23}=$ *пост.*, $\varepsilon_{31}=$ *пост.*, $\varepsilon_{12}=$ *пост.* Эти кривыя мы будемъ для краткости означать такъ: (ε_{23}), (ε_{31}), (ε_{12}). Онѣ представляются пересѣченіями сферы параметровъ конусами четвертаго порядка, потому-что координаты ξ, η, ζ входятъ въ q_1, q_2, q_3 линейнымъ образомъ. Для нашихъ цѣлей будетъ достаточно изслѣдовать, какъ эти кривыя проходятъ черезъ границы разсматриваемыхъ нами на сферѣ параметровъ областей, соотвѣтствующихъ винтовымъ осямъ второго ряда, а для этого нужно замѣтить, какія значенія принимаетъ на этихъ границахъ $\cos\varepsilon_{12}$, $\cos\varepsilon_{23}$, $\cos\varepsilon_{31}$. Въ каждой изъ трехъ паръ такихъ областей играетъ роль только одна изъ трехъ кривыхъ, соотвѣтствующая парѣ дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей. Разсмотримъ кривую (ε_{12}) соотвѣтствующей ей области BCD

V



(V) сферическаго треугольника, точки котораго удовлетворяютъ неравенствамъ (67). На сторонахъ этого треугольника одна изъ величинъ q_1, q_2, q_3 обращается въ нуль, такъ какъ эти стороны принадлежатъ плоскостямъ, перпендикулярнымъ къ нормалямъ n_1, n_2, n_3. Для этихъ сторонъ $cos\,\varepsilon_{12}$ принимаетъ значенія:

$$(CD) \quad [cos\,\varepsilon_{12}]_{q_1=0} = -\frac{q_{31}q_2 - q_{12}q_3}{\sqrt{q_2{}^2 + q_3{}^2 - 2q_{23}\,q_2\,q_3}}, \tag{73}$$

$$(BD) \quad [cos\,\varepsilon_{12}]_{q_2=0} = -\frac{q_{23}q_1 - q_{12}q_3}{\sqrt{q_3{}^2 + q_1{}^2 - 2q_{31}\,q_3\,q_1}}, \tag{74}$$

$$(BC) \quad [cos\,\varepsilon_{12}]_{q_3=0} = -1. \tag{75}$$

Въ первыхъ двухъ выраженіяхъ знакъ (—) поставленъ потому, что по правилу § 5, примѣненному въ § 17, при извлеченіи корня должно быть удержано его положительное значеніе; но величина q_3, на которую произведено сокращеніе, предполагается отрицательною.

Для точки D находимъ

$$[cos\,\varepsilon_{12}]_{q_1=0,\ q_2=0} = -q_{12},$$

а для точекъ B и C $cos\,\varepsilon_{12}$ становится неопредѣленнымъ. Истинное его значеніе зависитъ отъ того пути, по которому мы подходимъ къ этимъ точкамъ. *Всѣ линіи* (ε_{12}) *проходятъ черезъ точки* B *и* C, и точно также въ сопряженной съ разсматриваемою областью черезъ точки, діаметрально противуположныя.

Идя по линіи DC отъ D къ C, найдемъ, что въ точкѣ C $cos\,\varepsilon_{12} = -q_{31}$; а идя по линіи DB отъ D къ B, получимъ для точки B: $cos\,\varepsilon_{12} = -q_{23}$.

При переходѣ изъ области BDC въ смежную знакъ передъ корнемъ въ формулѣ (70) можетъ перемѣниться, такъ какъ эта послѣдняя была составлена исключительно въ предположеніи неравенствъ (67), которыя относятся только къ области BDC. Можно видѣть, что эта перемѣна можетъ произойти при переходѣ черезъ дуги CD и DB; при переходѣ-же черезъ дугу BC знакъ передъ корнемъ сохраняется.

Дѣйствительно, въ § 5 мы видѣли, что знакъ неравенства въ формулѣ (22) соотвѣтствуетъ неравенству (21) въ томъ случаѣ, если выполнены неравенства (19) и (20). Это соотвѣтствіе не измѣняется также, если знаки обѣихъ величинъ (19) и (20) мѣняются на обратные. Если-же мѣняется знакъ только одной изъ этихъ величинъ, то мѣняется и знакъ неравенства (22). Въ этомъ послѣднемъ случаѣ и сдѣланное въ концѣ § 5 заключеніе о знакѣ величины k_{12}, входящей въ уравненіе граничной плоскости S_{12}, должно быть измѣнено на обратное. Примѣняя это разсужденіе къ граничнымъ плоскостямъ S_{31} и S_{23}, нужно при переходѣ изъ области BDC въ смежную съ нею область, въ которой q_1 или q_2 мѣняетъ свой знакъ, передъ корнемъ въ формулѣ (70) перемѣнить знакъ на обратный.

Понятно, что это относится только къ такимъ точкамъ сферы параметровъ, въ которыхъ $\cos \varepsilon_{12}$ или обращается въ нуль или дѣлается неопредѣленнымъ. Поэтому напр. при переходѣ съ дуги CB, на которой $\cos \varepsilon_{12} = -1$ (75), черезъ точку B на продолженіе дуги CB, мы получимъ $\cos \varepsilon_{12} = +1$. Точно также, переходя изъ области BDC въ область BEA черезъ точку B, мы должны измѣнить знакъ въ формулѣ (70). Если-же будемъ идти по дугѣ DB, на которой $\cos \varepsilon_{12}$ выражается формулою (74), и черезъ точку B перейдемъ на дугу BA, то $\cos \varepsilon_{12}$, принявъ въ точкѣ B значеніе $-q_{23}$, будетъ продолжать измѣняться дальше безъ разрыва.

Кромѣ точекъ B и C перемѣну знака въ формулѣ (70) могутъ обусловливать и другія точки на границахъ треугольника, когда на нихъ $\cos \varepsilon_{12}$ обращается въ нуль.

Формулы (70), (71) и (72) показываютъ еще, что на границахъ разсматриваемой области на сферѣ параметровъ двѣ изъ трехъ граничныхъ плоскостей приходятъ въ совпаденіе. Такъ напр. въ области BDC, которая удовлетворяетъ неравенствамъ (67), дѣйствительными граничными плоскостями служатъ плоскости S_{23} и S_{31} (§ 17), и уголъ между ними опредѣляется формулою (70). На сторонѣ DC, для точекъ которой $q_1 = 0$, формулы (70), (71) и (72) даютъ

$$(\cos \varepsilon_{12})_{q_1=0} = (\cos \varepsilon_{31})_{q_1=0}, \quad (\cos \varepsilon_{23})_{q_1=0} = 1.$$

Такимъ образомъ хотя кривая (ε_{12}), для которой $\cos \varepsilon_{12} = a$, при переходѣ изъ области BDC въ смежную съ нею область BED черезъ границу DC, теряетъ свое значеніе, ибо плоскость S_{31} перестаетъ быть дѣйствительною граничною,—но зато въ точкѣ перехода ея мѣсто заступаетъ кривая, для которой $\cos\varepsilon_{31} = a$ и которая въ области BDC не играла роли при опредѣленіи угла между дѣйствительными граничными плоскостями. Подобное-же соотношеніе существуетъ между кривыми (ε_{12}) и (ε_{23}) при выходѣ изъ области BDC черезъ границу BD.

При переходѣ-же черезъ границу BC мы попадаемъ уже въ область винтовыхъ осей 1-го рода, и тамъ всѣ три кривыя (ε_{23}), (ε_{31}), (ε_{12}) теряютъ свое первоначальное значеніе, такъ какъ всѣ три плоскости S_{23}, S_{31}, S_{12} становятся плоскостями, подобными граничнымъ.

19. Кривая $(\varepsilon_{12})_0$, **для которой** $\cos\varepsilon_{12} = 0$. Эта кривая имѣетъ особенное значеніе въ вопросѣ объ относительной подвижности твердаго тѣла при трехъ опорныхъ поверхностяхъ, отдѣляя тѣ направленія, для которыхъ уголъ между плоскостями S_{23} и S_{31}, заключающій возможныя винтовыя оси даннаго направленія, меньше прямого угла, отъ направленій, гдѣ онъ больше прямаго. Направленія перваго рода можно разсматривать какъ таковыя, при которыхъ невозможныя оси преобладаютъ надъ возможными.

Для кривой $(\varepsilon_{12})_0$ мы имѣемъ условіе

$$q_3(q_{23}q_1 + q_{31}q_2 - q_{12}q_3) - q_1 q_2 = 0, \tag{76}$$

которое опредѣляетъ конусъ второго порядка.

Прежде чѣмъ перейти къ его разсмотрѣнію, отмѣтимъ случай, когда онъ внутри области BDC точекъ не имѣетъ. Это будетъ тогда, когда всѣ три угла между положительными направленіями нормалей n_1, n_2, n_3 острые. А именно, тогда

$$q_{23} > 0, \quad q_{31} > 0, \quad q_{12} > 0;$$

а ввиду условій (67) числитель выраженія (70) всегда остается отрицательнымъ. Понятно, что то-же замѣчаніе относится и къ остальнымъ областямъ, соотвѣтствующимъ винтовымъ осямъ 2-го рода. Поэтому можно сказать вообще: *Если положительныя направленія нормалей къ тремъ опорнымъ поверхностямъ образуютъ между собою только острые углы, то во всякомъ пучкѣ параллельныхъ винтовыхъ осей области возможныхъ осей преобладаютъ надъ областями невозможныхъ осей.*

Замѣчанія § 18 позволяютъ судить о томъ, какъ будетъ въ области треугольника BDC въ различныхъ случаяхъ проходить линія $(\varepsilon_{12})_0$.

Такъ какъ она есть пересѣченіе сферы параметровъ конусомъ второго порядка, а ни одна изъ сторонъ треугольника BDC не превосходитъ полуокружности, то ни одна изъ нихъ не можетъ пересѣкаться съ линіею $(\varepsilon_{12})_0$ болѣе чѣмъ въ двухъ точкахъ. Принимая-же во вниманіе, что эта линія, какъ всѣ линіи (ε_{12}), проходитъ черезъ точки B и C, мы заключаемъ, что она со сторонами DB и CD можетъ кромѣ того пересѣкаться еще только въ одной точкѣ. Сторону-же BC она, кромѣ какъ въ точкахъ B и C, вовсе пересѣкать не можетъ, что́ также слѣдуетъ и изъ формулы (75). Ввиду этого можно относительно прохожденія линіи $(\varepsilon_{12})_0$ въ области BDC различать 8 случаевъ, сообразно съ 8 различными сочетаніями знаковъ у величинъ q_{23}, q_{31}, q_{12}. При этомъ точки пересѣченія кривой $(\varepsilon_{12})_0$ съ дугами CD и BD будутъ получаться въ томъ случаѣ, если возможно будетъ удовлетворить условіямъ:

$$q_{31}q_2 - q_{12}q_3 = 0, \tag{78}$$

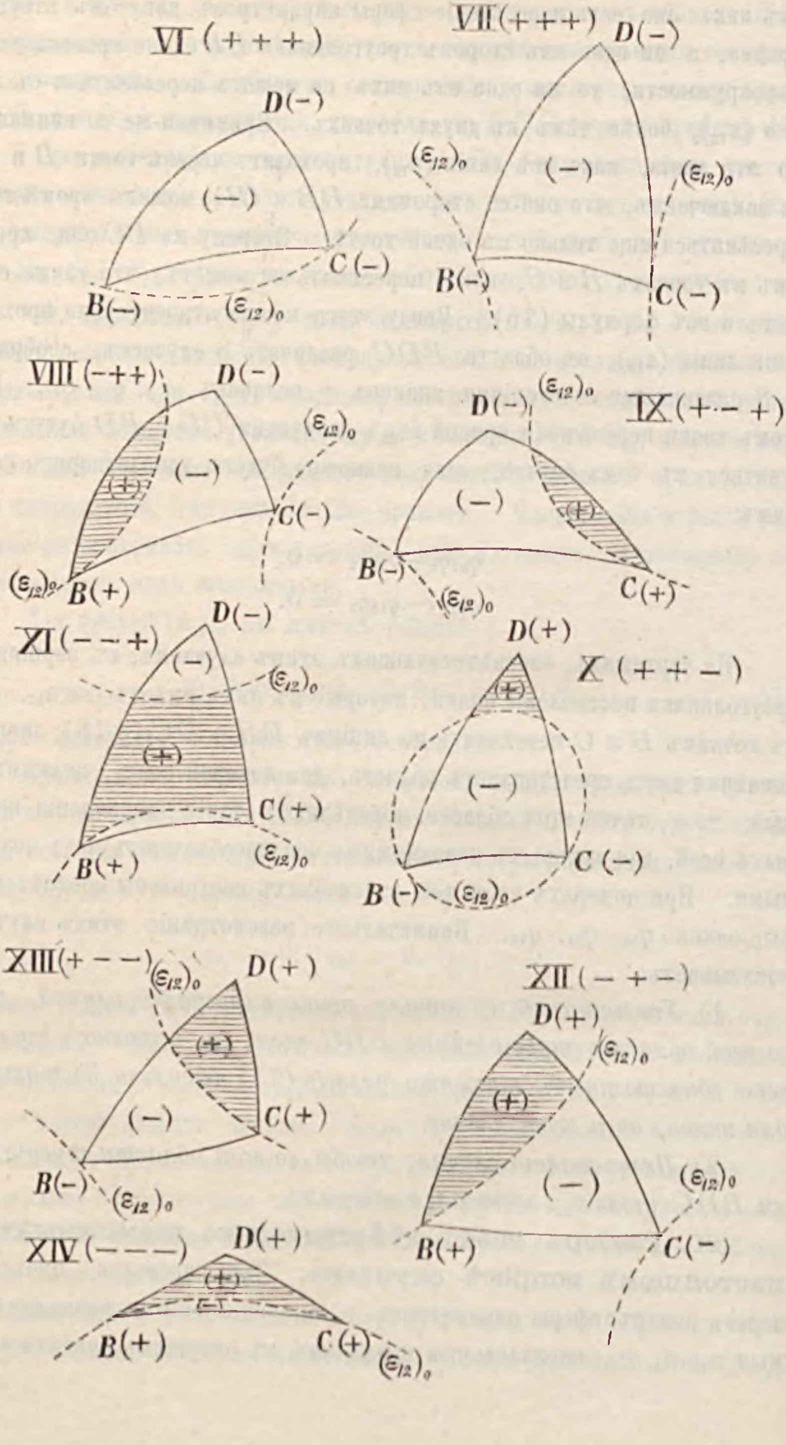
$$q_{23}q_1 - q_{12}q_3 = 0. \tag{79}$$

На чертежахъ, соотвѣтствующихъ этимъ случаямъ, въ вершинахъ треугольника поставлены знаки, которые въ нихъ имѣетъ $\cos\varepsilon_{12}$, если къ точкамъ B и C переходить по линіямъ DB и DC (§ 18); заштрихованная часть представляетъ область, для которой $\cos\varepsilon_{12}$ положительный; т. е. точки этой области опредѣляютъ такія направленія винтовыхъ осей, для которыхъ невозможныя оси преобладаютъ надъ возможными. При номерахъ чертежей въ скобкахъ поставлены соотвѣтственные знаки q_{23}, q_{31}, q_{12}. Внимательное разсмотрѣніе этихъ случаевъ показываетъ:

1) *Упомянутый въ началѣ этого параграфа случай, когда во всей области треугольника BDC уголъ ε_{12} остается тупымъ, есть единственный; такъ-что условіе* (77) *нетолько достаточное для этого, но и необходимое.*

2) *Нѣтъ такого случая, чтобы во всей области треугольника BDC уголъ ε_{12} оставался острымъ.*

20. Разборъ всѣхъ дѣйствительно возможныхъ въ настоящемъ вопросѣ случаевъ. Три плоскости, проходящія черезъ центръ сферы параметровъ и имѣющія своими нормалями прямыя n_1, n_2, n_3, параллельныя нормалямъ къ опорнымъ поверхностямъ,



VI (+++)
D(−)
(−)
C(−)
B(−)
(ε12)0
VII (+++)
D(−)
(−)
(ε12)0
B(−)
C(−)
VIII (−++)
D(−)
(+)
(−)
(ε12)0
C(−)
(ε12)0
B(+)
IX (+−+)
(ε12)0
D(−)
(−)
(+)
B(−)
C(+)
(ε12)0
XI (−−+)
D(−)
(−)
(ε12)0
(+)
C(+)
B(+)
(ε12)0
X (++−)
D(+)
(+)
(−)
C(−)
B(−)
(ε12)0
XIII (+−−)
(ε12)0
D(+)
(+)
(−)
C(+)
B(−)
(ε12)0
XII (−+−)
D(+)
(ε12)0
(+)
(−)
(ε12)0
B(+)
C(−)
XIV (−−−)
D(+)
(+)
(−)
B(+)
C(+)
(ε12)0

пересѣкаются между собою по тремъ прямымъ BF, EC и AD, перпендикулярнымъ къ тремъ плоскостямъ $(n_2 n_3)$, $(n_3 n_1)$, $(n_1 n_2)$ (черт. V), а сферу параметровъ пересѣкаютъ по тремъ большимъ кругамъ, которые предыдущими прямыми раздѣляются каждый на четыре дуги. Составимъ формулы, опредѣляющія эти 12 дугъ и 3 угла между прямыми n_1, n_2, n_3 и BF, EC, AD [1]). Если принять n_1, n_2, n_3 за координатныя оси, то прямыя BF, EC, AD представятъ систему т. н. дополнительныхъ координатныхъ осей, играющихъ, какъ извѣстно, роль въ теоріи криволинейныхъ координатъ. Мы воспользуемся относящимися сюда формулами въ томъ видѣ, какъ онѣ приведены въ сочиненіи: *„Раціональная механика" I. Сомова, т. I, глава VIII.* За положительныя направленія дополнительной системы возьмемъ, согласно принятому въ этомъ сочиненіи правилу, такія направленія, чтобы углы между ними и положительными направленіями нормалей къ опорнымъ поверхностямъ не превосходили прямого угла. Означая эти направленія черезъ h_1, h_2, h_3 а косинусы угловъ $(h_2 h_3)$, $(h_3 h_1)$, $(h_1 h_2)$ черезъ c_{23}, c_{31}, c_{12}, находимъ:

$$c_1 = \cos AC = \cos ED = -\cos AE = -\cos CD$$

$$= \frac{q_{31} q_{12} - q_{23}}{\sqrt{(1-q_{31}^2)(1-q_{12}^2)}}, \qquad (80)$$

$$c_2 = \cos AB = \cos DF = -\cos BD = -\cos AF$$

$$= \frac{q_{12} q_{23} - q_{31}}{\sqrt{(1-q_{12}^2)(1-q_{23}^2)}}, \qquad (81)$$

$$c_3 = \cos BC = \cos EF = -\cos EB = -\cos CF$$

$$= \frac{q_{23} q_{31} - q_{12}}{\sqrt{(1-q_{23}^2)(1-q_{31}^2)}}. \qquad (82)$$

Для угловъ $(h_1 n_1)$, $(h_2 n_2)$, $(h_3 n_3)$ имѣемъ:

$$\cos(h_1 n_1) = \sqrt{\frac{\Delta}{1-q_{23}^2}}, \quad \cos(h_2 n_2) = \sqrt{\frac{\Delta}{1-q_{31}^2}},$$
$$\cos(h_3 n_3) = \sqrt{\frac{\Delta}{1-q_{12}^2}}, \qquad (83)$$

---

[1]) Остальные 6 угловъ между ними прямые.

гдѣ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & q_{12} & q_{31} \\ q_{12} & 1 & q_{23} \\ q_{31} & q_{23} & 1 \end{vmatrix} = 1 - q_{23}{}^2 - q_{31}{}^2 - q_{12}{}^2 + 2q_{23}q_{31}q_{12}. \tag{84}$$

Въ зависимости отъ знаковъ величинъ q_{23}, q_{31}, q_{12} съ одной стороны и отъ знаковъ величинъ

$$q_{31}q_{12} - q_{23}, \quad q_{12}q_{23} - q_{31}, \quad q_{23}q_{31} - q_{12} \tag{85}$$

съ другой стороны, можно представить себѣ $8 . 8 = 64$ различныхъ случая треугольника BDC; но не всѣмъ этимъ случаямъ соотвѣтствуютъ возможные сферическіе треугольники. Принимая во вниманіе: 1) извѣстныя условія для возможности образованія сферическаго треугольника, 2) то обстоятельство, что

$$q_{23} = \cos B, \quad q_{31} = \cos C, \quad q_{12} = -\cos D,$$

и 3) формулы (80), (81), (82), по которымъ соотвѣтствуютъ сторонамъ

$$CD < \frac{\pi}{2}, \quad BD < \frac{\pi}{2}, \quad BC < \frac{\pi}{2}$$

неравенства

$$q_{31}q_{12} - q_{23} < 0, \quad q_{12}q_{23} - q_{31} < 0, \quad q_{23}q_{31} - q_{12} > 0,$$

можно случаи возможныхъ треугольниковъ размѣстить въ помѣщенной на слѣдующей страницѣ таблицѣ, въ которой пустыя клѣтки соотвѣтствуютъ невозможнымъ случаямъ.

Что касается до продолженія линіи $(\varepsilon_{12})_0$ за предѣлами области BDC, то остается только напомнить сказанное въ § 18 о соотношеніи между кривыми (ε_{23}), (ε_{31}), (ε_{12}) при переходѣ изъ одной области на сферѣ параметровъ въ смежную съ нею.

21. О случаяхъ совпаденія двухъ дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей. Мы видѣли въ § 18, что $\cos \varepsilon_{12} = -1$ для точекъ дуги BC. Вообще онъ принимаетъ значенія, равныя ± 1 для тѣхъ точекъ сферы параметровъ, которыя лежатъ (черт. V) на

Знаки величинъ (85)	Знаки q_{23}, q_{31}, q_{12}							
	$+++$	$-++$	$+-+$	$++-$	$--+$	$-+-$	$+--$	$---$
$+++$					V_1	VI_1	VII_1	$VIII_1$
$-++$							VII_2	
$+-+$						VI_3		
$++-$					V_4			
$--+$	I_5			IV_5		VI_5	VII_5	
$-+-$	I_6		III_6		V_6		VII_6	
$+--$	I_7	II_7			V_7	VI_7		
$---$	I_8							

окружности $EBCF$ ($q_3=0$): на дугахъ BC и FE $\cos\varepsilon_{12}=-1$, а на дугахъ BE и FC $\cos\varepsilon_{12}=+1$. Спрашивается, можетъ-ли $\cos\varepsilon_{12}$ принимать эти значенія въ какихъ-либо другихъ точкахъ шара параметровъ. Формула (70) даетъ для этого условіе

$$q_3^2[(1-q_{23}^2)q_1^2+(1-q_{31}^2)q_2^2+(1-q_{12}^2)q_3^2$$
$$+2(q_{31}q_{12}-q_{23})q_2q_3+2(q_{12}q_{23}-q_{31})q_3q_1+2(q_{23}q_{31}-q_{12})q_1q_2]=0.$$

Выраженіе, стоящее въ скобкахъ, не можетъ обращаться въ нуль, если нормали n_1, n_2, n_3 не имѣютъ нѣкотораго исключительнаго направленія. А именно, косинусы q_1, q_2, q_3, изъ которыхъ только два могутъ быть задаваемы произвольно, связаны между собою зависимостью [1]):

---

[1]) I. Сомовъ. Раціональная механика. Т. I, глава VIII, формула (6).

$$(1-q_{23}{}^2)q_1{}^2+(1-q_{31}{}^2)q_2{}^2+(1-q_{12}{}^2)q_3{}^2$$
$$+2(q_{31}q_{12}-q_{23})q_2q_3+2(q_{12}q_{23}-q_{31})q_3q_1+2(q_{23}q_{31}-q_{12})q_1q_2=\Delta, \quad (86)$$

гдѣ Δ опредѣляется по формулѣ (84). Но $\Delta=0$ только въ томъ случаѣ, если всѣ три нормали n_1, n_2, n_3 параллельны одной плоскости. Если этотъ случай исключить, то можно сказать, что кромѣ точекъ окружности, перпендикулярной къ n_3, на сферѣ параметровъ нѣтъ точекъ, которымъ соотвѣтствовало-бы условіе $\cos\varepsilon_{12}=\pm 1$.

Понятно, что подобное-же заключеніе справедливо и для угловъ ε_{23} и ε_{31}.

22. О направленіяхъ, для которыхъ ε_{23}, ε_{31}, ε_{12} получаютъ значенія *maxima* или *minima*. Кромѣ крайнихъ значеній ± 1, косинусы этихъ угловъ могутъ или внутри или на границахъ какой-либо области на сферѣ параметровъ принимать значенія *maxima* или *minima*. Достаточно разсмотрѣть этотъ вопросъ для одной изъ областей; возьмемъ опять область BDC (черт. V). Прежде всего можно видѣть, что *внутри* области *maxima* или *minima* не существуютъ. Положимъ

$$\frac{q_1}{q_3}=x_1, \quad \frac{q_2}{q_3}=x_2,$$

исключая изъ разсмотрѣнія такія направленія, для которыхъ $q_3=0$, т. е. $\cos\varepsilon_{12}=-1$. Итакъ, по формулѣ (70)

$$\cos\varepsilon_{12}=f(x_1, x_2)=\frac{q_{23}x_1+q_{31}x_2-q_{12}-x_1x_2}{\sqrt{(1+x_1{}^2-2q_{31}x_1)(1+x_2{}^2-2q_{23}x_2)}}.$$

Производныя

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=-\frac{(q_{23}q_{31}-q_{12})x_1+(1-q_{31}{}^2)x_2+q_{31}q_{12}-q_{23}}{b_1{}^3b_2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=-\frac{(1-q_{23}{}^2)x_1+(q_{23}q_{31}-q_{12})x_2+q_{23}q_{12}-q_{31}}{b_1b_2{}^3},$$

въ которыхъ для краткости положено

$$1+x_1{}^2-2q_{31}x_1=b_1{}^2,$$

$$1+x_2{}^2-2q_{23}x_2=b_2{}^2,$$

обращаются въ нуль при

$$x_1 = q_{31}, \quad x_2 = q_{23}.$$

Но при этихъ значеніяхъ для x_1 и x_2 находимъ:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_2{}^2} = \frac{\Delta}{(1-q_{23}{}^2)^2(1-q_{31}{}^2)^2};$$

А такъ какъ Δ отрицательнымъ быть не можетъ (84), то максимума или минимума $\cos\varepsilon_{12}$ *внутри* области BDC, т. е. гдѣ ни одна изъ величинъ q_1, q_2, q_3 не равна нулю, не существуетъ.

Такимъ образомъ наибольшія и наименьшія значенія $\cos\varepsilon_{12}$ нужно искать на границахъ области BDC; при этомъ достаточно разсмотрѣть стороны CD и DB, такъ какъ на третьей сторонѣ BC имѣемъ $\cos\varepsilon_{12} = -1$. На сторонѣ DB $x_2 = 0$, а на сторонѣ CD $x_1 = 0$; $f(x_1 x_2)$ принимаетъ на этихъ сторонахъ соотвѣтственно значенія

$$f_1(x_1) = \frac{q_{23}\,x_1 - q_{12}}{\sqrt{1+x_1{}^2-2q_{31}x_1}},$$

$$f_2(x_2) = \frac{q_{31}\,x_2 - q_{12}}{\sqrt{1+x_1{}^2-2q_{23}x_2}}.\ ^{1})$$

Производныя перваго порядка этихъ функцій обращаются въ нуль при

$$x_1' = -\frac{q_{31}q_{12}-q_{23}}{q_{23}q_{31}-q_{12}}, \quad x_2' = -\frac{q_{23}q_{12}-q_{31}}{q_{23}q_{31}-q_{12}}; \qquad (87)$$

производныя-же второго порядка при этихъ значеніяхъ перемѣнныхъ будутъ:

$$f_1''(x_1') = -\frac{q_{23}q_{31}-q_{12}}{(1+x_1'^2-2q_{31}x_1')^{\frac{3}{2}}},$$

$$f_2''(x_2') = -\frac{q_{23}q_{31}-q_{12}}{(1+x_2'^2-2q_{23}x_2')^{\frac{3}{2}}};$$

---

[1]) Эти формулы согласуются съ формулами (74) и (73), если принять во вниманіе, что при извлеченіи корня изъ $q_3{}^2$ нужно написать $-q_3$, согласно замѣчаніямъ § 5 и § 18.

гдѣ для знаменателей, согласно сказанному въ § 5 и въ § 18, всегда должны быть удержаны положительныя значенія. Итакъ мы будемъ имѣть для обѣихъ сторонъ, CD и DB: при

$$q_{23}q_{31} - q_{12} > 0$$

maximum, а при

$$q_{23}q_{31} - q_{12} < 0$$

minimum. Случая же

$$q_{23}q_{31} - q_{12} = 0$$

разсматривать нечего, такъ какъ въ этомъ случаѣ, по формулѣ (82), треугольникъ BCD обращается въ двуугольникъ, т. е. три нормали дѣлаются параллельными одной плоскости; а этотъ случай [§ 19] легко можетъ быть разобранъ непосредственно другимъ путемъ, и мы оставимъ его въ сторонѣ.

Переходя къ разбору перечисленныхъ въ § 19 восьми случаевъ, мы должны принимать во вниманіе только такія рѣшенія, при которыхъ x_1' и x_2' отрицательныя, такъ какъ внутри области BDC и на ея границахъ, CD и DB, q_3 отрицательное, а q_1 и q_2 не меньше нуля. Поэтому въ выраженіяхъ (87) числители и знаменатель должны быть одинаковаго знака.

Въ случаяхъ I_5, IV_5, VI_5, VII_5 и V_4 нѣтъ ни максимума, ни минимума.

Въ случаяхъ V_1, VI_1, VII_1 и VIII_1 имѣются максимумы на обѣихъ сторонахъ BD и CD; въ случаѣ VII_2 максимумъ только на CD, въ случаѣ VI_3 только на BD.

Въ случаѣ I_8 минимумы на BD и на CD; въ случаяхъ I_6, III_6, V_6 и VII_6 минимумъ только на BD; въ случаяхъ I_7, II_7, V_7 и VI_7 минимумъ только на CD.

ГЛАВА III.

Граничная плоскость второго рода.

23. Три рода винтовыхъ осей и система шести граничныхъ плоскостей перваго рода въ случаѣ четырехъ опорныхъ поверхностей. Когда твердое тѣло опирается на четыре неподвижныхъ поверхности, то могутъ существовать такія направленія винтовыхъ осей, что для каждаго изъ нихъ вся система параллельныхъ осей является возможною, или возможныя оси отдѣлены отъ невозможныхъ тремя дѣйствительными граничными плоскостями или наконецъ онѣ отдѣлены четырьмя граничными плоскостями [§ 21 и слѣд.]. Сообразно съ этимъ мы будемъ различать винтовыя оси 1-го, 2-го и 3-го рода [1]). *Оси перваго рода* опредѣляются условіемъ, чтобы углы, образуемые ихъ направленіями съ положительными направленіями всѣхъ четырехъ нормалей къ опорнымъ поверхностямъ, были или только острые или только тупые. На каждой изъ этихъ осей параметръ p можетъ имѣть значенія, находящіяся *внѣ* промежутка между меньшею и бо́льшею изъ величинъ

$$\delta_1 tg\,\varphi_1,\quad \delta_2 tg\,\varphi_2,\quad \delta_3 tg\,\varphi_3,\quad \delta_4 tg\,\varphi_4, \tag{88}$$

и вращеніе возможно и въ ту и въ другую сторону, смотря по тому, съ которой стороны отъ крайнихъ возможныхъ значеній находится величина p [§ 23]. Изъ шести граничныхъ плоскостей, по числу сочетаній изъ 4 элементовъ по 2, ни одна не имѣетъ значенія дѣйствительной граничной плоскости. Онѣ играютъ лишь роль, подобную той, которая указана въ § 16 для случая трехъ опорныхъ поверхностей. *Винтовыя оси второго рода* опредѣляются условіемъ, чтобы ихъ направленія образовали съ одною нормалью тупой уголъ, а съ тремя нормалями острые углы, или наоборотъ. Для каждой такой оси параметръ винтовой скорости заключенъ *между* нѣкоторыми крайними значеніями [§ 24]. Возможныя винтовыя оси ограничены при этомъ *тремя* дѣйствительными граничными плоскостями, образующими замкнутую или не-

---

[1]) См. примѣчаніе въ § 13.

замкнутую призматическую область. *Винтовыя оси третьяго рода* принадлежатъ такимъ направленіямъ, которыя съ двумя нормалями образуютъ острые, а съ двумя другими нормалями тупые углы. Параметръ тоже заключенъ *между* нѣкоторыми предѣлами; но возможныя области опредѣляются *четырьмя* дѣйствительными граничными плоскостями [§ 25].

24. Аналитическое условіе исчезанія осей перваго рода. Направленія нормалей могутъ быть даны такія, чтобы осей перваго рода вовсе не существовало [§ 23]. Въ вопросѣ о возможно большемъ стѣсненіи твердаго тѣла это обстоятельство играетъ весьма существенную роль; ввиду этого замѣтимъ аналитическое условіе исчезанія этихъ осей. Согласно указанному въ [§ 21, стр. 55], геометрическое условіе этого исчезанія состоитъ въ томъ, чтобы на сферѣ параметровъ отрицательное направленіе каждой изъ четырехъ нормалей находилось внутри трехграннаго угла, образуемаго положительными направленіями остальныхъ трехъ нормалей. Очевидно достаточно, чтобы это требованіе выполнялось для одной изъ четырехъ нормалей; тогда оно само собою будетъ выполняться для остальныхъ.

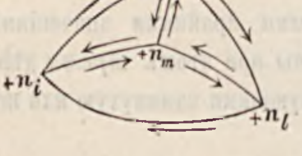
Такое относительное направленіе четырехъ нормалей мы будемъ называть *противостояніемъ нормалей*. Ввиду того, что намъ придется разсматривать такое противостояніе для различныхъ четверокъ нормалей и тогда, когда число опорныхъ поверхностей больше четырехъ, означимъ теперь группу четырехъ нормалей такъ: n_i, n_k, n_l, n_m.

Разсмотримъ четыре величины:

$$V_{ikl}, \quad V_{klm}, \quad V_{lim}, \quad V_{ikm}, \tag{89}$$

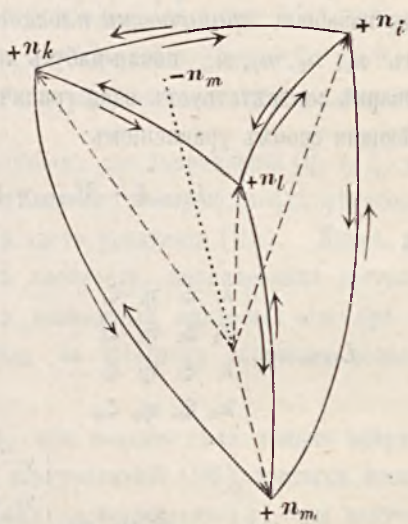
составленныя по схемѣ (61), и будемъ всегда имѣть въ виду, что порядокъ значковъ всегда соотвѣтствуетъ порядку строкъ опредѣлителя. Величины (89) по своему численному значенію опредѣляютъ объемы параллелепипедовъ, у которыхъ три сходящихся ребра равны единицѣ и направлены по тремъ положительнымъ нормалямъ.

XV



Возьмемъ нормали n_i, n_k, n_l; если онѣ расположены такъ, что дѣлая на сферѣ параметровъ обходъ по сторонамъ сферическаго треугольника, имѣющаго своими вершинами положительные концы этихъ нормалей, по часовой стрѣлкѣ, мы отъ нормали n_i переходимъ къ n_k и отъ n_k къ n_l, то $V_{ikl} > 0$; при иномъ же расположенiи нормалей $V_{ikl} < 0$. Принявъ это во вниманiе, можно далѣе видѣть, что если *положительный* конецъ нормали n_m попадаетъ въ область сферическаго треугольника $(n_i n_k n_l)$, то всѣ четыре величины (89) одного знака (черт. XV); если *отрицательный* конецъ нормали n_m попадаетъ въ область того-же треугольника, то V_{klm}, V_{lim} и V_{ikm} имѣютъ другой знакъ, чѣмъ V_{ikl} (черт. XVI). Принимая во вниманiе, что по формулѣ (61) отъ перестановки двухъ смежныхъ значковъ у какой-либо изъ величинъ (89) мѣняется знакъ этой величины, можно сказать, что *въ послѣднемъ случаѣ, который мы назвали противостоянiемъ, величины*

XVI



$$V_{klm}, \quad V_{lim}, \quad V_{ikm}, \quad V_{lki} \tag{90}$$

имѣютъ одинаковые знаки.

Если ни положительный ни отрицательный конецъ нормали n_m не попадаетъ въ область треугольника $(n_i n_k n_l)$, то ни величины (89) ни величины (90) не будутъ одного знака. Итакъ вышеуказанное условiе касательно величины (90) есть нетолько необходимое, но и достаточное условiе противостоянiя.

Если это условiе выполняется относительно нормали n_m, то оно выполняется и относительно всякой другой нормали; такъ-что будутъ одного знака величины:

$$V_{lmi}, \quad V_{mki}, \quad V_{kli}, \quad V_{mlk}, \tag{91}$$

$$V_{lmk}, \quad V_{mik}, \quad V_{ilk}, \quad V_{mli}, \tag{92}$$

$$V_{kml}, \quad V_{mil}, \quad V_{ikl}, \quad V_{mki}. \tag{93}$$

25. Граничная плоскость второго рода. Когда число опорныхъ поверхностей не менѣе четырехъ, то во всѣхъ вопросахъ объ областяхъ возможныхъ винтовыхъ осей играютъ роль нѣкоторыя плоскости, проходящія черезъ центръ сферы параметровъ, которыя мы будемъ называть *граничными плоскостями второго рода.* Пусть будетъ n_i, n_k, n_l, n_m какая-нибудь четверка нормалей. Каждой такой четверкѣ соотвѣтствуетъ одна граничная плоскость второго рода P_{iklm}, имѣющая своимъ уравненіемъ:

$$L_{iklm}\xi + M_{iklm}\eta + N_{iklm}\zeta = 0, \tag{94}$$

гдѣ

$$L_{iklm} = \begin{vmatrix} \lambda_i & \xi_i & \eta_i & \zeta_i \\ \lambda_k & \xi_k & \eta_k & \zeta_k \\ \lambda_l & \xi_l & \eta_l & \zeta_l \\ \lambda_m & \xi_m & \eta_m & \zeta_m \end{vmatrix}, \qquad M_{iklm} = \begin{vmatrix} \mu_i & \xi_i & \eta_i & \zeta_i \\ \mu_k & \xi_k & \eta_k & \zeta_k \\ \mu_l & \xi_l & \eta_l & \zeta_l \\ \mu_m & \xi_m & \eta_m & \zeta_m \end{vmatrix}, \tag{95}$$

$$N_{iklm} = \begin{vmatrix} \nu_i & \xi_i & \eta_i & \zeta_i \\ \nu_k & \xi_k & \eta_k & \zeta_k \\ \nu_l & \xi_l & \eta_l & \zeta_l \\ \nu_m & \xi_m & \eta_m & \zeta_m \end{vmatrix}.$$

Ниже мы увидимъ, что эта плоскость играетъ особенно важную роль, когда четыре нормали находятся въ *противостояніи*; въ этомъ случаѣ мы будемъ ее называть *дѣйствительною граничною плоскостью второго рода и означать символомъ* P'_{iklm}. Если же 4 нормали не находятся въ противостояніи, мы будемъ эту плоскость называть *плоскостью, подобною граничной второго рода и означать символомъ* P''_{iklm}.

Помимо той роли, которую будетъ играть плоскость P_{iklm} въ дальнѣйшемъ, можно указать слѣдующее кинематическое и вмѣстѣ съ тѣмъ геометрическое значеніе ея. Предположимъ на время, что твердое тѣло не можетъ отходить отъ четырехъ опорныхъ поверхностей Σ_i, Σ_k, Σ_l, Σ_m; оно будетъ тогда имѣть двѣ степени свободы и всѣ возможныя для него винтовыя оси будутъ расположены на цилиндроидѣ.

Пусть будутъ ξ, η, ζ, λ, μ, ν координаты какого-нибудь винта этого цилиндроида и p его параметръ. Взаимность этого винта съ винтами, лежащими на нормаляхъ n_i, n_k, n_l, n_m и имѣющими параметръ, равный нулю, существующая теперь для всѣхъ возможныхъ для тѣла винтовъ, выражается условіями:

$$
\left.\begin{aligned}
(\lambda_i + p\xi_i)\xi + (\mu_i + p\eta_i)\eta + (\nu_i + p\zeta_i)\zeta + \xi_i\lambda + \eta_i\mu + \zeta_i\nu = 0,\\
(\lambda_k + p\xi_k)\xi + (\mu_k + p\eta_k)\eta + (\nu_k + p\zeta_k)\zeta + \xi_k\lambda + \eta_k\mu + \zeta_k\nu = 0,\\
(\lambda_l + p\xi_l)\xi + (\mu_l + p\eta_l)\eta + (\nu_l + p\zeta_l)\zeta + \xi_l\lambda + \eta_l\mu + \zeta_l\nu = 0,\\
(\lambda_m + p\xi_m)\xi + (\mu_m + p\eta_m)\eta + (\nu_m + p\zeta_m)\zeta + \xi_m\lambda + \eta_m\mu + \zeta_m\nu = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (96)
$$

Исключая отсюда λ, μ, ν, мы получаемъ для направленій (ξ, η, ζ) условіе въ видѣ равенства нулю опредѣлителя, который, послѣ нѣкоторыхъ упрощеній, приводится къ первой части уравненія (94). Итакъ, граничная плоскость 2-го рода есть плоскость, параллельная производящимъ цилиндроида, содержащаго возможныя винтовыя оси при *обязательномъ* касаніи твердаго тѣла къ четыремъ опорнымъ поверхностямъ.

Предположимъ теперь опять, что твердое тѣло только опирается на 4 поверхности. Исключая p изъ уравненій (96), взятыхъ попарно, и замѣняя λ, μ, ν ихъ выраженіями по формуламъ (1), мы получаемъ уравненія *шести граничныхъ плоскостей перваго рода*, соотвѣтствующихъ заданному направленію $(\xi\eta\zeta)$ пучка параллельныхъ винтовыхъ осей. Для направленія, удовлетворяющаго условію (94), мы находимъ, что существуетъ винтовая ось (p), лежащая одновременно на всѣхъ шести граничныхъ плоскостяхъ. Слѣдовательно, *при направленіяхъ, параллельныхъ граничной плоскости 2-го рода, всѣ шесть соотвѣтствующихъ этому направленію граничныхъ плоскостей 1-го рода пересѣкаются по одной прямой.* Ниже (§ 28) мы придемъ къ этому-же заключенію другимъ путемъ.

26. Общее свойство областей, опредѣляющихъ возможныя винтовыя оси даннаго направленія. При изученіи этихъ областей весьма важно различать случаи, когда нормали къ четыремъ опорнымъ поверхностямъ не находятся въ противостояніи и когда онѣ находятся въ противостояніи (§ 24). Можно показать, что въ первомъ случаѣ область винтовыхъ осей, для всякаго даннаго направленія ихъ, будетъ распространяться въ безконечность, во второмъ-же случаѣ эта область будетъ заключена въ замкнутой призмѣ, т. е. на плоскости, перпендикулярной къ данному направленію винтовыхъ осей, она изобразится [§ 10], (§ 6), замкнутымъ многоугольникомъ. Для этого нужно принять во вниманіе, что условіе замкнутости или незамкнутости области винтовыхъ осей не зависитъ отъ относительнаго *расположенія* нормалей, а зависитъ только отъ ихъ относительныхъ *направленій*. Помимо того, что это видно непосредственно изъ уравненія (9) граничной плоскости, въ которомъ угловые коэффиціенты не зависятъ отъ λ, μ, ν, это можно видѣть и изъ самаго опредѣленія граничной плоскости, по которому ея направленіе зависитъ только отъ угловъ, образуемыхъ заданнымъ направленіемъ винтовыхъ осей съ опредѣляющими ее двумя нормалями. Поэтому, если мы будемъ мѣнять относительное расположеніе нормалей, не мѣняя ихъ направленій, то для того-же пучка параллельныхъ осей граничныя плоскости будутъ перемѣщаться, оставаясь себѣ параллельными.

Отсюда слѣдуетъ, что при параллельномъ перемѣщеніи нормалей незамкнутая призматическая область возможныхъ винтовыхъ осей, независимо отъ числа отдѣляющихъ ее граничныхъ плоскостей всегда остается незамкнутою. Замкнутая-же призматическая область всегда останется замкнутою; она можетъ при параллельномъ перемѣщеніи нормалей и граничныхъ плоскостей обратиться въ одну прямую линію (на плоскости—въ точку), причемъ область $(+\omega)$ можетъ исчезнуть и при дальнѣйшемъ перемѣщеніи перейти въ область $(-\omega)$ или наоборотъ, но она всегда останется замкнутою областью.

Итакъ, чтобы рѣшить, будутъ-ли области винтовыхъ осей замкнутыя или нѣтъ, достаточно это разсмотрѣть для какихъ-нибудь частныхъ положеній нормалей, параллельныхъ даннымъ. Но этотъ вопросъ легко рѣшается для случая, когда всѣ четыре нормали между собою пересѣкаются. Если нормали не находятся въ противостояніи, то черезъ точку ихъ пересѣченія можно провести такую плоскость, что положительные концы всѣхъ четырехъ нормалей будутъ находиться по одну ея сторону. Около всякихъ осей, лежащихъ въ такой плоскости, возможно между прочимъ вращеніе (въ одну опредѣленную сторону); возможны конечно и винтовыя перемѣщенія, параметры которыхъ не переходятъ за извѣстные предѣлы. Во всякомъ случаѣ мы видимъ, что тогда существуютъ области винтовыхъ осей, распространяющіяся въ безконечность. Если-же нормали находятся въ противостояніи, то при взаимномъ ихъ пересѣченіи для тѣла остаются возможными только вращательныя перемѣщенія около точки ихъ пересѣченія; т. е. для всякаго направленія винтовыхъ осей возможная для нихъ область на перпендикулярной къ нимъ плоскости изображается точкою. Отсюда слѣдуетъ, что при всякихъ иныхъ, параллельныхъ прежнимъ положеніяхъ нормалей эта область остается замкнутою.

Итакъ, *для замкнутости областей возможныхъ, параллельныхъ между собою, винтовыхъ осей при всякомъ направленіи послѣднихъ необходимо и достаточно, чтобы нормали къ четыремъ опорнымъ поверхностямъ находились въ противостояніи.*

Къ этому заключенію мы придемъ попутно на основаніи другихъ соображеній, разбирая подробнѣе винтовыя оси 2-го и 3-го рода.

Имѣя главнымъ образомъ въ виду вопросы о возможно большемъ стѣсненіи перемѣщеній твердаго тѣла помощью опорныхъ поверхностей, мы будемъ дальше предполагать, что нормали къ опорнымъ поверхностямъ находятся въ противостояніи, т. е. что винтовыя оси перваго рода отсутствуютъ.

27. Роль граничной плоскости второго рода для винтовыхъ осей второго рода. Какъ было уже замѣчено въ § 23, винтовыя оси 2-го рода ограничиваются, при всякомъ данномъ ихъ направленіи, тремя дѣйствительными граничными плоскостями, образующими, въ случаѣ противостоянія нормалей, замкнутую трехгранную призму, которая заключаетъ, смотря по выбранному направленію, или область $(+\omega)$, или область $(-\omega)$. Мы покажемъ, что появленіе той или другой области обусловливается тѣмъ, съ которой стороны отъ граничной плоскости второго рода находится на сферѣ параметровъ точка, опредѣляющая данное направленіе винтовыхъ осей.

Изъ четырехъ случаевъ, относящихся къ винтовымъ осямъ 2-го рода [§ 24], достаточно разсмотрѣть одинъ, чтобы сдѣлать потомъ общее заключеніе. Возьмемъ случай, когда направленіе угловой скорости на винтовой оси удовлетворяетъ неравенствамъ

$$q_1 \geqq 0, \quad q_2 \geqq 0, \quad q_3 \geqq 0, \quad q_4 \leqq 0 \tag{97}$$

или неравенствамъ имъ обратнымъ. Дѣйствительными граничными плоскостями въ этомъ случаѣ служатъ плоскости S'_{14}, S'_{24} и S'_{34}, пересѣкающіяся попарно по прямымъ σ_{234}, σ_{314} и σ_{124} (§ 15). Въ случаѣ появленія для возможныхъ винтовыхъ осей области $(+\omega)$, каждая изъ этихъ прямыхъ по отношенію къ непроходящей черезъ нее дѣйствительной граничной плоскости лежитъ въ области $(+\omega)$; и точно также, въ случаѣ, когда трехгранная призма заключаетъ въ себѣ область $(-\omega)$, каждая изъ трехъ указанныхъ прямыхъ лежитъ, по отношенію къ непроходящей черезъ нее дѣйствительной граничной плоскости, въ области $(-\omega)$. Въ § 5 было указано, какъ различаются области $(+\omega)$ и $(-\omega)$ по знаку первой части уравненія граничной плоскости. Такимъ образомъ вопросъ сводится къ опредѣленію этого знака въ первой части уравненія каждой изъ плоскостей S'_{14}, S'_{24}, S'_{34}, когда туда будутъ подставлены соотвѣтственно координаты прямыхъ σ_{234}, σ_{314} и σ_{124}. Для этихъ координатъ мы имѣемъ, кромѣ ξ, η, ζ, выраженія, составленныя по схемамъ (62), (63) и (64), которыя должны быть подставлены въ неравенства, составленныя по схемѣ (30).

Первая часть уравненія плоскости S'_{14} можетъ быть такъ написана:

$$S'_{14} = (\xi_4 q_1 - \xi_1 q_4)\lambda + (\eta_4 q_1 - \eta_1 q_4)\mu + (\zeta_4 q_1 - \zeta_1 q_4)\nu + D_{14};$$

подставляя сюда вмѣсто λ, μ, ν моменты прямой σ_{234} по формуламъ:

$$\begin{aligned}
V_{234}\lambda_{234} &= (\eta\zeta_2 - \zeta\eta_2)D_{34} + (\eta\zeta_3 - \zeta\eta_3)D_{42} + (\eta\zeta_4 - \zeta\eta_4)D_{23},\\
V_{234}\mu_{234} &= (\zeta\xi_2 - \xi\zeta_2)D_{34} + (\zeta\xi_3 - \xi\zeta_3)D_{42} + (\zeta\xi_4 - \xi\zeta_4)D_{23},\\
V_{234}\nu_{234} &= (\xi\eta_2 - \eta\xi_2)D_{34} + (\xi\eta_3 - \eta\xi_3)D_{42} + (\xi\eta_4 - \eta\zeta_4)D_{23},
\end{aligned}$$

означая результатъ подстановки черезъ $(S'_{14})_{234}$ и полагая

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_i & \eta_i & \zeta_i \\ \xi_k & \eta_k & \zeta_k \end{vmatrix} = V_{0ik},$$

получаемъ:

$$\begin{aligned}
V_{234}(S'_{14})_{234} = (q_1 V_{402} - q_4 V_{102})D_{34} + (q_1 V_{403} - q_4 V_{103})D_{42}\\
- q_4 V_{104} D_{23} + V_{234} D_{14}. \quad (98)
\end{aligned}$$

Замѣтимъ слѣдующее тожество:

$$q_i V_{0kl} + q_k V_{0li} + q_l V_{0ik} = V_{ikl}. \qquad (99)$$

А именно

$$q_i V_{0kl} + q_k V_{0li} + q_l V_{0ik} = -\begin{vmatrix} 0 & \xi & \eta & \zeta \\ q_i & \xi_i & \eta_i & \zeta_i \\ q_k & \xi_k & \eta_k & \zeta_k \\ q_l & \xi_l & \eta_l & \zeta_l \end{vmatrix}; \qquad (100)$$

принимая-же во вниманіе значеніе величинъ q_i, q_k, q_l, вычитая изъ элементовъ перваго столбца этого опредѣлителя суммы произведеній элементовъ второго столбца на ξ, элементовъ третьяго столбца на η и элементовъ четвертаго столбца на ζ и принимая во вниманіе, что

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = 1,$$

мы найдемъ зависимость (99). Пользуясь ею, можемъ написать:

$$q_1 V_{402} - q_4 V_{102} = V_{124} - q_2 V_{041},$$

$$q_1 V_{403} - q_4 V_{103} = V_{134} - q_3 V_{041}.$$

Подставляя это въ (98) и принимая во вниманіе перемѣну знаковъ, зависящую отъ перестановки значковъ, получаемъ:

$$V_{234}(S'_{14})_{234} = V_{234} D_{14} + V_{314} D_{24} + V_{124} D_{34}$$

$$- V_{041}(q_1 D_{34} + q_3 D_{42} + q_4 D_{23}).$$

По формулѣ (13):

$$q_i D_{kl} + q_k D_{li} + q_l D_{ik} = 0;$$

поэтому

$$(S'_{14})_{234} = \frac{V_{234} D_{14} + V_{314} D_{24} + V_{124} D_{34}}{V_{234}}. \qquad (101)$$

Пользуясь схемою (13), можно далѣе написать:

$$V_{234} D_{14} + V_{314} D_{24} + V_{124} D_{34}$$

$$= (\lambda_4\xi+\mu_4\eta+\nu_4\zeta)\begin{vmatrix} q_1 & \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ q_2 & \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ q_3 & \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \\ 0 & \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{vmatrix} - q_4 \begin{vmatrix} (\lambda_1\xi+\mu_1\eta+\nu_1\zeta) & \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ (\lambda_2\xi+\mu_2\eta+\nu_2\zeta) & \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ (\lambda_3\xi+\mu_3\eta+\nu_3\zeta) & \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \\ 0 & \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{vmatrix}.$$

Преобразовывая первый изъ этихъ опредѣлителей подобно опредѣлителю (100), мы найдемъ, что онъ равенъ $q_4 V_{123}$. Такимъ образомъ

$$V_{234}D_{14}+V_{314}D_{24}+V_{124}D_{34} = -q_4 \begin{vmatrix} \lambda_1\xi+\mu_1\eta+\nu_1\zeta & \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \lambda_2\xi+\mu_2\eta+\nu_2\zeta & \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \lambda_3\xi+\mu_3\eta+\nu_3\zeta & \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \\ \lambda_4\xi+\mu_4\eta+\nu_4\zeta & \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{vmatrix}.$$

Поэтому для выраженія (101) окончательно получаемъ:

$$(S'_{14})_{234} = -\frac{q_4}{V_{234}}(L_{1234}\xi+M_{1234}\eta+N_{1234}\zeta) = -\frac{q_4}{V_{234}}P'_{1234}, \tag{102}$$

гдѣ L_{1234}, M_{1234}, N_{1234} составлены по схемѣ (95).

Для полученія аналогичныхъ этому выраженій, соотвѣтствующихъ прямымъ σ_{314} и σ_{124}, нужно только принять во вниманіе, что во всѣхъ предыдущихъ формулахъ значекъ $(_4)$ остается на мѣстѣ, а первые три значка совершаютъ круговую перестановку; коэффиціенты въ выраженіи для P'_{1234} при этомъ не мѣняются; такъ-что находимъ:

$$(S'_{24})_{314} = -\frac{q_4}{V_{314}}P'_{1234}, \tag{103}$$

$$(S'_{34})_{124} = -\frac{q_4}{V_{124}}P'_{1234}. \tag{104}$$

Вообще полезно замѣтить себѣ слѣдующую общую формулу:

$$(S'_{ik})_{klm} = -\frac{q_k}{V_{klm}}P_{iklm}, \tag{105}$$

и принять во вниманіе, что здѣсь перестановка значковъ (i) и (k) влечетъ за собою перемѣну знака всего выраженія; такъ-что

$$(S'_{ik})_{klm} = -(S'_{ki})_{klm}, \tag{106}$$

потому-что при этой перестановкѣ мѣняются знаки всѣхъ членовъ въ первой части уравненія граничной плоскости. Перестановка-же значковъ (k), (l) и (m) между собою вліянія на знакъ не оказываетъ, такъ какъ эти значки указываютъ только на прямую σ_{klm}, положеніе которой отъ порядка этихъ значковъ не зависитъ. Это замѣчаніе согласуется впрочемъ и со свойствомъ второй части формулы (105), гдѣ перестановка двухъ смежныхъ значковъ (k), (l), (m) производитъ одновременную перемѣну знака у V_{klm} и у P_{iklm}.

Возвращаясь теперь къ сказанному въ началѣ этого §, мы видимъ, что замкнутость области возможныхъ винтовыхъ осей 2-го рода обусловливается однозначностью величинъ V_{234}, V_{314} и V_{124}; а это требованіе выполняется въ случаѣ противостоянія нормалей. Кромѣ этого, уже извѣстнаго намъ результата (§ 26), мы находимъ, что, при выполненіи этого условія замкнутости, появленіе области $(+\omega)$ или $(-\omega)$ обусловливается знакомъ выраженія P'_{1234}.

Итакъ мы нашли, что для винтовыхъ осей 2-го рода, удовлетворяющихъ неравенствамъ (97) или имъ обратнымъ, появленіе области $(+\omega)$ или $(-\omega)$ зависитъ отъ того, съ которой стороны отъ дѣйствительной граничной плоскости 2-го рода

$$P'_{1234} = 0 \tag{107}$$

находится на сферѣ параметровъ точка, опредѣляющая заданное направленіе винтовыхъ осей.

Можно убѣдиться, что плоскость (107) играетъ эту роль нетолько для осей, удовлетворяющихъ неравенствамъ (97) или имъ обратнымъ, но и для остальныхъ винтовыхъ осей 2-го рода, удовлетворяющихъ одной изъ трехъ системъ неравенствъ

$$q_1 \geqq 0, \quad q_2 \geqq 0, \quad q_4 \geqq 0, \quad q_3 \leqq 0, \tag{108}$$

$$q_1 \geqq 0, \quad q_3 \geqq 0, \quad q_4 \geqq 0, \quad q_2 \leqq 0, \tag{109}$$

$$q_2 \geqq 0, \quad q_3 \geqq 0, \quad q_4 \geqq 0, \quad q_1 \leqq 0 \tag{110}$$

или имъ обратныхъ.

Для этого нужно только обратить вниманіе на замѣчаніе въ концѣ § 24. Напр. для винтовыхъ осей, удовлетворяющихъ неравенствамъ (108), роль прежней нормали n_4 играетъ теперь нормаль n_3. Въ формулахъ (102), (103) и (104) отрицательный множитель q_4 замѣнится тоже теперь отрицательнымъ множителемъ q_3, P'_{1234} обратится въ P'_{1243}, т. е. только перемѣнитъ свой знакъ, а знаменатели замѣнятся слѣдующими:

$$V_{243}, \quad V_{413}, \quad V_{123},$$

которые, опять вслѣдствіе предполагаемаго противостоянія нормалей, всѣ одного знака, хотя и противоположнаго знаку прежнихъ величинъ V_{234}, V_{314}, V_{124}. Подобное-же мы найдемъ и въ остальныхъ двухъ случаяхъ, въ которыхъ вмѣсто первоначальныхъ величинъ явятся

$$q_2,\quad P'_{1432},\quad V_{432},\quad V_{312},\quad V_{142},$$

$$q_1,\quad P'_{4231},\quad V_{231},\quad V_{341},\quad V_{421}.$$

Итакъ мы видимъ, что *во всѣхъ четырехъ случаяхъ винтовыхъ осей второго рода появленіе области* $(+\omega)$ *или* $(-\omega)$ *обусловливается исключительно знакомъ величины* P'_{1234}.

Согласно формулѣ (30), *для появленія области* $(+\omega)$ *величины* (102), (103) и (104) должны быть положительныя. Для этого величины

$$P'_{1234},\quad V_{234},\quad V_{314},\quad V_{124},\quad V_{321}$$

должны быть одного знака. Въ случаѣ предполагаемаго противостоянія нормалей послѣднія четыре изъ этихъ величинъ одного знака; поэтому сказанное условіе можно формулировать проще и въ болѣе общемъ видѣ такъ:

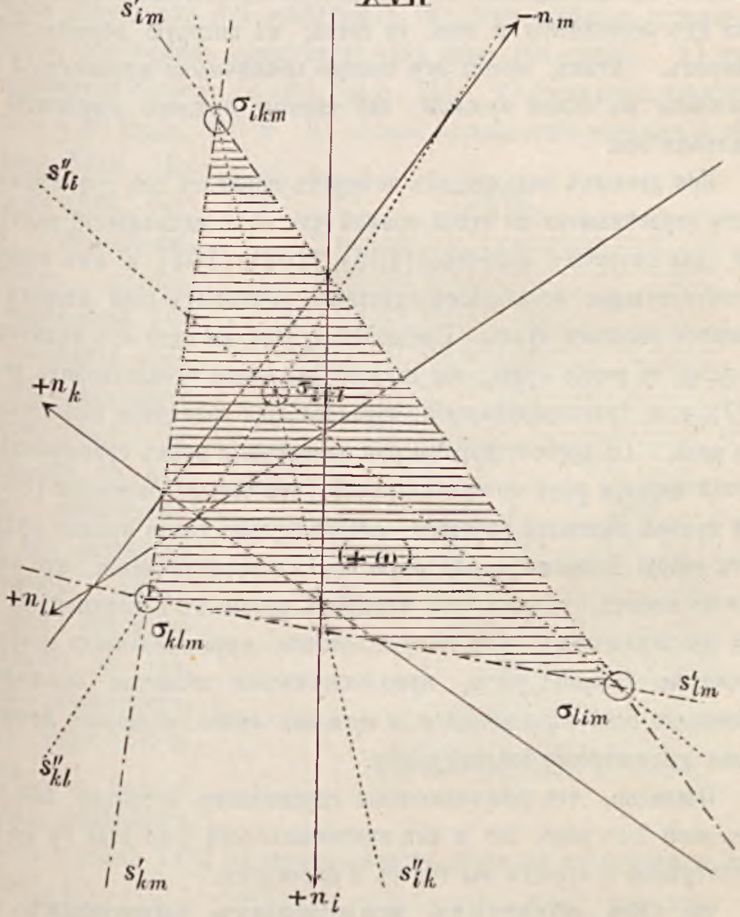
$$\textit{для области } (+\omega):\qquad V_{ikl}P'_{iklm} < 0, \tag{111}$$

$$\textit{для области } (-\omega):\qquad V_{ikl}P'_{iklm} > 0. \tag{112}$$

28. О плоскостяхъ, подобныхъ граничнымъ 1-го рода, для винтовыхъ осей 2-го рода. Въ §§ 14 и 15 было указано, что въ случаѣ трехъ опорныхъ поверхностей три граничныя плоскости 1-го рода пересѣкаются по одной прямой. Для винтовыхъ осей 2-го рода, въ случаѣ четырехъ опорныхъ поверхностей, мы имѣемъ (§ 23) три дѣйствительныхъ граничныхъ плоскости 1-го рода S'_{im}, S'_{km}, S'_{lm} и три плоскости, подобныхъ граничнымъ: S''_{kl}, S''_{li}, S''_{ik}. Для нѣкоторыхъ дальнѣйшихъ вопросовъ полезно замѣтить себѣ, какъ эти три послѣднихъ плоскости проходятъ. Для этого на плоскости, перпендикулярной къ данному направленію осей, сдѣлаемъ изображеніе возможной области по правилу, уже раньше примѣнявшемуся (§ 6), [§ 10]. Эта область треугольника ограничивается теперь слѣдами s'_{im}, s'_{km}, s'_{lm} трехъ дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей. Вершинами треугольника служатъ слѣды прямыхъ σ_{klm}, σ_{lim} и σ_{ikm} (§ 15).

Черезъ эти вершины проходятъ соотвѣтственно слѣды s''_{kl}, s''_{li}, s''_{ik} трехъ плоскостей, подобныхъ граничнымъ. Эти слѣды пересѣкаются въ одной точкѣ σ_{ikl}, согласно § 14; а такъ какъ, по § 17, плоскость, подобная граничной, лежитъ въ той парѣ вертикальныхъ угловъ между двумя дѣйствительными граничными плоскостями, которыя содержатъ возможную область, то *точка* σ_{ikl} *лежитъ внутри треугольника.*

XVII



Прямую σ_{ikl} (XVII), слѣдъ которой находится въ этой точкѣ, мы будемъ называть *центральною осью даннаго направленія.* Ея значеніе слѣдующее. Если нормаль n_m, т. е. ту, которая на чертежѣ входитъ съ знакомъ (—), передвигать параллельно самой себѣ, то плоскости S'_{im}, S'_{km}, S'_{lm} будутъ перемѣщаться тоже параллельно самимъ себѣ (§ 26); треугольникъ, изображающій возможную область, будетъ оставаться себѣ подобнымъ; при этомъ онъ можетъ обратиться въ точку, послѣ чего область $(+\omega)$ обратится въ область $(-\omega)$. Когда треугольникъ обращается въ точку, то слѣды s'_{im}, s'_{km}, s'_{lm} пересѣкаются между собою въ одной точкѣ съ слѣдами s''_{kl}, s''_{li}, s''_{ik}; но такъ какъ положеніе этихъ послѣднихъ не зависитъ отъ положенія нормали n_m, то точка ихъ пересѣченія и есть та точка, въ которую обращается треугольникъ. Итакъ, *когда всѣ шесть граничныхъ плоскостей пересѣкаются по одной прямой, то такою прямою служитъ центральная ось.*

При данныхъ положеніяхъ четырехъ нормалей всѣ граничныя плоскости пересѣкаются по одной прямой для тѣхъ направленій винтовыхъ осей, для которыхъ величины (102), (103), (104) и имъ подобныя, соотвѣтствующія остальнымъ случаямъ винтовыхъ осей второго рода, дѣлаются равными нулю. Предполагая, что ни одна изъ величинъ q_1, q_2, q_3, q_4 не равна нулю, мы должны для этого удовлетворить условію (107), т. е. брать направленія, параллельныя граничной плоскости второго рода. Съ другой стороны при пересѣченіи всѣхъ граничныхъ плоскостей перваго рода по одной прямой, всѣ четыре величины (88) для этой прямой дѣлаются равными; слѣдовательно такая прямая представляетъ собою возможную винтовую ось въ предположеніи, что твердое тѣло не можетъ отходить отъ четырехъ опорныхъ поверхностей. Отсюда мы заключаемъ: *при направленіяхъ, параллельныхъ граничной плоскости второго рода, призматическія области возможныхъ винтовыхъ осей обращаются въ прямыя линіи, которыя принадлежатъ нѣкоторому цилиндроиду.*

Очевидно, что это заключеніе справедливо нетолько для винтовыхъ осей 2-го рода, но и для винтовыхъ осей 3-го рода (§ 23), къ разсмотрѣнію которыхъ мы теперь и перейдемъ.

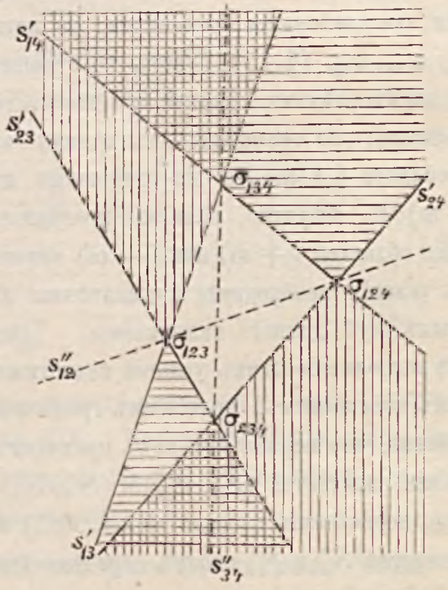
29. Объ областяхъ возможныхъ винтовыхъ осей 3-го рода. При такихъ направленіяхъ, которыя соотвѣтствуютъ винтовымъ осямъ 3-го рода, области возможныхъ осей отдѣляются четырьмя дѣйствительными граничными плоскостями 1-го рода (§ 23). Удерживая предположеніе, что нормали къ опорнымъ поверхностямъ находятся въ противостояніи, мы уже напередъ можемъ утверждать, что всякая такая область будетъ замкнутая (§ 26).

Остановимся пока на одной изъ возможныхъ теперь трехъ сопряженныхъ паръ случаевъ относительно неравенствъ для q_1, q_2, q_3, q_4 [§ 21], и именно предположимъ, что

$$q_1 \geqq 0, \quad q_2 \geqq 0, \quad q_3 \leqq 0, \quad q_4 \leqq 0;$$

тогда дѣйствительными граничными будутъ плоскости $S'_{13}, S'_{23}, S'_{14}, S'_{24}$. Разсуждая независимо отъ извѣстныхъ уже намъ свойствъ граничныхъ плоскостей, мы можемъ представить себѣ здѣсь три случая: 1) появленіе замкнутой области $(+\omega)$ [черт. XL], 2) появленіе замкнутой области $(-\omega)$ [черт. XLI] и 3) полное исчезновеніе возможной области [черт. XLII]. На самомъ-же дѣлѣ, благодаря нѣкоторымъ свойствамъ граничныхъ плоскостей 1-го рода, послѣднее предположеніе оказывается невозможнымъ [1]). Покажемъ это на плоскости, перпендикулярной къ заданному направленію винтовыхъ осей, при помощи слѣдовъ къ граничнымъ плоскостямъ. Каждая пара этихъ слѣдовъ (s'_{13}, s'_{23}), и (s'_{14}, s'_{24}), раздѣляетъ плоскость чертежа XVIII на четыре области, которыя мы будемъ изображать такъ: $(++)_3$, $(--)_3$, $(+-)_3$, $(-+)_3$ и $(++)_4$, $(--)_4$, $(+-)_4$, $(-+)_4$. Здѣсь напр. $(++)_3$ обозначаетъ область того

XVIII



[1]) Соотвѣтственное мѣсто моей первой статьи [§ 26, стр. 65], гдѣ возможность исчезанія была допущена, должно быть исправлено.

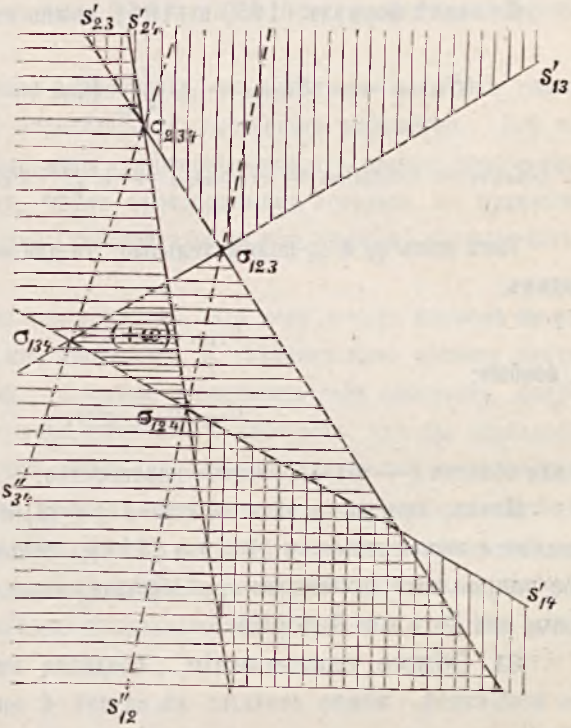
угла между прямыми s'_{13} и s'_{23}, точкамъ котораго, по отношенію къ каждой изъ этихъ прямыхъ, соотвѣтствуетъ область $(+\omega)$; точно также напр. $(-+)_4$ обозначаетъ область того угла между прямыми s'_{14} и s'_{24}, точки котораго по отношенію къ прямой s'_{14} принадлежатъ области $(-\omega)$, а по отношенію къ прямой s'_{24} — области $(+\omega)$. Кромѣ того, по отношенію къ каждой парѣ прямыхъ (s'_{13}, s'_{23}) и (s'_{14}, s'_{24}) область $(+\omega)$ отмѣчена горизонтальными, а область $(-\omega)$ — вертикальными штрихами. Такъ какъ дѣйствительно возможная область винтовыхъ осей можетъ получиться только тамъ, гдѣ обѣ области $(+\omega)$ или обѣ области $(-\omega)$ имѣютъ общія части, то для полнаго исчезновенія возможныхъ областей необходимо и достаточно, чтобы въ углѣ $(++)_3$ не лежала ни одна изъ сторонъ угла $(++)_4$ и чтобы въ углѣ $(++)_4$ не лежала ни одна изъ сторонъ угла $(++)_3$, и чтобы то-же самое требованіе было выполнено относительно угловъ $(--)_3$ и $(--)_4$. Если эти требованія выполнены, то каждая изъ четырехъ точекъ σ_{123}, σ_{124}, σ_{134}, σ_{234} (§ 15) будетъ по отношенію къ непроходящимъ черезъ нее двумъ слѣдамъ граничныхъ плоскостей удовлетворять слѣдующимъ условіямъ: по отношенію къ одному изъ этихъ слѣдовъ она будетъ въ области $(+\omega)$, а по отношенію къ другому слѣду — въ области $(-\omega)$ [1]. Обратно, если эти послѣднія условія выполнены, то совмѣщеніе областей $(+\omega)$ или $(-\omega)$ невозможно; такъ-что вышеуказанныя условія необходимы и достаточны для исчезанія возможныхъ винтовыхъ осей даннаго направленія. Теперь покажемъ, что на самомъ дѣлѣ выполненіе этихъ условій недостижимо. Для этого обратимся къ двумъ плоскостямъ, подобнымъ граничнымъ, S''_{12} и S''_{34}. Онѣ имѣютъ свойство, что первая изъ нихъ проходитъ черезъ линіи σ_{123} и σ_{124} пересѣченія плоскостей (S'_{13}, S'_{23}) и (S'_{14}, S'_{24}), а вторая — черезъ линіи σ_{134} и σ_{234} пересѣченія плоскостей (S'_{13}, S'_{14}) и (S'_{23}, S'_{24}). Этимъ положеніе плоскостей S''_{12} и S''_{34} вполнѣ опредѣляется, и на чертежѣ (XVIII) слѣды ихъ s''_{12} и s''_{34} получатся, если соединить прямыми точки σ_{123} и σ_{124} и точки σ_{134} и σ_{234}. Но мы знаемъ свойство плоскости, подобной граничной, по отношенію къ двумъ дѣйствительнымъ граничнымъ плоскостямъ въ системѣ трехъ нормалей къ опорнымъ поверхностямъ (§ 17): она

---

[1]) Тоже самое можно сказать и по отношенію къ двумъ остальнымъ точкамъ пересѣченія четырехъ слѣдовъ; но для нашей цѣли достаточно разсмотрѣть четыре точки.

проходитъ *внутри* той пары вертикальныхъ угловъ между дѣйствительными граничными плоскостями, которая содержитъ области ($+\omega$) и ($-\omega$); а это условіе не выполняется, если граничныя плоскости такъ расположены, какъ это требуется для полнаго исчезанія возможныхъ осей заданнаго направленія.

XIX



Итакъ это исчезаніе невозможно.

Вмѣстѣ съ этимъ мы видимъ, что возможная область винтовыхъ осей даннаго направленія всегда опредѣляется *четырехгранною* призмою; т. е. не можетъ быть напр. такого положенія, какое представлено на чертежѣ XIX. Потому-что тогда опять плоскости, подобныя граничнымъ, не могли бы имѣть того положенія, какое они должны имѣть въ дѣйствительности.

30. Роль граничной плоскости второго рода для винтовыхъ осей третьяго рода. Остается опредѣлить признакъ, по которому можно было-бы и для винтовыхъ осей 3-го рода отличать случаи появленія области ($+\omega$) и области ($-\omega$).

Употребляя обозначенія § 27, можно сказать, что для появленія области ($+\omega$) необходимо и достаточно, чтобы было

$$(S'_{14})_{123} > 0, \quad (S'_{24})_{123} > 0;$$

причемъ, на основаніи показаннаго въ § 29, сами собою будутъ уже удовлетворяться и неравенства

$$(S'_{13})_{124} > 0, \quad (S'_{23})_{124} > 0.$$

По схемѣ формулъ (105) и (106) можно написать:

$$(S'_{14})_{123} = -(S'_{41})_{123} = +\frac{q_1}{V_{123}} P'_{4123} = -\frac{q_1}{V_{123}} P'_{1234},$$

$$(S'_{24})_{123} = -(S'_{42})_{123} = -(S'_{42})_{213} = +\frac{q_2}{V_{213}} P'_{4213} = -\frac{q_2}{V_{123}} P'_{1234}.$$

Такъ какъ q_1 и q_2 положительные, то для области $(+\omega)$ мы находимъ:

$$V_{123}\,.\,P'_{1234} < 0,$$

и вообще:

$$V_{ikl}\,P'_{iklm} < 0,$$

а для области $(-\omega)$ — обратное неравенство.

Итакъ, *признаки для областей* $(+\omega)$ *и* $(-\omega)$ *всегда выражаются неравенствами* (111) *и* (112), *независимо отъ того, какое направленіе винтовыхъ осей будетъ взято*, т. е. будутъ-ли винтовыя оси 2-го или 3-го рода.

31. Общее заключеніе. Соединяя вмѣстѣ все изложенное въ этой главѣ, можно сказать: въ случаѣ 4 опорныхъ поверхностей, нормали къ нимъ въ точкахъ ихъ касанія къ двигающемуся тѣлу могутъ быть такъ расположены, что для всякаго направленія винтовыхъ осей область возможныхъ осей будетъ представляться трехгранною или четырехгранною замкнутою призмою. Около всѣхъ осей, параллельныхъ ребрамъ такой призмы и лежащихъ внутри ея, возможна винтовая скорость, параметръ которой имѣетъ значенія, заключенныя между нѣкоторыми конечными предѣлами, для различныхъ осей вообще говоря различными, угловая же скорость, входящая въ составъ винтовой скорости, имѣетъ для всѣхъ осей призмы только одно изъ двухъ направленій, $(+\omega)$ или $(-\omega)$.

На сферѣ параметровъ точки, опредѣляющія направленія $(+\omega)$ отдѣлены отъ точекъ, опредѣляющихъ направленія $(-\omega)$, граничною плоскостью второго рода.

Направленіе граничной плоскости второго рода зависитъ нетолько отъ направленія по и отъ относительнаго положенія четырехъ нормалей къ опорнымъ поверхностямъ.

Въ случаѣ четырехъ опорныхъ поверхностей нѣтъ такихъ направленій, по которымъ не были-бы возможны никакія винтовыя перемѣщенія.

Существуютъ такія направленія, по которымъ возможна только одна винтовая ось съ опредѣленнымъ значеніемъ параметра. Всѣ такія винтовыя оси параллельны граничной плоскости второго рода и принадлежатъ цилиндроиду, двумя производящими котораго съ нулевымъ параметромъ служатъ двѣ (дѣйствительныя или мнимыя) сѣкущія четырехъ нормалей.

Наконецъ полезно еще замѣтить, что если четыре нормали не находятся въ положеніи противостоянія и слѣдовательно области винтовыхъ осей незамкнутыя, то можно представить себѣ плоскость, подобную граничной второго рода, какъ такую плоскость, что для параллельныхъ ей направленій всѣ шесть граничныхъ плоскостей перваго рода пересѣкаются по одной прямой. Эта плоскость не имѣетъ значенія дѣйствительной граничной плоскости потому, что при всякомъ направленіи пучка параллельныхъ ей прямыхъ имѣются оси и съ однимъ направленіемъ и съ обратнымъ направленіемъ вращенія, $(+\omega)$ и $(-\omega)$.

ГЛАВА IV.

Граничныя плоскости второго рода въ случаѣ пяти опорныхъ поверхностей.

32. Системы граничныхъ плоскостей 1-го и 2-го рода для настоящаго случая. Аналогично съ случаемъ четырехъ опорныхъ поверхностей можно теперь всѣ винтовыя оси раздѣлить на три рода.

Оси перваго рода опредѣляются условіемъ, чтобы величины

$$q_1, \quad q_2, \quad q_3, \quad q_4, \quad q_5 \tag{113}$$

всѣ были одного знака. Для такихъ осей не существуетъ ни одной дѣйствительной граничной плоскости 1-го рода. Нормали къ опорнымъ поверхностямъ всегда могутъ быть такъ расположены, чтобы такихъ осей въ дѣйствительности не существовало, такъ-какъ это можетъ быть уже достигнуто при четырехъ опорныхъ поверхностяхъ (§ 24). Въ дальнѣйшемъ мы будемъ предполагать отсутствіе осей перваго рода; а для этого *будемъ принимать, что четыре изъ пяти нормалей находятся въ противостояніи.*

Оси второго рода характеризуются тѣмъ, что четыре изъ пяти величинъ (113) имѣютъ одинаковый знакъ. При этомъ изъ 10 граничныхъ плоскостей перваго рода, по числу сочетаній изъ 5 элементовъ по два, 4 будутъ дѣйствительными граничными.

Оси третьяго рода опредѣляются тѣмъ, что для нихъ три изъ величинъ (113) одного знака. Число дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей 1-го рода здѣсь равно 5 или 6. Подробнѣе это будетъ выяснено въ § 36.

Можно себѣ представить пять различныхъ граничныхъ плоскостей *второго рода,* дѣлая пять различныхъ комбинацій нормалей по четыре; но дѣйствительное значеніе граничныхъ плоскостей будутъ имѣть изъ нихъ двѣ, остальныя-же три плоскости не будутъ играть роли при отдѣленіи возможныхъ направленій отъ невозможныхъ. А именно, пусть будутъ n_1, n_2, n_3, n_4 четыре нормали, находящіяся въ противостояніи; имъ будетъ соотвѣтствовать дѣйствительная граничная плоскость 2-го рода P'_{1234}. Пятая нормаль вмѣстѣ съ тремя изъ предыдущихъ четырехъ нормалей будетъ тогда опредѣлять дѣйствительную граничную плоскость 2-го рода, когда она находится съ этими нормалями въ противостояніи. Для этого на сферѣ параметровъ отрицательный конецъ пятой нормали долженъ упасть въ область сферическаго треугольника, имѣющаго своими вершинами положительные концы трехъ другихъ нормалей (§ 24). Такъ какъ по нашему предположенію первыя четыре нормали находятся въ противостояніи, то четыре сферическихъ треугольника, опредѣляемые ихъ положительными концами, покрываютъ всю поверхность сферы параметровъ; поэтому пятая нормаль непремѣнно упадетъ своимъ отрицательнымъ концомъ въ область одного изъ этихъ треугольниковъ. Эта область и укажетъ намъ тѣ три нормали, которыя вмѣстѣ съ пятою нормалью должны послужить для опредѣленія второй дѣйствительной граничной плоскости 2-го рода. Пусть будутъ эти три нормали: n_2, n_3, n_4; искомою плоскостью тогда будетъ плоскость P'_{2345}. Остальныя три плоскости, не соотвѣтствующія уже такимъ четверкамъ нормалей, которыя находились-бы въ противостояніи, мы будемъ называть (§ 25) плоскостями, подобными граничнымъ 2-го рода и означать такъ: P''_{1235}, P''_{1245}, P''_{1345}.

33. Области возможныхъ направленій винтовыхъ осей. Какъ было показано въ предыдущей главѣ, дѣйствительная граничная плоскость второго рода дѣлитъ сферу параметровъ на двѣ области: $(+\omega)$ и $(-\omega)$. Теперь двѣ плоскости P'_{1234} и P'_{2345}, пересѣкаясь по діаметру сферы, дѣлятъ ее на четыре области, которыя, по знаку угловой скорости, можно обозначить такъ: $(++)$, $(--)$, $(+-)$ и $(-+)$. Для каждой изъ двухъ четверокъ нормалей, разсматриваемыхъ отдѣльно, область возможныхъ винтовыхъ осей даннаго направленія представляется на перпендикулярной къ нимъ плоскости въ видѣ замкнутаго треугольника или четырехугольника и содержитъ оси одного направленія вращенія: $(+\omega)$ или $(-\omega)$. Въ случаѣ пяти нормалей эта область представляется общею частью двухъ областей указаннаго вида; притомъ имъ должно соотвѣтствовать одно и то-же направленіе вращенія; слѣдовательно области возможныхъ винтовыхъ осей могутъ получиться только при такихъ направленіяхъ ихъ, которыя на сферѣ параметровъ принадлежатъ областямъ $(++)$ и $(--)$.

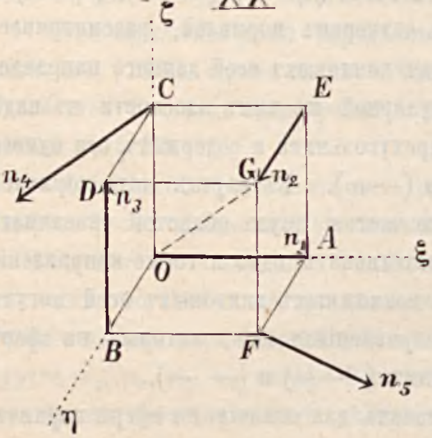
Въ § 30 былъ указанъ признакъ для отличія на сферѣ параметровъ области $(+\omega)$ отъ области $(-\omega)$. Для нахожденія областей $(++)$ и $(--)$ нужно только примѣнить его къ каждой изъ двухъ дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей 2-го рода.

Для остальныхъ направленій не получается возможныхъ винтовыхъ осей. Итакъ, *для того, чтобы существовали такія направленія, по которымъ никакія винтовыя оси не возможны, твердое тѣло должно опираться по крайней мѣрѣ на пять поверхностей.*

34. Аналитическій признакъ, отличающій двѣ дѣйствительныя граничныя плоскости отъ трехъ плоскостей, имъ подобныхъ. Этимъ признакомъ можетъ служить сказанное въ § 24. Мы видѣли тамъ, что въ случаѣ противостоянія четырехъ нормалей величины (90) имѣютъ одинаковый знакъ. Въ случаѣ пяти опорныхъ поверхностей мы имѣемъ 10 подобныхъ этимъ величинъ, по числу сочетаній изъ 5 элементовъ по 3. Положимъ, что мы нашли по указанному признаку, одну изъ двухъ искомыхъ плоскостей, P'_{1234}; послѣ этого нужно сдѣлать испытаніе съ четырьмя четверками нормалей (n_2, n_3, n_4, n_5), (n_3, n_4, n_1, n_5), (n_4, n_1, n_2, n_5) и (n_1, n_2, n_3, n_5), *соблюдая каждый разъ указанное въ § 24 правило относительно послѣдовательности въ расположеніи четырехъ нормалей*, и выбрать ту четверку, для которой величины V_{kl5}, V_{li5}, V_{ik5}, V_{lki} окажутся одного знака. При этомъ изъ геометрическаго разсмотрѣнія мы напередъ уже знаемъ, что это можетъ оказаться только для одной изъ 4 комбинацій нормалей.

Пояснимъ это на слѣдующемъ примѣрѣ. Пусть нормали къ опорнымъ поверхностямъ въ точкахъ касанія къ нимъ твердаго тѣла имѣютъ слѣдующее положеніе: n_1, n_2, n_3 — по пересѣкающимся и равнымъ единицѣ ребрамъ куба — OA, EG, BD (фиг. XX); n_4 проведена черезъ вершину C параллельно діагонали куба, n_5 — черезъ вершину F по направленію, которое ниже указано величинами ξ_5, η_5, ζ_5.

XX



Для координатъ этихъ пяти нормалей мы имѣемъ тогда:

	ξ	η	ζ	λ	μ	ν
n_1	1	0	0	0	0	0
n_2	0	1	0	-1	0	1
n_3	0	0	1	1	0	0
n_4	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
n_5	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Вычислимъ теперь величины (90) для каждой изъ 5 комбинацій четверокъ нормалей. Въ слѣдующей таблицѣ поставлены знаки этихъ величинъ, которые только и играютъ роль:

$(i\,k\,l\,m)$	V_{klm}	V_{lim}	V_{ikm}	V_{lki}	
(2345)	+	+	+	+	. . . P'_{2345}
(3451)	−	−	+	−	. . . . . . P''_{3451}
(4512)	−	+	−	+	. . . . . . P''_{4512}
(5123)	+	−	+	+	. . . . . . P''_{5123}
(1234)	−	−	−	−	. . . P'_{1234}

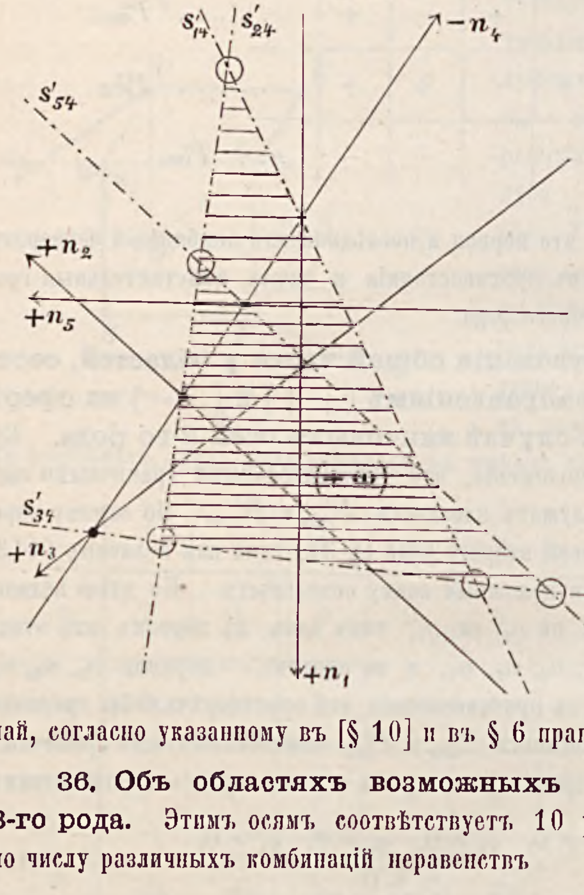
Отсюда заключаемъ, что первая и послѣдняя изъ комбинацій четверокъ нормалей находятся въ противостояніи и даютъ дѣйствительныя граничныя плоскости второго рода.

35. О существованіи общей части у областей, соотвѣтствующихъ направленіямъ $(++)$ и $(--)$ на сферѣ параметровъ, въ случаѣ винтовыхъ осей 2-го рода. Будемъ сохранять предположеніе, что дѣйствительными граничными плоскостями 2-го рода служатъ плоскости P'_{1234} и P'_{2345}. По самому опредѣленію винтовыхъ осей второго рода (§ 32) одна изъ величинъ (113) имѣетъ знакъ, противуположный знаку остальныхъ. Но этою величиною не могутъ быть ни q_5 ни q_1, такъ какъ въ первомъ изъ этихъ случаевъ нормали n_1, n_2, n_3, n_4, а во второмъ — нормали n_2, n_3, n_4, n_5 не находились-бы въ противостояніи, что противорѣчило-бы предположенію о томъ, что плоскости P'_{1234} и P'_{2345} *дѣйствительныя* граничныя. Разсмотримъ оси, направленіе которыхъ удовлетворяетъ неравенствамъ:

$$\begin{gathered} q_1 \geqq 0, \quad q_2 \geqq 0, \quad q_3 \geqq 0, \quad q_5 \geqq 0, \\ q_4 \leqq 0 \end{gathered} \tag{114}$$

или неравенствамъ имъ обратнымъ. На плоскости, перпендикулярной къ этому направленію, возможная область представится общею частью двухъ треугольниковъ, опредѣляющихъ возможныя области винтовыхъ осей 2-го рода для каждой изъ двухъ четверокъ нормалей, взятыхъ въ отдѣльности. Спрашивается, будутъ-ли эти два треугольника непремѣнно имѣть общую часть? Разсмотрѣніе граничныхъ плоскостей 1-го рода непосредственно приводитъ къ утвердительному отвѣту. А именно, при существованіи неравенствъ (114), нормалямъ n_1, n_2, n_3, n_4 соотвѣтствуютъ дѣйствительныя граничныя плоскости 1-го рода S'_{14}, S'_{24}, S'_{34}, а нормалямъ n_2, n_3, n_4, n_5 — плоскости S'_{24}, S'_{34}, S'_{54}. Такимъ образомъ у двухъ треугольниковъ имѣются двѣ общихъ стороны S'_{24} и S'_{34}; а такъ какъ оба треугольника заключаютъ (§ 33) области съ тѣмъ-же знакомъ угловой скорости, $(+\omega)$ или $(-\omega)$, то и углы треугольниковъ, заключенные между этими сторонами, общіе. Слѣдовательно у этихъ треугольниковъ непремѣнно существуетъ общая часть. На чертежѣ XXI изображенъ такой случай, согласно указанному въ [§ 10] и въ § 6 правилу.

XXI



36. Объ областяхъ возможныхъ винтовыхъ осей 3-го рода. Этимъ осямъ соотвѣтствуетъ 10 различныхъ случаевъ, по числу различныхъ комбинацій неравенствъ

$$q_i \geqq 0, \quad q_k \geqq 0, \quad q_l \geqq 0,$$
$$q_m \leqq 0, \quad q_r \leqq 0.$$

Въ зависимости отъ того, въ какомъ отношеніи находятся эти комбинаціи къ двумъ комбинаціямъ четверокъ нормалей, опредѣляющихъ дѣйствительныя граничныя плоскости 2-го рода, здѣсь могутъ встрѣтиться три различныхъ случая образованія области возможныхъ винтовыхъ осей: она можетъ представляться общею частью: 1) двухъ четырехугольниковъ, 2) четырехугольника и треугольника и 3) двухъ треугольниковъ. Который изъ этихъ случаевъ каждый разъ представится, это зависитъ отъ того, которыя шесть изъ 10 граничныхъ плоскостей 1-го рода являются дѣйствительными граничными. Въ предположеніи прежнихъ двухъ дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей 2-го рода P'_{1234} и P'_{2345} замѣтимъ, что въ первой четверкѣ нормалей отсутствуетъ нормаль n_5, а во второй четверкѣ — нормаль n_1; сообразно съ этимъ, когда величины q_1 и q_5 обѣ положительныя, получаются два четырехугольника; когда онѣ противуположныхъ знаковъ, то имѣемъ четырехугольникъ съ треугольникомъ; когда-же онѣ обѣ отрицательныя, то появляются два треугольника.

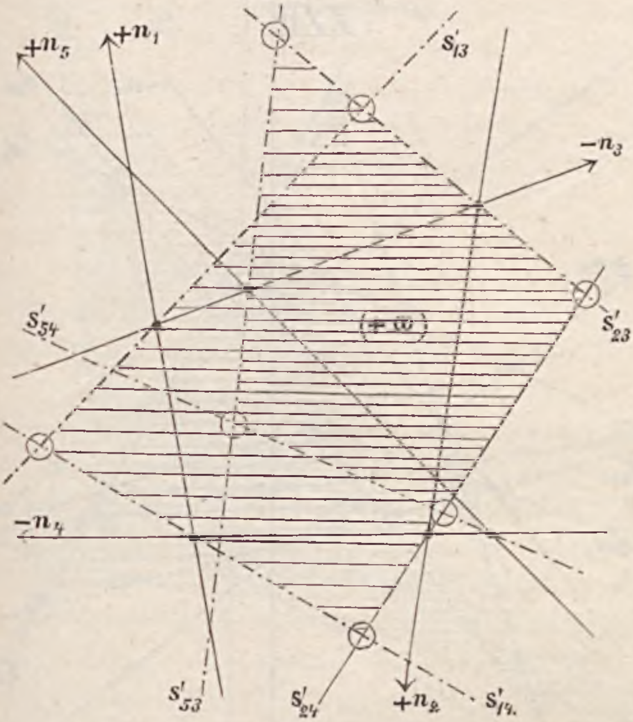
Въ нижеслѣдующей таблицѣ изображены всѣ могущіе здѣсь встрѣтиться случаи, причемъ для каждаго изъ нихъ выписаны дѣйствительныя граничныя плоскости 1-го рода и цифрами (III) и (IV) отмѣчены соотвѣтствующія числу ихъ фигуры треугольниковъ и четырехугольниковъ.

	$q_1\ q_5$	$q_2\ q_3\ q_4$		
1)	$+\,+$	$+\,-\,-$	$S'_{13}\ S'_{23}\ S'_{14}\ S'_{24}$	IV
			$S'_{23}\ S'_{24}\ S'_{53}\ S'_{54}$	IV
	$+\,+$	$-\,+\,-$	$S'_{12}\ S'_{32}\ S'_{14}\ S'_{34}$	IV
			$S'_{32}\ S'_{34}\ S'_{52}\ S'_{54}$	IV
	$+\,+$	$-\,-\,+$	$S'_{12}\ S'_{42}\ S'_{13}\ S'_{43}$	IV
			$S'_{42}\ S'_{43}\ S'_{52}\ S'_{53}$	IV

	$q_1\ q_5$	$q_2\ q_3\ q_4$		
2)	$+-$	$++-$	$S'_{14}\ S'_{24}\ S'_{34}$	III
			$S'_{24}\ S'_{34}\ S'_{25}\ S'_{35}$	IV
	$+-$	$+-+$	$S'_{13}\ S'_{23}\ S'_{43}$	III
			$S'_{23}\ S'_{43}\ S'_{25}\ S'_{45}$	IV
	$+-$	$-++$	$S'_{12}\ S'_{32}\ S'_{42}$	III
			$S'_{32}\ S'_{42}\ S'_{53}\ S'_{54}$	IV
	$-+$	$++-$	$S'_{21}\ S'_{31}\ S'_{24}\ S'_{34}$	IV
			$S'_{24}\ S'_{34}\ S'_{54}$	III
	$-+$	$+-+$	$S'_{21}\ S'_{41}\ S'_{23}\ S'_{43}$	IV
			$S'_{23}\ S'_{43}\ S'_{53}$	III
	$-+$	$-++$	$S'_{31}\ S'_{41}\ S'_{32}\ S'_{42}$	IV
			$S'_{32}\ S'_{42}\ S'_{52}$	III
3)	$--$	$+++$	$S'_{21}\ S'_{31}\ S'_{41}$	III
			$S'_{25}\ S'_{35}\ S'_{45}$	III

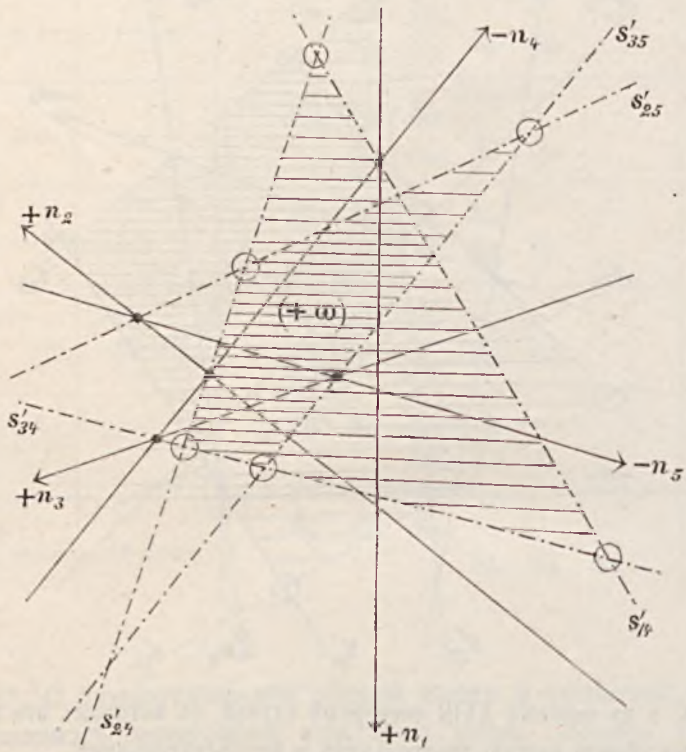
37. О существованіи общей части у областей, опредѣляющихъ винтовыя оси 3-го рода. Подобно вопросу, разсмотрѣнному въ § 35, остается разсмотрѣть, всегда-ли области возможныхъ осей, соотвѣтствующія каждой изъ двухъ четверокъ нормалей, взятыхъ отдѣльно, имѣютъ общую часть, когда задано для винтовыхъ осей 3-го рода направленіе, принадлежащее возможной на сферѣ параметровъ области $(++)$ и $(--)$. Когда область возможныхъ винтовыхъ осей принадлежитъ двумъ четырехугольникамъ или четырехугольнику и треугольнику (первые 9 изъ помѣщенныхъ въ таблицѣ § 36 случаевъ), то существованіе общей части у этихъ фигуръ можно усмотрѣть непосредственно изъ того обстоятельства, что у нихъ существуютъ двѣ общихъ стороны, а вслѣдствіе однозначности въ обѣихъ областяхъ угловой скорости, $(+\omega)$ или $(-\omega)$, и уголъ внутри фигуры, заключенный между этими сторонами у нихъ общій. На чертежѣ XXII изображенъ первый изъ этихъ 9 случаевъ, въ которомъ возможная область $(+\omega)$ получается какъ общая часть двухъ четырехугольниковъ, а на чертежѣ XXIII четвертый случай, въ которомъ эта область является общею частью треугольника и четырехугольника.

XXII



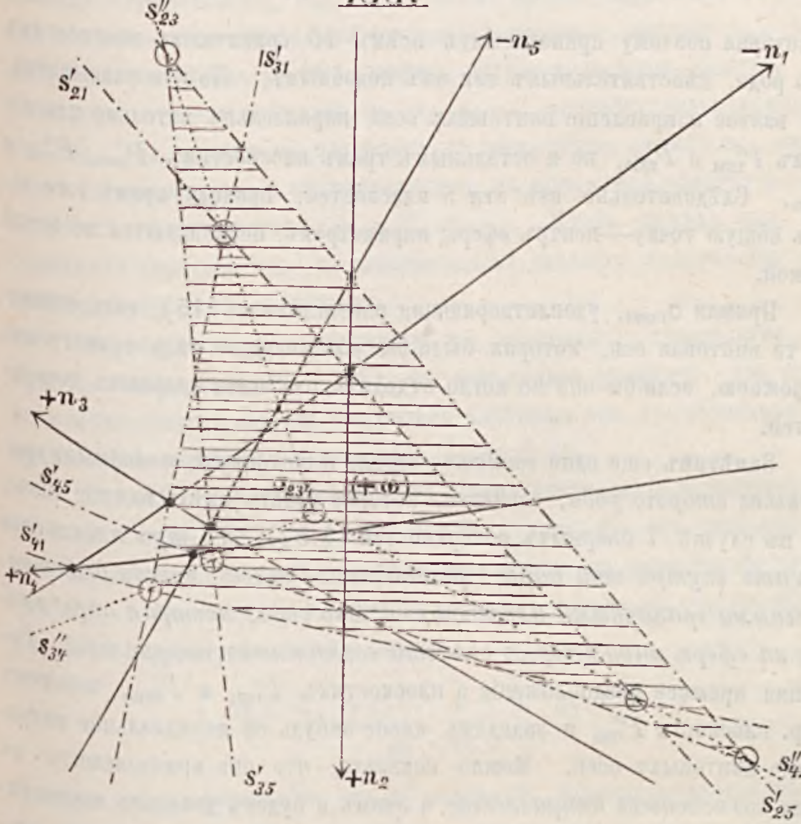
Въ послѣднемъ, изъ перечисленныхъ въ таблицѣ § 36 случаевъ, гдѣ общая область принадлежитъ двумъ треугольникамъ, она тоже будетъ всегда существовать въ дѣйствительности. Но такъ какъ треугольники, какъ это видно изъ вышеуказанной таблицы, не имѣютъ общихъ сторонъ, то нужно воспользоваться для доказательства другими соображеніями. Можно воспользоваться указанными въ § 28 свойствами плоскостей, подобныхъ граничнымъ плоскостямъ 1-го рода, которыхъ теперь у насъ имѣется четыре: S''_{23}, S''_{34}, S''_{42} и S''_{15}. Первыя три изъ этихъ плоскостей имѣютъ свойство, что онѣ пересѣкаются по одной прямой σ_{234}, причемъ эта прямая лежитъ внутри каждой изъ трехгранныхъ теперь призмъ, содержащихъ винтовыя оси, возможныя по отношенію къ каждой изъ двухъ четверокъ нормалей, взятыхъ въ отдѣльности. Откуда и видно, что эти призмы имѣютъ всегда нѣкоторую общую часть. Этотъ случай представленъ на чертежѣ XXIV.

XXIII



38. О плоскостяхъ, подобныхъ граничнымъ второго рода. Для дальнѣйшаго полезно замѣтить слѣдующія два свойства этихъ плоскостей, аналогичныя свойствамъ, указаннымъ въ §§ 14 и 17 для плоскостей, подобныхъ граничнымъ перваго рода. Въ § 32 было уже замѣчено, что кромѣ двухъ дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей второго рода существуютъ еще три плоскости имъ подобныя, но соотвѣтствующія такимъ четверкамъ нормалей, которыя не находятся въ противостояніи. *Эти три плоскости пересѣкаются по одной прямой съ двумя дѣйствительными граничными.* Пусть эти послѣднія плоскости опять будутъ P'_{1234} и P'_{2345}. Если задается направленіе винтовыхъ осей, параллельное плоскости P'_{1234}, то всѣ шесть плоскостей S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{23}, S_{24}, S_{34}, будутъ-ли онѣ дѣйствительными граничны-

XXIV



ми 1-го рода или только имъ подобными, пересѣкаются по одной прямой (§ 25), для которой

$$\delta_1 tg\,\varphi_1 = \delta_2 tg\,\varphi_2 = \delta_3 tg\,\varphi_3 = \delta_4 tg\,\varphi_4.$$

Точно также при какомъ-нибудь направленіи винтовыхъ осей, параллельномъ плоскости P'_{2345}, мы имѣемъ прямую, по которой пересѣкаются всѣ 6 плоскостей S_{23}, S_{24}, S_{25}, S_{34}, S_{35}, S_{45}; и для этой прямой

$$\delta_2 tg\,\varphi_2 = \delta_3 tg\,\varphi_3 = \delta_4 tg\,\varphi_4 = \delta_5 tg\,\varphi_5.$$

Поэтому прямая пересѣченія плоскостей P'_{1234} и P'_{2345} имѣетъ свойство, что при направленіи винтовыхъ осей, ей параллельномъ, существуетъ такая ось σ_{12345}, для которой равны между собою всѣ пять величинъ

$$\delta_1 tg\varphi_1 = \delta_2 tg\varphi_2 = \delta_3 tg\varphi_3 = \delta_4 tg\varphi_4 = \delta_5 tg\varphi_5 \tag{115}$$

и которая поэтому принадлежитъ всѣмъ 10 граничнымъ плоскостямъ 1-го рода, дѣйствительнымъ или имъ подобнымъ. Но это указываетъ, что взятое направленіе винтовыхъ осей параллельно нетолько плоскостямъ P'_{1234} и P'_{2345}, но и остальнымъ тремъ плоскостямъ P''_{1345}, P''_{1245} и P''_{1235}. Слѣдовательно всѣ эти 5 плоскостей, проходя кромѣ того черезъ общую точку—центръ сферы параметровъ, пересѣкаются по одной прямой.

Прямая σ_{12345}, удовлетворяющая равенствамъ (115), есть очевидно та винтовая ось, которая была-бы для твердаго тѣла единственно возможною, если-бы оно не могло отходить отъ пяти опорныхъ поверхностей.

Замѣтимъ еще одно *свойство трехъ плоскостей, подобныхъ граничнымъ второго рода*, свойство, которое будетъ имѣть важное значеніе въ случаѣ 7 опорныхъ поверхностей (§ 52): *всѣ три плоскости лежатъ внутри той пары вертикальныхъ угловъ между дѣйствительными граничными плоскостями 2-го рода, которая опредѣляетъ на сферѣ параметровъ области возможныхъ направленій.* Сохраняя прежнее предположеніе о плоскостяхъ P'_{1234} и P'_{2345}, возьмемъ напр. плоскость P''_{1235} и зададимъ какое-нибудь ей параллельное направленіе винтовыхъ осей. Можно показать, что оно принадлежитъ къ числу *возможныхъ направленій*; а этимъ и будетъ доказано вышеприведенное свойство. Между прямыми пучка заданнаго направленія существуетъ одна прямая, σ_{1235}, для которой

$$\delta_1 tg\varphi_1 = \delta_2 tg\varphi_2 = \delta_3 tg\varphi_3 = \delta_5 tg\varphi_5 \tag{116}$$

и по которой пересѣкаются плоскости S_{12}, S_{13}, S_{15}, S_{23}, S_{25} и S_{35}. Покажемъ, что она принадлежитъ къ числу *возможныхъ винтовыхъ осей.* Заданное направленіе винтовыхъ осей можетъ попасть на сферѣ параметровъ въ различныя области, соотвѣтствующія тому или другому сочетанію знаковъ величинъ (113). Положимъ сначала, что оно попало въ область, удовлетворяющую неравенствамъ (114), и пусть для прямой σ_{1235} $\delta_4 tg\varphi_4$ больше величинъ (116). Тогда, беря четыре нормали n_1,

n_2, n_3, n_4, соотвѣтственно плоскости P'_{1234}, мы получаемъ на плоскости, перпендикулярной къ заданному направленію винтовыхъ осей, изображеніе возможной области $(+\omega)$ въ видѣ треугольника, ограниченнаго слѣдами плоскостей S'_{14}, S'_{24}, S'_{34} и слѣдъ прямой σ_{1235} получается внутри ея, такъ какъ эта прямая совпадаетъ теперь съ прямою σ_{123}, которая, какъ мы знаемъ (§ 28), лежитъ внутри возможной области. Беря другую четверку нормалей, n_2, n_3, n_4, n_5, соотвѣтствующую плоскости P'_{2345}, мы придемъ къ подобному-же заключенію: прямая σ_{1235} совпадаетъ съ прямою σ_{235} и поэтому лежитъ въ возможной области $(+\omega)$, ограниченной плоскостями S'_{24}, S'_{34} и S'_{54}. Итакъ прямая σ_{1235} есть возможная винтовая ось, а слѣдовательно заданное направленіе тоже принадлежитъ къ возможнымъ.

Къ подобному-же заключенію мы приходимъ, предполагая, что $\delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4$ меньше величинъ (116), съ тою только разницею, что теперь возможная область будетъ заключать винтовыя оси съ обратнымъ направленіемъ вращенія $(-\omega)$. См. § 4 и § 28.

Мы сейчасъ предполагали, что взятое направленіе удовлетворяетъ неравенствамъ (114), т. е. что для него уголъ (n, ω) какъ разъ съ тою нормалью (n_4) тупой, которая не входитъ въ опредѣленіе плоскости P''_{1235}. Положимъ, что наше направленіе попало въ другую область на сферѣ параметровъ, пусть напр.

$$q_1 \geqq 0, \quad q_2 \geqq 0, \quad q_4 \geqq 0, \quad q_5 \geqq 0,$$

$$q_3 \leqq 0.$$

Разница теперь будетъ та, что на плоскости, перпендикулярной къ этому направленію, слѣдъ прямой σ_{1235} окажется не внутри возможной области, а на ея границѣ. Въ самомъ дѣлѣ, теперь по отношенію къ нормалямъ n_1, n_2, n_3, n_4 мы будемъ имѣть возможную область, ограниченную слѣдами плоскостей S'_{13}, S'_{23} и S'_{43}; и слѣдъ прямой σ_{1235}, совпадающей опять съ прямою σ_{123}, будетъ въ вершинѣ треугольника, какъ въ точкѣ пересѣченія слѣдовъ плоскостей S'_{13} и S'_{23}. Но эта точка будетъ также вершиною и другого треугольника, опредѣляющаго возможную область того-же знака ω по отношенію къ нормалямъ n_2, n_3, n_4, n_5; такъ какъ эта область ограничена слѣдами плоскостей S'_{23}, S'_{43}, S'_{53}, а плоскости S'_{23}, S'_{53} и S'_{13} пересѣкаются по одной прямой, благодаря равенствамъ (116).

Подобные-же результаты получатся, когда возможная область опредѣляется общею частью не двухъ треугольниковъ, а двухъ четырехугольниковъ или треугольника и четырехугольника, и могутъ быть показаны нетолько для плоскости P''_{1235}, но и для двухъ другихъ плоскостей, подобныхъ граничнымъ 2-го рода, P''_{1245} и P''_{1345}.

39. Общее заключеніе. Главнѣйшіе результаты этой главы можно формулировать слѣдующимъ образомъ.

1) Направленія пяти нормалей къ опорнымъ поверхностямъ могутъ быть взяты такъ, что области возможныхъ винтовыхъ осей всякаго даннаго направленія будутъ замкнутыми.

2) При этомъ всѣ направленія, по которымъ возможны винтовыя оси, заключены на сферѣ параметровъ между двумя граничными плоскостями 2-го рода, опредѣленнымъ образомъ выбранными между 5 такими плоскостями вообще возможными.

3) Остальныя три изъ предыдущихъ плоскостей, пересѣкаясь съ первыми двумя по одной прямой, проходятъ внутри пары вертикальныхъ угловъ, опредѣляющихъ *возможныя* направленія.

4) Для всякаго возможнаго направленія, независимо отъ того, къ какому роду винтовыхъ осей, 2-му или 3-му, оно принадлежитъ, непремѣнно существуетъ замкнутая область возможныхъ винтовыхъ осей.

ГЛАВА V.

Граничныя плоскости второго рода въ случаѣ шести опорныхъ поверхностей.

40. О числѣ возможныхъ дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей. Не дѣлая въ дальнѣйшемъ строгаго подраздѣленія винтовыхъ осей на такія группы, какъ это было сдѣлано въ §§ 4, 13, 23 и 32, будемъ лишь ограничиваться предположеніемъ, что между шестью нормалями къ опорнымъ поверхностямъ существуетъ четверка нормалей, находящихся въ противостояніи; это необходимо для того, чтобы при всякомъ возможномъ направленіи осей область ихъ была замкнутою (§ 24). На основаніи этого величины

$$q_1,\quad q_2,\quad q_3,\quad q_4,\quad q_5,\quad q_6 \tag{117}$$

не могутъ быть всѣ одного знака. Число дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей 1-го рода, изъ числа всѣхъ 15 такихъ вообще возможныхъ плоскостей, зависитъ отъ того, сколько изъ величинъ (117) имѣютъ знакъ, противуположный знаку остальныхъ: въ случаѣ одной такой величины получаемъ 5, въ случаѣ двухъ—8 и въ случаѣ трехъ — 9 дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей 1-го рода.

Не останавливаясь пока на этихъ плоскостяхъ, обратимся къ граничнымъ плоскостямъ *второго рода*, на изученіи которыхъ основывается главнымъ образомъ вопросъ объ уничтоженіи возможныхъ винтовыхъ осей. Такъ какъ граничная плоскость 2-го рода опредѣляется четырьмя нормалями, то всѣхъ такихъ граничныхъ плоскостей можно теперь себѣ представить 15. Понятно изъ соображеній, аналогичныхъ тѣмъ, которыя приводилось по поводу пяти опорныхъ поверхностей (§ 32), что не всѣ эти плоскости будутъ *дѣйствительными граничными*. Такихъ плоскостей можетъ быть *или три или четыре*. Пусть будутъ n_i, n_k, n_l, n_m четыре нормали, находящіяся въ противостояніи, и P'_{iklm} соотвѣтствующая имъ дѣйствительная граничная плоскость 2-го рода. Присоединимъ пятую нормаль n_r и по правилу, указанному въ § 32, выберемъ изъ 4 новыхъ вообще мыслимыхъ граничныхъ плоскостей второго рода ту, которая является дѣйствительною; пусть она будетъ P'_{klmr}. Введемъ теперь шестую нормаль n_s и опредѣлимъ: 1) ту изъ четырехъ мыслимыхъ граничныхъ плоскостей 2-го рода, которая является дѣйствительною въ системѣ нормалей

$$n_i, \quad n_k, \quad n_l, \quad n_m, \quad n_s, \tag{118}$$

и 2) ту изъ четырехъ граничныхъ плоскостей второго рода, которая играетъ роль дѣйствительной въ системѣ нормалей

$$n_k, \quad n_l, \quad n_m, \quad n_r, \quad n_s. \tag{119}$$

Здѣсь могутъ быть два случая. Въ опредѣленіи третьей искомой плоскости, кромѣ обязательнаго участія n_s, могутъ участвовать три нормали, n_k, n_l, n_m общія въ первыхъ двухъ плоскостяхъ: тогда мы получимъ плоскость P'_{klms} и понятно, что четвертая искомая плоскость будетъ съ нею совпадать, такъ какъ теперь въ пятеркѣ нормалей (119) n_s находится въ противостояніи съ n_k, n_l, n_m, а нормаль n_r при этомъ участвовать не можетъ, потому-что по предположенію сама находится въ противостояніи съ тѣми-же тремя нормалями. Итакъ мы имѣемъ въ этомъ случаѣ всего три дѣйствительныхъ граничныхъ плоскости

$$P'_{iklm}, \quad P'_{klmr}, \quad P'_{klms}. \tag{120}$$

Второй случай будетъ тотъ, когда въ опредѣленіи третьей плоскости участвуетъ иная тройка изъ числа первыхъ четырехъ нормалей, чѣмъ въ опредѣленіи второй плоскости P'_{klmr}. Положимъ, что участвуютъ нормали n_i, n_l, n_m и даютъ плоскость P'_{ilms}; тогда мы получаемъ и четвертую плоскость, отличную отъ предыдущей, такъ какъ между нормалями (119), служащими для ея опредѣленія, не находится нормали n_i. Пусть эта плоскость будетъ P'_{lmrs}; тогда четырьмя плоскостями

$$P'_{iklm}, \quad P'_{klmr}, \quad P'_{ilms}, \quad P'_{lmrs} \tag{121}$$

исчерпывается вся ихъ система. Дѣйствительно, всякая другая плоскость, напр. P_{ikls} будетъ уже подобною граничной, такъ какъ нормали n_i, n_k, n_l, n_s не находятся уже въ противостояніи.

41. Свойства четверокъ нормалей, опредѣляющихъ дѣйствительныя граничныя плоскости 2-го рода. Для дальнѣйшаго весьма существенно замѣтить себѣ, сколько разъ какія нормали повторяются при опредѣленіи этихъ плоскостей. Въ случаѣ трехъ дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей три значка $(k\,l\,m)$ входятъ въ обозначеніе всѣхъ трехъ плоскостей; потому-что существуютъ три нормали, съ которыми находятся въ противостояніи всѣ три остальныя.

Въ случаѣ четырехъ дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей 2-го рода мы всегда найдемъ, что *два значка входятъ въ обозначеніе всѣхъ четырехъ плоскостей, а остальные четыре значка встрѣчаются по два раза.* Чтобы убѣдиться, что другого рода комбинаціи значковъ не возможны, разсмотримъ, какіе случаи могутъ вообще встрѣтиться при послѣдовательномъ введеніи въ разсмотрѣніе пятой и шестой нормали. Положимъ, мы первую плоскость P'_{iklm} выбрали. Вводя пятую нормаль n_r, мы получаемъ плоскость, которая будетъ имѣть одно изъ слѣдующихъ обозначеній:

$$P'_{klmr}, \quad P'_{ilmr}, \quad P'_{ikmr}, \quad P'_{iklr};$$

пусть искомая плоскость будетъ P'_{klmr}. Вводя шестую нормаль, мы должны съ нею комбинировать три изъ четырехъ первыхъ нормалей и три изъ нормалей, опредѣляющихъ вторую граничпую плоскость. Исключая случай, когда эти двѣ тройки нормалей совпадаютъ, случай плоскости P_{klms}, приводящій только къ тремъ дѣйствительнымъ граничнымъ плоскостямъ 2-го рода, мы получаемъ одну изъ слѣдующихъ трехъ плоскостей:

$$P'_{ilms}, \quad P'_{ikms}, \quad P'_{ikls}.$$

Четвертая граничная плоскость зависитъ отъ нормали n_s и трехъ нормалей изъ числа четырехъ, опредѣляющихъ вторую граничную плоскость, т. е. она будетъ имѣть одно изъ слѣдующихъ трехъ обозначеній, въ которыя обязательно долженъ входить значекъ (r), ибо плоскость P_{klms} мы уже исключили изъ разсмотрѣнія:

$$P'_{lmrs}, \quad P'_{kmrs}, \quad P'_{klrs}.$$

Такимъ образомъ мы получаемъ пока 9 случаевъ комбинацій шести значковъ по четыре:

1)	**(iklm)**	**(klmr)**	**(ilms)**	**(lmrs)**	(122)
2)	$(iklm)$	$(klmr)$	$(ilms)$	$(kmrs)$	(123)
3)	$(iklm)$	$(klmr)$	$(ilms)$	$(klrs)$	
4)	$(iklm)$	$(klmr)$	$(ikms)$	$(lmrs)$	
5)	**(iklm)**	**(klmr)**	**(ikms)**	**(kmrs)**	(124)
6)	$(iklm)$	$(klmr)$	$(ikms)$	$(klrs)$	
7)	$(iklm)$	$(klmr)$	$(ikls)$	$(lmrs)$	
8)	$(iklm)$	$(klmr)$	$(ikls)$	$(kmrs)$	
9)	**(iklm)**	**(klmr)**	**(ikls)**	**(klrs)**	(125)

Но изъ нихъ въ дѣйствительности возможны только три. Выборъ дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей не можетъ зависѣть отъ того порядка, въ которомъ мы беремъ четверки опредѣляющихъ ихъ нормалей; ввиду этого невозможность остальныхъ шести случаевъ станетъ очевидною, если мы будемъ тѣ-же граничныя плоскости опредѣлять въ другомъ порядкѣ, чѣмъ это сдѣлано въ вышеприведенной таблицѣ. Разсмотримъ для примѣра 2-й случай (123) и начнемъ съ четверки нормалей со значками $(kmrs)$. Введя пятую нормаль n_i, мы должны для второй граничной плоскости получить одно изъ слѣдующихъ четырехъ обозначеній:

$$(imrs),\quad (ikrs),\quad (ikms),\quad (ikmr);$$

между тѣмъ такой комбинаціи въ ряду (123) не встрѣчается. Подобное-же мы увидимъ въ 3, 4, 6, 7 и 8 случаяхъ. Въ случаяхъ-же 1, 5 и 9 опредѣленіе граничной плоскости не обусловливается порядкомъ, въ которомъ мы къ этому приступаемъ, и эти случаи, въ которыхъ значки отмѣчены жирнымъ шрифтомъ, и суть единственно возможные.

42. Аналитическій признакъ для выбора дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей 2-го рода. Для этого выбора мы можемъ поступать аналогично тому, какъ это дѣлалось въ § 34 въ случаѣ пяти опорныхъ поверхностей. Для того, чтобы плоскость P_{iklm} была дѣйствительною граничною, должны быть одного знака величины

$$V_{klm},\quad V_{lim},\quad V_{ikm},\quad V_{lki}. \tag{126}$$

Предположимъ, что существуютъ только три дѣйствительныя граничныя плоскости (120). Въ первой изъ нихъ, для удобства сравненія съ остальными, переставимъ значки, написавъ P'_{klmi} вмѣсто P'_{iklm}. Тогда для этихъ плоскостей необходимое и достаточное условіе будетъ состоять въ томъ, чтобы 12 величинъ, изъ которыхъ 10 различны,

$$\begin{array}{llll} V_{mlk}, & V_{lik}, & V_{imk}, & V_{lmi}, \\ (V_{mlk}), & V_{lmr}, & V_{mkr}, & V_{klr}, \\ (V_{mlk}), & V_{lms}, & V_{mks}, & V_{kls}, \end{array} \tag{127}$$

были одного знака.

Когда существуютъ четыре дѣйствительныхъ граничныхъ плоскости (121), то существуютъ подобныя-же условія относительно 16 величинъ, изъ которыхъ впрочемъ только 12 различны. Чтобы удобнѣе ихъ представить, переставимъ въ выраженіяхъ (121) значки слѣдующимъ образомъ:

$$P'_{iklm},\quad P'_{rklm},\quad P'_{islm},\quad P'_{rslm}. \tag{128}$$

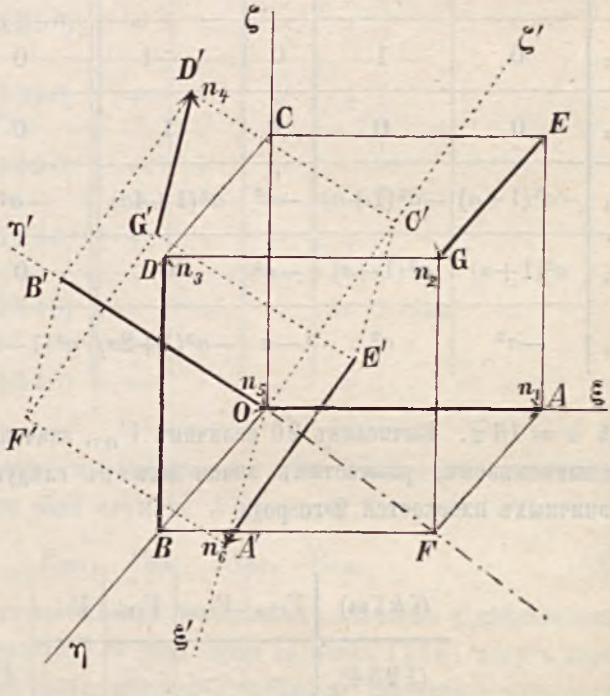
Тогда можно видѣть, что нетолько каждая четверка въ отдѣльности, но и всѣ 16 величинъ

$$\begin{array}{cccc} V_{klm}, & V_{lim}, & V_{ikm}, & V_{lki}, \\ (V_{klm}), & V_{lrm}, & V_{rkm}, & V_{lkr}, \\ V_{slm}, & (V_{lim}), & V_{ism}, & V_{lsi}, \\ (V_{slm}), & (V_{lrm}), & V_{rsm}, & V_{lsr} \end{array} \tag{129}$$

будутъ одного знака.

На практикѣ пужно опредѣлить знаки всѣхъ 20 величинъ вида V_{ikl}, написать обозначенія всѣхъ 15 граничныхъ плоскостей второго рода и выбрать тѣ три или четыре изъ этихъ плоскостей, которымъ соотвѣтствуютъ четверки величинъ (126) одного и того-же знака. Послѣ этого, перестановкою значковъ у символовъ найденныхъ плоскостей, можно достигнуть того, что нетолько каждая четверка величинъ (126), но и всѣ 10 величинъ (127) или 12 величинъ (129) будутъ одного знака.

XXV



Для поясненія разсмотримъ слѣдующій примѣръ. Нормали n_1, n_2 и n_3 взяты такъ, какъ это сдѣлано на примѣрѣ § 34. Далѣе представимъ себѣ координатныя оси повернутыми около начала координатъ такъ, чтобы новое ихъ положеніе относительно стараго опредѣлялось Эйлеровыми углами

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \psi = \frac{\pi}{4}, \quad \theta = \frac{\pi}{4};$$

замѣтимъ при этомъ (черт. XXV) новое положеніе $OA'F'B'D'C'E'G'$ куба $OAFBDCEG$ и нормали n_4, n_5, n_6 направимъ по ребрамъ его $G'D'$, $B'O'$ и $E'A'$ противуположно новымъ направленіямъ координатныхъ осей. Относительно прежняго положенія координатныхъ осей координаты шести нормалей будутъ выражаться слѣдующимъ образомъ:

	ξ	η	ζ	λ	μ	ν
n_1	1	0	0	0	0	0
n_2	0	1	0	-1	0	1
n_3	0	0	1	1	0	0
n_4	$-a^2(1-a)$	$-a^2(1+a)$	$-a^2$	$a^3(1+4a)$	$-a^3$	$-2a^4(1-2a)$
n_5	$a^2(1+a)$	$a^2(1-a)$	$-a^2$	0	0	0
n_6	$-a^2$	a^2	$-a$	$-a^3(1+2a)$	$a^3(1-2a)$	$2a^4$

гдѣ $a = 1/\sqrt{2}$. Вычисливъ 20 величинъ V_{ikl}, значенія которыхъ здѣсь не выписываемъ, размѣстимъ знаки ихъ въ слѣдующей таблицѣ 15 граничныхъ плоскостей 2-го рода:

$(i\,k\,l\,m)$	V_{klm}	V_{lim}	V_{ikm}	V_{lki}	
(1234)	−	−	−	−	P'_{1234}
(1235)	+	+	−	−	
(1236)	−	+	−	−	
(2345)	+	+	+	+	P'_{2345}

$(i\,k\,l\,m)$	V_{klm}	V_{llm}	V_{ikm}	V_{lki}	
(1345)	+	−	−	−	
(1245)	−	−	−	+	
(3456)	−	−	−	−	P'_{3456}
(2456)	−	−	+	+	
(2356)	+	−	−	−	
(1256)	+	−	−	+	
(1356)	+	−	−	+	
(1456)	−	−	+	−	
(1246)	+	−	−	+	
(1346)	−	−	−	−	P'_{1346}
(2346)	−	−	−	+	

Изъ этой таблицы мы видимъ, что дѣйствительными граничными плоскостями второго рода служатъ 4 плоскости:

$$P'_{1234}, \quad P'_{2345}, \quad P'_{3456}, \quad P'_{1346}. \tag{130}$$

Полезно замѣтить, что при перестановкѣ значковъ у дѣйствительной граничной плоскости 2-го рода знаки величинъ (126) могутъ перемѣниться только всѣ сразу; при перестановкѣ-же значковъ у плоскости, подобной граничной 2-го рода, могутъ перемѣниться или знаки всѣхъ величинъ (126) или двухъ изъ нихъ, но во всякомъ случаѣ только такъ, что никогда не получится ихъ однозначности. Такъ-что *выборъ дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей не можетъ зависѣть отъ того, въ какомъ порядкѣ будутъ взяты шесть значковъ 1, 2, 3, 4, 5, 6.*

Теперь, чтобы получить однозначность всѣхъ величинъ (129), остается только переставить два смежныхъ значка у P'_{2345}. Въ дальнѣйшемъ мы будемъ, въ случаѣ 4 дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей 2-го рода, разсматривать плоскости

$$P'_{1234},\quad P'_{2435},\quad P'_{3456},\quad P'_{1346} \tag{131}$$

и помнить, что при этомъ всѣ величины (129) отрицательныя.

43. Область возможныхъ направленій въ случаѣ трехъ дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей 2-го рода. Для этого случая область возможныхъ направленій винтовыхъ осей представляется на сферѣ параметровъ сферическимъ треугольникомъ. Она обращается въ точку, если всѣ три плоскости

$$P'_{klmi},\quad P'_{klmr},\quad P'_{klms} \tag{132}$$

пересѣкаются по одной прямой. Въ § 38 было замѣчено, что если задано направленіе винтовыхъ осей, параллельное одновременно двумъ граничнымъ плоскостямъ 2-го рода, напр. P_{klmi} и P_{klms}, то всѣ 10 граничныхъ плоскостей 1-го рода, соотвѣтствующія 5 нормалямъ n_k, n_l, n_m, n_i и n_r, пересѣкаются по одной прямой σ_{klmir}, удовлетворяющей условіямъ

$$\delta_k tg\,\varphi_k = \delta_l tg\,\varphi_l = \delta_m tg\,\varphi_m = \delta_i tg\,\varphi_i = \delta_r tg\,\varphi_r \tag{133}$$

и представляющей собою ту винтовую ось, которая была-бы для твердаго тѣла единственно возможною, если-бы оно не могло отходить отъ пяти поверхностей. Отсюда слѣдуетъ, что если три плоскости (132) пересѣкаются по одной прямой и если данъ параллельный ей пучекъ винтовыхъ осей, то всѣ 15 граничныхъ плоскостей 1-го рода пересѣкаются по одной прямой σ_{klmirs}, для которой

$$\delta_k tg\,\varphi_k = \delta_l tg\,\varphi_l = \delta_m tg\,\varphi_m = \delta_i tg\,\varphi_i = \delta_r tg\,\varphi_r = \delta_s tg\,\varphi_s, \tag{134}$$

и которая тоже представляла-бы собою единственную возможную для твердаго тѣла винтовую ось, если-бы оно не могло отходить отъ 6 опорныхъ поверхностей. Конечно, существованіе такой оси только тогда и возможно, когда плоскости (132) пересѣкаются по одной прямой; но съ другой стороны извѣстно, что твердое тѣло, прикасаясь къ 6 поверхностямъ, только тогда сохраняетъ возможное винтовое перемѣщеніе, когда нормали къ этимъ поверхностямъ въ точкахъ касанія къ нимъ твердаго тѣла принадлежатъ одному и тому-же комплексу 1-го порядка, и что аналитическое условіе для этого состоитъ въ томъ, чтобы *опредѣлитель, составленный изъ координатъ шести нормалей,*

$$D = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 & \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \\ \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 & \lambda_4 & \mu_4 & \nu_4 \\ \xi_5 & \eta_5 & \zeta_5 & \lambda_5 & \mu_5 & \nu_5 \\ \xi_6 & \eta_6 & \zeta_6 & \lambda_6 & \mu_6 & \nu_6 \end{vmatrix} \qquad (135)$$

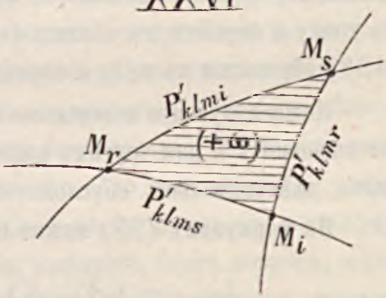
равнялся нулю. Итакъ

$$D = 0 \qquad (136)$$

есть условіе пересѣченія трехъ плоскостей (132) по одной прямой.

Когда этотъ опредѣлитель не равенъ нулю, что̀ мы и будемъ въ дальнѣйшемъ предполагать, то *знакъ его опредѣляетъ направленіе вращенія около возможныхъ винтовыхъ осей.* Чтобы это показать, вспомнимъ признакъ, по которому различаются на сферѣ параметровъ области $(+\omega)$ и $(-\omega)$ (§§ 27 и 31), и приложимъ его къ такимъ направленіямъ винтовыхъ осей, которыя параллельны ребрамъ трехграннаго угла, образуемаго прямыми пересѣченія трехъ плоскостей (132). Въ случаѣ области $(+\omega)$ каждая вершина сферическаго треугольника, заключающаго эту область, лежитъ по отношенію къ непроходящей черезъ нее граничной плоскости 2-го рода въ области $(+\omega)$ (черт. XXVI). Возьмемъ точку M_i; для ея координатъ (ξ, η, ζ) имѣемъ уравненія:

XXVI



$$P'_{klmr} = 0, \quad P'_{klms} = 0; \qquad (137)$$

и эти координаты, подставленныя въ P'_{klmi} должны, согласно формулѣ (111), удовлетворить неравенству

$$V_{klm} P'_{klmi} < 0,$$

а для обратнаго направленія, соотвѣтствующаго области $(-\omega)$, — неравенству обратному.

По выполненіи дѣйствій, результатъ подстановки указанныхъ координатъ въ P'_{klmi} даетъ выраженіе, числитель котораго есть опредѣлитель

$$A^{klm}_{irs} = \begin{vmatrix} L_{klmi}, & M_{klmi}, & N_{klmi} \\ L_{klmr}, & M_{klmr}, & N_{klmr} \\ L_{klms}, & M_{klms}, & N_{klms} \end{vmatrix}, \tag{138}$$

а знаменатель есть квадратный корень изъ суммы квадратовъ опредѣлителей второго порядка, составленныхъ изъ коэффиціентовъ уравненій (137). Произведенное ниже вычисленіе опредѣлителя (138) въ координатахъ шести нормалей покажетъ намъ, что онъ отличается только множителемъ отъ опредѣлителя D [1]). Тотъ-же самый опредѣлитель (138) получается, если вмѣсто точки M_i разсматривать M_r или M_s. Если теперь одну изъ нормалей n_i, n_r, n_s, напр. n_i, перемѣщать параллельно самой себѣ, то плоскость P'_{klmi}, коэффиціенты которой содержатъ координаты λ_i, μ_i и ν_i, будетъ поворачиваться около центра сферы параметровъ, а остальныя двѣ плоскости будутъ оставаться безъ измѣненія; при этомъ область $(+\omega)$ (фиг. XXV) можетъ обратиться въ точку и перейти въ область $(-\omega)$. Въ то-же время опредѣлитель (138) обратится въ нуль и перемѣнитъ свой знакъ.

Нижеслѣдующее вычисленіе этого опредѣлителя, которое мы должны выполнить и для другихъ цѣлей, покажетъ намъ, что эта перемѣна знака дѣйствительно обусловливается перемѣною знака опредѣлителя D. По формуламъ (95) можно написать:

$$\begin{aligned} L_{klmi} &= \lambda_k V_{lmi} + \lambda_l V_{mki} + \lambda_m V_{kli} + \lambda_i V_{mlk}, \\ M_{klmi} &= \mu_k V_{lmi} + \mu_l V_{mki} + \mu_m V_{kli} + \mu_i V_{mlk}, \\ N_{klmi} &= \nu_k V_{lmi} + \nu_l V_{mki} + \nu_m V_{kli} + \nu_i V_{mlk} \end{aligned} \tag{139}$$

и подобнымъ-же образомъ представить остальные 6 элементовъ опредѣ-

---

[1]) Формула (142).

лителя (138). Разложивъ послѣ этого этотъ опредѣлитель на двадцать опредѣлителей вида

$$\begin{vmatrix} \lambda_k & \lambda_l & \lambda_m \\ \mu_k & \mu_l & \mu_m \\ \nu_k & \nu_l & \nu_m \end{vmatrix} = B_{klm}, \tag{140}$$

при которыхъ множителями стоятъ произведенія величинъ V_{lmi}, V_{mki}, ... по три или суммы такихъ произведеній и дѣлая наконецъ въ членахъ послѣдняго рода рядъ приведеній при помощи зависимости, имѣющей своею схемою:

$$V_{ikl}V_{lmr} - V_{ilm}V_{klr} = V_{klm}V_{lir}, \tag{141}$$

находимъ:

$$A_{irs}^{klm} = V_{123}{}^2 D. \tag{142}$$

44. Область возможныхъ направленій въ случаѣ четырехъ дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей 2-го рода. Что въ случаѣ *трехъ* дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей 2-го рода область возможныхъ направленій на сферѣ параметровъ не можетъ совсѣмъ исчезнуть, это очевидно. Нельзя того-же прямо сказать въ случаѣ *четырехъ* граничныхъ плоскостей; но изслѣдованіе покажетъ, что *и въ этомъ случаѣ полное исчезаніе области возможныхъ направленій не достижимо.* Вопросъ этотъ могъ-бы быть разсмотрѣнъ путемъ, аналогичнымъ тому, котораго мы придерживались въ случаѣ четырехъ опорныхъ поверхностей, изслѣдуя область возможныхъ винтовыхъ осей *заданнаго направленія*, когда она зависитъ отъ четырехъ граничныхъ плоскостей *1-го рода* (§ 29); только теперь разсматриваемая область находится не на плоскости а на сферѣ параметровъ. Но вмѣсто того, чтобы разбирать этотъ вопросъ, опредѣляя, какъ это дѣлалось раньше, относительныя положенія прямыхъ пересѣченія четырехъ граничныхъ плоскостей, проще воспользоваться другимъ пріемомъ, по существу тожественнымъ съ предыдущимъ и тоже уже примѣнявшемся въ случаѣ четырехъ опорныхъ поверхностей (§ 24).

Четыре граничныхъ плоскости второго рода раздѣляютъ сферу параметровъ въ общемъ случаѣ на 14 областей; такъ-что изъ 16 возможныхъ сочетаній знаковъ неравенствъ, отъ которыхъ зависитъ возможность или невозможность направленій винтовыхъ осей, два сочетанія отсутствуютъ [1]). Пусть будутъ для краткости

$$\left.\begin{aligned} P_i &= a_i\xi + b_i\eta + c_i\zeta = 0, \\ P_k &= a_k\xi + b_k\eta + c_k\zeta = 0, \\ P_l &= a_l\xi + b_l\eta + c_l\zeta = 0, \\ P_m &= a_m\xi + b_m\eta + c_m\zeta = 0 \end{aligned}\right\} \tag{143}$$

уравненія четырехъ граничныхъ плоскостей 2-го рода и пусть будутъ неравенства

$$P_i > 0, \quad P_k > 0, \quad P_l > 0, \quad P_m > 0 \tag{144}$$

или неравенства имъ обратныя, условія существованія на сферѣ параметровъ области возможныхъ направленій винтовыхъ осей. Чтобы такой области на самомъ дѣлѣ не существовало, необходимо и достаточно, чтобы нормали къ плоскостямъ (143), направленныя каждая въ ту сторону, для которой оправдывается одно изъ неравенствъ (144), находились *въ противостояніи.* Указанный для этого въ § 24 признакъ можно, въ примѣненіи къ настоящему случаю, формулировать слѣдующимъ образомъ. Разсмотримъ опредѣлители вида

$$U_{klm} = \begin{vmatrix} a_k & a_l & a_m \\ b_k & b_l & b_m \\ c_k & c_l & c_m \end{vmatrix};$$

тогда четыре такихъ величины U_{klm}, U_{lim}, U_{ikm}, U_{lki} должны быть одного знака.

Остается теперь разсмотрѣть, выполнимо-ли это требованіе по отношенію къ коэффиціентамъ четырехъ граничныхъ плоскостей 2-го рода. Не ограничивая задачи, мы можемъ, ради наглядности, изучать случай существованія плоскостей (131), такъ какъ подъ этотъ типъ обозначеній подходятъ, какъ это было выяснено въ § 42, всѣ другіе случаи того-же рода. Въ такомъ случаѣ мы имѣемъ:

---

[1]) Для сравненія: [§ 21] и § 24.

$$U_{klm} = \begin{vmatrix} L_{2435} & L_{3456} & L_{1346} \\ M_{2435} & M_{3456} & M_{1346} \\ N_{2435} & N_{3456} & N_{1346} \end{vmatrix},$$

$$U_{lim} = \begin{vmatrix} L_{3456} & L_{1234} & L_{1346} \\ M_{3456} & M_{1234} & M_{1346} \\ N_{3456} & N_{1234} & N_{1346} \end{vmatrix},$$

$$U_{ikm} = \begin{vmatrix} L_{1234} & L_{2435} & L_{1346} \\ M_{1234} & M_{2435} & M_{1346} \\ N_{1234} & N_{2435} & N_{1346} \end{vmatrix},$$

$$U_{lki} = \begin{vmatrix} L_{3456} & L_{2435} & L_{1234} \\ M_{3456} & M_{2435} & M_{1234} \\ N_{3456} & N_{2435} & N_{1234} \end{vmatrix}.$$

Разлагая элементы этихъ опредѣлителей на суммы четырехъ членовъ по схемѣ (139), разлагая каждый опредѣлитель на сумму 20 членовъ, содержащихъ множителями выраженія вида (140), и пользуясь опять формулами приведенія, имѣющими своею схемою формулу (141), получимъ:

$$U_{klm} = V_{435}\,V_{346}\,D, \tag{145}$$

$$U_{lim} = V_{346}\,V_{134}\,D, \tag{146}$$

$$U_{ikm} = V_{134}\,V_{243}\,D, \tag{147}$$

$$U_{lki} = V_{243}\,V_{435}\,D. \tag{148}$$

По схемѣ (129) и по таблицѣ на стр. 78 и 79 имѣемъ теперь неравенства:

$$V_{435}\,V_{346} > 0,$$

$$V_{346}\,V_{134} < 0,$$

$$V_{134}\,V_{243} > 0,$$

$$V_{243}\,V_{435} < 0,$$

которыя показываютъ, что величины U_{klm}, U_{lim}, U_{ikm}, U_{lki} не могутъ быть одного знака. Поэтому исчезаніе областей $(+\omega)$ и $(-\omega)$ на сферѣ параметровъ не достижимо [1]).

---

[1]) Относительно принятаго здѣсь порядка значковъ см. конецъ § 42.

Подобное-же заключеніе можно сдѣлать въ остальныхъ случаяхъ (124) и (125), въ которыхъ вмѣсто плоскостей (131) являются плоскости:

$$P'_{1234},\quad P'_{2435},\quad P'_{2456},\quad P'_{1246}$$

или плоскости

$$P'_{1234},\quad P'_{2435},\quad P'_{2356},\quad P'_{1236}.$$

45. О случаѣ $D = 0$. Въ § 43 было уже замѣчено, что если $D = 0$, то *три* плоскости (132), существованіе которыхъ тамъ предполагалось, пересѣкаются по одной прямой, и при направленіи винтовыхъ осей, параллельномъ этой прямой, всѣ 15 граничныхъ плоскостей 1-го рода пересѣкаются по одной прямой σ_{123456}. Подобное-же мы находимъ и въ случаѣ § 44: при $D = 0$ всѣ *четыре* плоскости (131) пересѣкаются по одной прямой и при параллельномъ ей направленіи винтовыхъ осей всѣ 15 граничныхъ плоскостей пересѣкаются по одной прямой σ_{123456}. Кромѣ указаннаго въ § 43 значенія этой прямой для случая обязательнаго касанія твердаго тѣла къ опорнымъ поверхностямъ, она имѣетъ еще слѣдующее значеніе. Такъ какъ области $(+\omega)$ и $(-\omega)$ на сферѣ параметровъ обратились теперь въ точки (лежащія на концахъ діаметра), то осталось возможнымъ только одно опредѣленное направленіе винтовыхъ осей; но такъ какъ для этого направленія граничныя плоскости 1-го рода пересѣкаются по одной прямой σ_{123456}, а мы съ самаго начала предполагаемъ, что направленія нормалей къ опорнымъ поверхностямъ удовлетворяютъ условію замкнутости областей возможныхъ винтовыхъ осей всякаго ихъ направленія, то прямая σ_{123456} является теперь единственною возможною осью. По свойству граничныхъ плоскостей 1-го рода (§ 4), и параметръ на этой оси можетъ имѣть только одно опредѣленное значеніе, причемъ вращеніе, входящее въ составъ винтового перемѣщенія, возможно въ обѣ стороны. Соединяя сказанное здѣсь съ сказаннымъ въ § 43, находимъ:

Для того, чтобы при помощи шести опорныхъ поверхностей заставить твердое тѣло имѣть винтовую скорость около одной опредѣленной оси съ опредѣленнымъ параметромъ, необходимо и достаточно, чтобы 1) нормали къ опорнымъ поверхностямъ въ точкахъ касанія къ нимъ твердаго тѣла принадлежали одному и тому-же комплексу 1-го порядка и 2) *чтобы четыре изъ этихъ нормалей находились въ противостояніи.*

46. О непремѣнномъ существованіи возможныхъ винтовыхъ осей для всякаго возможнаго направленія. Чтобы рѣшить вопросъ о томъ, существуетъ-ли для всякаго возможнаго направленія и область возможныхъ винтовыхъ осей, нужно, подобно тому, какъ это сдѣлано въ § 35 и въ § 36 для случая пяти опорныхъ поверхностей, опредѣлить, всегда-ли имѣютъ общую часть замкнутыя области треугольниковъ или четырехугольниковъ, которыя соотвѣтствуютъ каждой отдѣльной четверкѣ нормалей, служащей для опредѣленія дѣйствительной граничной плоскости 2-го рода. Смотря по числу этихъ послѣднихъ, область возможныхъ осей можетъ являться общею частью или 3 или 4 фигуръ, причемъ нужно различать нѣсколько случаевъ смотря по тому, сколько фигуръ того или другого вида входитъ въ опредѣленіе. Видъ каждой фигуры (треугольника или четырехугольника) обусловливается тѣмъ, слѣды сколькихъ дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей 1-го рода ее ограничиваютъ; число-же этихъ послѣднихъ плоскостей для данной четверки нормалей $(iklm)$ зависитъ (§ 40) отъ знаковъ величинъ q_i, q_k, q_l, q_m; ибо такая плоскость является только тогда, когда мы комбинируемъ двѣ такія изъ этихъ величинъ, которыя имѣютъ при данномъ направленіи осей противуположные знаки. Всѣ возможные въ этомъ отношеніи случаи помѣщены въ слѣдующей таблицѣ, въ которой впрочемъ для сбереженія мѣста выпущены названія граничныхъ плоскостей 1-го рода. Кромѣ того, для наглядности, вмѣсто плоскостей (132) взяты плоскости P'_{1234}, P'_{1235}, P'_{1236}, а для случая четырехъ граничныхъ плоскостей 2-го рода удержаны обозначенія (131). Подъ названіемъ каждой изъ этихъ плоскостей число сторонъ соотвѣтствующей ей фигуры обозначено римскою цифрою. Изъ числа всѣхъ 64 возможныхъ сочетаній знаковъ для q взята только половина, такъ какъ другая половина (обратныхъ знаковъ) соотвѣтствуетъ обратному направленію того-же пучка параллельныхъ винтовыхъ осей и опредѣляетъ на перпендикулярной къ нимъ плоскости ту-же область, разсматриваемую только съ обратной стороны. Кромѣ того случаи однозначности величинъ q совсѣмъ исключены изъ разсмотрѣнія, какъ невозможные при противостояніи какихъ-либо 4 нормалей.

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	P'_{1234}	P'_{1235}	P'_{1236}	P'_{1234}	P'_{2345}	P'_{3456}	P'_{1346}
1	−	+	+	+	+	+	III	III	III	III	0	0	III
2	+	−	+	+	+	+	III	III	III	III	III	0	0
3	+	+	−	+	+	+	III	III	III	III	III	III	III
4	+	+	+	−	+	+	III	0	0	III	III	III	III
5	+	+	+	+	−	+	0	III	0	0	III	III	0
6	+	+	+	+	+	−	0	0	III	0	0	III	III
7	−	−	+	+	+	+	IV	IV	IV	IV	III	0	III
8	−	+	−	+	+	+	IV	IV	IV	IV	III	III	IV
9	−	+	+	−	+	+	IV	III	III	IV	III	III	IV
10	−	+	+	+	−	+	III	IV	III	III	III	III	III
11	−	+	+	+	+	−	III	III	IV	III	0	III	IV
12	+	−	−	+	+	+	IV	IV	IV	IV	IV	III	III
13	+	−	+	−	+	+	IV	III	III	IV	IV	III	III
14	+	−	+	+	−	+	III	IV	III	III	IV	III	0
15	+	−	+	+	+	−	III	III	IV	III	III	III	III
16	+	+	−	−	+	+	IV	III	III	IV	IV	IV	IV
17	+	+	−	+	−	+	III	IV	III	III	IV	IV	III
18	+	+	−	+	+	−	III	III	IV	III	III	IV	IV
19	+	+	+	−	−	+	III	III	0	III	IV	IV	III
20	+	+	+	−	+	−	III	0	III	III	III	IV	IV
21	+	+	+	+	−	−	0	III	III	0	III	IV	IV
22	−	−	−	+	+	+	III	III	III	III	IV	III	IV
23	−	−	+	−	+	+	III	IV	IV	III	IV	III	IV
24	−	−	+	+	−	+	IV	III	IV	IV	IV	III	III
25	−	−	+	+	+	−	IV	IV	III	IV	III	III	IV
26	−	+	−	−	+	+	III	IV	IV	III	IV	IV	III
27	−	+	−	+	−	+	IV	III	IV	IV	IV	IV	IV
28	−	+	−	+	+	−	IV	IV	III	IV	III	IV	III
29	−	+	+	−	−	+	IV	IV	III	IV	IV	IV	IV
30	−	+	+	−	+	−	IV	III	IV	IV	III	IV	III
31	−	+	+	+	−	−	III	IV	IV	III	III	IV	IV

Нѣкоторые изъ перечисленныхъ здѣсь случаевъ будутъ на самомъ дѣлѣ отсутствовать, такъ какъ въ случаѣ шести опорныхъ поверхностей сфера параметровъ раздѣляется плоскостями, перпендикулярными къ нормалямъ, на 32 области [§ 35] и слѣдовательно не всѣ 64 сочетанія 6 знаковъ величинъ q получатся въ дѣйствительности. Которыя изъ сочетаній будутъ отсутствовать, это уже зависитъ каждый разъ отъ относительнаго направленія нормалей.

47. Разборъ случаевъ, являющихся при трехъ дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостяхъ.

а) Случаи 4, 5, 6, 19, 20 и 21 *невозможны*, потому-что въ нихъ для нѣкоторыхъ изъ трехъ четверокъ нормалей, (1234), (1235), (1236), получаются одинаковые знаки величинъ q (напр. въ случаѣ 4 у q_1, q_2, q_3, q_5 и у q_1, q_2, q_3, q_6); а это противорѣчитъ предположенію, что разсматриваемыя четверки нормалей находятся въ противостояніи.

b) Въ случаяхъ 1, 2, 3 и 22 возможная область винтовыхъ осей опредѣляется общею частью *трехъ треугольниковъ*. Здѣсь общая часть можетъ образовываться двоякимъ образомъ. Въ случаяхъ 1, 2 и 3 всѣ три треугольника имѣютъ по двѣ общихъ стороны s'_{21} и s'_{31}; напр. въ 1 случаѣ они ограничены сторонами:

$$(s'_{21}\ s'_{31}\ s'_{41}),\quad (s'_{21}\ s'_{31}\ s'_{51}),\quad (s'_{21}\ s'_{31}\ s'_{61}).$$

А такъ какъ всѣ треугольники лежатъ по одну и ту-же сторону отъ прямыхъ s'_{21} и s'_{31},—ибо заданное направленіе осей возможное и поэтому знакъ ω во всѣхъ треугольникахъ одинаковый,—то они неизбѣжно имѣютъ общую часть. Этотъ случай аналогиченъ разсмотрѣнному въ § 35. Въ случаѣ 22 треугольники не имѣютъ общихъ сторонъ; но *внутри* ихъ есть общая точка—слѣдъ прямой σ_{456} пересѣченія трехъ плоскостей S''_{56}, S''_{64}, S''_{45}; поэтому существуетъ и общая часть всѣхъ трехъ фигуръ. Для сравненія и болѣе подробнаго выясненія см. § 37, фиг. XXIV.

с) *Два треугольника и четырехугольникъ* встрѣчаются въ случаяхъ 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17 и 18. Во всѣхъ этихъ случаяхъ, аналогично случаю § 37, изображенному на чертежахъ XXII и XXIII, всѣ три фигуры имѣютъ по двѣ общихъ стороны; откуда и слѣдуетъ существованіе возможной области. Напр. въ случаѣ 9 имѣемъ:

$$(s'_{21}\ s'_{31}\ s'_{24}\ s'_{34}),\quad (s'_{21}\ s'_{31}\ s'_{51}),\quad (s'_{21}\ s'_{31}\ s'_{61}).$$

d) Въ случаяхъ 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30 и 31 возможная область представляется общею частью *двухъ четырехугольниковъ и одного треугольника.* Непремѣнное существованіе ея слѣдуетъ опять изъ того, что всѣ три фигуры имѣютъ по двѣ общихъ стороны. Напр. въ случаѣ 31:

$$(s'_{21}\ s'_{31}\ s'_{41}),\quad (s'_{21}\ s'_{31}\ s'_{25}\ s'_{35}),\quad (s'_{21}\ s'_{31}\ s'_{26}\ s'_{36}).$$

e) Возможная область опредѣляется *тремя четырехугольниками* въ случаяхъ 7, 8 и 12 и существуетъ въ дѣйствительности, благодаря тому, что они опять имѣютъ по двѣ общихъ стороны; напр. въ случаѣ 12:

$$(s'_{12}\ s'_{13}\ s'_{42}\ s'_{43}),\quad (s'_{12}\ s'_{13}\ s'_{52}\ s'_{53}),\quad (s'_{12}\ s'_{13}\ s'_{62}\ s'_{63}).$$

48. Разборъ случаевъ, являющихся при четырехъ дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостяхъ 2-го рода.

a) Случаи 1, 2, 5, 6, 7, 11, 14 и 21 невозможны по той-же причинѣ, какъ случаи a) § 47.

b) Случаи, въ которыхъ общая часть опредѣлялась-бы тремя треугольниками и однимъ четырехугольникомъ или однимъ треугольникомъ и тремя четырехугольниками не можетъ встрѣтиться вслѣдствіе тѣхъ особенностей, которыми отличаются четыре комбинаціи нормалей, опредѣляющихъ плоскости (131), и которыя указаны въ § 41.

c) Въ случаяхъ 3, 4, 10 и 15 возможная область принадлежитъ *четыремъ треугольникамъ*; но въ первыхъ двухъ случаяхъ она образуется иначе, чѣмъ въ двухъ послѣднихъ: въ случаяхъ 3 и 4 существуетъ одна общая у всѣхъ четырехъ треугольниковъ сторона s'_{43}, а въ случаяхъ 10 и 15 этого нѣтъ.

Разсмотримъ сначала случай 3; сторонами треугольниковъ въ немъ служатъ (черт. XXVII)

$$(s'_{13}\ s'_{23}\ s'_{43}),\quad (s'_{23}\ s'_{43}\ s'_{53}),\quad (s'_{43}\ s'_{53}\ s'_{63}),\quad (s'_{13}\ s'_{43}\ s'_{63}).$$

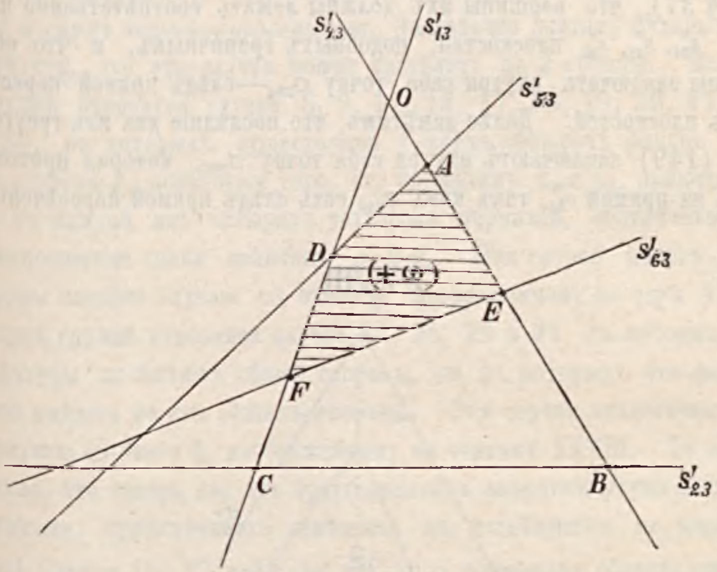
Пусть каждый изъ нихъ заключаетъ область $(+\omega)$ [1]. Построивъ

---

[1]) Мы знаемъ, что знакъ угловой скорости во всѣхъ отдѣльныхъ четырехъ областяхъ одинаковый если для винтовыхъ осей задано одно изъ возможныхъ направленій.

первый изъ этихъ треугольниковъ, OBC, мы найдемъ, что сторона s'_{53} пройдетъ такъ, что она будетъ со сторонами s'_{23} и s'_{43} образовать треугольникъ, имѣющій общій уголъ ABC съ первымъ треугольникомъ,

XXVII



ибо это необходимо для однозначности ω въ обѣихъ областяхъ; тогда область $ABCD$ представитъ общую часть этихъ двухъ треугольниковъ. Послѣ этого замѣтимъ, что сторона s'_{63} должна такъ проходить, чтобы образовать замкнутую область треугольника какъ со сторонами s'_{13}, s'_{43}, такъ и со сторонами s'_{53}, s'_{43}, причемъ она должна быть такъ проведена, чтобы въ обоихъ треугольникахъ заключалась область съ тѣмъ-же знакомъ $(+\omega)$ какъ въ первыхъ двухъ треугольникахъ. Для этого необходимо, чтобы вершины O и A находились по одну сторону отъ s'_{63}, соотвѣтствующую тому-же знаку $(+\omega)$. Но очевидно, что тогда или вся область $ABCD$ или часть ея (на чертежѣ XXVII: $AEFD$) будетъ принадлежать всѣмъ четыремъ треугольникамъ.

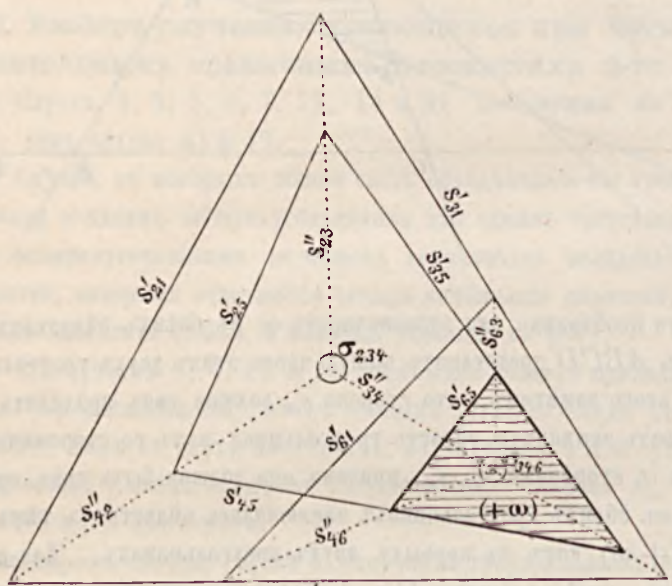
Подобное-же разсужденіе приложимо къ случаю 4.

Въ случаяхъ 10 и 15 предыдущія соображенія не приложимы; но мы можемъ воспользоваться свойствами плоскостей, подобныхъ граничнымъ перваго рода. Разсмотримъ случай 10; въ немъ сторонами треугольниковъ служатъ:

$$(s'_{21}\ s'_{31}\ s'_{41}),\quad (s'_{25}\ s'_{35}\ s'_{45}),\quad (s'_{35}\ s'_{45}\ s'_{65}),\quad (s'_{31}\ s'_{41}\ s'_{61}). \qquad (149)$$

Построимъ (черт. XXVIII) первые два треугольника, принявъ во вниманіе (§ 37), что вершины ихъ должны лежать соотвѣтственно на слѣдахъ s''_{34}, s''_{42}, s''_{23} плоскостей, подобныхъ граничнымъ, и что оба они должны заключать внутри себя точку σ_{234}—слѣдъ прямой пересѣченія этихъ плоскостей. Далѣе замѣтимъ, что послѣдніе два изъ треугольниковъ (149) заключаютъ внутри себя точку σ_{346}, которая притомъ лежитъ на прямой s''_{34}, такъ какъ σ_{346} есть слѣдъ прямой пересѣченія плоскостей S''_{46}, S''_{63} и S''_{34}. Наконецъ мы видимъ, что эти два треугольника имѣютъ съ первыми двумя треугольниками соотвѣтственно по двѣ общихъ стороны s'_{35}, s'_{45} и s'_{31}, s'_{41}; а вслѣдствіе одинаковости знака ω во всѣхъ 4 областяхъ и области угловъ между этими сторонами въ обѣихъ парахъ треугольниковъ общія. Отсюда слѣдуетъ, что точка σ_{346}

XXVIII



лежитъ внутри всѣхъ четырехъ треугольниковъ и слѣдовательно послѣдніе имѣютъ общую часть.

Случай 15 можетъ быть разобранъ подобнымъ-же образомъ.

d) Разборъ предыдущихъ случаевъ достаточно выясняетъ путь для констатированія возможной области винтовыхъ осей даннаго направленія, когда эта область является общею частью *двухъ треугольниковъ и двухъ четырехугольниковъ*. Достаточно поэтому будетъ только замѣтить, что эти случаи можно раздѣлить на 2 группы. Къ первой группѣ относятся случаи 8, 9, 12, 13, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 28 и 30, въ которыхъ существуетъ у всѣхъ четырехъ фигуръ одна общая сторона s'_{34} вслѣдствіе того, что нормалямъ n_3 и n_4, принадлежащимъ къ каждой изъ четырехъ четверокъ нормалей, соотвѣтствуютъ противуположные знаки величинъ q_3 и q_4. Эти случаи могутъ быть разобраны подобно случаю c) этого §, изображенному на черт. XXVII. Ко второй группѣ относятся случаи 24, 25, 26 и 31, въ которыхъ четыре фигуры не имѣютъ общей стороны, но въ которыхъ эти фигуры попарно имѣютъ по двѣ общихъ стороны. Эти случаи аналогичны другому случаю c) этого §, изображенному на чертежѣ XXVIII. То обстоятельство, что теперь два изъ треугольниковъ замѣнены двумя четырехугольниками, существеннаго измѣненія въ изслѣдованіе не вноситъ.

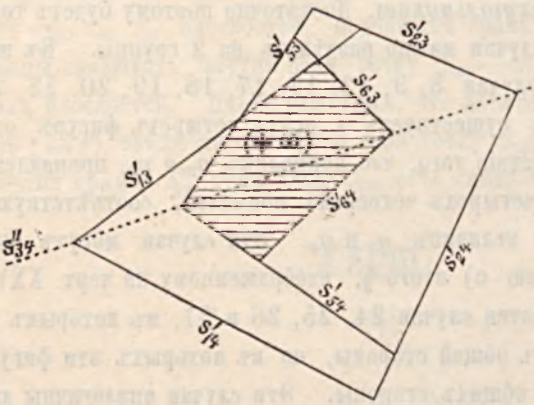
e) Случаи 16, 27 и 29, въ которыхъ возможная область принадлежитъ *четыремъ четырехугольникамъ* тоже отчасти аналогичны разсмотрѣннымъ раньше; по ввиду нѣсколько бóльшей сложности ихъ, мы разберемъ ихъ подробнѣе.

Въ случаѣ 16, въ которомъ сторонами четырехугольниковъ служатъ:

$$(s'_{13}\, s'_{23}\, s'_{14}\, s'_{24}),\ (s'_{23}\, s'_{53}\, s'_{24}\, s'_{54}),\ (s'_{53}\, s'_{63}\, s'_{54}\, s'_{64}),\ (s'_{13}\, s'_{63}\, s'_{14}\, s'_{64}), \quad (150)$$

нѣтъ ни одной стороны, общей всѣмъ четыремъ фигурамъ, но зато есть прямая s''_{34}, слѣдъ плоскости S''_{34}, подобной граничной 1-го рода, которая служитъ общею діагональю всѣхъ четырехугольниковъ (не по длинѣ, а только по положенію). Это слѣдуетъ изъ того, что на ней лежатъ вершины четырехугольниковъ: σ_{134} и σ_{234}, σ_{234} и σ_{534}, σ_{534} и σ_{634}, σ_{634} и σ_{134} (§ 29). Замѣтивъ это, будемъ дѣлать послѣдовательное построеніе четырехугольниковъ (черт. XXIX), причемъ будемъ еще имѣть въ виду, что знакъ ω во всѣхъ четырехъ областяхъ одинъ и тотъ-же, ибо мы задали направленіе винтовыхъ осей, принадлежащее къ числу возможныхъ. Первые два четырехугольника, имѣя по двѣ общихъ стороны, s'_{23} и s'_{24}, имѣютъ очевидно и общую часть. Третій четырехугольникъ имѣетъ со вторымъ другія двѣ общія стороны, s'_{53} и s'_{54}; но кромѣ

XXIX



того двѣ остальныя его стороны, s'_{63} и s'_{64}, должны быть такъ расположены, чтобы съ двумя сторонами перваго четырехугольника, s'_{13} и s'_{14}, образовать четвертый четырехугольникъ, содержащій область съ тѣмъже знакомъ (ω). Вслѣдствіе этого непремѣнно останется общая часть всѣхъ четырехъ фигуръ, которая и будетъ представлять возможную область.

Въ случаяхъ 27 и 29 у всѣхъ четырехъ четырехугольниковъ существуетъ общая сторона s'_{34}. Возьмемъ случай 27; стороны четырехугольниковъ тогда слѣдующія:

$$(s'_{21}\, s'_{41}\, s'_{23}\, s'_{43}),\ (s'_{23}\, s'_{25}\, s'_{43}\, s'_{45}),\ (s'_{43}\, s'_{45}\, s'_{63}\, s'_{65}),\ (s'_{41}\, s'_{61}\, s'_{43}\, s'_{63}). \qquad (151)$$

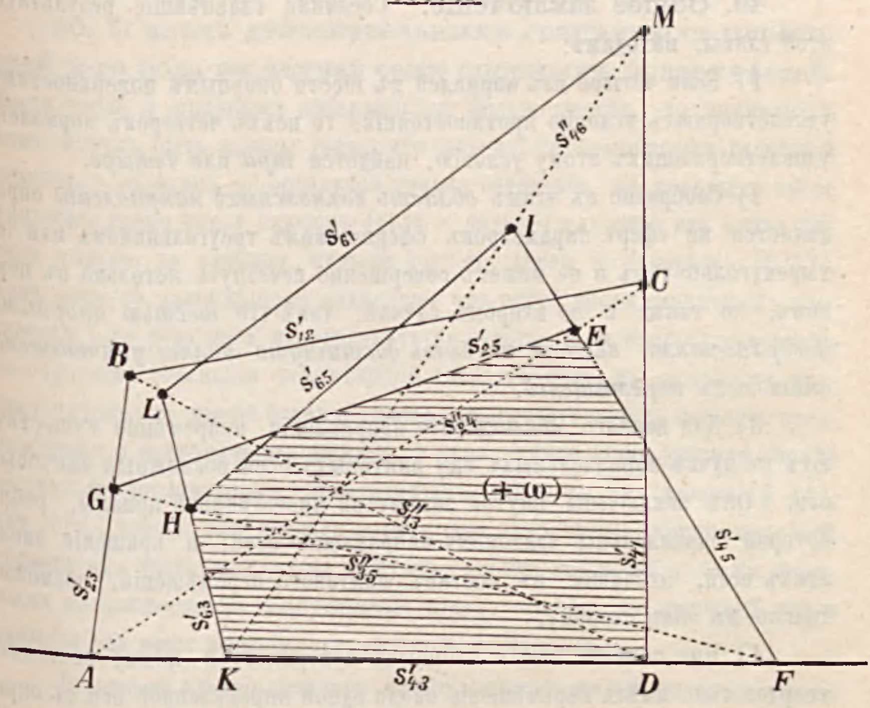
Діагоналями каждаго изъ этихъ четырехугольниковъ служатъ слѣды плоскостей, подобныхъ граничнымъ 1-го рода:

$$(s''_{13},\, s''_{24}),\quad (s''_{24},\, s''_{35}),\quad (s''_{35},\, s''_{46}),\quad (s''_{46},\, s''_{13}). \qquad (152)$$

Такъ какъ во всѣхъ четырехъ четырехугольникахъ знакъ ω одинаковый, то всѣ они находятся по одну сторону отъ слѣда общей граничной плоскости s'_{43}; съ этой-же стороны будутъ находиться поэтому и точки пересѣченія діагоналей (152). Проведемъ теперь, сообразуясь съ этимъ, но въ остальномъ совершенно произвольно, прямыя s'_{43}, s''_{13}, s''_{24}, s''_{35} и s''_{46} и построимъ 4 четырехугольника (151). Пусть будетъ

ABCD (фиг. XXX) первый изъ нихъ; второй, *AGEF*, имѣетъ съ нимъ общія стороны s'_{23} и s'_{43} и общую діагональ s''_{24} (по положенію, но не по величинѣ); вслѣдствіе этого у него неизбѣжно будетъ существовать общая часть съ первымъ четырехугольникомъ. У третьяго четырехуголь-

XXX



ника, *KHIF*, имѣются съ предыдущимъ опять двѣ общихъ стороны, s'_{45} и s'_{43} и общая діагональ s'_{35}. Кромѣ того точка H на этой діагонали должна лежать съ той-же стороны отъ прямой s'_{41} какъ и точка G, ибо прямыя s'_{63} и s'_{41}, вмѣстѣ съ прямою s'_{43} и новою прямою s'_{61}, должны образовать четвертый четырехугольникъ съ тѣмъ-же знакомъ ω; поэтому четырехугольникъ *KHIF* имѣетъ общую часть съ обоими предыдущими. Послѣдній четырехугольникъ *KLMF* опредѣляется уже самъ собою, такъ какъ мы имѣемъ уже по положенію три стороны его s'_{43}, s'_{63} и s'_{41} и обѣ діагонали. Очевидно, что онъ имѣетъ общую часть съ остальными, потому-что вершина его L лежитъ по ту-же сторону отъ s'_{41} какъ H и G. Если-бы точки A, K, D, F на общей прямой s'_{43} слѣдовали въ другомъ порядкѣ, напр. K, A, F, D, то тогда подобными-же разсужденіями можно было бы констатировать существованіе общей части, которая всегда имѣетъ одною изъ своихъ сторонъ отрѣзокъ на прямой s'_{43}, заключенный между двумя средними изъ вышеуказанныхъ точекъ.

49. Общее заключеніе. Соединяя главнѣйшіе результаты этой главы, находимъ:

1) Если четыре изъ нормалей къ шести опорнымъ поверхностямъ удовлетворяютъ условію противостоянія, то всѣхъ четверокъ нормалей, удовлетворяющихъ этому условію, найдется *три* или *четыре*.

2) Сообразно съ этимъ *область возможныхъ направленій* опредѣляется на сферѣ параметровъ сферическимъ треугольникомъ или четырехугольникомъ и не можетъ совершенно исчезнуть нетолько въ первомъ, но также и во второмъ случаѣ; такъ-что *шестью опорными поверхностями не можетъ быть достигнуто полное уничтоженіе винтовыхъ перемѣщеній.*

3) Для всякаго *возможнаго* направленія непремѣнно существуютъ въ пучкѣ параллельныхъ ему винтовыхъ осей возможныя винтовыя оси. Онѣ заключены внутри замкнутой многогранной призмы, ребра которой параллельны заданному направленію осей; а вращеніе около этихъ осей, входящее въ составъ винтового перемѣщенія, возможно только въ *одну* сторону.

4) При помощи шести опорныхъ поверхностей можно заставить твердое тѣло имѣть перемѣщеніе около одной опредѣленной оси съ опредѣленнымъ параметромъ; для этого шесть нормалей къ опорнымъ поверхностямъ въ точкахъ касанія къ нимъ твердаго тѣла должны принадлежать одному и тому-же комплексу 1-го порядка, и кромѣ того направленія ихъ должны быть взяты такъ, чтобы какія-нибудь четыре изъ нихъ находились въ противостояніи. Вращеніе около этой оси возможно въ обѣ стороны.

ГЛАВА VI.

О полномъ уничтоженіи опорными поверхностями возможныхъ винтовыхъ осей.

50. О числѣ дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей 2-го рода въ случаѣ семи опорныхъ поверхностей. Когда число n опорныхъ поверхностей больше шести, то нормали къ нимъ могутъ быть заданы такъ, что изъ всѣхъ возможныхъ сочетаній знаковъ у величинъ q_i останутся только сочетанія, въ которыхъ число минусовъ равно числу плюсовъ (если n четное) или одно изъ этихъ чиселъ только на единицу меньше другого (если n нечетное) [§ 37]. Такъ какъ въ дальнѣйшемъ зависящее отъ этого число граничныхъ плоскостей 1-го рода насъ интересовать не будетъ, а къ вопросу о возможно бо́льшемъ стѣсненіи перемѣщеній твердаго тѣла мы подойдемъ другимъ путемъ, то мы не будемъ дѣлать непосредственно указаннаго предположенія о направленіи нормалей, а ограничимся лишь другимъ, болѣе общимъ предположеніемъ, необходимымъ, какъ мы уже знаемъ (§ 24), для того, чтобы для всякаго возможнаго направленія винтовыхъ осей область ихъ была замкнутою. Итакъ, *пусть нормали къ семи опорнымъ поверхностямъ направлены такъ, чтобы по крайней мѣрѣ четыре изъ нихъ находились въ противостояніи.*

Въ этомъ предположеніи число дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей 2-го рода можетъ быть равно четыремъ, шести или восьми. Прежде чѣмъ идти дальше, необходимо разсмотрѣть условія появленія этихъ случаевъ и выяснить, въ какихъ комбинаціяхъ будутъ каждый разъ входить семь нормалей.

1-й случай. Число дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей 2-го рода ровно *четыремъ* при слѣдующемъ расположеніи нормалей. Пусть будутъ n_1, n_2, n_3, n_4 нормали, находящіяся въ противостояніи; введемъ пятую нормаль, n_5, и опредѣлимъ по извѣстнымъ намъ правиламъ (§ 34) тѣ три нормали изъ числа первыхъ четырехъ, съ которыми n_5 находится въ противостояніи; пусть онѣ будутъ: n_1, n_2, n_3. Такимъ образомъ мы получимъ двѣ дѣйствительныхъ граничныхъ плоскости 2-го рода: P'_{1234} и P'_{1235}. Предположимъ теперь, что, по отношенію къ первымъ четыремъ нормалямъ, шестая нормаль, n_6, находится въ противостояніи опять съ первыми тремя изъ нихъ; такъ-что является граничная плоскость P'_{1236}. Понятно, что тогда по отношенію ко второй четверкѣ нормалей (n_1, n_2, n_3, n_5) нормаль n_6 находится въ противостояніи тоже съ первыми тремя изъ нихъ, и поэтому новой граничной плоскости отъ комбинаціи со второю четверкою нормалей здѣсь не получается. Если седьмая нормаль, n_7, по отношенію къ первымъ четыремъ нормалямъ обладаетъ тѣмъ-же свойствомъ, т. е. даетъ плоскость P'_{1237}, то, подобно предыдущему, она со второю и третьею четверками нормалей новыхъ дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей не дастъ; такъ-что мы получаемъ всего 4 такихъ плоскости:

$$P'_{1234}, \quad P'_{1235}, \quad P'_{1236}, \quad P'_{1237}. \tag{153}$$

2-й случай. Предположимъ, что первыя шесть нормалей по своему направленію удовлетворяютъ прежнимъ условіямъ, т. е. даютъ плоскости P'_{1234}, P'_{1235}, P'_{1236}, но что нормаль n_7 комбинируется съ первою четверкою нормалей иначе чѣмъ прежде, напр. даетъ дѣйствительную граничную плоскость P'_{2347}; тогда n_7 со второю и третьею четверками нормалей дастъ двѣ новыхъ такихъ плоскости, которыя непремѣнно будутъ обозначаться такъ: P'_{2357} и P'_{2367}. Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая шестерку нормалей n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_7, мы имѣемъ теперь тотъ случай предыдущей главы, когда являются не три, какъ въ 1-мъ случаѣ, а четыре дѣйствительныхъ граничныхъ плоскости. Изъ этихъ плоскостей три уже найдены: P'_{1234}, P'_{1235} и P'_{2347}; четвертая-же плоскость съ одной стороны не должна зависѣть согласно предположенію отъ тройки нормалей n_1, n_2, n_3 и слѣдовательно въ ея опредѣленіе, кромѣ n_7, должна неизбѣжно входить нормаль n_5; а съ другой стороны, по указанному въ § 41 свойству, она должна зависѣть отъ тѣхъ двухъ нормалей, которыя входятъ въ опредѣленіе каждой изъ трехъ первыхъ граничныхъ плоскостей, т. е. въ нашемъ случаѣ отъ n_2 и n_3. Итакъ искомая плоскость есть P'_{2357}. Подобными-же соображеніями мы находимъ, что третья четверка нормалей (n_1, n_2, n_3, n_6) съ седьмою нормалью необходимо опредѣляетъ плоскость P'_{2367}; такъ-что вся система плоскостей будетъ:

$$P'_{1234}, \quad P'_{1235}, \quad P'_{1236}, \quad P'_{2347}, \quad P'_{2357}, \quad P'_{2367}. \tag{154}$$

3-й случай. Этотъ случай получается тогда, когда первыя шесть нормалей даютъ не три, а четыре дѣйствительныхъ граничныхъ плоскости 2-го рода. Пусть они будутъ, какъ въ примѣрѣ предыдущей главы,

$$P'_{1234}, \quad P'_{2435}, \quad P'_{3456}, \quad P'_{1346};$$

тогда, комбинируя седьмую нормаль съ 4 четверками, опредѣляющими эти плоскости, мы можемъ, вообще говоря, получить или двѣ или четыре новыхъ дѣйствительныхъ граничныхъ плоскости. Двѣ плоскости получаются, если n_7 по отношенію къ первой четверкѣ нормалей даетъ плоскость P'_{2347} или P'_{1347}; но подобный случай былъ уже выше разсмотрѣнъ. Положимъ, что n_7 съ первыми четырьмя нормалями иначе комбинируется и даетъ плоскость P'_{1237}; тогда n_7 со второю четверкою нормалей непремѣнно дастъ плоскость P'_{2357}, такъ какъ въ ея опредѣленіе кромѣ n_5 и n_7 непремѣнно должны войти тѣ двѣ нормали, которыя общи у трехъ граничныхъ плоскостей P'_{1234}, P'_{2435} и P'_{1237}, принадлежащихъ къ группѣ шести нормалей: n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 и n_7. По тѣмъ-же соображеніямъ нормаль n_7 съ третьею четверкою нормалей n_3, n_4, n_5, n_6 должна дать граничную плоскость P'_{3567} а съ четвертою четверкою n_1, n_3, n_4, n_6—плоскость P'_{1367}. Вся система 8 дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей 2-го рода представляется теперь въ такомъ видѣ:

$$\begin{matrix} P'_{1234}, & P'_{2435}, & P'_{3456}, & P'_{1346}, \\ P'_{1237}, & P'_{2357}, & P'_{3567}, & P'_{1367}. \end{matrix} \tag{155}$$

Всякія другія предположенія относительно направленій 7 нормалей приведутъ неизбѣжно къ одному изъ разсмотрѣнныхъ трехъ случаевъ и могутъ отличаться только нумераціею нормалей. Поэтому въ дальнѣйшемъ, при изученіи областей возможныхъ направленій, можно удерживать обозначенія (153), (154) и (155) какъ типичныя въ трехъ указанныхъ случаяхъ.

51. Области возможныхъ направленій въ случаѣ 4 дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей 2-го рода. Вообще говоря, четыре граничныхъ плоскости 2-го рода могутъ на сферѣ параметровъ дать или не дать возможной области. Въ послѣднемъ случаѣ не существуетъ такихъ направленій, по которымъ были-бы возможны винтовыя оси и слѣдовательно получается полное закрѣпленіе тѣла. Обратимся къ рѣшенію вопроса, достижимо-ли это въ дѣйствительности. Для этого можно воспользоваться пріемомъ § 44. Предположимъ, что

$$V_{321} < 0;$$

принимая во вниманіе схему (127) и обозначенія (153), мы видимъ, что въ этомъ случаѣ величины

$$\begin{array}{ccc} V_{234}, & V_{314}, & V_{124}, \\ V_{235}, & V_{315}, & V_{125}, \\ V_{236}, & V_{316}, & V_{126}, \\ V_{237}, & V_{317}, & V_{127} \end{array}$$

тоже всѣ отрицательныя. Тогда, согласно правилу, опредѣляющему на сферѣ параметровъ область $(+\omega)$ и выражаемому неравенствами (111) и (112), для дѣйствительнаго ея появленія должны быть выполнены условія:

$$P'_{1234} < 0, \quad P'_{1235} < 0, \quad P'_{1236} < 0, \quad P'_{1237} < 0$$

и въ то-же время для появленія области $(-\omega)$ — обратныя неравенства. Для исчезанія-же этихъ областей необходимо, согласно § 44, чтобы U_{klm}, U_{lim}, U_{ikm}, U_{lki} были одного знака; причемъ теперь:

$$U_{klm} = U_{567} = \begin{vmatrix} L_{1235} & L_{1236} & L_{1237} \\ M_{1235} & M_{1236} & M_{1237} \\ N_{1235} & N_{1236} & N_{1237} \end{vmatrix}$$

и т. д. Вычисленіе, подобное произведенному въ § 43, даетъ по формулѣ (142):

$$\begin{aligned} U_{klm} &= U_{567} = V_{123}{}^2 D_4, \\ U_{lim} &= U_{647} = -U_{467} = -V_{123}{}^2 D_5, \\ U_{ikm} &= U_{457} = V_{123}{}^2 D_6, \\ U_{lki} &= U_{654} = -U_{456} = -V_{123}{}^2 D_7, \end{aligned}$$

гдѣ вообще D_s есть опредѣлитель шестаго порядка, составленный изъ координатъ тѣхъ шести изъ числа семи нормалей, между которыми нѣтъ нормали n_s; при этомъ предполагается, что во всѣхъ четырехъ такихъ опредѣлителяхъ значки 1, 2, 3, ... расположены по строкамъ въ возрастающемъ порядкѣ сверху внизъ. Итакъ для исчезанія возможныхъ направленій необходимо, чтобы два изъ опредѣлителей D_4, D_5, D_6, D_7 имѣли знакъ, противуположный знаку двухъ другихъ.

Сопоставляя съ этимъ всѣ раньше введенныя условія, можно сказать: *Наименьшее число опорныхъ поверхностей, при которомъ можно вполнѣ закрѣпить твердое тѣло, равно семи; это закрѣпленіе достигается при слѣдующихъ условіяхъ: 1) между семью нормалями должны быть даны четыре находящимися въ противостояніи; 2) остальныя три нормали должны быть направлены такъ, чтобы отрицательные концы ихъ находились на сферѣ параметровъ въ области треугольника, имѣющаго своими вершинами положительные концы однѣхъ и тѣхъ-же трехъ изъ числа первыхъ четырехъ нормалей; 3) если составить 4 опредѣлителя изъ координатъ нормалей, взятыхъ по шести такимъ образомъ, чтобы въ числѣ ихъ каждый разъ были три нормали, проходящія черезъ вершины вышеупомянутаго сферическаго треугольника, то два изъ этихъ опредѣлителей должны имѣть знакъ, противуположный знаку двухъ остальныхъ.*

Ниже мы увидимъ, что этотъ случай при 7 опорныхъ поверхностяхъ единственный, когда достигается полное уничтоженіе возможныхъ винтовыхъ осей; такъ-что вышеприведенныя условія суть нетолько достаточныя, но и необходимыя. Выполненіе-же этихъ условій всегда достижимо, потому-что, когда направленія 7 нормалей заданы согласно вышеуказаннымъ требованіямъ, мы располагаемъ еще избыточнымъ числомъ элементовъ для установленія требуемыхъ знаковъ у 4 опредѣлителей, а именно моментами нормалей.

52. Области возможныхъ направленій въ случаѣ 6 дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей 2-го рода. Плоскости P'_{1234}, P'_{1235} и P'_{1236} опредѣляютъ на сферѣ параметровъ сферическій треугольникъ ABC, который заключалъ-бы область возможныхъ направленій, если-бы не было нормали n_7; точно также плоскости P'_{2347}, P'_{2357} и P'_{2367} опредѣляютъ другой сферическій треугольникъ DEF, который содержалъ-бы область возможныхъ направленій, если-бы не было нормали n_1. Для исчезновенія всѣхъ возможныхъ винтовыхъ осей необходимо и достаточно, чтобы эти два треугольника не имѣли общей части. Покажемъ, что въ дѣйствительности это требованіе невыполнимо. Для этого обратимся къ помощи плоскостей, подобныхъ граничнымъ плоскостямъ 2-го рода (§ 38). Въ пятеркѣ нормалей n_1, n_2, n_3, n_5 и n_6, кромѣ двухъ дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей P'_{1235} и P'_{1236}, существуютъ три плоскости, подобныя граничнымъ:

$$P''_{2356},\quad P''_{1356},\quad P''_{1256}. \tag{156}$$

Точно также въ пятеркѣ нормалей n_2, n_3, n_5, n_6, n_7 мы имѣемъ 2 дѣйствительныхъ граничныхъ плоскости P'_{2357} и P'_{2367} и кромѣ того три плоскости, подобныхъ граничнымъ:

$$P''_{3567},\quad P''_{2567},\quad P''_{2356}. \tag{157}$$

Замѣтимъ, что въ системахъ (156) и (157) одна плоскость P''_{2356} общая. Подобнымъ-же образомъ, разсматривая плоскости P'_{1236} и P'_{1234} съ одной стороны и плоскости P'_{2367} и P'_{2347} съ другой, мы найдемъ двѣ тройки плоскостей, подобныхъ граничнымъ:

$$P''_{2346},\quad P''_{1346},\quad P''_{1246},$$
$$P''_{3467},\quad P''_{2467},\quad P''_{2346},$$

въ которыхъ одна плоскость, P''_{2346}, общая. Наконецъ, парамъ плоскостей (P'_{1234}, P'_{1235}) и (P'_{2347}, P'_{2357}) соотвѣтствуютъ двѣ тройки плоскостей, подобныхъ граничнымъ:

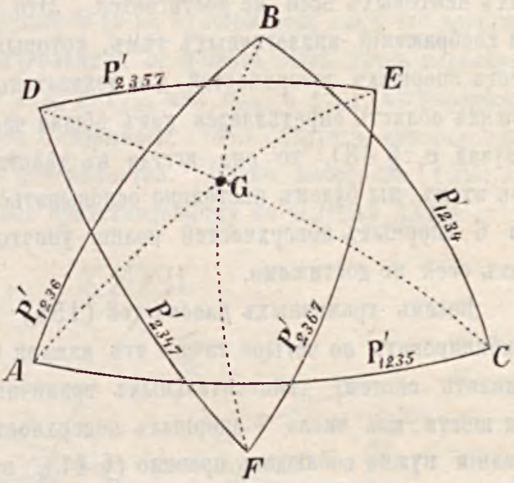
$$P''_{2345},\quad P''_{1345},\quad P''_{1245},$$
$$P''_{3457},\quad P''_{2457},\quad P''_{2345},$$

въ которыхъ опять одна плоскость, P''_{2345}, общая. Какъ было показано въ § 38, плоскости, подобныя граничнымъ 2-го рода, лежатъ въ той парѣ вертикальныхъ угловъ между двумя дѣйствительными граничными плоскостями 2-го рода, которая опредѣляетъ на сферѣ параметровъ область возможныхъ направленій винтовыхъ осей; поэтому слѣды плоскостей

$$P''_{2356},\quad P''_{2346},\quad P''_{2345} \tag{158}$$

на сферѣ параметровъ пересѣкаются между собою внутри обоихъ сферическихъ треугольниковъ ABC и DEF (черт. XXXI). Они пересѣкаются при этомъ въ одной точкѣ G, потому-что плоскости (158) принадлежатъ одной и той-же пятеркѣ нормалей: n_2, n_3, n_4, n_5, n_6 (§ 38). Такъ какъ эта точка принадлежитъ обѣимъ областямъ ABC и DEF, то эти послѣднія непремѣнно имѣютъ общую часть. Отсюда еще не слѣдуетъ непосредственно, что эта общая часть есть область возможныхъ направленій, такъ какъ для этого необходимо еще, чтобы въ областяхъ ABC и DEF знакъ ω былъ одинъ и тотъже. Но можно слѣдующимъ разсужденіемъ убѣдиться, что эти области, покрывая отчасти другъ друга, не могутъ соотвѣтствовать противуположнымъ знакамъ ω. Разсмотримъ четыре плоскости

XXXI



$$P'_{1235},\quad P'_{1236},\quad P'_{2357},\quad P'_{2367}$$

изъ числа плоскостей (154); въ системѣ шести нормалей n_1, n_2, n_3, n_5, n_6, n_7 онѣ суть дѣйствительныя граничныя плоскости второго рода и поэтому, образуя сферическій четырехугольникъ, заключаютъ въ себѣ непремѣнно, согласно § 44, область возможныхъ направленій. Знакъ ω долженъ быть въ этой области съ одной стороны такой-же, какъ въ области ABC, потому-что у этихъ областей уголъ между P'_{1235} и P'_{1236} общій, а съ другой стороны знакъ ω долженъ быть тотъ-же какъ въ области DEF, потому-что у этихъ областей уголъ между P'_{2357} и P'_{2367} общій; слѣдовательно и области ABC и DEF должны имѣть одинаковый знакъ ω. Итакъ общая часть этихъ областей представляетъ собою дѣйствительно область возможныхъ направленій.

Слѣдовало-бы еще показать, что для всякаго возможнаго направленія существуетъ замкнутая призма, содержащая возможныя оси; но мы этого дѣлать не будемъ, такъ какъ пріемы для этого тожественны съ указанными въ предыдущей главѣ (§§ 47 и 48).

53. Области возможныхъ направленій въ случаѣ 8 дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей 2-го рода. И въ этомъ случаѣ, подобно предыдущему, полное уничтоженіе возможныхъ винтовыхъ осей не достигается. Это можно показать при помощи соображеній, аналогичныхъ тѣмъ, которыя намъ служили въ случаѣ шести опорныхъ поверхностей для доказательства того, что если возможная область опредѣляется какъ общая часть 4 четырехугольниковъ (случай e, § 48), то она всегда въ дѣйствительности существуетъ. При этомъ мы будемъ постоянно основываться на томъ, что при помощи 6 опорныхъ поверхностей полное уничтоженіе возможныхъ винтовыхъ осей не достижимо.

Восемь граничныхъ плоскостей (155) можно шестью способами комбинировать по четыре такъ, что каждая четверка ихъ будетъ представлять систему дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей 2-го рода для шести изъ числа 7 опорныхъ поверхностей. При этомъ комбинированіи нужно соблюдать правило (§ 41), по которому распредѣлены значки шести нормалей въ обозначеніи 4 граничныхъ плоскостей; согласно этому мы получимъ слѣдующія 6 группъ:

$$P'_{1234},\quad P'_{2345},\quad P'_{3456},\quad P'_{1346}\quad (\text{не участвуетъ } n_7), \tag{159}$$

$$P'_{1237},\quad P'_{2357},\quad P'_{3567},\quad P'_{1367}\quad (\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\; n_4), \tag{160}$$

$$P'_{1234},\quad P'_{2345},\quad P'_{2357},\quad P'_{1237}\quad (\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\; n_6), \tag{161}$$

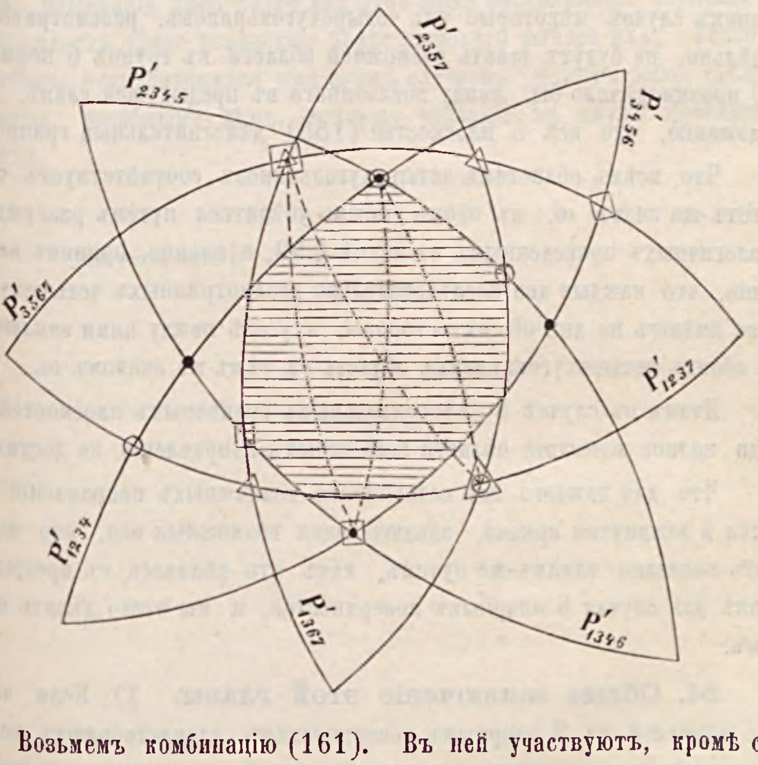
$$P'_{1346},\quad P'_{3456},\quad P'_{3567},\quad P'_{1367}\quad (\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\; n_2), \tag{162}$$

$$P'_{1234},\quad P'_{1346},\quad P'_{1367},\quad P'_{1237}\quad (\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\; n_5), \tag{163}$$

$$P'_{2345},\quad P'_{2357},\quad P'_{3567},\quad P'_{3456}\quad (\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\; n_1). \tag{164}$$

Седьмая комбинація, безъ n_3, невозможна, потому-что значекъ 3 входитъ въ обозначеніе всѣхъ 8 плоскостей (155). Кромѣ того и другія комбинаціи невозможны, какъ не удовлетворяющія основному требованію § 41, чтобы два значка входили въ обозначеніе группы всѣхъ 4 плоскостей. Для доказательства неизбѣжности существованія на сферѣ параметровъ области возможныхъ направленій винтовыхъ осей достаточно впрочемъ ввести въ разсмотрѣніе 4 комбинаціи. Возьмемъ комбинаціи (159), (160), (161) и (162). Плоскости (159) опредѣляютъ на сферѣ параметровъ область возможныхъ направленій въ видѣ четырехугольника для случая шести опорныхъ поверхностей съ нормалями $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$. Вершинами его служатъ послѣдовательно точки пересѣченія слѣдовъ плоскостей: P'_{1234} и P'_{2345}, P'_{2345} и P'_{3456}, P'_{3456} и P'_{1346}, P'_{1346} и P'_{1234}; т. е. вообще слѣды тѣхъ двухъ плоскостей, которыя соотвѣтствуютъ группѣ 5 (а не 6) нормалей; такъ-что вершиною разсматриваемаго четырехугольника не можетъ быть точка пересѣченія слѣдовъ пары плоскостей P'_{1234} и P'_{3456} или P'_{2345} и P'_{1346}, въ опредѣленіи которыхъ участвуютъ всѣ 6 нормалей. Это слѣдуетъ изъ разсмотрѣнія случая 5 опорныхъ поверхностей. Итакъ плоскости (159) имѣютъ расположеніе, подобное представленному на чертежѣ XXXII.

XXXII



Возьмемъ комбинацію (161). Въ ней участвуютъ, кромѣ слѣдовъ двухъ новыхъ плоскостей P'_{2357} и P'_{1237}, слѣды двухъ прежнихъ плоскостей P'_{1234} и P'_{2345}; поэтому для построенія соотвѣтствующаго комбинаціи (161) четырехугольника нужно только провести первую пару названныхъ плоскостей. Вводя комбинацію (160), мы вводимъ остальныя двѣ плоскости изъ числа дѣйствительныхъ граничныхъ P'_{1367} и P'_{3567}, которыя должны быть такъ расположены, чтобы какъ съ плоскостями F'_{1237} и P'_{2357} такъ и съ плоскостями P'_{1346} и P'_{3456} (162) образовать четырехугольникъ возможныхъ направленій. Наконецъ, дѣлая построеніе, нужно соблюдать, чтобы и остальныя двѣ комбинаціи (163) и (164) давали области возможныхъ направленій. Для наглядности вершины каждаго изъ первыхъ четырехъ четырехугольниковъ отмѣчены особыми знаками, и кромѣ того въ каждомъ изъ нихъ проведено по одной діагонали, изображающей слѣдъ одной изъ плоскостей, подобныхъ граничнымъ.

При соблюденіи всѣхъ указанныхъ требованій не можетъ у всѣхъ четырехугольниковъ не существовать общей части, такъ-какъ въ противномъ случаѣ нѣкоторые изъ четырехугольниковъ, разсматриваемые отдѣльно, не будутъ давать возможной области въ группѣ 6 нормалей, что́ противорѣчило-бы, ввиду показаннаго въ предыдущей главѣ, предположенію, что всѣ 8 плоскостей (155) дѣйствительныя граничныя.

Что всѣмъ областямъ четырехугольниковъ соотвѣтствуетъ одинъ и тотъ-же знакъ ω, въ этомъ можно убѣдиться путемъ разсужденій, аналогичныхъ приведеннымъ въ концѣ § 52, а именно, принявъ во вниманіе, что́ каждые два послѣдовательно разсмотрѣнныхъ четырехугольника имѣютъ по двѣ общихъ стороны, а уголъ между ними заключаетъ въ обоихъ четырехугольникахъ область съ тѣмъ-же знакомъ ω.

Итакъ въ случаѣ 8 дѣйствительныхъ граничныхъ плоскостей 2-го рода полное исчезаніе области возможныхъ направленій не достижимо.

Что для каждаго изъ остающихся возможныхъ направленій найдется и замкнутая призма, заключающая возможныя оси, это можетъ быть показано такимъ-же путемъ, какъ это дѣлалось въ предыдущей главѣ для случая 6 опорныхъ поверхностей, и мы этого дѣлать не будемъ.

54. Общее заключеніе этой главы. 1) Если четыре изъ нормалей къ 7 опорнымъ поверхностямъ удовлетворяютъ условію противостоянія, то всѣхъ четверокъ нормалей, удовлетворяющихъ этому условію, найдется *четыре* или *шесть* или *восемь*.

2) Въ первомъ изъ этихъ случаевъ можетъ быть достигнуто пол-

ное закрѣпленіе твердаго тѣла; для этого должны быть выполнены указанныя въ § 51 условія.

3) Этотъ случай при 7 опорныхъ поверхностяхъ единственный: въ остальныхъ двухъ случаяхъ полное исчезаніе области возможныхъ направленій не достигается.

Такимъ образомъ, принимая во вниманіе все сказанное въ предыдущихъ главахъ, мы видимъ, что *наименьшее число опорныхъ поверхностей, при которомъ можетъ быть достигнуто полное закрѣпленіе твердаго тѣла, есть семь.*

Ввиду этого результата можно не продолжать изслѣдованія для случая 8 или бо́льшаго числа опорныхъ поверхностей. Понятно, что при 8 опорныхъ поверхностяхъ нормали къ нимъ, для уничтоженія возможныхъ винтовыхъ осей могутъ быть подчинены меньшимъ ограниченіямъ; отысканіе требуемаго для этой цѣли расположенія нормалей не представляетъ труда вслѣдствіе болѣе широкаго выбора ихъ. Разборъ же всѣхъ встрѣчающихся при этомъ случаевъ можетъ быть сдѣланъ пріемами, подобными тѣмъ, которые указаны въ двухъ послѣднихъ главахъ.

Августъ, 1898 г.

[illegible], для этого должны быть выполнены эта-
[illegible] § 14 [illegible].

3) Этотъ случай при [illegible] единственно [illegible] образуетъ [illegible]
[illegible].

Такимъ образомъ, принимая во вниманіе все сказанное въ преды-
дущихъ главахъ, мы видимъ, что наименьшее число [illegible]
[illegible], при которыхъ [illegible] было бы достаточно [illegible]
[illegible] около 10 [illegible].

Этому [illegible] результату можно не придавать [illegible] для
случая 8 или большаго числа [illegible] совершится. Понятно, что
при 9 [illegible], что [illegible]
[illegible] могутъ быть [illegible] меньшимъ [illegible]
[illegible] для этой цѣли [illegible] и
[illegible] выбора [illegible]. Наиболь-
шее [illegible] при этомъ [illegible], можетъ быть [illegible]
[illegible] изъ двухъ [illegible]
формахъ.

Указатель главнѣйшихъ обозначеній.

Квадратныя скобки [ ] указываютъ ссылку на статью: „О винтовыхъ перемѣщеніяхъ твердаго тѣла, связи котораго выражаются неравенствами". Варш. Унив. Изв. 1896 г.

ω—угловая скорость на винтовой оси, изображаемая векторомъ, отложеннымъ въ ту сторону, откуда вращеніе кажется происходящимъ по часовой стрѣлкѣ.

p—параметръ винтовой скорости, считаемый положительнымъ, когда угловая и поступательная скорости направлены въ одну сторону.

n_i — нормаль къ опорной поверхности въ точкѣ касанія къ ней двигающагося твердаго тѣла, считаемая положительною въ ту сторону, куда твердое тѣло можетъ отъ поверхности отходить.

Σ_i — опорная поверхность.

S_i — часть поверхности твердаго тѣла, опирающаяся на поверхность Σ_i.

l — винтовая ось.

δ_i — кратчайшее разстояніе между l и n_i, считаемое всегда положительнымъ.

φ_i — уголъ между l и n_i, отсчитываемый по слѣдующему правилу: проведемъ черезъ точку пересѣченія n_i и δ_i прямую l_0, параллельную l; тогда уголъ φ_i отсчитывается отъ n_i до первой встрѣчи съ l_0 по часовой стрѣлкѣ, если смотрѣть на плоскость (n_i, l_0) съ той стороны, съ которой находится ось l.

ξ, η, ζ — слагаемыя угловой скорости винтового движенія на координатныхъ осяхъ.

λ, μ, ν — моменты угловой скорости относительно координатныхъ осей.

$\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \lambda_i, \mu_i, \nu_i$ — подобныя-же координаты прямой n_i.

q_{ik} — косинусъ угла между положительными направленіями нормалей n_i и n_k.

q_i — косинусъ угла между положительнымъ направленіемъ нормалей n_i и угловою скоростью.

N_i — плоскость, содержащая нормаль n_i и параллельная заданному направленію винтовыхъ осей.

Сфера параметровъ — шаръ, описанный около произвольной точки радіусомъ, равнымъ единицѣ; точки на поверхности этого шара служатъ для опредѣленія положительныхъ направленій угловой скорости; отъ нахожденія такой точки въ той или другой области на сферѣ параметровъ зависятъ знаки неравенствъ, которымъ удовлетворяетъ p.

S'_{ik} — дѣйствительная граничная плоскость перваго рода, соотвѣтствующая парѣ нормалей n_i и n_k.

S''_{ik} — плоскость, подобная граничной плоскости перваго рода.

S_{ik} — та или другая изъ предыдущихъ плоскостей, когда не дѣлается между ними различія.

s'_{ik}, s''_{ik}, s_{ik} — слѣды предыдущихъ плоскостей на плоскости чертежа, перпендикулярной къ заданному направленію винтовыхъ осей.

σ_{ikl} — прямая пересѣченія трехъ граничныхъ плоскостей S_{kl}, S_{li}, S_{ik}.

V_{ikl} — опредѣлитель $\begin{vmatrix} \xi_i & \eta_i & \zeta_i \\ \xi_k & \eta_k & \zeta_k \\ \xi_l & \eta_l & \zeta_l \end{vmatrix}$.

ε_{ik} — уголъ между двумя граничными плоскостями S_{il} и S_{kl}.

(ε_{ik}) — кривая на сферѣ параметровъ, точки которой опредѣляютъ такія направленія винтовыхъ осей, для которыхъ уголъ ε_{ik} прямой.

$(\varepsilon_{ik})_0$ — одна изъ предыдущихъ кривыхъ, для которой $\varepsilon_{ik} = \pi/2$.

P'_{iklm} — дѣйствительная граничная плоскость второго рода, опредѣляемая нормалями n_i, n_k, n_l, n_m.

P''_{iklm} — плоскость, подобная граничной плоскости второго рода.

P_{iklm} — та или другая изъ предыдущихъ двухъ плоскостей, когда не дѣлается между ними различія.

D — опредѣлитель, составленный изъ координатъ шести нормалей къ шести опорнымъ поверхностямъ.

D_i — опредѣлитель, составленный изъ координатъ тѣхъ шести нормалей изъ общаго числа семи нормалей къ семи опорнымъ поверхностямъ, между которыми нѣтъ нормали n_i.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ:

Стран.	*Строка сверху:*	*Напечатано:*	*Должно быть:*
2	30	равнымъ	равною
10	30	по	подъ
12	18	$\xi, \eta, \zeta, \lambda, \eta, \nu$	$\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu, \nu$
20	27	расности	разности
44	4	повермностей	поверхностей
82	18	XXV	XXVI

О нѣкоторыхъ дифференціальныхъ и разностныхъ линейныхъ уравненіяхъ, интегрируемыхъ посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ.

(По одному и многимъ независимымъ перемѣннымъ).

И. Р. Брайцева.

ГЛАВА I.

Эйлеровы интегралы съ произвольными параметрами. Линейныя уравненія въ конечныхъ разностяхъ, интегралы которыхъ зависятъ отъ этихъ интеграловъ.

§ 1.

Обозначимъ чрезъ $f(u)$ слѣдующую функцію:

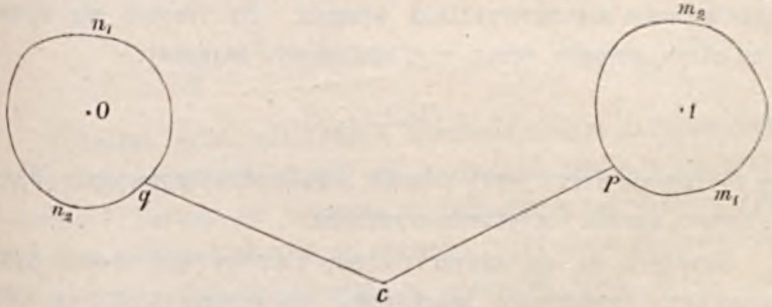
$$f(u) = e^{-\pi(a+b)i} u^{a-1}(1-u)^{b-1}, \tag{1}$$

гдѣ a и b нѣкоторыя постоянныя, и разсмотримъ вмѣстѣ съ L. Pochhammer'омъ [1]) слѣдующій интегралъ:

$$\bar{E}(a, b) = e^{-\pi(a+b)i} \int_L u^{a-1}(1-u)^{b-1} du. \tag{2}$$

Замѣтимъ, что путь интеграціи L состоитъ изъ послѣдовательности путей:

Черт. 1.



[1]) „Zur Theorie der Euler'schen Integrale". Math. Ann., Leipzig, 1890.

cpm_1m_2pc, cqn_1n_2qc, cpm_2m_1pc и cqn_2n_1qc. Каждый изъ этихъ послѣднихъ представляетъ элементарный контуръ съ общимъ началомъ c. Условимся эти контуры въ указанномъ порядкѣ обозначать такъ: (1), (0), $(\bar{1})$ и $(\bar{0})$. При этомъ, черточка вверху указываетъ на то, что означенный путь пробѣгается перемѣннымъ u въ отрицательномъ направленіи. Что же касается до всего пути L, то условимся обозначать его слѣдующимъ образомъ:

$$L = (10\bar{1}\bar{0}). \tag{2'}$$

Самый же интегралъ (2) будемъ обозначать такъ:

$$\bar{E}(a, b) = e^{-\pi(a+b)i}\int_c^{(10\bar{1}\bar{0})} u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du. \tag{3}$$

Такое обозначеніе имѣетъ то преимущество, что прямо указывается, какъ начало c, отъ котораго производится интеграція, такъ и самый путь интегрированія. Въ другихъ случаяхъ, когда не будетъ особенной нужды въ указаніи начала c, мы будемъ пользоваться болѣе сокращеннымъ обозначеніемъ, котораго придерживался П. А. Некрасовъ въ своей статьѣ: „Линейныя дифференціальныя уравненія, интегрируемыя посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ", а именно:

$$\bar{E}(a, b) = e^{-\pi(a-1)i}\,[(10\bar{1}\bar{0})]. \tag{4}$$

Послѣ опредѣленія пути интеграціи, остается выбрать аналитическое значеніе подъинтегральной функціи. За таковое мы примемъ ту ея вѣтвь, которая, при $u = c$, принимаетъ величину:

$$f(c) = f_0(c). \tag{4'}$$

При соблюденіи этихъ двухъ условій, ясное дѣло, интегралъ (3), или (4) имѣетъ вполнѣ опредѣленное значеніе.

Опираясь на извѣстную теорему Cauchy изъ теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго, заключаемъ, что интегралъ (3), или (4) въ извѣстныхъ предѣлахъ не зависитъ отъ начала c. Но въ этомъ можно убѣдиться и другимъ путемъ, давъ формулѣ (2) иное выраженіе. Въ самомъ дѣлѣ,

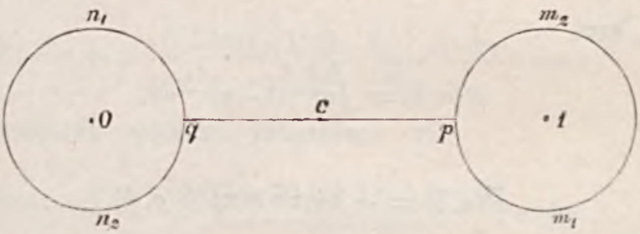
$$\bar{E}(a, b) = e^{-\pi(a-1)i}[(10\bar{1}\bar{0})] = e^{-\pi(a-1)i}\{(1-e^{2\pi ai})[(1)]-(1-e^{2\pi bi})[(0)]\} =$$

$$= e^{-\pi(a-1)i}\{(1-e^{2\pi ai})\int\limits_{(1)} u^{a-1}(u-1)^{b-1}\,du-(1-e^{2\pi bi})\int\limits_{(0)} u^{a-1}(u-1)^{b-1}du+$$

$$+(1-e^{2\pi ai})(1-e^{2\pi bi})\int\limits_q^p u^{a-1}(u-1)^{b-1}\,du\}. \tag{5}$$

Относительно интеграловъ правой части соотношенія (5) замѣтимъ слѣдующее: $[(1)]$ и $[(0)]$ суть интегралы, взятые по элементарнымъ контурамъ (1) и (0); интегралы $\int\limits_{(1)} u^{a-1}(u-1)^{b-1}\,du$ и $\int\limits_{(0)} u^{a-1}(u-1)^{b-1}\,du$ берутся по замкнутымъ кривымъ: pm_1m_2p и qn_1n_2q; наконецъ, за путь интеграціи $\int\limits_q^p u^{a-1}(u-1)^{b-1}du$ можно принять прямую qp. Формула (5) обнаруживаетъ, что $\bar{E}(a, b)$, дѣйствительно, не зависитъ отъ начала c. Въ виду этого обстоятельства, точку c въ плоскости перемѣннаго u можно перемѣщать по любой линіи, лишь бы она не встрѣчала ни точки 0, ни **1**. Благодаря этому, а также въ силу тѣхъ соображеній, что отдѣльныя части пути L можно деформировать, не измѣняя тѣмъ величины интеграла (2), путь интеграціи можно представить такъ:

Черт. 2.



Сдѣлаемъ здѣсь надлежащія поясненія. Путь L тутъ состоитъ изъ отрѣзка cp дѣйствительной оси, окружности pm_1m_2p съ центромъ въ точкѣ 1, потомъ pc, отрѣзка cq дѣйствительной оси, окружности qn_1n_2q съ центромъ въ 0 и qc; наконецъ путей: cp, pm_2m_1p, pc, cq, qn_2n_1q и qc. Что же касается до величины $f_0(c)$, то за таковую примемъ:

$$f_0(c) = e^{-\pi(a+b)i+(a-1)lgc+(b-1)lg(1-c)}, \tag{6}$$

гдѣ lgc и $lg(1-c)$ суть дѣйствительныя значенія.

Формула (5) легко даетъ связь между интеграломъ L. Pochhammer'a $\overline{E}(a, b)$ и интеграломъ Эйлера перваго рода $B(a, b)$. Какъ извѣстно, этотъ послѣдній имѣетъ смыслъ лишь при соблюденіи условій:

$$(7) \qquad R(a) > 0, \quad R(b) > 0;$$

При чемъ подъ $R(a)$ и $R(b)$ разумѣемъ дѣйствительныя части количествъ a и b.

Но, при неравенствахъ (7), для безконечно малыхъ размѣровъ окружностей pm_1m_2p и qn_1n_2q имѣютъ мѣсто:

$$(8) \qquad \int\limits_{(1)} u^{a-1}(u-1)^{b-1}du = 0, \quad \int\limits_{(0)} u^{a-1}(u-1)^{b-1}du = 0,$$

и формула (5) принимаетъ видъ:

$$(9) \qquad \begin{aligned} \overline{E}(a, b) &= e^{-\pi(a-1)i}(1-e^{2\pi ai})(1-e^{2\pi bi})\int\limits_0^1 u^{a-1}(u-1)^{b-1}du = \\ &= e^{\pi ai}-e^{-\pi ai})(e^{\pi bi}-e^{-\pi bi})\int\limits_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du = \\ &= -4 sn\pi a\, sn\pi b\int\limits_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du. \end{aligned}$$

А такъ какъ

$$(9') \qquad B(a, b) = \int\limits_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du,$$

то

$$(10) \qquad \overline{E}(a, b) = -4 sn\pi a\, sn\pi b\, B(a, b).$$

Та же формула (5), примѣненная къ случаю a и b цѣлыхъ или нуля, приводитъ къ интереснымъ результатамъ. Положимъ прежде всего, что a есть цѣлое положительное число $+m$, отличное отъ нуля. Тогда легко видѣть, что формула (5) даетъ:

$$(11) \qquad E(+m, b) = 0.$$

Аналогичнымъ образомъ легко убѣдиться, что

$$(12) \qquad E(a, +m) = 0.$$

Допустимъ, что $a=0$. Тогда по формулѣ (5) найдемъ:

$$\overline{E}(0,b)=(1-e^{2\pi bi})\int\limits_{(0)}u^{-1}(u-1)^{b-1}du=-4\pi sn\pi b. \tag{13}$$

Такимъ же образомъ находимъ:

$$\overline{E}(a,0)=-4\pi sn\pi a. \tag{14}$$

Допустимъ, наконецъ, что a есть цѣлое отрицательное число $-m$. Тогда по той же формулѣ (5) будемъ имѣть:

$$\begin{aligned}\overline{E}(-m,b)&=(-1)^m(1-e^{2\pi bi})\int\limits_{(0)}u^{-m-1}(u-1)^{b-1}du=\\&=(-1)^m 2i\,sn\pi b\int\limits_{(0)}u^{-m-1}(1-u)^{b-1}du.\end{aligned} \tag{15}$$

Разлагая $(1-u)^{b-1}$ по восходящимъ степенямъ a, получимъ:

$$\begin{aligned}(1-u)^{b-1}&=1-\frac{(b-1)}{1}u+\frac{(b-1)(b-2)}{1\cdot 2}u^2-\cdots\\&\cdots+(-1)^m\frac{(b-1)(b-1)\cdots(b-m)}{1.2.3\cdots m}u^m+\cdots\end{aligned} \tag{16}$$

Внося выраженіе (16) въ формулу (15) и выполняя интеграцію, находимъ:

$$\overline{E}(-m,b)=-\frac{4\pi(b-1)(b-2)\cdots(b-m)}{1.2\cdots m}sn\pi b. \tag{17}$$

Аналогичнымъ пріемомъ убѣждаемся, что

$$E(a,-m)=-\frac{4\pi(a-1)(a-1)\cdots(a-m)}{1.2\cdots m}sn\,\pi\,a. \tag{18}$$

Формулы (17) и (18) даютъ:

$$\overline{E}(-m,-n)=0, \tag{19}$$

при цѣломъ n (нуль не исключается).

§ 2.

Формула (14) получается изъ (13) чрезъ замѣну въ ней b чрезъ a и взаимное перемѣщеніе a и o. Аналогичнымъ пріемомъ получается формула (18) изъ (17). Это обстоятельство является слѣдствіемъ одного свойства функціи $\bar{E}(a, b)$, по которому значеніе ея не мѣняется отъ взаимнаго перемѣщенія a и b, а именно:

$$(20) \qquad \bar{E}(a, b) = \bar{E}(b, a).$$

Убѣдиться въ этомъ можно слѣдующимъ образомъ. Преобразуемъ интегралъ (2) къ новому перемѣнному интеграціи w при помощи подстановки:

$$(21) \qquad 1 - u = w.$$

Будемъ имѣть:

$$(22) \qquad \bar{E}(a, b) = e^{-\pi(a+b)i} \int_{c_1}^{(10\bar{1}\bar{0})} w^{b-1}(1-w)^{a-1}dw,$$

гдѣ принято:

$$(23) \qquad c_1 = 1 - c.$$

Такъ какъ $\int_{c_1}^{(10\bar{1}\bar{0})} w^{b-1}(1-w)^{a-1}dw$ не зависитъ отъ начала c_1, то можно принять за таковое точку c, и тогда, придерживаясь обозначенія (2), соотношеніе (22) представимъ въ формѣ (20).

Легко также обнаружить, что имѣютъ мѣсто слѣдующія соотношенія:

$$(24) \qquad \bar{E}(a, b) = \bar{E}(1-a-b, b) = \bar{E}(1-a-b, a).$$

Въ самомъ дѣлѣ, обозначимъ чрезъ

$$(24') \qquad \sigma = (01)$$

путь, состоящій изъ соединенія двухъ простыхъ контуровъ: (0) и (1), при одномъ и томъ же началѣ c, и разсмотримъ интегралъ:

$$(25) \qquad E(1-a-b, b) = e^{\pi(a-1)i} \int_{c}^{(10\bar{1}\bar{0})} u^{-a-b}(1-u)^{b-1}\,du.$$

Это соотношеніе получается изъ формулы (2) послѣ замѣны въ ней a количествомъ $1 - a - b$.

Въ интегралѣ (25) введемъ новое перемѣнное интеграціи u' на основаніи подстановки:

$$(26) \qquad u = \frac{1}{u'}.$$

Тогда получимъ:

$$\bar{E}(1-a-b,\, b) = e^{\pi a i}\int\limits_{c_2}^{(1\infty\bar{1}\bar{\infty})} u'^{\,a-1}(u'-1)^{b-1}\,du' =$$

$$= e^{\pi a i}\left[(1\bar{\sigma}\bar{1}\sigma)\right] = e^{-\pi(a-1)i}\left\{ (1-e^{2\pi a i})\,[(1)] - (1-e^{2\pi b i})\,[(0)] \right\} =$$

$$= e^{-\pi(a+b)i}\int\limits_{c_2}^{(10\bar{1}\bar{0})} u'^{\,a-1}(1-u')^{b-1}\,du' = \bar{E}(a,\, b), \tag{27}$$

гдѣ положено:

$$c_2 = \frac{1}{c}. \tag{27'}$$

Такимъ образомъ одно равенство (24) установлено. Что же касается до другого изъ нихъ, то его мы получимъ изъ (27), если въ этомъ послѣднемъ взаимно перемѣстимъ a и b.

§ 3.

Остановимся теперь на выводѣ нѣкоторыхъ формулъ, которыя понадобятся намъ впослѣдствіи. Для этой цѣли поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Замѣнимъ въ формулѣ (3) a чрезъ $a+1$. Тогда будемъ имѣть:

$$\bar{E}(a+1,\, b) = -\,e^{-\pi(a+b)i}\int\limits_{c}^{(10\bar{1}\bar{0})} u^{a}(1-u)^{b-1}\,du. \tag{28}$$

При помощи интеграціи по частямъ убѣждаемся въ справедливости:

$$\bar{E}(a+1,\, b) = -\frac{a}{a+b}\,\bar{E}(a,\, b). \tag{29}$$

Замѣняя въ этой формулѣ последовательно a чрезъ a, $a+1$, $a+2$, ..., $a+m-1$, найдемъ:

$$\bar{E}(a+1,\, b) = -\frac{a}{a+b}\,\bar{E}(a,\, b);$$

$$\bar{E}(a+2,\, b) = -\frac{a+1}{a+1+b}\,\bar{E}(a+1,\, b; \tag{30}$$

. . . .

$$\bar{E}(a+m,\, b) = -\frac{a+m-1}{a+b+m-1}\,\bar{E}(a+m,\, b).$$

Послѣ перемноженія почленно этихъ равенствъ, получимъ:

$$(31)\qquad \bar{E}(a+m,\, b) = (-1)^m \frac{a(a+1)\,(a+2)\cdots(a+m-1)}{(a+b)\,(a+b+1)\cdots(a+b+m-1)}\,\bar{E}(a,\, b).$$

Изъ соотношенія (29) очевиднымъ образомъ получаются слѣдующія равенства:

$$(32)\qquad \begin{aligned} \bar{E}(a-1,\, b) &= -\frac{a+b-1}{a-1}\,\bar{E}(a,\, b);\\ \bar{E}(a-2,\, b) &= -\frac{a+b-2}{a-2}\,\bar{E}(a-1,\, b),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \bar{E}(a-m,\, b) &= -\frac{a+b-m}{a-m}\,\bar{E}(a-m-1,\, b). \end{aligned}$$

Умножая почленно эти соотношенія, будемъ имѣть:

$$(33)\qquad \bar{E}(a-m,\, b) = (-1)^m \frac{(a+b-1)\,(a+b-2)\cdots(a+b-m)}{(a-1)\,(a-2)\cdots(a-m)}\,\bar{E}(a,\, b).$$

Изъ формулъ (31) и (33) путемъ перемѣщенія надлежащихъ количествъ находимъ:

$$(34)\qquad \bar{E}(a,\, b+m) = (-1)^m \frac{b(b+1)\,(b+2)\cdots(b+m-1)}{(a+b)\,(a+b+1)\cdots(a+b+m-1)}\,\bar{E}(a,\, b).$$

$$(35)\qquad \bar{E}(a,\, b-m) = (-1)^m \frac{(a+b-1)\,(a+b-2)\cdots(a+b-m)}{(b-1)\,(b-2)\cdots(b-m)}\,\bar{E}(a,\, b).$$

Будемъ считать теперь $\bar{E}(a,\, b)$ функціей независимыхъ перемѣнныхъ a и b. Легко убѣдиться, что функція $\bar{E}(a,\, b)$ голоморфна для всѣхъ конечныхъ a и b. Формулы же (11), (12) и (24) показываютъ, что $\bar{E}(a,\, b)$ обращаются въ нуль для слѣдующихъ значеній a и b:

$$(36)\qquad \begin{aligned} &a = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots\ ; \quad b \text{ произвольно.}\\ &b = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots\ ; \quad a \text{ произвольно.}\\ &a+b = 0,\ -1,\ -2,\ -3, \cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Совершенно простой анализъ убѣждаетъ, что это простые нули функціи $\bar{E}(a,\, b)$. Пользуясь соображеніями, приведенными у Forsyth'а на стр. 76 въ его: „Theory of functions of a complex variable", строимъ голоморфную функцію двухъ перемѣнныхъ a и b, которая бы обладала однократными нулями (36). Эта функція такова:

$$f(a, b) = (a+b) \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(1-\frac{a}{r}\right) \left(1-\frac{b}{r}\right) \left(1+\frac{a+b}{r}\right) \varphi(a, b), \qquad (37)$$

гдѣ голоморфная функція $\varphi(a, b)$ не имѣетъ нулями количествъ (36).

Функція $f(a, b)$, какъ частный случай, обнимаетъ функцію $\bar{E}(a, b)$. Намъ надо теперь выбрать $\varphi(a, b)$ такимъ образомъ, что бы имѣло мѣсто тождественно:

$$f(a, b) = \bar{E}(a, b). \qquad (38)$$

Если допустить, что выполняются условія (7), то, принимая во вниманіе соотношеніе (10), можемъ написать:

$$-4 sn \pi a \; sn \pi b \; B(a, b) = (a+b) \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(1-\frac{a}{r}\right) \left(1-\frac{b}{r}\right) \left(1+\frac{a+b}{r}\right) \varphi(a, b). \qquad (39)$$

Далѣе, при помощи извѣстныхъ формулъ:

$$sn \pi z = \pi z \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(1-\frac{z^2}{r^2}\right), \qquad (40)$$

а также:

$$B(a, b) = \frac{a+b}{ab} \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{r(a+b+r)}{(a+r)(b+r)}\right), \qquad (41)$$

изъ равенства (39) найдемъ:

$$\varphi(a, b) = -4\pi^2. \qquad (42)$$

Итакъ, если дѣйствительныя части a и b больше нуля, будемъ имѣть:

$$\bar{E}(a, b) = -4\pi^2 (a+b) \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(1-\frac{a}{r}\right) \left(1-\frac{b}{r}\right) \left(1+\frac{a+b}{r}\right). \qquad (43)$$

Отсюда, на основаніи извѣстной теоремы теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго, обобщенной на случай какого угодно числа независимыхъ перемѣнныхъ, заключаемъ о справедливости формулы (43) для любыхъ a и b.

Выведемъ тутъ одну формулу, которая должна имѣть значеніе въ полной теоріи функціи $\bar{E}(a, b)$. Для этой цѣли поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Перемѣнимъ въ формулѣ (43) знаки при a и b на обратные. Тогда получимъ:

$$(44) \quad \bar{E}(-a, -b) = 4\pi^2(a+b) \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(1+\frac{a}{r}\right)\left(1+\frac{b}{r}\right)\left(1-\frac{a+b}{r}\right).$$

Если теперь равенства (43) и (44) почленно перемножимъ, то найдемъ:

$$(45) \quad \bar{E}(a, b)\,\bar{E}(-a, -b) = -16\pi^4(a+b)^2 \prod_{r-1}^{r=\infty} \left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)\left[1-\frac{(a+b)^2}{r^2}\right].$$

Пользуясь же формулою (40), предыдущему соотношенію дадимъ видъ:

$$(46) \quad \bar{E}(a, b)\,\bar{E}(-a, -b) = -\frac{16\pi\,(a+b)\,sn\pi a\,sn\pi b\,sn\pi\,(a+b)}{ab}.$$

На ряду съ формулою (46), мы могли бы получить еще интересныя формулы; но, не желая уклоняться отъ прямой цѣли, на выводѣ ихъ останавливаться не станемъ.

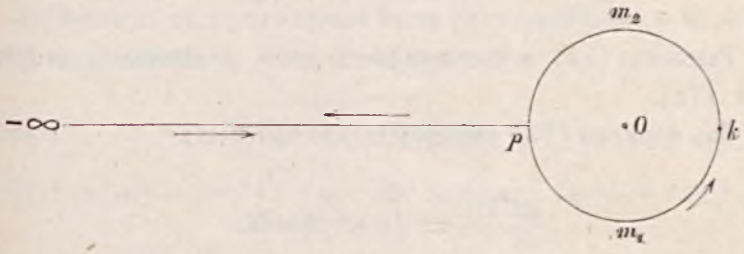
§ 4.

Мы еще возвратимся къ интегралу $\bar{E}(a, b)$. Теперь же сосредоточимъ особенное вниманіе на изученіи нѣкоторыхъ свойствъ интеграла:

$$(47) \quad \Gamma(a) = \int_{-\infty}^{(0)} e^u u^{a-1}\,du,$$

гдѣ путь интеграціи состоитъ изъ отрѣзка $-\infty\, p$ дѣйствительной оси, окружности pm_1km_2p и, наконецъ, отрѣзка $p-\infty$ той же оси. При этомъ, интегрированіе совершается въ положительномъ направленіи (это направленіе на чертежѣ 3 обозначено стрѣлкой). Но, чтобы инте-

Черт. 3.



гралъ (47) имѣлъ вполнѣ опредѣленное значеніе, подъинтегральной функціи

$$\varphi(u)=e^u u^{a-1} \tag{48}$$

нужно дать опредѣленное аналитическое выраженіе. Если чрезъ $u=c$ обозначимъ абсцису точки k, то за таковое выраженіе выберемъ ту ея вѣтвь, которая для $u=c$ принимаетъ:

$$\varphi(c)=e^{c+(a-1)lgc}; \tag{49}$$

при чемъ lgc представляетъ дѣйствительное значеніе.

Легко теперь сообразить, что $\Gamma(a)$, при этомъ условіи, оказывается функціей голоморфною на всей конечной плоскости перемѣннаго a. Въ самомъ дѣлѣ, для всякаго конечнаго a $\Gamma(a)$, очевидно, имѣетъ величину конечную и вполнѣ опредѣленную. Далѣе, легко видѣть, что $\Gamma(a)$ непрерывна для всякаго конечнаго a. Дѣйствительно, давъ a безконечно малое приращеніе Δa, найдемъ послѣ вычитанія:

$$\Gamma(a+\Delta a)-\Gamma(a)=\int_{-\infty}^{(0)} e^u u^{a-1}(u^{\Delta a}-1)\,du. \tag{50}$$

Далѣе, имѣемъ:

$$u^{\Delta a}=1+\frac{\Delta a}{1}lgu+\frac{\Delta a^2}{1.2}lg^2u+\cdots+\frac{\Delta a^k}{1.2\cdots k}lg^k u+\cdots, \tag{51}$$

гдѣ принято:

$$lg^k u=(lgu)^k. \tag{52}$$

Внеся выраженіе (51) въ (50), получимъ:

$$\overline{\Gamma}(a+\Delta a) - \overline{\Gamma}(a) =$$

(53)
$$= \Delta a \int_{-\infty}^{(0)} e^u u^{a-1} lgu \left[1 + \frac{\Delta a}{1} lgu + \frac{\Delta a^2}{1.2} lg^2 u + \cdots\right] du.$$

Равенство (53) и подтверждаетъ наше положеніе о непрерывности $\overline{\Gamma}(a)$.

Изъ формулы (53) непосредственно вытекаетъ:

(54)
$$\frac{d\overline{\Gamma}(a)}{da} = \int_{-\infty}^{(0)} e^u u^{a-1} lgu\, du.$$

Что же касается до однозначности $\overline{\Gamma}(a)$ для всѣхъ точекъ конечной плоскости a, то это свойство ея вполнѣ очевидно. Всѣ эти результаты и доказываютъ голоморфность функціи $\overline{\Gamma}(a)$. Такъ какъ далѣе подъинтегральная функція показательная относительно a, то мы въ правѣ заключить, что $a = \infty$ служитъ существенно особой точкою изучаемой функціи.

Выраженіе (47) постараемся представить нѣсколько въ иной формѣ, которая позволитъ намъ найти нули функціи $\overline{\Gamma}(a)$.

Имѣемъ:

$$\overline{\Gamma}(a) = \int_{-\infty}^{p} e^u u^{a-1} du + \int_{(0)} e^u u^{a-1} du + e^{2\pi a i} \int_{p}^{-\infty} e^u u^{a-1} du =$$

(55)
$$= (1 - e^{2\pi a i}) \int_{-\infty}^{p} e^u u^{a-1} du + \int_{(0)} e^u u^{a-1} du.$$

При помощи формулы (55), легко устанавливается зависимость между $\overline{\Gamma}(a)$ и Эйлеровымъ интеграломъ второго рода $\Gamma(a)$. Въ самомъ дѣлѣ, принимая во вниманіе условіе:

(56)
$$R(a) > 0,$$

при которомъ только имѣетъ смыслъ $\Gamma(a)$, по формулѣ (55) найдемъ:

(57)
$$\overline{\Gamma}(a) = (1 - e^{2\pi a i}) \int_{-\infty}^{(0)} e^u u^{a-1} du,$$

ибо уменьшая до нуля размѣръ круга pm_1m_2p, въ предѣлѣ будемъ имѣть:

$$lim. \int\limits_{(0)} e^u u^{a-1} du = 0. \tag{58}$$

Измѣнивъ въ интегралѣ правой части (57) перемѣнное u на u' при помощи подстановки:

$$u = -u', \tag{59}$$

получимъ:

$$\overline{\Gamma}(a) = (e^{\pi a i} - e^{-\pi a i}) \int\limits_0^{\infty} e^{-u'} u'^{a-1} du' = 2i sn \pi a \int\limits_0^{\infty} e^{-u'} u'^{a-1} du', \tag{60}$$

или:

$$\overline{\Gamma}(a) = 2i sn \pi a \, \Gamma(a). \tag{61}$$

Изслѣдуемъ теперь значенія $\overline{\Gamma}(a)$ для цѣлыхъ значеній аргумента a или нуля. Пусть прежде всего a будетъ цѣлое положительное число $+m$, отличное отъ нуля. Тогда формула (61) даетъ:

$$\overline{\Gamma}(+m) = 0. \tag{62}$$

Далѣе, если $a = 0$, то по формулѣ (55) найдемъ:

$$\overline{\Gamma}(o) = \int\limits_{(0)} e^u u^{-1} du = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{1.2.3\cdots k} \int\limits_{(0)} u^{k-1} du = 2\pi i. \tag{63}$$

Если же a есть цѣлое отрицательное число $-m$, то по той же формулѣ (55) будемъ имѣть:

$$\overline{\Gamma}(-m) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1.2\cdots k} \int\limits_{(0)} u^{k-m-1} du = \frac{2\pi i}{1.2.3\cdots m} \tag{64}$$

Равенство (62) обнаруживаетъ, что нулями функціи $\overline{\Gamma}(a)$ служатъ: 1, 2, 3, 4, ⋯. Безъ труда можно удостовѣриться, что каждый изъ нихъ кратности единица. Въ самомъ дѣлѣ, если чрезъ m обозначимъ какой-либо изъ этихъ нулей, а чрезъ ε безконечно малую величину, то будемъ имѣть:

$$\overline{\Gamma}(m+\varepsilon) = \int\limits_{-\infty}^{(0)} e^u u^{m+\varepsilon-1} du. \tag{65}$$

Но имѣемъ:

$$u^{m+\varepsilon-1} = u^{m-1}\left[1+\varepsilon\, lgu+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\, lg^2u+\cdots\right]. \tag{66}$$

Внеся выраженіе (66) въ (65), найдемъ:

$$\Gamma(m+\varepsilon) = \varepsilon\int_{-\infty}^{(0)} e^u u^{m-1}\, lgu\, du+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\int_{-\infty}^{(0)} e^u u^{m-1}\, lg^2u\, du+\cdots. \tag{67}$$

Покажемъ, что коэффиціентъ при ε въ (67) отличенъ отъ нуля. Имѣемъ:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{(0)} e^u u^{m-1}\, lgu\, du &= 2\pi i\int_0^{-\infty} e^u u^{m-1}\, du+lim.\int_{(0)} e^u u^{m-1}\, lgu\, du = \\ &= (-1)^m 2\pi i\,\Gamma(m),\end{aligned} \tag{68}$$

такъ какъ при всякомъ цѣломъ положительномъ m, имѣетъ мѣсто:

$$lim.\int_{(0)} e^u u^{m-1}\, lgu\, du = 0. \tag{69}$$

Итакъ, доказано, что 1, 2, 3, 4, ⋯ суть однократные нули функціи $\Gamma(a)$.

§ 5.

Въ этомъ параграфѣ мы дадимъ нѣсколько формулъ, изъ которыхъ нѣкоторыя имѣютъ важное значеніе для послѣдующаго. Предварительно построимъ функцію, имѣющую своими однократными нулями нули функціи $\Gamma(a)$: 1, 2, 3, 4, 5, ⋯ .

Пользуясь соображеніями, извѣстными въ теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго, эту функцію представляемъ въ формѣ:

$$f(a) = \prod_{r=1}^{r=\infty}\left(1-\frac{a}{r}\right)e^{\frac{a}{r}}\,\varphi(a), \tag{70}$$

гдѣ $\varphi(a)$ голоморфная функція въ конечной плоскости.

Принявъ во вниманіе формулу:

$$\lim_{n=\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-lgn\right] = c, \tag{71}$$

гдѣ c Эйлерово постоянное, соотношенію (70) можетъ дать такое выраженіе:

$$\overline{\Gamma}(a) = \varphi(a) e^{ca} lim. \frac{(1-a)(2-a)\cdots(n-a)}{1.2.3.4\cdots n} n^a. \tag{72}$$

Легко удостовѣриться, что

$$e^{ca}\varphi(a) = 2\pi i. \tag{72'}$$

Въ самомъ дѣлѣ, пользуясь извѣстной формулою:

$$\Gamma(a) = \lim_{n=\infty} \left[\frac{1.2.3\cdots n}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)} n^a\right], \tag{73}$$

а также формулою (40) и принимая во вниманіе (61), находимъ:

$$\overline{\Gamma}(a) = 2\pi i \lim_{n=\infty} \left[\frac{(1-a)(2-a)\cdots(n-a)}{1.2.3.4\cdots n} n^a\right]. \tag{74}$$

Сопоставляя (72) и (74), заключаемъ о справедливости (72′) для случая $R(a) > 0$, Отсюда, на основаніи извѣстной теоремы теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго, убѣждаемся въ справедливости (72′) при любомъ a.

Кромѣ разложенія (74), функція $\overline{\Gamma}(a)$ можетъ имѣть также:

$$\overline{\Gamma}(a) = 2\pi i e^{-ca} \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{a}{r}\right) e^{\frac{a}{r}}. \tag{75}$$

Измѣняя далѣе въ формулѣ (74) количество a на $a+1$, будемъ имѣть:

$$\overline{\Gamma}(a+1) = 2\pi i \lim_{n=\infty} \left[\frac{-a(1-a)(2-a)\cdots(n-a-1)}{1.2.3\cdots n} n^{a+1}\right]. \tag{76}$$

Дѣля далѣе равенство (76) почленно на равенство (74), получимъ:

$$\overline{\Gamma}(a+1) = -a\,\overline{\Gamma}(a). \tag{77}$$

Изъ равенства (77) очевиднымъ образомъ получается рядъ соотношеній:

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}(a+1) &= -a\,\overline{\Gamma}(a); \\ \overline{\Gamma}(a+2) &= -(a+1)\,\overline{\Gamma}(a+1); \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overline{\Gamma}(a+k) &= -(a+k-1)\,\overline{\Gamma}(a+k-1). \end{aligned} \tag{78}$$

Послѣ перемноженія равенствъ (78), найдемъ:

(79) $$\overline{\Gamma}(a+k) = (-1)^k a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1)\overline{\Gamma}(a).$$

Изъ соотношенія (77) получимъ слѣдующія формулы:

(80) $$\begin{aligned} \overline{\Gamma}(a-1) &= -\frac{\overline{\Gamma}(a)}{a-1}; \\ \overline{\Gamma}(a-1) &= -\frac{\overline{\Gamma}(a-1)}{a-2}; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overline{\Gamma}(a-k) &= -\frac{\overline{\Gamma}(a-k-1)}{a-k}. \end{aligned}$$

Перемноживъ между собою почленно соотношенія (80), будемъ имѣть:

(81) $$\overline{\Gamma}(a-k) = \frac{(-1)^k\,\overline{\Gamma}(a)}{(a-1)(a-2)\cdots(a-k)}.$$

Если въ формулѣ (74) измѣнимъ знакъ у a, то получимъ:

(82) $$\overline{\Gamma}(-a) = 2\pi i \lim_{n=\infty}\left[\frac{(1+a)(2+a)\cdots(n+a)}{1.2.3\cdots n}\, n^{-a}\right].$$

Перемноживъ почленно равенства (74) и (82), будемъ имѣть:

(83) $$\overline{\Gamma}(a)\,\overline{\Gamma}(-a) = -4\pi^2 \lim_{n=\infty}\left[\left(1-\frac{a^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{a^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right)\right],$$

или, въ силу (40),

(84) $$\overline{\Gamma}(a)\,\overline{\Gamma}(-a) = -\frac{4\pi\, sn\, \pi a}{a}.$$

Эта формула имѣетъ существенное значеніе въ полной теоріи функціи $\Gamma(a)$. Аналогичнымъ образомъ убѣждаемся, что:

(85) $$\overline{\Gamma}(a)\,\overline{\Gamma}(1-a) = -4\pi\, sn\, \pi a.$$

При помощи формулъ (74) и (73), формулу (43) можно представить такъ:

(86) $$E(a,b) = \frac{\overline{\Gamma}(a)\,\overline{\Gamma}(b)}{\overline{\Gamma}(a+b)}.$$

Обозначимъ далѣе чрезъ $\overline{B}_\mu(a, b)$ слѣдующую функцію перемѣнныхъ a и b:

$$B_\mu(a, b) = e^{-\pi(a-1)i} \int_c^{(10\bar{1}\bar{0})} u^{a-1}(u-1)^{b-1}\,[lg(u-1)]^\mu\,du, \tag{86α}$$

гдѣ μ цѣлое положительное число.

Очевидно, что функція $B_\mu(a, b)$ связана съ $\overline{E}(a, b)$ при помощи соотношенія:

$$B_\mu(a, b) = \frac{d^\mu \overline{E}(a, b)}{db^\mu} \tag{86$'\alpha$}$$

Принимая во вниманіе предыдущее соотношеніе и формулы (34) и (35), можемъ написать:

$$\begin{aligned} \overline{B}_\mu(a,\ b+m) &= (-1)^m \sum_{l=0}^{l=\mu} [\mu]_l\,\varphi(b)^{(\mu-l)}\,\overline{B}_l(a, b); \\ \overline{B}_\mu(a,\ b-m) &= (-1)^m \sum_{l=0}^{l=\mu} [\mu]_l\,\psi(b)^{(\mu-l)}\,\overline{B}_l(a, b). \end{aligned} \tag{86β}$$

При этомъ принято:

$$\varphi(b) = \frac{b(b+1)\cdots(b+m-1)}{(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+m-1)}; \tag{86$'\beta$}$$

$$\psi(b) = \frac{(a+b-1)(a+b-2)\cdots(a+b-m)}{(b-1)(b-2)\cdots(b-m)}; \tag{86$''\beta$}$$

$$[\mu]_l = \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-l+1)}{1.2.3\cdots l}. \tag{86$'''\beta$}$$

§ 6.

Разсмотримъ здѣсь слѣдующій интегралъ:

$$\overline{E}_1(x, y) = e^{-\pi(x-1)i} \int_c^{(10\bar{1}\bar{0})} u^{x-1}(u-1)^{y-1}\,\theta(u)\,du, \tag{87}$$

гдѣ $\theta(u)$ имѣетъ составъ:

$$\theta(u) = b_0 u^m + b_1 u^{m-1} + b_2 u^{m-2} + \cdots + b_{m-2} u^2 + b_{m-1} u + b_m. \tag{88}$$

При этомъ b_0, b_1, $\cdots$, b_m суть нѣкоторыя функціи x и y.

Выраженіе (87) можно преобразовать къ интересной формѣ. Для этой цѣли выведемъ одну вспомогательную формулу[1]). Пусть будетъ:

(89) $$k(u) = u^{x+n_1}(u-1)^{y+n_2},$$

гдѣ n_1 и n_2 суть какія-либо цѣлыя положительныя числа.

Дифференцируя обѣ части равенства (89) по u, будемъ имѣть:

(90) $$dk(u) = u^{x+n_1-1}(u-1)^{y+n_2-1}\left[(x+y+n_1+n_2)u-x-n_1\right]du.$$

Взявъ отъ обѣихъ частей соотношенія (90) интегралъ по пути $(10\bar{1}\bar{0})$, найдемъ искомую формулу:

(91) $$\int_c^{(10\bar{1}\bar{0})} u^{x+n_1-1}(u-1)^{y+n_2-1}\left[x+y+n_1+n_2)u-x-n_1\right]du = 0.$$

Полагая:

$$n_2 = 0;\ n_1 = 0, 1, 2, 3, \cdots, m-1,$$

будемъ имѣть рядъ соотношеній:

(92) $$\begin{aligned}
&\int_c^{(10\bar{1}\bar{0})} u^{x-1}(u-1)^{y-1}\left[(x+y)u-x\right]du = 0,\\
&\int_c^{(10\bar{1}\bar{0})} u^{x-1}(u-1)^{y-1}u\left[(x+y+1)u-x-1\right]du = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\int_c^{(10\bar{1}\bar{0})} u^{x-1}(u-1)^{y-1}u^{m-2}\left[(x+y+m-2)u-x-\overline{m-2}\right]du = 0,\\
&\int_c^{(10\bar{1}\bar{0})} u^{x-1}(u-1)^{y-1}u^{m-1}\left[(x+y+m-1)u-x-\overline{m-1}\right]du = 0.
\end{aligned}$$

Умноживъ эти равенства послѣдовательно на $e^{-\pi(x-1)i}B_1$,

---

[1]) Желаннаго результата мы могли бы достигнуть, если бы, разложивъ $\theta(u)$ по степенямъ u или $u-1$, воспользовались формулою (31) или (34).

$e^{-\pi(x-1)i}B_2, \cdots, e^{-\pi(x-1)i}B_m$, вычтемъ лѣвыя части полученныхъ соотношеній изъ правой части (87); тогда будемъ имѣть:

$$
\begin{aligned}
\overline{E}_1(x,\ y) = e^{-\pi(x-1)i} \int\limits_c^{(1010)} & u^{x-1}(u-1)^{y-1} \big\{ b_m + B_1 x + \\
& + [b_{m-1} - (B_1(x+y) - B_2(x+1))]\, u + \\
& + [b_{m-2} - (B_2(x+y+1) - B_3(x+2))]\, u^2 + \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + [b_1 - (B_{m-1}(x+y+m-2) - B_m(x+m-1))]\, u^{m-1} + \\
& + [b_0 - B_m(x+y+m-1)]\, u^m \big\}\, du.
\end{aligned}
\tag{93}
$$

Выберемъ теперь $B_1, B_2, \cdots, B_m$ такимъ образомъ, чтобы имѣли мѣсто соотношенія:

$$
\begin{aligned}
& B_m(x+y+m-1) = b_0; \\
& B_{m-1}(x+y+m-2) - B_m(x+m-1) = b_1; \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& B_2(x+y+1) - B_3(x+2) = b_{m-2}; \\
& B_1(x+y) - B_2(x+1) = b_{m-1}.
\end{aligned}
\tag{94}
$$

Въ виду равенствъ (94), соотношеніе (93) напишется въ формѣ:

$$\overline{E}_1(x,\ y) = (b_m + B_1 x)\, \overline{E}(x,\ y). \tag{95}$$

Остается теперь изъ уравненій (94) опредѣлить B_1. Изъ этихъ уравненій безъ труда находимъ:

$$
\begin{aligned}
B_1 = \frac{1}{(x+y)(x+y+1)\cdots(x+y+m-1)} & \big\{ b_0(x+1)(x+2)\cdots(x+ \\
& +m-1) + b_1(x+1)\cdots(x+m-2)(x+y+m-1) + \\
& + b_2(x+1)\cdots(x+m-3)(x+y+m-1)(x+y+m-2) + \cdots \\
& \cdots + b_{m-1}(x+y+1)\cdots(x+y+m-1) \big\}.
\end{aligned}
\tag{96}
$$

Разсмотримъ далѣе интегралъ:

$$\Gamma_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{(0)} e^u u^{x-1} \varphi(u)\, du; \tag{97}$$

при чемъ полиномъ $\varphi(u)$ имѣетъ составъ:

(98) $$\varphi(u) = a_0 u^m + a_1 u^{m-1} + a_2 u^{m-2} + \cdots + a_{m-1} u + a_m,$$

гдѣ коэффиціенты $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_m$ суть какія-либо функціи перемѣннаго x.

Обозначимъ чрезъ $M(u)$ слѣдующую функцію:

(99) $$M(u) = e^u u^{x+n}.$$

Отсюда имѣемъ:

(100) $$dM(u) = e^u u^{n+x-1}(u+n+x)\,du.$$

Беря отъ обѣихъ частей этого соотношенія интегралъ по пути $(-\infty\, 0)$, будемъ имѣть:

(101) $$\int_{-\infty}^{(0)} e^u u^{x+n-1}(u+n+x)\,du = 0.$$

Давая въ формулѣ (101) числу n значенія:

(102) $$n = 0, 1, 2, 3, \cdots, m-1,$$

будемъ имѣть:

(103) $$\begin{gathered}\int_{-\infty}^{(0)} e^u u^{x-1}(u+x)\,du = 0, \quad \int_{-\infty}^{(0)} e^u u^{x-1} u(u+x+1)\,du = 0, \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \quad \int_{-\infty}^{(0)} e^u u^{x-1} u^{m-1}(u+m+x-1)\,du = 0.\end{gathered}$$

Умноживъ соотношенія (103) послѣдовательно на $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_m$ и вычтя лѣвыя части полученныхъ равенствъ изъ выраженія (97), получимъ:

(104) $$\begin{aligned}\Gamma_1(x) = \int_{-\infty}^{(0)} e^u u^{x-1} \{ & a_m - C_1 x + [a_{m-1} - (C_1 + (x+1)C_2)]\,u + \\ & + [a_{m-2} - (C_2 + (x+2)\,C_3)]\,u^2 + \cdots \\ & \cdots + [a_1 - (C_{m-1} + C_m(x+m-1))]\,u^{m-1} + (a_0 - C_m)\,u^m \}\,du.\end{aligned}$$

Выберемъ $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_m$ такимъ образомъ, чтобы имѣли мѣсто:

$$
\begin{aligned}
&C_1+C_2(x+1)=a_{m-1};\\
&C_2+C_3(x+2)=a_{m-2};\\
&C_3+C_4(x+3)=a_{m-3};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&C_{m-1}+C_m(x+m-1)=a_1;\\
&C_m=a_0.
\end{aligned}
\tag{105}
$$

Въ силу этихъ соотношеній (105), формула приметъ видъ:

$$\Gamma_1(x)=(a_m-C_1x)\,\Gamma(x). \tag{106}$$

Функція же C_1 безъ труда находится изъ уравненій (105). Ея составъ слѣдующій:

$$
\begin{aligned}
C_1=a_{m-1}-(x+1)a_{m-2}+(x+1)(x+2)a_{m-3}+\cdots\\
\cdots+(-1)^{m-1}a_0(x+1)\cdots(x+m-1).
\end{aligned}
\tag{107}
$$

§ 7.

Въ настоящемъ параграфѣ разсмотримъ линейныя уравненія въ конечныхъ разностяхъ, интегралы которыхъ зависятъ отъ функцій $\Gamma(x)$ и $E(x, y)$.

Формула (77) показываетъ, что $\Gamma(x)$ удовлетворяетъ уравненію:

$$u_{x+1}+xu_x=0. \tag{108}$$

Это уравненіе опредѣляетъ функцію $\Gamma(x)$, такъ что, при изученіи этой функціи, можно было бы исходить отъ уравненія (108).

Уравненіе (108) можно обобщить слѣдующимъ образомъ. Поищемъ уравненіе, которому удовлетворяетъ функція $\Gamma_1(x)$ предыдущаго параграфа. Исключая изъ (108) и (106) функцію $\Gamma(x)=u_x$, будемъ имѣть:

$$
\begin{aligned}
&[a_m-a_{m-1}x+x(x+1)a_{m-2}-x(x+1)(x+2)a_{m-3}+\cdots\\
&\cdots+(-1)^m a_0x(x+1)\cdots(x+m-1)]\,v_{x+1}+\\
&+x\,[a'_m-a'_{m-1}(x+1)+(x+1)(x+2)a'_{m-2}-(x+1)(x+2)(x+3)a'_{m-3}+\cdots\\
&\cdots+(-1)^m(x+1)\cdots(x+m)\,a'_0]\,v_x=0,
\end{aligned}
\tag{109}
$$

гдѣ чрез $a'_0, a'_1, \cdots, a'_m$ обозначены функціи $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_m$ послѣ замѣны въ нихъ x чрезъ $x+1$. Таковому уравненію удовлетворяетъ функція $\overline{\Gamma}_1(x)$.

Далѣе, обозначимъ чрезъ w_x слѣдующую функцію:

$$w_x = a^x \frac{\overline{\Gamma}(x-a_1)\,\overline{\Gamma}(x-a_2)\cdots\overline{\Gamma}(x-a_p)}{\Gamma(x-\alpha_1)\,\Gamma(x-\alpha_2)\cdots\Gamma(x-\alpha_q)}, \tag{110}$$

гдѣ $a, a_1, a_2, \cdots, a_p, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q$ суть нѣкоторыя постоянныя.

Пользуясь формулою (77), безъ труда находимъ, что w_x удовлетворяетъ уравненію:

$$w_{x+1} + (-1)^{p+q+1}\, a\, \frac{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_p)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_q)}\, w_x = 0. \tag{111}$$

Этотъ послѣдній результатъ позволяетъ намъ рѣшить обратный вопросъ, а именно: дано уравненіе

$$\varphi(x)\, u_{x+1} + \psi(x) u_x = 0, \tag{112}$$

гдѣ $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ алгебраическіе полиномы степени n и m, и требуется найти его интегралъ.

Мы тутъ разсмотримъ два случая: 1) корни полиномовъ $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ различны и 2) между корнями этихъ функцій есть равные.

Полагаемъ въ первомъ случаѣ:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n); \\ \psi(x) &= a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_m). \end{aligned} \tag{113}$$

Представляя тогда уравненіе (112) въ формѣ:

$$u_{x+1} + \frac{a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_m)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}\, u_x = 0, \tag{114}$$

безъ труда находимъ:

$$u_x = c\, a^x (-1)^{(m+n+1)x} \frac{\overline{\Gamma}(x-\alpha_1)\,\overline{\Gamma}(x-\alpha_2)\cdots\Gamma(x-\alpha_m)}{\Gamma(x-a_1)\,\Gamma(x-a_2)\cdots\Gamma(x-a_n)}, \tag{115}$$

гдѣ c—произвольное постоянное или произвольная періодическая функція съ періодомъ единица.

Если же составъ $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ такой:

$$\varphi(x) = (x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\cdots(x-a_k)^{m_k};$$
$$\psi(x) = a(x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2}\cdots(x-\alpha_{k'})^{n_{k'}}, \tag{116}$$

гдѣ

$$m_1+m_2+\cdots+m_k = n;$$
$$n_1+n_2+\cdots+n_{k'} = m, \tag{117}$$

то уравненіе (112) представится въ формѣ:

$$u_{x+1}+a\frac{(x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2}\cdots(x-\alpha_{k'})^{n_{k'}}}{(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\cdots(x-a_k)^{m_k}}u_x = 0, \tag{118}$$

и интегралъ его, очевидно, такой:

$$u_x = c\,a^x(-1)^{(m+n+1)x}\frac{[\Gamma(x-\alpha_1)]^{n_1}\cdots[\Gamma(x-\alpha_{k'})]^{n_{k'}}}{[\Gamma(x-a_1)]^{m_1}\cdots[\Gamma(x-a_k)]^{m_k}}. \tag{119}$$

Слѣдуя Hj. Mellin'y [1]), можно значительно обобщить предыдущіе результаты.

Положимъ для этой цѣли:

$$F_1(x) = A_1{}^x\frac{\Gamma(x-a_1')\,\Gamma(x-a_2')\cdots\Gamma(x-a_{m_1}')}{\Gamma(x-\alpha_1')\,\Gamma(x-\alpha_2')\cdots\Gamma(x-\alpha_{n_1}')};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{120}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_p(x) = A_p{}^x\frac{\Gamma(x-a_1{}^{(p)})\,\Gamma(x-a_2{}^{(p)})\cdots\Gamma(x-a_{m_p}{}^{(p)})}{\Gamma(x-\alpha_1{}^{(p)})\,\Gamma(x-\alpha_2{}^{(p)})\cdots\Gamma(x-\alpha_{n_p}{}^{(p)})},$$

гдѣ A, a' и α' суть нѣкоторыя постоянныя.

Обозначимъ чрезъ v_x слѣдующую сумму:

$$v_x = R_1(x)\,F_1(x)+R_2(x)\,F_2(x)+\cdots+R_p(x)\,F_p(x), \tag{121}$$

гдѣ R_1, R_2, ..., R_p суть какія-либо функціи перемѣннаго x.

---

[1]) Acta Mathematica, t. 9. Berlin, Stockholm, Paris, 1887, стр. 146.

Изъ формулы (121) находимъ:

$$
(122)\quad
\begin{aligned}
v_{x+1} &= R_1'(x)\,F_1(x)+R_2'(x)\,F_2(x)+\cdots+R_p'(x)\,F_p(x);\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
v_{x+p} &= R_1^{(p-1)}(x)\,F_1(x)+R_2^{(p-1)}(x)\,F_2(x)+\cdots+R_p^{(p-1)}(x)\,F_p(x).
\end{aligned}
$$

При этомъ составъ функцій R_1', R_2', $\cdots$, R_p', $\cdots$, $R_1^{(p-1)}$, $\cdots$, $R_p^{(p-1)}$ легко опредѣляется.

Искомое уравненіе напишется тогда такъ:

$$
(123)\quad v_{x+p}+\lambda_m v_{x+p-1}+\lambda_{m-1} v_{x+p-2}+\cdots+\lambda_2 v_{x+1}+\lambda_1 v_x = 0;
$$

при чемъ коэффиціенты λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_m опредѣляются уравненіями:

$$
(124)\quad
\begin{aligned}
&\lambda_1 R_1(x)+\lambda_2 R_1'(x)+\cdots+R_1^{(p-1)}(x) = 0;\\
&\lambda_1 R_2(x)+\lambda_2 R_2'(x)+\cdots+R_2^{(p-1)}(x) = 0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\lambda_1 R_p(x)+\lambda_2 R_p'(x)+\cdots+R_p^{(p-1)}(x) = 0.
\end{aligned}
$$

Этими результатами мы пока ограничимся. Впослѣдствіи, выяснивъ связь между линейными уравненіями дифференціальными и въ конечныхъ разностяхъ, мы еще разъ возвратимся къ этому предмету. Теперь же мы остановимся на системахъ уравненій въ конечныхъ разностяхъ, которымъ удовлетворяютъ функціи, зависящія отъ $\overline{E}(x,y)$.

Соотношенія (31) и (34) показываютъ, что функція $\overline{E}(x,y)$ удовлетворяетъ системѣ двухъ уравненій:

$$
(125)\quad
\begin{aligned}
&u_{x+1,\,y}+\frac{x}{x+y}\,u_{x,\,y} = 0;\\
&u_{x,\,y+1}+\frac{y}{x+y}\,u_{x,\,y} = 0.
\end{aligned}
$$

Одно изъ нихъ можно замѣнить слѣдующимъ:

$$
(126)\quad x\,u_{x,\,y+1}-y\,u_{x+1,\,y} = 0,
$$

которое получится, если приравняемъ между собою значенія $u_{x+1,\,y+1}$, найденныя изъ (125). Систему (125) можно обобщить. Легко найти систему двухъ уравненій, которымъ удовлетворяетъ функція $\bar{E}_1(x, y)$ предыдущаго параграфа.

Эти уравненія слѣдующія:

$$(x+y)\,(b_m+B_1x)\,v_{x+1,\,y}+x\,[b'_m+B'_1(x+1]\,v_{x,\,y}=0;$$
$$(x+y)\,(b_m+B_1x)\,v_{x,\,y+1}+y(b''_m+B''_1x)\,v_{x,\,y}=0. \tag{127}$$

При этомъ, b'_m и B'_1 суть значенія b_m и B_1 послѣ подстановки на мѣсто x количества $x+1$, а подъ b''_m и B''_1 разумѣемъ тѣ же функціи b_m и B_1 съ замѣною въ нихъ y чрезъ $y+1$:

Обозначимъ далѣе чрезъ w_x функцію:

$$w_{x,\,y}=a^{l_1x+l_2y}\,\frac{\bar{E}(x-a_1,\,y-b_1)\cdots\bar{E}(x-a_m,\,y-b_m)}{\bar{E}(x-\alpha_1,\,y-\beta_1)\cdots\bar{E}(x-\alpha_n,\,y-\beta_n)}, \tag{128}$$

гдѣ $l_1, l_2, a_1, a_2, \cdots, a_m, b_1, b_2, \cdots, b_m, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ суть нѣкоторыя постоянныя количества.

При помощи формулъ (31) и (34), безъ трудъ находимъ уравненія, которымъ удовлетворяетъ $w_{x,\,y}$:

$$\begin{aligned}&w_{x+1,\,y}+\\+(-1)^{m+n+1}a^{l_1}\,&\frac{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)\,(x+y-\alpha_1-\beta_1)\cdots(x+y-\alpha_n-\beta_n)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)\,(x+y-a_1-b_1)\cdots(x+y-a_m-b_m)}\,w_{x,\,y}=0;\\&w_{x,\,y+1}+\\+(-1)^{m+n+1}a^{l_2}\,&\frac{(y-b_1)\cdots(y-b_m)\cdots(x+y-\alpha_1-\beta_1)\cdots(x+y-\alpha_n-\beta_n)}{(y-\beta_1)(y-\beta_2)\cdots(y-\beta_n)\,(x+y-a_1-b_1)\cdots(x+y-a_m-b_m)}\,w_{x,\,y}=0.\end{aligned} \tag{129}$$

Вмѣсто одного изъ нихъ можно принять слѣдующее:

$$\begin{aligned}&a^{l_1-l_2}\,\frac{(x-a_1)\,(x-a_2)\,\cdots\,(x-a_m)}{(x-\alpha_1)\,(x-\alpha_2)\,\cdots\,(x-\alpha_n)}\,w_{x,\,y+1}-\\&-\frac{(y-b_1)\,\cdots\,(y-b_m)}{(y-\beta_1)\,\cdots\,(y-\beta_n)}\,w_{x+1,\,y}=0,\end{aligned} \tag{130}$$

которое получается изъ уравненій (129) такимъ же способомъ, какъ (126) изъ соотношеній (125).

Уравненія (129) можно было бы значительно обобщить. Но на этомъ мы останавливаться не станемъ.

ГЛАВА II.

Гипергеометрическіе интегралы и ихъ свойства. Связь между гипергеометрическимъ уравненіемъ n-го порядка и линейнымъ уравненіемъ въ конечныхъ разностяхъ n-го порядка съ линейными коэффиціентами. Интегрированіе этого послѣдняго посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ при одномъ условіи.

§ 1.

Разсмотримъ интегралъ:

$$y = \int_L (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1} \cdots (u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}du. \tag{1}$$

Здѣсь $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ нѣкоторыя постоянныя количества; $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$ и λ также постоянныя. Относительно этихъ послѣднихъ на первыхъ порахъ сдѣлаемъ предположеніе, что ни каждое изъ нихъ въ отдѣльности, ни сумма ихъ не есть цѣлое число или нуль. Далѣе, x перемѣнный параметръ, а L путь интеграціи.

Переходя къ подробному изученію свойствъ интеграла (1), выберемъ предварительно путь L въ плоскости перемѣннаго u такимъ образомъ, чтобы онъ удовлетворялъ слѣдующимъ условіямъ:

1) путь не долженъ пересѣкать самого себя на всемъ протяженіи;

2) въ началѣ и концѣ его любая вѣтвь подъинтегральной функціи должна принимать одно и то же значеніе.

3) подъинтегральная функція для любой его точки должна оставаться конечной и непрерывной;

4) интегралъ, взятый по этому пути, долженъ имѣть значеніе конечное и отличное отъ нуля.

Всѣмъ этимъ требованіямъ удовлетворяютъ надлежащимъ образомъ направленные пути, которые, придерживаясь терминологіи L. Pochhammer'а, будемъ называть путями съ двойнымъ обходомъ. Теорія таковыхъ путей разработана трудами Poincaré [1]), C. Jor-

---

[1]) American Journal, Bd. VII. Acta Mathematica, Bd. VIII.

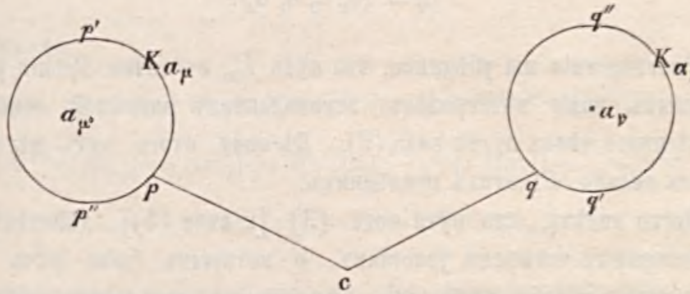
dan'a [1]), L. Pochhammer'a [2]), П. А. Некрасова [3]) и Schlesinger'a [4]).

Для полученія пути такого рода, выполняемъ въ плоскости перемѣннаго u слѣдующее построеніе. Отмѣтимъ на ней двѣ особыя точки a_μ и a_ν подъинтегральной функціи:

$$f(u) = (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\cdots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}. \tag{2}$$

Опишемъ далѣе изъ этихъ точекъ конечными радіусами окружности K_{a_μ} и K_{a_ν}, которыя, не встрѣчая особыхъ точекъ $f(u)$, не содержали бы внутри себя иныхъ изъ нихъ, кромѣ a_μ и a_ν. Потомъ двѣ произвольныя точки p и q этихъ окружностей соединяемъ линіей pq

Черт. 4.



такъ, чтобы она, имѣя съ окружностями лишь по одной общей точкѣ и не пересѣкая самой себя, не проходила, вмѣстѣ съ тѣмъ, ни чрезъ одну изъ особыхъ точекъ функціи $f(u)$. На этой линіи выберемъ какую либо точку c. Тогда искомый путь представится послѣдовательностью линій $cqq'q''qc$, $cpp'p''pc$, $cqq''q'qc$ и $cpp''p'pc$. Придерживаясь обозначеній предыдущей главы, этотъ путь, составленный изъ элементар-

---

[1]) Cours d'Analyse, v. III (1887).

[2]) Math. Ann., Bd. 35, 36, 37, 38.

[3]) „Линейныя дифференціальныя уравненія, интегрируемыя посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ". Москва, 1890, или переводъ этой работы на нѣмецкомъ языкѣ въ 38 т. Math. Ann.

[4]) Crelle's Journal, Bd. 116 und 117.

ныхъ контуровъ (a_ν), (a_μ), $(\overline{a}_\nu)$ и $(\overline{a}_\mu)$, при общемъ началѣ c, назовемъ такъ:

$$L_1 = (a_\nu\, a_\mu\, \overline{a}_\nu\, \overline{a}_\mu). \tag{3}$$

Мы предположили, что внутри пути L_1 заключены лишь двѣ особыя точки a_ν и a_μ функціи $f(u)$. Но можно было бы допустить, что внутри искомаго пути содержится большее ихъ число. Если, напримѣръ, окружность K_{a_ν} огибаетъ точки a', a'', a''', $\cdots$, а окружность K_{a_μ} точки α', α'', α''', $\cdots$, гдѣ a и α берутся изъ ряда количествъ: a_1, a_2, $\cdots$, a_n и x, то, обозначая контуръ, окружающій точки a', a'', a''', $\cdots$ чрезъ σ_1, а контуръ, содержащій внутри себя α', α'', α''', $\cdots$ чрезъ σ_2, за искомый путь можемъ принять:

$$L_2 = (\sigma_1\, \sigma_2\, \overline{\sigma}_1\, \overline{\sigma}_2). \tag{4}$$

Впослѣдствіи мы убѣдимся, что путь L_2, съ точки зрѣнія разсматриваемыхъ нами интеграловъ, эквивалентенъ линейной комбинаціи опредѣленнаго числа путей вида (3). Въ виду этого тутъ мы будемъ говорить только объ этихъ послѣднихъ.

Легко видѣть, что пути вида (3) [и вида (4)], дѣйствительно, удовлетворяютъ четыремъ условіямъ, о которыхъ была рѣчь выше. Прежде всего, первое требованіе выполняется очевиднымъ образомъ. Далѣе; выберемъ опредѣленную вѣтвь подъинтегральной функціи $f(u)$, и ея значеніе для точки $u=c$ пусть будетъ $f_0(c)$. Если теперь заставимъ перемѣнное u описывать путь $(a_\nu\, a_\mu\, \overline{a}_\nu\, \overline{a}_\mu)$, начиная съ c, то окажется слѣдующее. Послѣ обхода съ перемѣннымъ u элементарнаго контура (a_ν), функція $f(u)$ [соб. ея вѣтвь] возвратится къ своему первоначальному значенію $f_0(c)$ съ умноженіемъ на факторъ $e^{2\pi a_\nu i}$, такъ что новое значеніе $f(u)$ въ c будетъ $e^{2\pi a_\nu i} f_0(c)$. Потомъ, послѣ обхода перемѣннымъ u точки a_μ по контуру (a_μ), новое значеніе $f(u)$ для $u=c$ будетъ $e^{2\pi(a_\mu+a_\nu)i} f_0(c)$. Наконецъ, послѣ того какъ перемѣнное u обогнетъ точки a_ν и a_μ по линіямъ $(\overline{a}_\nu)$ и $(\overline{a}_\mu)$, $f(u)$ приметъ свое первоначальное значеніе $f_0(c)$. Значитъ, путь L_1 удовлетворяетъ и второму требованію. Согласно построенію, путь L_1 не проходитъ ни чрезъ одну изъ особыхъ точекъ $f(u)$. А потому на всемъ его протяженіи эта функція остается конечной и непрерывной.

Обнаружимъ теперь, что и послѣднему требованію путь L_1 также удовлетворяетъ.

Для случая интеграла (1), взятаго по пути L_1, будемъ придерживаться обозначеній, одинаковыхъ съ тѣми, какими мы пользовались въ предшествующей главѣ, а именно, этотъ интегралъ будемъ обозначать такъ:

$$y = [(a_\nu\, a_\mu\, \overline{a_\nu}\, \overline{a_\mu})], \tag{5}$$

или же:

$$y = \int_c^{(a_\nu\, a_\mu\, \overline{a_\nu}\, \overline{a_\mu})} f(u)\, du. \tag{5'}$$

Для своихъ цѣлей выраженіе (5) представимъ въ слѣдующей формѣ.

Имѣемъ:

$$[(a_\nu\, a_\mu\, \overline{a_\nu}\, \overline{a_\mu})] = [(a_\nu)] + e^{2\pi b_\nu i}[(a_\mu)] + e^{2\pi(b_\mu + b_\nu)i}[(\overline{a_\nu})] +$$

$$+ e^{2\pi b_\mu i}[(\overline{a_\mu})] = [(a_\nu)] + e^{2\pi b_\nu i}[(a_\mu)] - e^{2\pi b_\mu i}[(a_\nu)] - [(a_\mu)] =$$

$$= (1 - e^{2\pi b_\mu i})\,[(a_\nu)] - (1 - e^{2\pi b_\nu i})\,[(a_\mu)]. \tag{6}$$

Вторая часть, очевидно, представляетъ величину конечную; кромѣ того, она отлична отъ нуля (при произвольномъ x), ибо при тѣхъ ограниченіяхъ, которыя наложены нами на $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$ и x, ни интегралы $[(a_\mu)]$ и $[(a_\nu)]$, ни ихъ множители не могутъ быть нулями. Поэтому, и четвертое требованіе выполняется.

Такихъ путей какъ $(a_\nu\, a_\mu\, \overline{a_\nu}\, \overline{a_\mu})$, очевидно, $\frac{n(n-1)}{2}$. Впослѣдствіи мы убѣдимся, что изъ нихъ только n линейно независимы. Что же касается до прочихъ, то каждый изъ нихъ эквивалентенъ линейной и однородной комбинаціи отъ первыхъ.

Простыя соображенія, которыя мы приводить не станемъ, убѣждаютъ насъ, что въ конечной плоскости u иныхъ путей, удовлетворяющихъ нашимъ требованіямъ, не существуетъ.

Для дальнѣйшихъ цѣлей, соотношеніе (6) представимъ въ слѣдующей формѣ:

$$[(a_\nu\, a_\mu\, \overline{a}_\nu\, \overline{a}_\mu)] = (1 - e^{2\pi b_\mu i}) \int\limits_{(K_{a_\nu})} f\,du - (1 - e^{2\pi b_\nu i}) \int\limits_{(K_{a_\mu})} f\,du +$$

$$(7) \qquad + (1 - e^{2\pi b_\mu i})\,(1 - e^{2\pi b_\nu i}) \int\limits_p^q f\,du.$$

Замѣтимъ, что подъ интегралами $\int\limits_{(K_{a_\nu})} f du$ и $\int\limits_{(K_{a_\mu})} f du$ здѣсь разумѣемъ интегралы, взятые по окружностямъ K_{a_ν} и K_{a_μ}, а путь интеграціи pq въ интегралѣ $\int\limits_p^q f\,du$ представляетъ линію, соединяющую точки p и q и не проходящую ни черезъ одну изъ особыхъ точекъ $f(u)$.

Изъ формулы (7) прямо слѣдуетъ, что $[(a_\nu\, a_\mu\, \overline{a}_\nu\, \overline{a}_\mu)]$ не мѣняетъ своего значенія, гдѣ бы точку c ни взяли на линіи $(a_\nu\, a_\mu\, \overline{a}_\nu\, \overline{a}_\mu)$. Но при этомъ, разумѣется, надо предполагать, что новое начальное значеніе $f(u)$ для $u = c$ есть именно то, котораго эта функція достигаетъ, когда перемѣнное u, выходя изъ c и двигаясь вдоль пути интеграціи, въ первый разъ достигаетъ новаго положенія точки c. Опираясь далѣе на извѣстную теорему Cauchy изъ теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго, самый путь интеграціи $(a_\nu\, a_\mu\, \overline{a}_\nu\, \overline{a}_\mu)$ можно подвергать нѣкоторой деформаціи, при которой значеніе интеграла $[(a_\nu\, a_\mu\, \overline{a}_\nu\, \overline{a}_\mu)]$ сохраняется безъ перемѣны.

Такъ, прежде всего линію pq, представляя ее въ видѣ удобоподвижной, гибкой, растяженной и сжимаемой нити, можно видоизмѣнять и по формѣ, и положенію произвольнымъ образомъ, лишь бы она не встрѣчала особыхъ точекъ функціи $f(u)$. Аналогичной деформаціи можно подвергать и окружности K_{a_μ} и K_{a_ν}. При всѣхъ этихъ деформаціяхъ, однако, надо особенно слѣдить за перемѣщеніемъ начала c и измѣненіемъ начальнаго значенія выбранной вѣтви подъинтегральной функціи, — надо придавать ей именно то ея значеніе, которое она при непрерывномъ измѣненіи, дѣйствительно, принимаетъ всякій разъ для новаго положенія $u = c$.

Въ заключеніе настоящаго параграфа прибавимъ слѣдующее. При нашемъ допущеніи, что $b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \lambda$ не есть цѣлое число или нуль, къ числу особыхъ точекъ функціи $f(u)$ относится также и безконечно удаленная точка плоскости u. Отсюда понятно, что въ кругъ нашихъ разсмотрѣній должны еще войти интегралы вида: $[(\alpha \infty \overline{\alpha} \overline{\infty})]$, гдѣ подъ α разумѣется любое ихъ количествъ: a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n и x.

Будетъ выяснено въ слѣдующемъ параграфѣ, что таковые интегралы могутъ быть представлены линейными и однородными формулами съ постоянными коэффиціентами отъ n интеграловъ вида (5), или (5′).

Замѣтимъ, что пути, удовлетворяющіе четыремъ вышеуказаннымъ условіямъ, мы будемъ называть дозволенными; а интегралы, взятые по нимъ, дозволенными интегралами.

§ 2.

Пусть x представляетъ нѣкоторую неизмѣнную точку плоскости u, не совпадающую ни съ какой изъ точекъ a_1, a_2, $\cdots$, a_n и не лежащую на разсматриваемомъ пути интеграціи. Постараемся тогда обнаружить, что изъ $\frac{n(n+1)}{2}$ интеграловъ вида $[(a_\nu\, a_\mu\, \overline{a}_\nu\, \overline{a}_\mu)]$ и $[(\alpha \infty \overline{\alpha} \overline{\infty})]$, о которыхъ говорилось въ предыдущемъ параграфѣ, можно выбрать n такихъ, что всѣ прочіе интегралы того же вида, а также и интегралы вида (4) могутъ быть выражены чрезъ нихъ линейными и однородными формулами съ постоянными коэффиціентами. За таковые n интеграловъ можно, напр., принять слѣдующіе:

$$[(a_1\, a_2\, \overline{a}_1\, \overline{a}_2)],\ [(a_1\, a_3\, \overline{a}_1\, \overline{a}_3)],\ \cdots,\ [(a_1\, a_n\, \overline{a}_1\, \overline{a}_n)] \text{ и } [(a_1\, x\, \overline{a}_1\, \overline{x})]. \tag{8}$$

Постараемся въ этомъ убѣдиться. Возьмемъ какой-либо интегралъ $[(a_\nu\, a_\mu\, \overline{a}_\nu\, \overline{a}_\mu)]$, не совпадающій ни съ однимъ изъ интеграловъ (8). Имѣемъ на основаніи формулы (6):

$$[(a_1\, a_\nu\, \overline{a}_1\, \overline{a}_\nu)] = (1-e^{2\pi b_\nu i})\,[(a_1)] - (1-e^{2\pi b_1 i})\,[(a_\nu)], \tag{9}$$

$$[(a_1\, a_\mu\, \overline{a}_1\, \overline{a}_\mu)] = (1-e^{2\pi b_\mu i})\,[(a_1)] - (1-e^{2\pi b_1 i})\,[(a_\mu)]. \tag{10}$$

Отсюда находимъ:

$$[(a_\nu)] = \frac{(1-e^{2\pi b_\nu i})\,[(a_1)] - [(a_1\, a_\nu\, \overline{a}_1\, \overline{a}_\nu)]}{1-e^{2\pi b_1 i}}; \tag{9′}$$

$$[(a_\mu)] = \frac{(1-e^{2\pi b_\mu i})\,[(a_1)] - [(a_1\, a_\mu\, \overline{a}_1\, \overline{a}_\mu)]}{1-e^{2\pi b_1 i}}. \tag{10′}$$

Внеся выраженія $[(a_\nu)]$ и $[(a_\mu)]$ изъ формулъ (9′) и (10′) въ соотношеніе (6), получимъ:

$$(11)\quad [(a_\nu\, a_\mu\, \bar{a}_\nu\, \bar{a}_\mu)] = \frac{(1-e^{2\pi b_\nu i})\,[(a_1\, a_\mu\, \bar{a}_1\, \bar{a}_\mu)] - (1-e^{2\pi b_\mu i})\,[(a_1\, a_\nu\, \bar{a}_1\, \bar{a}_\nu)]}{1-e^{2\pi b_1 i}}.$$

Пусть далѣе даны два сложныхъ контура: $L_1=(a'\, a''\, a'''\cdots)$ и $L_2=(\alpha'\, \alpha''\, \alpha'''\cdots)$, гдѣ $a', a'', a''',\cdots$ и $\alpha', \alpha'', \alpha''',\cdots$ суть какія-либо точки ряда $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ и x.

Изъ контуровъ L_1 и L_2, имѣющихъ общимъ началомъ точку c, составимъ путь: $(L_1\, L_2\, \bar{L}_1\, \bar{L}_2)$ и постараемся обнаружить, что интегралъ $[(L_1\, L_2\, \bar{L}_1\, \bar{L}_2)]$ можетъ быть выраженъ чрезъ интегралъ (8) линейными и однородными формулами съ постоянными коэффиціентами. Въ самомъ дѣлѣ, пусть, послѣ однократнаго обхода перемѣннымъ u точекъ $a', a'', a''', \cdots$ и $\alpha', \alpha'', \alpha''', \cdots$, подъинтегральная функція $f(u)$ принимаетъ соотвѣтственно множители: $e^{2\pi\lambda' i}, e^{2\pi\lambda'' i}, e^{2\pi\lambda''' i}, \cdots$ и $e^{2\pi\lambda_1 i}$, $e^{2\pi\lambda_2 i}, e^{2\pi\lambda_3 i}, \cdots$. Тогда будемъ имѣть:

$$(12)\quad [(L_1\, L_2\, \bar{L}_1\, \bar{L}_2)] = (1-e^{2\pi(\lambda_1+\lambda_2+\cdots)i})\,[(L_1)] - (1-e^{2\pi(\lambda'+\lambda''+\cdots)i})\,[(L_2)].$$

Далѣе имѣетъ мѣсто:

$$(13)\quad [(L_1)] = [(a')] + e^{2\pi\lambda' i}\,[(a'')] + e^{2\pi(\lambda'+\lambda'')i}\,[(a''')] + \cdots;$$

$$(14)\quad [(L_2)] = [(\alpha')] + e^{2\pi\lambda_1 i}\,[(\alpha'')] + e^{2\pi(\lambda_1+\lambda_2)i}\,[(\alpha''')] + \cdots.$$

Принимая во вниманіе формулу (9′) (или (10′)), можемъ написать рядъ равенствъ:

$$(15)\quad [(a')] = \frac{(1-e^{2\pi\lambda' i})\,[(a_1)] - [(a_1\, a'\, \bar{a}_1\, \bar{a}')]}{1-e^{2\pi b_1 i}};$$

$$(15')\quad [(a'')] = \frac{(1-e^{2\pi\lambda'' i})\,[(a_1)] - [(a_1\, a''\, \bar{a}_1\, \bar{a}'')]}{1-e^{2\pi b_1 i}};$$

. . . .

. . . .

$$(16)\quad [(\alpha')] = \frac{(1-e^{2\pi\lambda_1 i})\,[(a_1)] - [(a_1\, \alpha'\, \bar{a}_1\, \alpha')]}{1-e^{2\pi b_1 i}};$$

$$(16')\quad [(\alpha'')] = \frac{(1-e^{2\pi\lambda_2 i})\,[(a_1)] - [(a_1\, \alpha''\, \bar{a}_1\, \alpha'')]}{1-e^{2\pi b_1 i}}.$$

Внеся выраженіе (15), (15′), ⋯ и (16), (16′), ⋯ въ формулы (13) и (14) и полученные такимъ образомъ результаты въ соотношеніе (12), найдемъ:

$$[(L_1\ L_2\ \overline{L}_1\ \overline{L}_2)] =$$

$$= \frac{1-e^{2\pi(\lambda'+\lambda''+\lambda'''+\cdots)i}}{1-e^{2\pi b_1 i}} \left\{ [(a_1\ \alpha'\ \overline{a}_1\ \overline{\alpha}')] + e^{2\pi\lambda_1 i} [a_1\ \alpha''\ \overline{a}_1\ \overline{\alpha}'')] + \cdots \right\} -$$

$$- \frac{1-e^{2\pi(\lambda_1+\lambda_2+\cdots)i}}{1-e^{3\pi b_1 i}} \left\{ [(a_1\ a'\ \overline{a}_1\ \overline{a}')] + e^{2\pi\lambda' i} [(a_1\ a''\ a_1\ \overline{a}'')] + \cdots \right\}. \tag{17}$$

Такимъ образомъ требуемое обнаружено. Теперь уже легко доказать, что и интегралъ $[(\alpha \infty \overline{\alpha} \overline{\infty})]$, гдѣ α совпадаетъ съ однимъ изъ количествъ a_1, a_2, ⋯, a_n и x, можетъ быть представленъ линейною и однородною формулой съ постоянными коэффиціентами отъ интеграловъ (8). Въ самомъ дѣлѣ, если чрезъ σ обозначимъ контуръ, имѣющій своимъ началомъ точку c и огибающій въ положительномъ направленіи всѣ конечныя особыя точки $f(u)$, то будемъ имѣть тождественно:

$$[(\alpha \infty \overline{\alpha} \overline{\infty})] = [(\alpha\ \overline{\sigma}\ \overline{\alpha}\ \sigma)]. \tag{18}$$

Обозначимъ далѣе:

$$k = \sum_{q=1}^{q=n} b_q + \lambda, \tag{19}$$

а факторъ, который принимаетъ $f(u)$ послѣ обхода перемѣннымъ u точки α въ положительномъ направленіи,—чрезъ $e^{2\pi li}$. Тогда будемъ имѣть:

$$\begin{aligned}[(\alpha\ \overline{\sigma}\ \overline{\alpha}\ \sigma)] &= [(\alpha)] + e^{2\pi li} [(\overline{\sigma})] + e^{2\pi(l-k)i} [(\overline{\alpha})] + e^{-2\pi ki} [(\sigma)] = \\ &= -e^{-2\pi ki} \left\{ (1-e^{2\pi ki}) [(\alpha)] - (1-e^{2\pi li}) [(\sigma)] \right\} = \\ &= -e^{-2\pi ki} [(\alpha\ \sigma\ \overline{\alpha}\ \overline{\sigma})].\end{aligned} \tag{20}$$

Сопоставляя равенства (20) и (18), заключаемъ:

$$[(\alpha \infty \overline{\alpha} \overline{\infty})] = -e^{-2\pi ki} [(\alpha\ \sigma\ \overline{\alpha}\ \overline{\sigma})]. \tag{21}$$

Полученное соотношеніе подтверждаетъ наше положеніе, такъ какъ интегралъ $[(\alpha\,\sigma\,\overline{\alpha}\,\overline{\sigma})]$ есть интегралъ вида $[(L_1\,L_2\,\overline{L_1}\,\overline{L_2})]$, выраженіе котораго чрезъ интегралы (8) дается формулою (17).

Примѣчаніе. Такъ какъ въ нашихъ разсужденіяхъ всѣ особыя точки $a_1, a_2, \cdots, a_n$ и x функціи $f(u)$ равноправны, то, само собою разумѣется, вмѣсто интеграловъ (8) мы могли бы для тѣхъ же цѣлей взять любую изъ слѣдующихъ группъ:

$$(22)\qquad [(a_2\,a_1\,\overline{a_2}\,\overline{a_1})],\quad [(a_2\,a_3\,\overline{a_2}\,\overline{a_3})],\quad \cdots,\quad [(a_2\,x\,\overline{a_2}\,\overline{x})];$$

$$(22')\qquad [(a_3\,a_1\,\overline{a_3}\,\overline{a_1})],\quad [(a_3\,a_2\,\overline{a_3}\,\overline{a_2})],\quad \cdots,\quad [(a_3\,x\,\overline{a_3}\,\overline{x})];$$

. . . .

. . . .

$$(22'')\qquad [(x\,a_1\,\overline{x}\,\overline{a_1})],\quad [(x\,a_2\,\overline{x}\,\overline{a_2})],\quad \cdots,\quad [(x\,a_n\,\overline{x}\,\overline{a_n})].$$

Въ виду свойствъ интеграловъ (8), изложенныхъ въ этомъ параграфѣ, назовемъ ихъ основными, или основною системой интеграловъ. Ясное дѣло, если какая-либо изъ системъ (22), (22'), $\cdots$, (22'') будетъ замѣнять (8), то и ее будемъ также называть основною.

§ 3.

Кромѣ тѣхъ ограниченій, которыя были наложены на показатели $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$ и λ, допустимъ еще, что дѣйствительныя части ихъ больше нуля. Тогда имѣютъ смыслъ тѣ интегралы, которые были впервые разсматриваемы L. Pochhammer'омъ въ его статьѣ: „Ueber hypergeometrische Functionen n-ter Ordnung“ [1]). Эти интегралы двухъ типовъ:

$$(23)\qquad \int_{a_\nu}^{a_\mu} f\,du,\qquad \int_{a_\mu}^{x} f\,du.$$

Легко установить связь между интегралами (23) и тѣми, которые изслѣдуемъ мы. Для этой цѣли обратимся къ формулѣ (7). Изъ нея легко получаемъ:

---

[1]) Crelle's Journal, Bd. 71, стр. 316—352.

$$[(a_\nu\, a_\mu\, \overline{a_\nu}\, \overline{a_\mu})] = (1-e^{2\pi b_\mu i})\,(1-e^{2\pi b_\nu i})\int\limits_{a_\mu}^{a_\nu} f\,du, \tag{24}$$

а также:

$$[(a_\mu\, x\, \overline{a_\mu}\, \overline{x})] = (1-e^{2\pi b_\mu i})\,(1-e^{2\pi\lambda i})\int\limits_{x}^{a_\mu} f\,du. \tag{25}$$

Формулы (24) и (25) обнаруживаютъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ гипергеометрическіе интегралы L. Pochhammer'а лишь постоянными множителями отличаются отъ изслѣдуемыхъ нами интеграловъ. Пусть теперь b_1, b_2, $\cdots$, b_n и λ удовлетворяютъ, кромѣ того, условію:

$$R(b_1)+R(b_2)+\cdots+R(b_n)+R(\lambda) < n. \tag{26}$$

Тогда будутъ имѣть смыслъ слѣдующіе интегралы:

$$\int\limits_{a_\mu}^{\infty} f\,du, \qquad \int\limits_{x}^{\infty} f\,du, \tag{27}$$

гдѣ подъ a_μ разумѣемъ любую изъ точекъ a_1, a_2, $\cdots$, a_n.

Примѣняя къ разсматриваемому случаю формулы (24) и (25), будемъ имѣть:

$$[(a_\mu \infty\, \overline{a_\mu}\, \overline{\infty})] = (1-e^{-2\pi k i})\,(1-e^{2\pi b_\mu i})\int\limits_{\infty}^{a_\mu} f\,du; \tag{28}$$

$$[(x \infty\, \overline{x}\, \overline{\infty})] = (1-e^{-2\pi k i})\,(1-e^{2\pi\lambda i})\int\limits_{\infty}^{x} f\,du. \tag{29}$$

Выражая далѣе $[(a_\mu \infty\, \overline{a_\mu}\, \overline{\infty})]$ и $[(x \infty\, \overline{x}\, \overline{\infty})]$ по Формуламъ (21) и (17) чрезъ интегралы (8), а эти послѣдніе чрезъ интегралы:

$$\int\limits_{a_1}^{a_2} f\,du, \quad \int\limits_{a_1}^{a_3} f\,du, \quad \cdots, \quad \int\limits_{a_1}^{a_n} f\,du, \quad \int\limits_{a_1}^{x} f\,du, \tag{30}$$

по формуламъ (24) и (25), мы такимъ образомъ удостовѣримся, что интегралы (27) выражаются линейными и однородными формулами съ постоянными коэффиціентами чрезъ интегралы (30). То же надо сказать и относительно всякаго интеграла $\int\limits_{a_\nu}^{a_\mu} f\,du$, гдѣ ν и μ отличны отъ единицы. Въ виду этого обстоятельства, интегралы (30) можно считать основными въ вышеуказанной работѣ L. Pochhammer'a.

Ясное дѣло, за основные интегралы можно считать также одну изъ слѣдующихъ группъ:

$$\int\limits_{a_2}^{a_1} f\,du,\quad \int\limits_{a_2}^{a_3} f\,du,\quad \cdots,\quad \int\limits_{a_2}^{a_n} f\,du,\quad \int\limits_{a_2}^{x} f\,du; \tag{31}$$

$$\int\limits_{a_3}^{a_1} f\,du,\quad \int\limits_{a_3}^{a_2} f\,du,\quad \cdots,\quad \int\limits_{a_3}^{a_n} f\,du,\quad \int\limits_{a_3}^{x} f\,du; \tag{31'}$$

. . . .

$$\int\limits_{x}^{a_1} f\,du,\quad \int\limits_{x}^{a_2} f\,du,\quad \cdots,\quad \int\limits_{x}^{a_n} f\,du. \tag{31''}$$

§ 4.

До сихъ поръ мы исключали изъ своихъ разсмотрѣній тѣ случаи, когда нѣкоторыя изъ количествъ $b_1, b_2, \cdots, b_n$ и λ суть цѣлыя числа или нуль. Теперь же мы остановимся на анализѣ этихъ случаевъ. Допустимъ, прежде всего, что b_ν есть цѣлое отрицательное число $-m_\nu$, а b_μ не есть цѣлое число или нуль. Тогда формула (7) дастъ:

$$[(a_\nu\, a_\mu\, \overline{a_\nu}\, \overline{a_\mu})] = (1-e^{2\pi b_\mu i}) \int\limits_{K_{a_\nu}} f\,du. \tag{32}$$

Но имѣемъ:

$$\int\limits_{K_{a_\nu}} f\,du = \int\limits_{K_{a_\nu}} \frac{\varphi(u,x)}{(u-a_\nu)^{m_\nu+1}}\,du, \tag{33}$$

гдѣ положено:

$$\varphi(u,x) = (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_{\nu-1})^{b_{\nu-1}-1}(u-a_{\nu+1})^{b_{\nu+1}-1} \cdots (u-x)^{\lambda-1}. \tag{34}$$

Такъ какъ $\varphi(u, x)$ голоморфна въ области точки a_ν, то мы въ правѣ написать:

$$\varphi(u, x) = \varphi(a_\nu, x) + (u - a_\nu) \frac{d\varphi(a_\nu, x)}{da_\nu} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(u-a_\nu)^m}{1.2 \cdots m_\nu} \frac{d^{m_\nu} \varphi(a_\nu, x}{da_\nu^{m_\nu}} + \cdots \tag{35}$$

Внеся выраженіе (35) въ (33), получимъ:

$$\int\limits_{K_{a_\nu}} f\,du = \cdots + \frac{1}{1.2 \cdots m_\nu} \frac{d^{m_\nu}\varphi(a_\nu, x)}{da_\nu^{m_\nu}} \int\limits_{K_{a_\nu}} \frac{du}{u - a_\nu} + \cdots$$

$$= \frac{2\pi i}{1.2 \cdots m_\nu} \frac{d^{m_\nu} \varphi(a_\nu, x)}{da_\nu^{m_\nu}}. \tag{36}$$

Изъ формулъ (32) и (36) заключаемъ:

$$[(a_\nu\, a_\mu\, \overline{a}_\nu\, \overline{a}_\mu)] = \frac{2\pi i(1 - e^{2\pi b_\mu i})}{1.2.3 \cdots m_\nu} \frac{d^{m_\nu} \varphi(a_\nu, x)}{da_\nu^{m_\nu}}. \tag{37}$$

Въ случаѣ, если

$$\lambda = -m, \tag{38}$$

аналогичнымъ путемъ найдемъ:

$$[(x\, a_\mu\, \overline{x}\, \overline{a}_\mu)] = \frac{2\pi i(1 - e^{2\pi b_\mu i})}{1.2 \cdots m} \frac{d^m f_1(x)}{dx^m}, \tag{39}$$

гдѣ положено:

$$f_1(u) = (u - a_1)^{b_1 - 1}(u - a_2)^{b_2 - 1} \cdots (u - a_n)^{b_n - 1}. \tag{40}$$

Если же:

$$b_\nu = -m_\nu = 0, \tag{41}$$

то безъ труда находимъ:

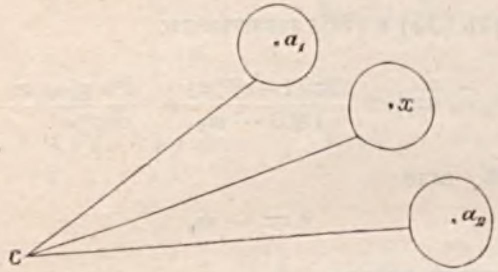
$$[(a_\nu\, a_\mu\, \overline{a}_\nu\, \overline{a}_\mu)] = 2\pi i(1 - e^{2\pi b_\mu i})\varphi(a_\nu, x); \tag{42}$$

$$[(x\, a_\mu\, \overline{x}\, \overline{a}_\mu)] = 2\pi i(1 - e^{2\pi \lambda i}) f_1(x). \tag{43}$$

Значитъ, въ этихъ случаяхъ интегралы $[(a_\nu\, a_\mu\, \overline{a}_\nu\, \overline{a}_\mu)]$ и $[(x\, a_\mu\, \overline{x}\, \overline{a}_\mu)]$ лишь постоянными множителями отличаются отъ интегральныхъ вычетовъ функціи $f(u)$ для точекъ a_ν и x. Пусть

$b_\nu = -b_2 = -m_2$. Тогда интегралъ $[(a_1\, a_2\, a_1\, a_2)]$ лишь постояннымъ множителемъ разнится отъ интегральнаго остатка $f(u)$ для точки a_2. Значитъ, въ числѣ интеграловъ (8) есть также и интегральный вычетъ. Вообще, если $b_2, b_3, \cdots, b_{k+1}$ суть цѣлыя отрицательныя числа или нули, то въ числѣ основныхъ интеграловъ (8) оказывается k интегральныхъ остатковъ (до постоянныхъ множителей), принадлежащихъ къ точкамъ $a_2, a_3, \cdots, a_{k+1}$. Если въ этомъ послѣднемъ случаѣ $k = n-1$, а λ также цѣлое отрицательное число или нуль, то всѣ интегралы (8) представляютъ интегральные вычеты для точекъ $a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n$ и x. Повидимому является особеннымъ случай, когда b_1 цѣлое отрицательное число или нуль, такъ какъ тогда всѣ интегралы (8) лишь постоянными

Черт. 5.



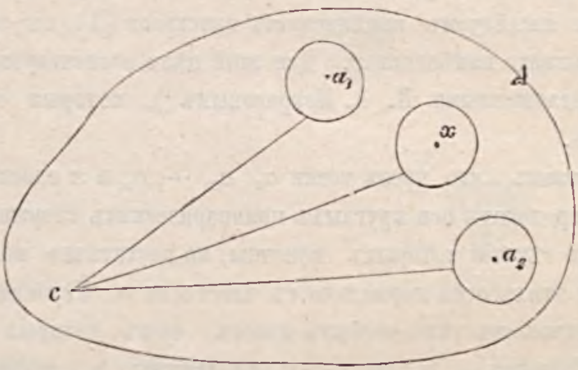
множителями отличаются отъ интегральнаго остатка функціи $f(u)$ относительно точки a_1. Но тутъ, вмѣсто интеграловъ (8), за основную систему надо принять одну изъ группъ интеграловъ, указанныхъ въ примѣчаніи къ § 2 настоящей главы, и тогда мы будемъ имѣть одинъ изъ случаевъ, только-что разсмотрѣнныхъ.

Но мы не можемъ предположить всѣ показатели $b_1, b_2, \cdots, b_n$ и λ равными цѣлымъ отрицательнымъ числамъ или нулю, безъ того чтобы всѣ интегралы (8) и (22), (22'), $\cdots$, (22'') не обратились въ нуль. Значитъ, въ разсматриваемомъ случаѣ пути съ двойными обходами, какъ неудовлетворяющіе четвертому условію § 1, должны быть отброшены.

Но тутъ можно выбрать такіе пути, которые, удовлетворяя всѣмъ этимъ требованіямъ, будутъ путями дозволенными. Въ самомъ дѣлѣ, подъинтегральная функція оказывается функціей раціональной. Полюсы ея суть: a_1, a_2, $\cdots$, a_n и x. Что же касается до $u=\infty$, то она является обыкновенной точкою. Выберемъ искомые пути интеграціи такимъ образомъ, какъ это показано на чертежѣ. (См. черт. 5).

Каждый изъ этихъ путей представляетъ элементарный контуръ съ общимъ началомъ c. Очевидно, что проведенные такимъ образомъ пути удовлетворяютъ всѣмъ требованіямъ, о которыхъ мы предъ этимъ говорили. Легко также сообразить, что взятые по этимъ путямъ интегралы до фактора $2\pi i$ совпадаютъ съ интегральными вычетами функціи $f(u)$ для точекъ a_1, a_2, $\cdots$, a_n и x. Между этими $n+1$ интегралами существуетъ одно линейное и однородное соотношеніе съ цѣлыми постоянными коэффиціентами. Для доказательства этого положенія, проведемъ около точекъ a_1, a_2, $\cdots$, a_n, x и c замкнутую кривую A.

Черт. 6.



Интегралъ $\int\limits_A f\,du$, взятый по пути A, нуль, такъ какъ $u=\infty$ простая точка $f(u)$. Съ другой стороны, тотъ же самый интегралъ равенъ суммѣ интеграловъ, взятыхъ по элементарнымъ контурамъ (a_1), (a_2), $\cdots$, (a_n) и (x) съ общимъ началомъ c. Отсюда слѣдуетъ, что только n между ними могутъ быть взяты за систему основныхъ интеграловъ.

Положимъ теперь, что b_ν равно цѣлому положительному числу $+m_\nu$. Пользуясь формулой (6), находимъ:

$$[(a_\nu\, a_\mu\, \bar{a}_\nu\, \bar{a}_\mu)]=0. \tag{44}$$

Очевидно, что въ этомъ случаѣ основная система (8) содержитъ

$n-1$ линейно различныхъ интеграловъ. Вообще, если $b_2, b_3, \cdots, b_{k+1}$ суть цѣлыя положительныя числа, то въ системѣ (8) только $n-k$ интеграловъ, отличныхъ отъ нуля. Если же въ этомъ послѣднемъ случаѣ $k=n-1$, а λ есть также цѣлое положительное число, то всѣ интегралы (8) нули. Если b_1 равно цѣлому положительному числу, то тогда надо, вмѣсто (8), принять за основные интегралы какую-либо изъ группъ, указанныхъ въ концѣ § 2.

Этими выводами мы пока ограничимся. Впослѣдствіи мы еще разъ возвратимся къ этому случаю, который представляетъ нѣкоторый интересъ.

§ 5.

Въ своемъ предыдущемъ анализѣ мы предполагали x неподвижною точкою въ плоскости перемѣннаго u. Будемъ же теперь считать x перемѣннымъ и изслѣдуемъ измѣняемость интеграла (1) въ зависимости отъ непрерывнаго измѣненія x. Для этой цѣли воспользуемся построеніями, предложенными П. А. Некрасовымъ [1]), которыя состоятъ въ слѣдующемъ.

Вообразимъ, что чрезъ точки $a_1, a_2, \cdots, a_n$ и x плоскости перемѣннаго u проходятъ оси круглыхъ цилиндрическихъ стержней, радіусы поперечныхъ сѣченій которыхъ конечны, но достаточно малы. Пусть направленіе этихъ осей нормально къ плоскости u. Условимся стержни отличать названіемъ тѣхъ особыхъ точекъ, чрезъ которыя проходятъ ихъ оси. Стержни $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ неподвижны, а x способенъ къ перемѣщенію. Что же касается до путей интеграціи, то будемъ представлять ихъ въ видѣ гибкихъ, сжимаемыхъ и растяжимыхъ, удобоподвижныхъ нитей. Каждая изъ нихъ, выходя изъ c, огибаетъ стержни $a_1, a_2, \cdots, a_n$ и x (на чертежѣ 7-омъ представлены два контура и сѣченія стержней a_1 и a_2 съ плоскостью u).

При такого рода построеніи, перемѣнное x, очевидно, можетъ описывать въ плоскости u лишь такіе пути, которые не проходятъ чрезъ особыя точки $f(u)$ и точку c, а также не встрѣчаетъ при своемъ теченіи путей интеграціи. Приступая къ раскрытію свойствъ интеграла

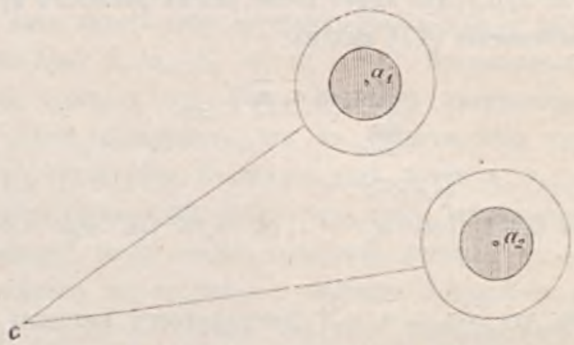
---

[1]) „Линейныя уравненія и пр.“, стр. 56—59.

(1) при помощи этихъ построеній, остановимся предварительно на основныхъ интегралахъ (8). Эти послѣдніе раздѣлимъ на двѣ категоріи. Къ первой категоріи отнесемъ $n-1$ интеграловъ, въ которыхъ пути интеграціи окружаютъ лишь неподвижные стержни, а ко второй— интегралъ $[(a_1\, x\, \overline{a_1}\, \overline{x})]$. Изъ интеграловъ перваго рода мы подробно остановимся только на интегралѣ $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$, такъ какъ надлежащія формулы для прочихъ $n-2$ интеграловъ получаются изъ формулъ, принадлежащихъ функціи $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$, простою замѣною нѣкоторыхъ количествъ другими.

Пусть стержень x совершитъ произвольное движеніе, при которомъ, предположимъ на первыхъ порахъ, онъ не сталкивается съ дру-

Черт. 7.



гими стержнями и не вызываетъ деформаціи въ пути интеграціи интеграла $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$. Изслѣдуемъ, какъ, при непрерывномъ перемѣщеніи x въ плоскости u, будетъ измѣняться разсматриваемый интегралъ. Легко прежде всего убѣдиться, что $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$ для каждой точки линіи, описываемой перемѣннымъ x, представляетъ функцію непрерывную. Въ самомъ дѣлѣ, пусть интересующая насъ точка будетъ x_0. Допустимъ, что $x_0+\Delta x$, гдѣ Δx безконечно малое приращеніе, также принадлежитъ къ той же линіи. Тогда будемъ имѣть:

$$\Delta\,[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})] = [(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]_{x=x_0+\Delta x} - [(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]_{x=x_0} = \tag{45}$$

$$= \int\limits_{c}^{(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})} (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\cdots(u-a_n)^{b_n-1}\left[(u-x_0-\Delta x)^{\lambda-1}-(u-x_0)^{\lambda-1}\right]du.$$

Такъ какъ далѣе:

$$(46)\quad \begin{aligned}&[(u-x_0-\Delta x)^{\lambda-1}-(u-x_0)^{\lambda-1}]=\\&=-(\lambda-1)(u-x_0)^{\lambda-2}\Delta x\left[1-\frac{\lambda-2}{1.2}\frac{\Delta x}{u-x_0}+\frac{(\lambda-2)(\lambda-3)}{1.2.3}\left(\frac{\Delta x}{u-x_0}\right)^2\cdots\right],\end{aligned}$$

то находимъ:

$$(47)\quad \begin{aligned}&\Delta\,[(a_1\,a_2\,\overline{a}_1\,\overline{a}_2)]=\\&=-(\lambda-1)\,\Delta x\int\limits_c^{(a_1\,a_2\,\overline{a}_1\,\overline{a}_2)}(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x_0)^{\lambda-2}\left[1-\right.\\&\qquad\left.-\frac{\lambda-2}{1.2}\,\frac{\Delta x}{u-x_0}+\cdots\right]du.\end{aligned}$$

Эта формула даетъ намъ право заключить о непрерывности функціи $[(a_1\,a_2\,\overline{a}_1\,\overline{a}_2)]$ для любой точки разсматриваемаго пути.

Изъ соотношенія (47) имѣемъ:

$$(48)\quad \begin{aligned}&\frac{d\,[(a_1\,a_2\,\overline{a}_1\,\overline{a}_2)]}{dx}_{x=x_0}=\\&=-(\lambda-1)\int\limits_c^{(a_1\,a_2\,\overline{a}_1\,\overline{a}_2)}(u-a_1)^{b_1-1}\cdots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x_0)^{\lambda-2}\,du.\end{aligned}$$

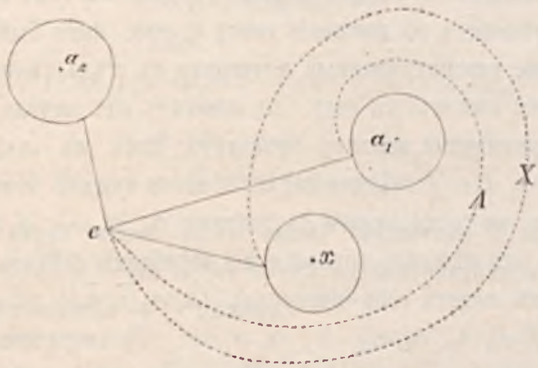
Очевидно, что $[(a_1\,a_2\,\overline{a}_1\,\overline{a}_2)]$ представляетъ величину конечную для $x=x_0$, а въ области этой точки выражаетъ функцію однозначную. Отсюда слѣдуетъ, что разсматриваемый интегралъ въ области любой точки интересующей насъ линіи представляетъ функцію голоморфную. Мы допустили только такія перемѣщенія стержня x, при которыхъ онъ не сталкивается съ другими стержнями и не вызываетъ деформаціи въ пути интеграла $[(a_1\,a_2\,\overline{a}_1\,\overline{a}_2)]$. Теперь же мы освободимся отъ этихъ ограниченій. Прежде всего мы можемъ допустить, что, сталкиваясь съ стержнями: a_1, a_2, $\cdots$, a_{n-1} и a_n, стержень x отбрасывается ими; при этомъ, какъ убѣждаютъ только-что полученные результаты, перемѣнное x можетъ описывать лишь такіе пути, вдоль которыхъ $[(a_1\,a_2\,\overline{a}_1\,\overline{a}_2)]$ оказывается функціей голоморфной. При своемъ движеніи стержень x можетъ встрѣчать путь интеграціи въ интегралѣ $[(a_1\,a_2\,\overline{a}_1\,\overline{a}_2)]$. Тогда онъ увлекаетъ вслѣдъ за собою этотъ путь, вызывая въ немъ опредѣленную деформацію. Въ виду способности путей сжиматься и растягиваться, мы можемъ предположить, что точка c остается неподвижной. Вызываемая при этомъ деформація не вліяетъ на измѣненіе интеграла $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$ и дѣло, слѣдовательно, обстоитъ такъ, какъ еслибы указанной деформаціи совсѣмъ не было. Голоморфность функціи $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$ сохраняется также въ области каждой точки пути, описываемаго перемѣннымъ x, даже въ томъ случаѣ, если стержень x приводитъ въ движеніе точку c, ибо, какъ было въ своемъ мѣстѣ доказано, разсматриваемый интегралъ въ тѣхъ границахъ, которыя мы сейчасъ имѣемъ въ виду, не зависитъ отъ начала c.

Нашъ предыдущій анализъ приводитъ насъ къ заключенію, что функція $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$ голоморфна въ области каждой точки плоскости перемѣннаго u, не совпадающей съ точками $a_1, a_2, \cdots, a_n$ и ∞.

Вопросъ, къ рѣшенію котораго мы перейдемъ сейчасъ, — это изслѣдовать, какъ ведетъ себя интегралъ $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$ въ области особыхъ точекъ $f(u)$: $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ и ∞. Предварительно обратимъ вниманіе на точки $a_3, a_4, \cdots, a_n$. Возьмемъ какую-либо изъ нихъ, напр., a_k. Легко обнаружить, что въ области этой точки функція $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$ голоморфна. Въ самомъ дѣлѣ, точки $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ и a_n предполагаются отстоящими другъ отъ друга на конечныхъ разстояніяхъ. Поэтому всегда можно подобрать стержни $a_1, a_2, \cdots, a_n$ и x такихъ размѣровъ, что стержень x свободно совершаетъ обходъ около a_k, оставляя всѣ прочіе стержни внѣ пути, описываемаго при этомъ точкою x. Итакъ, допустимъ, что, при такихъ условіяхъ, стержень x дѣйствительно совершилъ обходъ около стержня a_k въ какомъ-либо направленіи. Тогда произойдетъ слѣдующее. Стержень x или совсѣмъ оставитъ въ сторонѣ путь интеграціи разсматриваемаго интеграла, или же, если встрѣтитъ его, то вызванная этимъ деформація не вліяетъ на измѣненіе интеграла. Что же касается до подъинтегральной функціи, то она въ концѣ такого обхода возвратится къ первоначальному своему значенію $f_0(c)$. Отсюда мы имѣемъ основаніе заключить, что въ области a_k интегралъ $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$ представляетъ функцію однозначную. Легко сообразить, что функція $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$ конечна и непрерывна для точки a_k. Точно также безъ труда убѣждаемся, что для этой точки она имѣетъ производную. Все это вмѣстѣ обнаруживаетъ, что точка a_k и, слѣдовательно, любая изъ точекъ $a_3, a_4, \cdots, a_n$ есть простая точка интеграла $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$.

Остается теперь изслѣдовать характеръ точекъ a_1, a_2 и ∞. Остановимся предварительно на точкѣ a_1. Допустимъ, что стержень x совершилъ однократный обходъ въ положительномъ направленіи около стержня a_1.

Черт. 8.



Положеніе контура (a_1) послѣ обхода обозначено чрезъ A, а положеніе контура (x) послѣ того же самаго обхода отмѣчено чрезъ X. Въ концѣ обхода интегралъ $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$ преобразуется въ $[(A\, a_2\, \overline{A}\, \overline{a_2})]$. Не трудно обнаружить, что этотъ послѣдній можетъ быть представленъ линейной и однородной формулою съ постоянными коэффиціентами отъ интеграловъ $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$ и $[(a_1\, x\, \overline{a_1}\, \overline{x})]$. Дѣйствительно, легко сообразить, что путь A эквивалентенъ $(x\, a_1\, \overline{x})$. А посему интегралъ $[(A\, a_2\, \overline{A}\, \overline{a_2})]$ равенъ $[(x\, a_1\, \overline{x}\, a_2\, x\, \overline{a_1}\, \overline{x}\, \overline{a_2})]$. Раскрывая этотъ символъ по извѣстнымъ пріемамъ, будемъ имѣть:

$$
\begin{aligned}
&[(A\, a_2\, \overline{A}\, \overline{a_2})] = (1 - e^{2\pi b_1 i})(1 - e^{2\pi b_2 i})\,[(x)] + \\
(49)\qquad &+ (e^{2\pi\lambda i} - e^{2\pi(b_2+\lambda)i})\,[(a_1)] - (1 - e^{2\pi b_1 i})\,[(a_2)].
\end{aligned}
$$

При помощи формулы (6) предыдущему равенству дадимъ слѣдующій видъ:

$$
(50)\qquad [(A\, a_2\, \overline{A}\, \overline{a_2})] = [(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})] - (1 - e^{2\pi b_1 i})\,[(a_1\, x\, \overline{a_1}\, \overline{x})].
$$

Такимъ образомъ убѣждаемся въ справедливости высказаннаго положенія. Результатъ вторичнаго обхода стержня x около a_1 зависитъ не только отъ измѣняемости $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$, но также и отъ интеграла $[a_1\, x\, \bar{a}_1\, \bar{x})]$. Мы еще возвратимся къ этому вопросу, когда изучимъ свойства интеграла $[a_1\, x\, \bar{a}_1\, \bar{x})]$. Теперь же будемъ продолжать раскрывать особенности функціи $[(a_1\, a_2\, \bar{a}_1\, \bar{a}_2)]$. Мы предположили, что обходъ былъ совершенъ около a_1. Допустимъ теперь, что стержень x совершилъ въ положительномъ направленіи однократный обходъ около точки a_2. Тогда, какъ легко сообразить, интегралъ $[(a_2\, a_1\, \bar{a}_2\, \bar{a}_1)]$ приметъ новое аналитическое значеніе $[(A'_2\, a_1\, \bar{A}'_2\, \bar{a}_1)]$, выражающееся чрезъ интегралы $[(a_2\, a_1\, \bar{a}_2\, \bar{a}_1)]$ и $[(a_2\, x\, \bar{a}_2\, \bar{x})]$ слѣдующимъ образомъ:

$$[(A'_2\, a_1\, \bar{A}'_2\, \bar{a}_1)] = [(a_2\, a_1\, \bar{a}_2\, \bar{a}_1)] - (1 - e^{2\pi b_1 i})\, [(a_2\, x\, \bar{a}_2\, \bar{x})]. \tag{51}$$

Но имѣемъ:

$$[(a_2\, a_1\, \bar{a}_2\, \bar{a}_1)] = -\, [(a_1\, a_2\, \bar{a}_1\, \bar{a}_2)]; \tag{52}$$

$$[(a_2\, x\, \bar{a}_2\, \bar{x})] = \frac{(1 - e^{2\pi b_2 i})\, [(a_1\, x\, \bar{a}_1\, \bar{x})] - (1 - e^{2\pi \lambda i})\, [(a_1\, a_2\, \bar{a}_1\, \bar{a}_2)]}{1 - e^{2\pi b_1 i}} \tag{53}$$

Въ силу формулъ (52) и (53), соотношеніе (51) напишется такъ:

$$[(a_1\, A'_2\, \bar{a}_1\, \bar{A}'_2)] = e^{2\pi\lambda i}[(a_1\, a_2\, \bar{a}_1\, \bar{a}_2)] + (1 - e^{2\pi b_2 i})\, [(a_1\, x\, \bar{a}_1\, \bar{x})]. \tag{54}$$

Мы предположили, что стержень x совершилъ по обходу около a_1 и a_2 въ положительномъ направленіи. Формулы, аналогичныя формуламъ (50) и (54), мы получили бы, еслибы тотъ же самый стержень совершилъ по обходу въ отрицательномъ направленіи около a_1 и a_2.

Посмотримъ теперь, какъ представится интегралъ $[(a_1\, a_2\, \bar{a}_1\, \bar{a}_2)]$ послѣ однократнаго обхода перемѣннымъ x въ положительномъ направленіи точекъ a_1 и a_2. (Черт. 9).

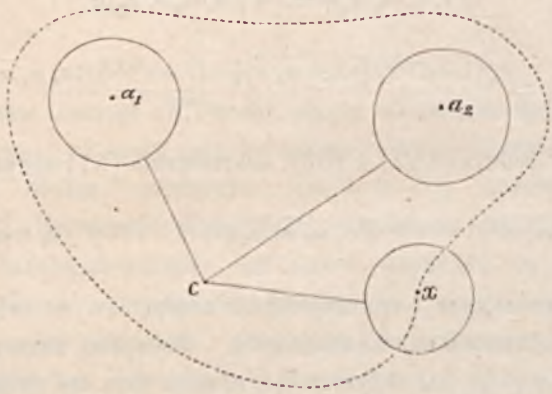
Въ концѣ такого обхода путь интеграціи въ интегралѣ $[(a_1\, a_2\, \bar{a}_1\, \bar{a}_2)]$ остается безъ перемѣны. Что же касается до начальнаго значенія функціи $f(u)$ послѣ этого обхода, то, очевидно, оно будетъ $e^{2\pi\lambda i} f_0(c)$. Въ виду этого, интегралъ $[(a_1\, a_2\, \bar{a}_1\, \bar{a}_2)]$ преобразуется въ $e^{2\pi\lambda i}\, [(a_1\, a_2\, \bar{a}_1\, \bar{a}_2)]$. Такимъ образомъ убѣждаемся, что въ конечной части плоскости u единственными особыми точками интеграла $[(a_1\, a_2\, \bar{a}_1\, \bar{a}_2)]$ служатъ a_1 и a_2.

Перейдемъ теперь къ изслѣдованію характера точки $u = \infty$. Предположимъ, что стержень x совершилъ обходъ въ положительномъ направленіи около $u = \infty$. Въ концѣ обхода, ясное дѣло, путь интеграціи разсматриваемаго интеграла останется безъ перемѣны. Но начальное значеніе функціи будетъ $e^{-2\pi\lambda i} f_0(c)$. А посему интегралъ $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$ приметъ новое свое аналитическое значеніе: $e^{-2\pi\lambda i}[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$.

Нашъ анализъ, слѣдовательно, приводитъ насъ къ выводу, что на всей плоскости перемѣннаго u особыми точками интеграла $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$ оказываются лишь: a_1, a_2 и ∞.

Заключенія, сдѣланныя нами касательно интеграла $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]$ приложимы и къ прочимъ интеграламъ (8) той же категоріи. Такъ,

Черт. 9.



напр., особыми точками для $[(a_1\, a_3\, \overline{a_1}\, \overline{a_3})]$ являются a_1, a_3 и ∞. Формулы, аналогичныя (50) и (54), для разсматриваемаго интеграла получаются изъ этихъ послѣднихъ чрезъ взаимную перестановку количествъ: b_2 и b_3, a_2 и a_3.

§ 5.

Въ настоящемъ параграфѣ мы остановимся на раскрытіи свойствъ интеграла $[(a_1\, x\, \overline{a_1}\, \overline{x})]$. Допустимъ, что стержень x совершилъ нѣкоторое перемѣщеніе, не встрѣчая нигдѣ пути интеграціи въ $[(a_1\, x\, \overline{a_1}\, \overline{x})]$. Сталкиваясь же съ другими стержнями, онъ отбрасывается ими. Легко убѣдиться, что въ области каждой точки пути, описаннаго при этомъ перемѣннымъ x, функція $[(a_1\, x\, \overline{a_1}\, \overline{x})]$ голоморфна. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $x = x_0$ будетъ какая-либо точка этого пути. Возьмемъ на немъ безконечно близкую точку $x_0 + \Delta x$, и сообразимъ разность $[(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]_{x=x_0+\Delta x} - [(a_1\, a_2\, \overline{a_1}\, \overline{a_2})]_{x=x_0}$. Замѣтимъ, что путь интеграціи въ обоихъ этихъ интегралахъ одинъ и тотъ же, а именно: $(a_1\, x_0\, \overline{a_1}\, \overline{x_0})$.

Имѣемъ:

$$[(a_1\, x\, \overline{a_1}\, \overline{x})]_{x=x_0+\Delta x} - [(a_1\, x\, \overline{a_1}\, \overline{x})]_{x=x_0} =$$

$$= -(\lambda-1)\Delta x \int\limits_c^{(a_1\, x_0\, \overline{a_1}\, \overline{x_0})} (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_n)^{b_n-1}(u-x_0)^{\lambda-2}\Big[1 - \tag{55}$$

$$- \frac{\lambda-2}{1.2}\,\frac{\Delta x}{u-x_0} + \cdots\Big]\, du.$$

Эта формула доказываетъ непрерывность функціи $[(a_1\, x\, \overline{a_1}\, \overline{x})]$ для любой точки пути, описаннаго перемѣннымъ x.

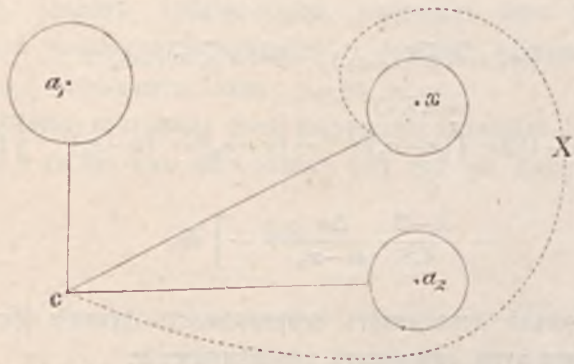
Изъ формулы (55) прямо слѣдуетъ:

$$\frac{d}{dx}\Big|_{x=x_0} [(a_1\, x\, \overline{a_1}\, \overline{x})] = -(\lambda-1)\int\limits_c^{(a_1\, x_0\, \overline{a_1}\, \overline{x_0})} (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-x_0)^{\lambda-2}\, du. \tag{56}$$

Далѣе, вполнѣ ясно, что $[(a_1\, x\, \overline{a_1}\, \overline{x})]$ конечна и однозначна для $x = x_0$. А отсюда слѣдуетъ, что x_0 и, слѣдовательно, любая изъ точекъ разсматриваемаго пути оказывается простою точкой функціи $[(a_1\, x\, \overline{a_1}\, \overline{x})]$. Мы допустили лишь такія перемѣщенія стержня x, при которыхъ элементарный контуръ (a_1) не претерпѣваетъ деформаціи. Но, очевидно, наше заключеніе останется во всей силѣ, если предположить, что x при своемъ движеніи встрѣчаетъ контуръ (a_1). Всѣ эти результаты даютъ намъ право заключить, что всякая точка плоскости перемѣннаго u, не совпадающая съ особою точкою функціи $f(u)$, служитъ простою точкою интеграла $[(a_1\, x\, \overline{a_1}\, \overline{x})]$.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію точекъ $a_1, a_2, \cdots, a_n$ и ∞. Предварительно обратимъ вниманіе на точки $a_2, a_3, \cdots, a_n$. Допустимъ, что стержень x совершилъ однократный обходъ въ положительномъ направленіи около стержня a_2. (Черт. 10). Въ концѣ такого обхода подъинтегральная функція возвратится къ своему первоначальному значенію $f_0(c)$. Что же касается до пути интеграціи $(a_1\, x\, \overline{a}_1\, \overline{x})$, то онъ преобразуется въ $(a_1\, X\, \overline{a}_1\, \overline{X})$, гдѣ X представляетъ новое положеніе контура (x). Обнаружимъ, что интегралъ $[(a_1\, X\, \overline{a}_1\, \overline{X})]$ можетъ быть выраженъ чрезъ $[(a_1\, a_2\, \overline{a}_1\, \overline{a}_2)]$ и $[(a_1\, x\, \overline{a}_1\, \overline{x})]$ линейной и однородной

Черт. 10.



формулой съ постоянными коэффиціентами. Достаточно взглянуть на чертежъ 10, чтобы видѣть, что путь X эквивалентенъ $(a_2\, x\, \overline{a}_2)$. А посему имѣемъ:

$$[(a_1\, X\, \overline{a}_1\, \overline{X})] = (1-e^{2\pi\lambda i})\,[(a_1)] - (1-e^{2\pi b_1 i})\,[(a_2\, x\, \overline{a}_2)] =$$

$$(57) \qquad = (1-e^{2\pi\lambda i})\,[(a_1)] - (1-e^{2\pi b_1 i})\,[(1-e^{2\pi\lambda i})\,[(a_2)] + e^{2\pi b_2 i}\,[(x)]\,].$$

Пользуясь формулою (9′) настоящей главы, этому соотношенію дадимъ видъ:

$$(57') \qquad [(a_1\, X\, \overline{a}_1\, \overline{X})] = (1-e^{2\pi\lambda i})\,[(a_1\, a_2\, \overline{a}_1\, \overline{a}_2)] + e^{2\pi b_1 i}\,[(a_1\, x\, \overline{a}_1\, \overline{x})].$$

Легко также обнаружить, что, если стержень x совершитъ однократный обходъ въ положительномъ направленіи около стержней a_2 и a_3, то интегралъ $[(a_1\, x\, \overline{a}_1\, \overline{x})]$ приметъ новую вѣтвь, которая можетъ быть представлена линейною и однородною формулой съ постоянными коэффиціентами отъ $[(a_1\, a_2\, \overline{a}_1\, \overline{a}_2)]$, $[(a_1\, a_3\, \overline{a}_1\, \overline{a}_3)]$ и $[(a_1\, x\, \overline{a}_1\, \overline{x})]$. Вообще, если стержень x совершитъ обходъ въ положительномъ направленіи около точекъ a_2, a_3, $\cdots$ a_{k+1}, то новое значеніе интеграла