Andrzej Adamski

KRYTERIUM ALGEBRAICZNE NOMOGRAFICZNOŚCI FUNKCJI n ZMIENNYCH

Wstęp

Zagadnienie sprowadzania funkcji n zmiennych do postaci kanonicznych, którym zajmuje się niniejsza praca, należy do podstawowych zagadnień nomografii teoretycznej.

Szeroką tą problematyką zajmowało się wielu autorów polskich i zagranicznych. Liczne prace z tej dziedziny zawarte są w wydawnictwach Akademii Nauk ZSRR w specjalnych zeszytach poświęconych nomografii (prace [13]-[17]). W Polsce wymienić należy prace J. Wojtowicza ([6] - [9]), G. Stegienki [10] i A. Hamanowej [11].

Szczególnie ważną postacią kanoniczną jest postać Soreau.

Problem sprowadzania funkcji trzech zmiennych ($n = 3$) do postaci Soreau omawiali M. Warmus [3] i E. Otto [1]. Praca [1] była realizacją myśli E. Duporcqa (Comptes Rendus 1898) [4]. Z kolei następstwem pracy [1] była praca M. Czyżykowskiego [2] rozpatrująca zagadnienie dla funkcji czterech zmiennych ($n = 4$).

Niniejsza praca jest uogólnieniem wyników prac [1] i [2] dla dowolnej $n \geqslant 3$. Dokonuje to twierdzenie 1 w Części I tej pracy rozpatrując funkcję rzeczywistą n zmiennych rzeczywistych.

W Części II wprowadzone zostaje pojęcie równoważności różnych przedstawień Soreau dla określonej funkcji $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ i przeprowadzone zostają badania pewnych zależności między różnymi przedstawieniami.

Część III zajmuje się dokładniejszym zbadaniem twierdzenia 1 dla $n = 3$ celem znalezienia zależności między wynikami prac [1] i [3].

W Części IV dokonane zostaje uogólnienie twierdzenia 1 poprzez osłabienie założeń (zwiększając dowolność zbioru argumentów). Nie zmienia to zasadniczo przebiegu dowodu twierdzenia, zwiększając jednocześnie znacznie możliwości stosowania twierdzenia 1.

Na końcu praca zawiera przykłady ilustrujące uzyskane wyniki.

Część I

Niech Ω będzie produktem kartezjańskim n dowolnych niepustych zbiorów $\Omega_{x_1}, \Omega_{x_2}, \ldots, \Omega_{x_n}$, to znaczy

$$\Omega = \bigtimes_{i=1}^{n} \Omega_{x_i}$$

Niech $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, gdzie $x_1 \in \Omega_{x_1}$, $x_2 \in \Omega_{x_2}$, ..., $x_n \in \Omega_{x_n}$, będzie funkcją rzeczywistą określoną na zbiorze Ω. Niech $X_k^i(x_k)$, gdzie $i = 1,2,\ldots,n$, będą funkcjami rzeczywistymi określonymi na zbiorach Ω_{x_k} (dla $k = 1,2,\ldots,n$).

<u>Definicja 1</u>. Funkcję $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ nazywamy przedstawialną w postaci Soreau lub, krótko, w postaci (S) w obszarze Ω wtedy i tylko wtedy, jeśli istnieją takie funkcje $X_1^i(x_1)$, $X_2^i(x_2)$, ..., $X_n^i(x_n)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, że

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n) \equiv \begin{vmatrix} X_1^1(x_1) & X_1^2(x_1) & X_1^3(x_1) & \ldots & X_1^n(x_1) \\ X_2^1(x_2) & X_2^2(x_2) & X_2^3(x_2) & \ldots & X_2^n(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_n^1(x_n) & X_n^2(x_n) & X_n^3(x_n) & \ldots & X_n^n(x_n) \end{vmatrix} \qquad \text{(S)}$$

dla wszystkich $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \Omega$. Oczywiście nie każdą funkcję n zmiennych można sprowadzić do postaci (S).

Niech ϕ będzie produktem kartezjańskim dwu dowolnych niepustych zbiorów ϕ_u i ϕ_v, tzn. $\phi = \phi_u \times \phi_v$.

Niech $U_i(u)$, $V_i(v)$, $\bar{U}_i(u)$, $\bar{V}_i(v)$ $(i = 1,2,\ldots,r)$ będą funkcjami rzeczywistymi określonymi odpowiednio na zbiorach ϕ_u lub ϕ_v.

Niech $G(u,v)$, gdzie $u \in \phi_u$, $v \in \phi_v$, będzie funkcją rzeczywistą określoną na zbiorze $\mathcal{O}$.

Definicja 2. Funkcję dwóch zmiennych $G(u,v)$ nazywamy funkcją rzędu n wtedy i tylko wtedy, jeśli istnieją funkcje $U_1(u), U_2(u), \ldots, U_n(u)$ i $V_1(v), V_2(v), \ldots, V_n(v)$ takie, że

(1) $G(u,v) \equiv U_1(u)V_1(v) + U_2(u)V_2(v) + \ldots + U_n(u)V_n(v)$

oraz nie istnieją funkcje $\overline{U}_1(u), \overline{U}_2(u), \ldots, \overline{U}_{n-1}(u)$ oraz $\overline{V}_1(v), \overline{V}_2(v), \ldots, \overline{V}_{n-1}(v)$ takie, że

(2) $G(u,v) \equiv \overline{U}_1(u)\overline{V}_1(v) + \overline{U}_2(u)\overline{V}_2(v) + \ldots + \overline{U}_{n-1}(u)\overline{V}_{n-1}(v)$

Funkcję $G(u,v)$ nazywamy funkcją rzędu zero wtedy i tylko wtedy, jeśli jest tożsamościowo równa zeru.

Funkcję $G(u,v)$ nazywamy rzędu 1 wtedy i tylko wtedy, jeśli istnieją funkcje $U_1(u) \not\equiv 0$ i $V_1(v) \not\equiv 0$ takie, że

$$G(u,v) \equiv U_1(u)\, V_1(v)$$

Funkcję $G(u,v)$ nazywamy funkcją rzędu większego niż n wtedy i tylko wtedy, jeśli nie istnieją funkcje $U_1(u), U_2(u), \ldots, U_n(u)$ i $V_1(v), V_2(v), \ldots, V_n(v)$ takie, że spełniają tożsamość (1).

Oznacza to, że funkcję $G(u,v)$ nazywamy funkcją rzędu większego niż n, jeśli jest funkcją rzędu $m > n$ lub nie posiada rzędu skończonego.

Definicja 3. Funkcję $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ nazywamy funkcją rzędu n ze względu na zmienną x_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ wtedy i tylko wtedy, jeśli funkcja $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ rozpatrywana jako funkcja dwóch zmiennych $u = x_i$ i $v = (x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$ będzie funkcją rzędu n.

Analogicznie definiujemy funkcję rzędu większego niż n ze względu na x_i $(i = 1,2,\ldots,n)$.

Definicja 4. Funkcję $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ nazywamy funkcją nomograficzną (zgodnie z terminologią N. Warmusa [3]) wtedy i tylko wtedy, jeśli:

1^o jest przedstawialna w postaci Soreau (S),

2^o jest funkcją rzędu większego niż 1 ze względu na każdą zmienną x_i $(i = 1,2,\ldots,n)$.

W pracy tej podajemy warunek konieczny i dostateczny nomograficzności funkcji $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ n zmiennych $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

Symbolika i założenia

Załóżmy, że dana funkcja $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ jest określona w pewnym obszarze Ω, w którym można umieścić kostkę Y, tzn. $Y = \bigtimes_{i=1}^{n} Y_i$, gdzie

(3) $$Y_i = \{x_i : a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\}$$

dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

Oznaczmy przez I ciąg indeksów zmiennych

$$I = (1,2,\ldots,n)$$

Oznaczmy ciąg zmiennych

$$(x_s)_{s \in I} \overset{\text{def}}{=} (x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

Wówczas funkcję $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ można zapisać $F\left[(x_s)_{s \in I}\right]$.

Przyjmijmy dalsze oznaczenia:

Dla każdego $k \in I$ i każdego $i \in I$ określimy funkcję

$$X_k^i \overset{\text{def}}{=} X_k^i(x_k) \overset{\text{def}}{=} F\left[(z_s)_{s \in I}\right]$$

gdzie

$$(4) \qquad z_s = \begin{cases} x_s & \text{dla } s = k \\ b_s & \text{dla } (s \neq k) \wedge (s = i) \\ a_s & \text{dla } (s \neq k) \wedge (s \neq i) \end{cases}$$

Oznaczmy wartości funkcji $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ na wierzchołkach kostki w sposób następujący:

$$(5) \qquad F_o \overset{\text{def}}{=} F\left[(a_s)_{s \in I}\right] = F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Dalej na $\binom{n}{1}$ wierzchołkach kostki typu

$$(6) \qquad F_k \overset{\text{def}}{=} F\left[(z_s)_{s \in I}\right], \text{ gdzie}$$

$$z_s = \begin{cases} b_s & \text{dla } s = k \\ a_s & \text{dla } s \neq k \end{cases}$$

Dalej, jeśli $k_1 \neq k_2$, to

$$(7) \qquad F_{k_2 k_1} \overset{\text{def}}{=} F_{k_1 k_2} \overset{\text{def}}{=} F\left[(z_s)_{s \in I}\right], \text{ gdzie}$$

$$z_s = \begin{cases} b_s & \text{dla } (s = k_1) \vee (s = k_2) \\ a_s & \text{dla } (s \neq k_1) \wedge (s \neq k_2) \end{cases}$$

Dalej, jeśli $k_1 < k_2 < k_3$, to

$$(8) \qquad F_{k_1 k_2 k_3} \overset{\text{def}}{=} F\left[(z_s)_{s \in I}\right], \text{ gdzie}$$

$$z_s = \begin{cases} b_s & \text{dla } (s = k_1) \vee (s = k_2) \vee (s = k_3) \\ a_s & \text{dla } (s \neq k_1) \wedge (s \neq k_2) \wedge (s \neq k_3) \end{cases}$$

I dalej, ogólnie,

$$F_{\neg i} \overset{\text{def}}{=} F\left[(z_s)_{s \in I}\right], \text{ gdzie}$$

$$z_s = \begin{cases} b_s & \text{dla} \quad s \in I_k^i \\ a_s & \text{dla} \quad s \notin I_k^i \end{cases}$$

I_k^i oznacza i-elementowy podciąg ciągu I o kolejnym k-tym numerze porządkującym w dającej się uporządkować rodzinie i-elementowych podciągów $\{I_k^i\}$, tzn. $1 \leqslant k \leqslant \binom{n}{i}$.

Wszystkich wartości $F_{I_k^i}$ jest tyle, ile wierzchołków kostki, czyli $\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} = 2^n$.

W sformułowaniu twierdzenia 1 potrzebne będą tylko wartości funkcji $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ w wierzchołkach kostki typu (5), (6), (7) i (8).

Z (4), (5), (6) i (7) wynika, że dla $\bigwedge_{i \in I}$ i $\bigwedge_{k \in I}$

(9) $$x_k^i(a_k) = \begin{cases} F_i & \text{dla} \quad k \neq i \\ F_o & \text{dla} \quad k = i \end{cases}$$

(10) $$x_k^i(b_k) = \begin{cases} F_{ik} & \text{dla} \quad i \neq k \\ F_i & \text{dla} \quad k = i \end{cases}$$

Załóżmy, że

(11) $$F_o \neq 0$$

(12) $$\bigwedge_{k_1 \in I} \bigwedge_{k_2 \in I} \left[(k_1 \neq k_2) \Longrightarrow (F_{k_1 k_2} \neq 0) \right]$$

(13) $$\bigwedge_{k \in I} (F_k = 0)$$

Niech dla $\bigwedge_{k_1,k_2,k_3 \in I}$ $(k_1 < k_2 < k_3)$ wielkości $T_{k_2 k_3 k_1}$ oraz $T_{k_3 k_1 k_2}$ spełniają układ równań

$$\begin{cases} T_{k_2k_3k_1} + T_{k_3k_1k_2} = F_{k_1k_2k_3} & (14) \\[2ex] T_{k_2k_3k_1} \cdot T_{k_3k_1k_2} = -\dfrac{F_{k_1k_2} \cdot F_{k_1k_3} \cdot F_{k_2k_3}}{F_o} & (15) \end{cases}$$

oraz dla każdej czwórki $k_1, k_2, k_3, k_4 \in I$ takiej, że $k_1 < k_2 < k_3 < k_4$ spełnione są równania

$$(16) \quad T_{k_2k_3k_1} \cdot T_{k_4k_1k_2} \cdot T_{k_3k_4k_1} \cdot T_{k_4k_2k_3} =$$

$$(17) \quad = T_{k_3k_1k_2} \cdot T_{k_2k_4k_1} \cdot T_{k_4k_1k_3} \cdot T_{k_3k_4k_2} =$$

$$= \frac{F_{k_1k_2} \cdot F_{k_1k_3} \cdot F_{k_1k_4} \cdot F_{k_2k_3} \cdot F_{k_2k_4} \cdot F_{k_3k_4}}{(F_o)^2}$$

Równań postaci (14), (15) mamy $2\cdot\binom{n}{3}$, zaś równań postaci (16) i (17) mamy $2\cdot\binom{n}{4}$.

Wówczas, przy wprowadzonych założeniach i przyjętych oznaczeniach, zachodzi następujące twierdzenie:

<u>Twierdzenie 1</u>. Warunkiem koniecznym i dostatecznym nomogrowalności funkcji $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest zachodzenie tożsamości

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv -\frac{\prod\limits_{m \in I, m \neq s} F_{ms}}{(F_o)^{n-2}} .$$

$$
(18)\qquad
\left|\begin{array}{c|c|c}
\begin{array}{cc} i<k<s & \\ & \frac{X_i^k}{T_{sik}} \\ \frac{X_k^k}{F_{ks}} & \\ \frac{X_i^k}{T_{isk}} & \\ k<i<s & \end{array} & \begin{array}{c} \vdots \\ \frac{X_i^s}{F_{is}} \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{c} i<s<k \\ \frac{X_i^k}{T_{ski}} \end{array} \\
\hline
\cdots\ \frac{X_s^k}{F_{ks}}\ \cdots & \frac{X_s^s}{-F_o} & \cdots\ \frac{X_s^k}{F_{sk}}\ \cdots \\
\hline
\begin{array}{c} k<s<i \\ \frac{X_i^k}{T_{iks}} \end{array} & \begin{array}{c} \vdots \\ \frac{X_i^s}{F_{si}} \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{cc} s<i<k & \\ \frac{X_k^k}{F_{sk}} & \frac{X_i^k}{T_{ksi}} \\ \frac{X_i^k}{T_{kis}} & \\ & s<k<i \end{array}
\end{array}\right|
$$

dla każdego $s \in I$.

Przystąpmy do dowodu twierdzenia.

A. Przeprowadzimy najpierw dowód konieczności twierdzenia w części dotyczącej przedstawialności funkcji w postaci (S) (zgodnie z definicją 4).

I. Załóżmy zatem, że funkcja $F(x_1,x_2,\dots,x_n)$ jest przedstawialna w postaci (S).

Równanie $F(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0$ określa w Ω na ogół pewną hiperpowierzchnię.

Założyliśmy (11) i (13), że funkcja $F(x_1,x_2,\dots,x_n)$ przyjmuje wartości na wierzchołkach kostki Y:

$$F_o = F\left[(a_s)_{s\in I}\right] \neq 0 \quad \text{oraz}$$

$$F_k = F_{I_k}(\ \ ) \quad \text{dla każdego} \quad k \in I.$$

Oznacza to geometrycznie, że dla każdego $k \in I$ punkty $A_k(u_s)_{s\in I}$, gdzie $u_s = \begin{cases} b_s & \text{dla } s = k \\ a_s & \text{dla } s \neq k \end{cases}$ należą do zbioru punktów spełniających równanie $F(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0$, natomiast punkt $A_0(a_s)_{s\in I}$ do tego zbioru nie należy.

Rozważmy n krzywych C_s $(s \in I)$ określonych parametrycznie równaniami (x_s - parametr)

$$(19) \qquad C_s: \bigwedge_{i\in I} \xi_i = \overline{X}_s^i(x_s), \text{ gdzie } a_s \leqslant x_s \leqslant b_s$$

dla mkażdego $s \in I$.

Warunek

$$(20) \qquad F(x_1,x_2,\dots,x_n) \equiv \begin{vmatrix} \overline{X}_1^1(x_1) & \overline{X}_1^2(x_1) & \dots & \overline{X}_1^n(x_1) \\ \overline{X}_2^1(x_2) & \overline{X}_2^2(x_2) & \dots & \overline{X}_2^n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{X}_n^1(x_n) & \overline{X}_n^2(x_n) & \dots & \overline{X}_n^n(x_n) \end{vmatrix} = 0$$

oznacza, że punkty krzywych C_s $(s \in I)$ odpowiadające wartościom parametru x_s $(s \in I)$ oraz początek układu $0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ punkt $0(0,0,\dots,0)$ leżą w jednej hiperpłaszczyźnie (w przestrzeni (n-1)-wymiarowej).

Wprowadźmy nowy układ współrzędnych $0\,\overline{\xi}_1\,\overline{\xi}_2 \dots \overline{\xi}_n$ w ten sposób, że osie $0\overline{\xi}_1$, $0\overline{\xi}_2$, ..., $0\overline{\xi}_n$ przechodzą odpowiednio przez punkty krzywych $C_1, C_2, \dots, C_s, \dots, C_n$ odpowiadające wartościom $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, \dots, x_3 = a_3, \dots, x_s = a_s, \dots, x_n = a_n$ (początek układu nie ulega zmianie).

Wzory na zamianę współrzędnych mają postać

$$(21) \qquad \begin{aligned} \xi_1 &= d_{11}\overline{\xi}_1 + d_{12}\overline{\xi}_2 + \dots + d_{1n}\overline{\xi}_n \\ \xi_2 &= d_{21}\overline{\xi}_1 + d_{22}\overline{\xi}_2 + \dots + d_{2n}\overline{\xi}_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \xi_n &= d_{n1}\overline{\xi}_1 + d_{n2}\overline{\xi}_2 + \dots + d_{nn}\overline{\xi}_n \end{aligned}$$

gdzie macierz

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} & \dots & d_{n1} \\ d_{12} & d_{22} & \dots & d_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{1n} & d_{2n} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

jest macierzą kwadratową nieosobliwą, to znaczy

$$(22) \qquad |D| = \det D \neq 0$$

Wprowadźmy oznaczenie wektorów

$$(23_1) \qquad \xi = \left[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\right]$$

i

$$(23_2) \qquad \bar{\xi} = \left[\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_n\right]$$

Korzystając z tych oznaczeń przekształcenie (21) można zapisać macierzowo

$$(23) \qquad \xi = \bar{\xi} \cdot D$$

zaś przekształcenie odwrotne

$$\bar{\xi} = \xi \cdot D^{-1}.$$

Dla każdego $s \in I$ równanie wektorowe krzywej $C_s(x_s)$ zgodnie z (19) i (23_1) przyjmie postać

$$\xi(x_s) = \left[\overline{X}_s^1(x_s), \overline{X}_s^2(x_s), \dots, \overline{X}_s^n(x_s)\right],$$

zaś równanie wektorowe krzywej $\overline{C}_s(x_s)$ w zmienionym układzie przyjmie na mocy (23_2) postać

$$\bar{\xi}(x_s) = \left[f_s^1(x_s), f_s^2(x_s), \dots, f_s^n(x_s)\right]$$

gdzie dla każdego $i \in I$

$$f_s^i(x_s) \overset{\text{def}}{=} \xi_s(x_s).$$

Ze wzoru (23) mamy zatem

$$(24)\quad \left[\bar{X}_s^1(x_s),\ \bar{X}_s^2(x_s),\ \ldots,\ \bar{X}_s^n(x_s)\right] =$$

$$= \left[f_s^1(x_s),\ f_s^2(x_s),\ \ldots,\ f_s^n(x_s)\right] \cdot D$$

dla każdego $s \in I$.

Korzystając z określenia iloczynu macierzy z (24) wynika

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_1^1(x_1) & \bar{X}_1^2(x_1) & \ldots & \bar{X}_1^n(x_1) \\ \bar{X}_2^1(x_2) & \bar{X}_2^2(x_2) & \ldots & \bar{X}_2^n(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{X}_s^1(x_s) & \bar{X}_s^2(x_s) & \ldots & \bar{X}_s^n(x_s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{X}_n^1(x_n) & \bar{X}_n^2(x_n) & \ldots & \bar{X}_n^n(x_n) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} f_1^1(x_1) & f_1^2(x_1) & \ldots & f_1^n(x_1) \\ f_2^1(x_2) & f_2^2(x_2) & \ldots & f_2^n(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_s^1(x_s) & f_s^2(x_s) & \ldots & f_s^n(x_s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n^1(x_n) & f_n^2(x_n) & \ldots & f_n^n(x_n) \end{bmatrix} \cdot D$$

Stąd na podstawie twierdzenia Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu dwóch macierzy mamy

$$(25)\quad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} f_1^1(x_1) & f_1^2(x_1) & \ldots & f_1^n(x_1) \\ f_2^1(x_2) & f_2^2(x_2) & \ldots & f_2^n(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n^1(x_n) & f_n^2(x_n) & \ldots & f_n^n(x_n) \end{vmatrix} \cdot |D|$$

Ze sposobu wprowadzenia układu współrzędnych $O\bar{\xi}_1\bar{\xi}_2\ldots\bar{\xi}_n$ wynika, że dla każdego $i\in I$ i $s\in I$ mamy

(26) $$f_s^i(a_s) = 0, \quad \text{gdy} \quad i \neq s .$$

Ponadto zauważmy na podstawie (20) i (26), że w układzie $O\xi_1\xi_2\ldots\xi_n$ dla każdego $k\in I$ $n+1$ różnych punktów, z których jeden był początkiem układu, a pozostałe leżały na krzywych $C_s(x_s)$ (dla $s\in I$) odpowiadając odpowiednio wartościom parametru $x_s = a_s$ dla $s\neq k$ i $x_s = b_k$ dla $s = k$, znajdowały się na jednej hiperpłaszczyźnie (w jednej przestrzeni $(n-1)$-wymiarowej). A zatem i po zamianie układu współrzędnych (co można zinterpretować także jako przekształcenie afiniczne) pozostaną one (albo ich obrazy) współhiperpłaszczyznowe.

Ponieważ dla n różnych punktów O, $C_s(a_s)$ (dla $s\in I$, $s\neq k$) na podstawie (25) ich współrzędne $\bar{\xi}_k = f_s^k(a_s) = 0$ dla każdego $s\in I$, $s\neq k$, zatem dla zachowania wspomnianej współhiperpłaszczyzności również współrzędna $\bar{\xi}_k$ punktu $C_k(b_k)$ musi równać się zeru:

(27) $$f_s^k(b_s) = 0 \quad \text{dla} \quad s = k$$

Ponieważ zachodzi to dla każdego $k\in I$, więc

(28) $$f_k^k(b_k) = 0 \quad \text{dla każdego} \quad k\in I.$$

II. Na podstawie (24) i (25) obliczmy teraz wartość F_o w zależności od wartości funkcji $f_i^k(x_i)$:

$$(29)\qquad F_0 = F\left[(a_s)_{s\in I}\right] =$$

$$= \begin{vmatrix} f_1^1(a_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2^2(a_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & f_3^3(a_3) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f_n^n(a_n) \end{vmatrix} \cdot |D| =$$

$$= \prod_{s\in I} f_s^s(a_s) \cdot |D|$$

Z powyższego i z tego, że $F_0 \neq 0$ (11), mamy:

$$(30)\qquad f_s^s(a_s) \neq 0 \quad \text{dla każdego} \quad s \in I.$$

Biorąc pod uwagę warunki (25), (28) i (30), które spełniają funkcje $f_s^k(x_s)$ $(k,s \in I)$ w punktach odpowiadających wartościom parametru: $x_s = a_s$ oraz $x_s = b_s$ dla $s \in I$, możemy napisać wartości zdefiniowanych uprzednio (4) funkcji X_s^k (dla $s,k \in I$) w zależności od funkcji $f_s^k(x_s)$. Wstawiając bowiem powyższe wielkości do wzoru (25) otrzymujemy:

$$X_k^k = X_k^k(x_k) = \begin{vmatrix} f_1^1(a_1) & f_1^2(a_1) & f_1^3(a_1) & \dots & f_1^n(a_1) \\ f_2^1(a_2) & f_2^2(a_2) & f_2^3(a_2) & \dots & f_2^n(a_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_k^1(x_k) & f_k^2(x_k) & f_k^3(x_k) & \dots & f_k^n(x_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n^1(a_n) & f_n^2(a_n) & f_n^3(a_n) & \dots & f_n^n(a_n) \end{vmatrix} \cdot |D| =$$

$$= \begin{vmatrix} f_1^1(a_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2^2(a_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & f_3^3(a_3) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_k^1(x_k) & f_k^2(x_k) & f_k^3(x_k) & \dots & f_k^n(x_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f_n^n(a_n) \end{vmatrix} \cdot |D| =$$

$$= f_1^1(a_1)\ f_2^2(a_2)\ f_3^3(a_3) \dots f_{k-1}^{k-1}(a_{k-1}) f_k^k(x_k) f_{k+1}^{k+1}(a_{k+1}) \dots$$

$$\dots\ f_n^n(a_n) \cdot |D| .$$

Wykorzystując wzór (29) otrzymujemy

$$(31) \qquad X_k^k = \frac{F_o\ f_k^k(x_k)}{f_k^k(a_k)} \quad \text{dla każdego} \quad k \in I$$

Obliczmy teraz wartość funkcji X_1^2 w zależności od funkcji $f_i^k(x_i)$ (dla i,k I):

$$X_1^2 = \begin{vmatrix} f_1^1(x_1) & f_1^2(x_1) & f_1^3(x_1) & \dots & f_1^n(x_1) \\ f_2^1(b_2) & 0 & f_2^3(b_2) & \dots & f_2^n(b_2) \\ 0 & 0 & f_3^3(a_3) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f_n^n(a_n) \end{vmatrix} \cdot |D| =$$

$$= -f_1^2(x_1)\ f_2^1(b_2)\ f_3^3(a_3)\ \dots\ f_n^n(a_n) \cdot |D| =$$

$$= - \frac{F_o\ f_1^2(x_1)\ f_2^1(b_2)}{f_1^1(a_1)\ f_2^2(a_2)}$$

Udowodnimy, że dla każdych $i,k \in I$ mamy

(32) $$x_i^k = -\frac{F_0\, f_i^k(x_i)\, f_k^i(b_k)}{f_i^i(a_i)\, f_k^k(a_k)} \quad \text{dla } i \neq k$$

$$x_i^k = \begin{vmatrix}
f_1^1(a_1) \ldots 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \ldots 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
f_i^1(x_i) \ldots f_i^i(x_i) & f_i^{i+1}(x_i) & \ldots f_i^{k-1}(x_i) & & f_i^k(x_i) \ldots f_i^n(x_i) \\
0 \ldots 0 & f_{i+1}^{i+1}(a_{i+1}) \ldots & & 0 & 0 \ldots 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 \ldots 0 & 0 & \ldots f_{k-1}^{k-1}(a_{k-1}) & & 0 \ldots 0 \\
f_k^1(b_k) \ldots f_k^i(b_k) & f_k^{i+1}(b_k) & \ldots f_k^{k-1}(b_k) & & 0 \ldots f_k^n(b_k) \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 \ldots 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \ldots f_n^n(a_n)
\end{vmatrix} \cdot |D| =$$

Rozwijając powyższy wyznacznik według k-tej kolumny, a następnie według i-tej kolumny otrzymamy

$$x_i^k = (-1)^{i+k} f_i^k(x_i)\cdot A_i^k = (-1)^{i+k} f_i^k(x_i)(-1)^{(i-1)+k} f_k^i(b_k) B_k^{i-1} =$$

$$= -f_i^k(x_i)\, f_k^i(b_k)\, \frac{\prod_{s \in I} f_s^s(a_s)}{f_k^k(a_k) f_i^i(a_i)} = -\frac{F_0\, f_i^k(x_i)\, f_k^i(b_k)}{f_i^i(a_i)\, f_k^k(a_k)} \quad \text{c.n.d.}$$

Wyraźmy teraz wartości funkcji $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ na wierzchołkach kostki przy pomocy wartości $f_i^k(a_i)$ i $f_i^k(b_i)$.

Z warunków (32) i (10) otrzymujemy dla każdego $i \in I$, $k \in I$ i $(i \neq k)$

(33) $$F_{ik} = -F_0\, \frac{f_i^k(b_i)\, f_k^i(b_k)}{f_i^i(a_i)\, f_k^k(a_k)}$$

Z powyższego i z założeń (12) wynika, że:

(34) $\qquad f_i^k(b_i) \neq 0$ dla każdego $(i,k \in I)$ i $(i \neq k)$.

Korzystając z (24), (25), (28) i (30) wyraźmy wartość funkcji F_{123}:

$$F_{123} = \left| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & f_1^2(b_1) & f_1^3(b_1) & f_1^4(b_1) & \dots & f_1^n(b_1) \\ f_2^1(b_2) & 0 & f_2^3(b_2) & f_2^4(b_2) & \dots & f_2^n(b_2) \\ f_3^1(b_3) & f_3^2(b_3) & 0 & f_3^4(b_3) & \dots & f_3^n(b_3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & f_4^4(a_4) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & f_n^n(a_n) \end{array} \right| \cdot |D| =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & f_1^2(b_1) & f_1^3(b_1) \\ f_2^1(b_2) & 0 & f_2^3(b_2) \\ f_3^1(b_3) & f_3^2(b_3) & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_4^4(a_4) & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & f_n^n(a_n) \end{vmatrix} \cdot |D| =$$

$$= \frac{\left[f_1^2(b_1)f_2^3(b_2)f_3^1(b_3) + f_1^3(b_1)f_2^1(b_2)f_3^2(b_3)\right] \prod_{s \in I} f_s^s(a_s) \cdot |D|}{f_1^1(a_1)f_2^2(a_2)f_3^3(a_3)} =$$

$$(35) \quad = F_o \frac{f_1^2(b_1)f_2^3(b_2)f_3^1(b_3)}{f_1^1(a_1)f_2^2(a_2)f_3^3(a_3)} + F_o \frac{f_1^3(b_1)f_2^1(b_2)f_3^2(b_3)}{f_1^1(a_1)f_2^2(a_2)f_3^3(a_3)}$$

Oznaczając

$$(36) \qquad T_{231} \stackrel{def}{=} F_o \frac{f_1^2(b_1)f_2^3(b_2)f_3^1(b_3)}{f_1^1(a_1)f_2^2(a_2)f_3^3(a_3)}$$

oraz

$$(37) \qquad T_{312} \stackrel{def}{=} F_o \frac{f_1^3(b_1)f_2^1(b_2)f_3^2(b_3)}{f_1^1(a_1)f_2^2(a_2)f_3^3(a_3)}$$

i podstawiając do (35) otrzymujemy jeden z $\binom{n}{3}$ wzorów postaci (14):

$$T_{231} + T_{312} = F_{123}$$

Ogólnie biorąc, niech $t_1, t_2, t_3 \in I$ i $t_1 < t_2 < t_3$. Wtedy mamy

$$F_{t_1 t_2 t_3} =$$

$$= \begin{vmatrix} f_1^1(a_1) & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{t_1}^1(b_{t_1}) & \ldots & 0 & \ldots & f_{t_1}^{t_2}(b_{t_1}) & \ldots & f_{t_1}^{t_3}(b_{t_1}) & \ldots & f_{t_1}^n(b_{t_1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{t_2}^1(b_{t_2}) & \ldots & f_{t_2}^{t_1}(b_{t_2}) & \ldots & 0 & \ldots & f_{t_2}^{t_3}(b_{t_3}) & \ldots & f_{t_2}^n(b_{t_2}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{t_3}^1(b_{t_3}) & \ldots & f_{t_3}^{t_1}(b_{t_3}) & \ldots & f_{t_3}^{t_2}(b_{t_3}) & \ldots & 0 & \ldots & f_{t_3}^n(b_{t_3}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & f_n^n(a_n) \end{vmatrix} \cdot |D| =$$

Dokonując m inwersji wierszy celem zamiany t_1, t_2 i t_3 wiersza na 1, 2, 3 wiersz i następnie również m inwersji kolumn celem zamiany t_1, t_2 i t_3 kolumny na 1, 2 i 3 kolumnę otrzymujemy

$$F_{t_1 t_2 t_3} = (-1)^{2m} \cdot |D| \cdot$$

$$\cdot \left| \begin{array}{ccc|cccc} 0 & f_{t_1}^{t_2}(b_{t_2}) & f_{t_1}^{t_3}(b_{t_1}) & f_{t_1}^{1}(b_{t_1}) & f_{t_1}^{2}(b_{t_1}) & \ldots & f_{t_1}^{n}(b_{t_1}) \\ f_{t_2}^{t_1}(b_{t_2}) & 0 & f_{t_2}^{t_3}(b_{t_2}) & f_{t_2}^{1}(b_{t_2}) & f_{t_2}^{2}(b_{t_2}) & \ldots & f_{t_2}^{n}(b_{t_2}) \\ f_{t_3}^{t_1}(b_{t_3}) & f_{t_3}^{t_2}(b_{t_3}) & 0 & f_{t_3}^{1}(b_{t_3}) & f_{t_3}^{2}(b_{t_3}) & \ldots & f_{t_3}^{n}(b_{t_3}) \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & f_1^1(a_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_2^2(a_2) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & f_n^n(a_n) \end{array} \right| =$$

$$(38) \quad = \frac{\prod_{s \in I} f_s^s(a_s) \cdot |D|}{f_{t_1}^{t_1}(a_{t_1})\, f_{t_2}^{t_2}(a_{t_2})\, f_{t_3}^{t_3}(a_{t_3})} \cdot$$

$$\cdot \left[f_{t_1}^{t_2}(b_{t_1})\, f_{t_2}^{t_3}(b_{t_2})\, f_{t_3}^{t_1}(b_{t_1}) + f_{t_1}^{t_3}(b_{t_1})\, f_{t_2}^{t_1}(b_{t_2}) f_{t_3}^{t_2}(b_{t_3}) \right]$$

Oznaczmy dla $t \neq s$ i $t, s \in I$ oraz dla $t_1, t_2, t_3 \in I$ i $t_1 < t_2 < t_3$

$$(39) \qquad f_t^s \overset{\mathrm{def}}{=} f_t^s(b_t)$$

$$(40) \qquad f_t \overset{\mathrm{def}}{=} f_t^t(a_t)$$

$$(41) \qquad T_{t_2 t_3 t_1} \overset{\mathrm{def}}{=} F_o \frac{f_{t_1}^{t_2}\, f_{t_2}^{t_3}\, f_{t_3}^{t_1}}{f_{t_1}\, f_{t_2}\, f_{t_3}}$$

$$(42) \qquad T_{t_3t_1t_2} \stackrel{\text{def}}{=} F_o \frac{f_{t_1}^{t_3} f_{t_2}^{t_1} f_{t_3}^{t_2}}{f_{t_1} f_{t_2} f_{t_3}}$$

Używając powyższych oznaczeń otrzymujemy z równości (38) wszystkie $\binom{n}{3}$ równania postaci (14):

$$(43) \qquad T_{t_2t_3t_1} + T_{t_3t_1t_2} = F_{t_1t_2t_3}$$

Wyprowadzimy teraz równania postaci (15) dla każdej trójki $t_1, t_2, t_3 \in I$, gdzie $t_1 < t_2 < t_3$. Korzystając z definicji (41) i (33) otrzymujemy

$$T_{t_2t_3t_1} \cdot T_{t_3t_1t_2} \equiv \frac{f_{t_1}^{t_2} f_{t_2}^{t_3} f_{t_3}^{t_1} \cdot f_{t_1}^{t_3} f_{t_2}^{t_1} f_{t_3}^{t_2}}{\left[f_{t_1} f_{t_2} f_{t_3}\right]^2} (F_o)^2 =$$

$$= \left[-\frac{-f_{t_1}^{t_2} f_{t_2}^{t_1} F_o}{f_{t_1} f_{t_2}}\right] \cdot \left[-\frac{f_{t_1}^{t_3} f_{t_3}^{t_1} F_o}{f_{t_1} f_{t_3}}\right] \cdot \left[-\frac{f_{t_2}^{t_3} f_{t_3}^{t_2} F_o}{f_{t_2} f_{t_3}}\right] \cdot \frac{1}{F_o} =$$

$$= \frac{-F_{t_1t_2} \cdot F_{t_1t_3} \cdot F_{t_2t_3}}{F_o},$$

Wyprowadzimy dla każdej z $\binom{n}{4}$ czwórek $t_1, t_2, t_3, t_4 \in I$ takich, że $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, równanie postaci (16)

$$T_{t_2t_3t_1} \cdot T_{t_4t_1t_2} \cdot T_{t_3t_4t_1} \cdot T_{t_4t_2t_3} =$$

$$= \frac{f_{t_1}^{t_2} f_{t_2}^{t_3} f_{t_3}^{t_1} F_o}{f_{t_1} f_{t_2} f_{t_3}} \cdot \frac{f_{t_1}^{t_4} f_{t_2}^{t_1} f_{t_4}^{t_2} F_o}{f_{t_1} f_{t_2} f_{t_4}} \cdot \frac{f_{t_1}^{t_3} f_{t_3}^{t_4} f_{t_4}^{t_1} F_o}{f_{t_1} f_{t_3} f_{t_4}} \cdot \frac{f_{t_2}^{t_4} f_{t_3}^{t_2} f_{t_4}^{t_3} F_o}{f_{t_2} f_{t_3} f_{t_4}} =$$

$$= \left[\frac{-f_{t_1}^{t_2} f_{t_2}^{t_1} F_o}{f_{t_1} f_{t_2}}\right] \cdot \left[\frac{-f_{t_1}^{t_3} f_{t_3}^{t_1} F_o}{f_{t_1} f_{t_3}}\right] \cdot \left[\frac{-f_{t_1}^{t_4} f_{t_4}^{t_1} F_o}{f_{t_1} f_{t_4}}\right] \cdot \left[\frac{-f_{t_2}^{t_3} f_{t_3}^{t_2} F_o}{f_{t_2} f_{t_3}}\right] \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{-f_{t_2}^{t_4} f_{t_4}^{t_2} F_o}{f_{t_2} f_{t_4}}\right] \cdot \left[\frac{-f_{t_3}^{t_4} f_{t_4}^{t_3} F_o}{f_{t_3} f_{t_4}}\right] \cdot \frac{1}{(F_o)^2} =$$

$$= \frac{F_{t_1 t_2} F_{t_1 t_3} F_{t_1 t_4} F_{t_2 t_3} F_{t_2 t_4} F_{t_3 t_4}}{(F_o)^2}$$

Podobnie dowodzi się, że dla każdej czwórki $t_1, t_2, t_3, t_4 \in I$ oraz $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ zachodzą wzory (17).

III. Przystąpmy teraz do dowodu tożsamości (18). Wyjdziemy z tożsamości (24). Z (32) i (31) obliczymy wartości $f_i^k(x_i)$ dla każdego $i,k \in I$:

$$(44) \qquad f_i^k(x_i) = \frac{-X_i^k f_i f_k}{f_k^i F_o} \quad \text{dla} \quad i \neq k, \quad i,k \in I$$

$$(45) \qquad f_k^k(x_k) = \frac{X_k^k f_k}{F_o} \quad \text{dla każdego} \quad k \in I$$

Wprowadźmy oznaczenia dla każdego $i,k \in I$:

$$(46) \qquad u_{ik} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} -\dfrac{f_k^i F_o}{f_i f_k} & \text{dla} \quad i \neq k \\ \dfrac{F_o}{f_k} & \text{dla} \quad i = k \end{cases}$$

Wówczas tożsamość (24) przyjmuje postać:

$$(47)\quad F(x_1,x_2,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} \frac{X_1^1}{u_{11}} & \frac{X_1^2}{u_{12}} & \frac{X_1^3}{u_{13}} & \dots & \frac{X_1^n}{u_{1n}} \\ \frac{X_2^1}{u_{21}} & \frac{X_2^2}{u_{22}} & \frac{X_2^3}{u_{23}} & \dots & \frac{X_2^n}{u_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{X_n^1}{u_{n1}} & \frac{X_n^2}{u_{n2}} & \frac{X_n^3}{u_{n3}} & \dots & \frac{X_n^n}{u_{nn}} \end{vmatrix} \cdot |D|$$

Dla przypomnienia - funkcje X_i^k dla każdego $i,k \in I$ są określone wzorem (4), pozostaje nam zatem wyznaczyć wielkość u_{ik} dla każdego $i,k \in I$, to znaczy musimy wyznaczyć macierz $[u_{ik}]$:

$$(48)\quad \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} .$$

Macierz postaci (48) uzyskamy na n różnych sposobów odpowiednio dla każdej z $s \in I$ postaci tożsamości (18).

Dla dowolnego $s \in I$ uzyskamy zależności pozwalające wyznaczyć macierz (48). Dla każdego $k \in I$ i $k \neq s$ na podstawie (46) mamy

$$(49)\quad \frac{u_{sk}}{u_{ss}} : \frac{u_{kk}}{u_{ks}} = \frac{-F_o f_k^s f_s}{f_s f_k F_o} : \frac{F_o f_s f_k}{-f_k F_o} = - \frac{-F_o f_s^k f_k^s}{f_s f_k} : F = \begin{cases} \dfrac{-F_{sk}}{F_o} & s < k \\ \dfrac{-F_{ks}}{F_o} & k < s \end{cases}$$

Dla $i < k$ oraz $i \neq s$ i $k \neq s$ mamy

$$\frac{u_{ik}}{u_{is}} : \frac{u_{kk}}{u_{ks}} = \frac{-F_o f_k^i f_i f_s}{-f_i f_k F_o f_s^i} : \frac{F_o f_s f_k}{-f_k F_o f_s^k} =$$

$$= \frac{F_o f_s^k f_i^s f_k^i}{f_s f_i f_k} : \frac{-F_o f_s^i f_i^s}{f_s f_i}$$

Z powyższego uzyskujemy dla każdego $i,k \in I$:

$$(50) \qquad \frac{u_{ik}}{u_{is}} : \frac{u_{kk}}{u_{ks}} = \begin{cases} T_{ksi} : F_{si} & \text{dla } s < i < k \\ T_{ski} : F_{is} & \text{dla } i < s < k \\ T_{sik} : F_{is} & \text{dla } i < k < s \end{cases}$$

Dla $k < i$ oraz $i \neq s$ i $k \neq s$ mamy

$$\frac{u_{ik}}{u_{is}} : \frac{u_{kk}}{u_{ks}} = \frac{-F_o f_k^i f_i f_s}{-f_s f_k F_o f_s^i} : \frac{F_o f_s f_k}{-f_k F_o f_s^k} =$$

$$= \frac{F_o f_s^k f_k^i f_i^s}{f_s f_k f_i} : \frac{-F_o f_s^i f_i^s}{f_s f_i}$$

Z powyższego uzyskujemy dla każdego $i,k \in I$:

$$(51) \qquad \frac{u_{ik}}{u_{is}} : \frac{u_{kk}}{u_{ks}} = \begin{cases} T_{kis} : F_{si} & \text{dla } s < k < i \\ T_{iks} : F_{si} & \text{dla } k < s < i \\ T_{isk} : F_{is} & \text{dla } k < i < s \end{cases}$$

Oznaczmy

$$(52) \qquad p_k^s \overset{\text{def}}{=} \frac{u_{kk}}{u_{ks}}$$

Zatem dla każdego $i,k \in I$ i $k \neq s$ na podstawie (46) oraz (49)-(52) mamy:

$$
u_{ik} = \begin{cases}
u_{is}\, p_k^s & \text{dla } i = k \neq s \\
u_{is}\, p_k^s \dfrac{-F_{ks}}{F_o} & \text{dla } k < i = s \\
u_{is}\, p_k^s \dfrac{-F_{sk}}{F_o} & \text{dla } i = s < k \\
u_{is}\, p_k^s \dfrac{T_{ksi}}{F_{si}} & \text{dla } s < i < k \\
u_{is}\, p_k^s \dfrac{T_{ski}}{F_{is}} & \text{dla } i < s < k \\
u_{is}\, p_k^s \dfrac{T_{sik}}{F_{is}} & \text{dla } i < k < s \\
u_{is}\, p_k^s \dfrac{T_{kis}}{F_{si}} & \text{dla } s < k < i \\
u_{is}\, p_k^s \dfrac{T_{iks}}{F_{si}} & \text{dla } k < s < i \\
u_{is}\, p_k^s \dfrac{T_{isk}}{F_{is}} & \text{dla } k < i < s
\end{cases} \tag{53}
$$

Podstawmy teraz otrzymane powyżej wartości współczynników u_{ik} do postaci (47). Uzyskamy wówczas

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = |D| \cdot$$

$$\begin{vmatrix}
\dfrac{x_1^1}{u_{1s}p_1^s} & \ldots & \dfrac{x_1^k}{u_{1s}p_k^s \frac{T_{s1k}}{F_{1s}}} & \ldots & \dfrac{x_1^s}{u_{1s}} & \ldots & \dfrac{x_1^n}{u_{1s}p_n^s \frac{T_{sn1}}{F_{1s}}} \\
\dfrac{x_2^1}{u_{2s}p_1^s \frac{T_{2s1}}{F_{2s}}} & \ldots & \dfrac{x_2^k}{u_{2s}p_k^s \frac{T_{s2k}}{F_{2s}}} & \ldots & \dfrac{x_2^s}{u_{2s}} & \ldots & \dfrac{x_2^n}{u_{2s}p_n^s \frac{T_{sn2}}{F_{2s}}} \\
\dfrac{x_k^1}{u_{ks}p_1^s \frac{T_{ks1}}{F_{ks}}} & \ldots & \dfrac{x_k^k}{u_{ks}p_k^s} & \ldots & \dfrac{x_k^s}{u_{ks}} & \ldots & \dfrac{x_k^n}{u_{ks}p_n^s \frac{T_{snk}}{F_{ks}}} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\dfrac{x_s^1}{-u_{ss}p_1^s \frac{F_{1s}}{F_o}} & \ldots & \dfrac{x_s^k}{-u_{ss}p_k^s \frac{F_{ks}}{F_o}} & \ldots & \dfrac{x_s^s}{u_{ss}} & \ldots & \dfrac{x_s^n}{-u_{ss}p_n^s \frac{F_{sn}}{F_o}} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\dfrac{x_n^1}{u_{ns}p_1^s \frac{T_{n1s}}{F_{sn}}} & \ldots & \dfrac{x_n^k}{u_{ns}p_k^s \frac{T_{nks}}{F_{sn}}} & \ldots & \dfrac{x_n^s}{u_{ns}} & \ldots & \dfrac{x_n^n}{u_{ns}p_n^s}
\end{vmatrix}$$

Wyciągając przed wyznacznik F_{is}/u_{is} z każdego i-tego wiersza $(i \in I)$ i $(i \neq s)$ oraz $(-\frac{F_o}{u_{ss}})$ z wiersza s-tego, a następnie wyciągając $1/p_k^s$ z każdej k-tej kolumny $(k \in I)$ i $(k \neq s)$ otrzymamy

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = |D| \cdot \prod_{\substack{i \in I \\ i \neq s}} \frac{F_{is}}{u_{is}} \cdot \prod_{\substack{k \in I \\ k \neq s}} \frac{1}{p_k^s} \cdot \left(\frac{-F_o}{u_{ss}}\right) \cdot$$

$$
(54)\qquad \cdot\begin{vmatrix}
\frac{x_1^1}{F_{1s}} & \frac{x_1^2}{T_{s12}} & \dots & \frac{x_1^k}{T_{s1k}} & \dots & \frac{x_1^s}{F_{1s}} & \dots & \frac{x_1^n}{T_{sn1}} \\
\frac{x_2^1}{T_{2s1}} & \frac{x_2^2}{F_{2s}} & \dots & \frac{x_2^k}{F_{s2k}} & \dots & \frac{x_2^s}{F_{2s}} & \dots & \frac{x_2^n}{T_{sn2}} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{x_k^1}{T_{ks1}} & \frac{x_k^2}{T_{ks2}} & \dots & \frac{x_k^k}{F_{ks}} & \dots & \frac{x_k^s}{F_{ks}} & \dots & \frac{x_k^n}{T_{snk}} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{x_s^1}{F_{1s}} & \frac{x_s^2}{F_{2s}} & \dots & \frac{x_s^k}{F_{ks}} & \dots & \frac{x_s^s}{-F_o} & \dots & \frac{x_s^n}{F_{sn}} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{x_n^1}{T_{n1s}} & \frac{x_n^2}{T_{n2s}} & \dots & \frac{x_n^k}{T_{nks}} & \dots & \frac{x_n^s}{F_{sn}} & \dots & \frac{x_n^n}{F_{sn}}
\end{vmatrix}
$$

Obliczmy teraz wyciągniętą wartość M_s, przez którą mnożymy wyznacznik (54):

$$
(55)\qquad M_s = |D| \cdot \prod_{\substack{i \in I \\ i \neq s}} \frac{F_{is}}{u_{is}} \cdot \prod_{\substack{k \in I \\ k \neq s}} \frac{1}{p_k^s} \left(-\frac{F_o}{u_{ss}}\right) =
$$

$$
= -|D| \cdot \prod_{\substack{i \in I \\ i \neq s}} F_{is} \cdot F_o \cdot \left[u_{ss} \cdot \prod_{\substack{i \in I \\ i \neq s}} \left(u_{is} p_i^s\right)\right]^{-1}
$$

Korzystając ze wzorów (46) i (52) otrzymamy

$$(56)\qquad \prod_{\substack{i\in I\\ i\neq s}} u_{is} = \prod_{\substack{i\in I\\ i\neq s}} \left[-\frac{f_s^i F_o}{f_i f_s}\right] = (F_o)^{n-1}(-1)^{n-1}\frac{\prod\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq s}} f_s^i}{(f_s)^{n-1}\prod\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq s}} f_i}$$

$$(57)\qquad \prod_{\substack{k\in I\\ k\neq s}} p_k^s = \prod_{\substack{k\in I\\ k\neq s}} \frac{u_{kk}}{u_{ks}} = \prod_{\substack{k\in I\\ k\neq s}} \frac{F_o f_k f_s}{f_k(-f_s^k F_o)} =$$

$$= \prod_{\substack{k\in I\\ k\neq s}} \frac{f_s}{-f_s^k} = \frac{(f_s)^{n-1}}{(-1)^{n-1}\cdot\prod\limits_{\substack{k\in I\\ k\neq s}} f_s^k} .$$

$$(58)\qquad u_{ss} = \frac{F_o}{f_s}$$

Podstawiając (56), (57) i (58) do wzoru (55) otrzymamy

$$M_s = -|D|\cdot F_o\cdot\prod_{\substack{i\in I\\ i\neq s}} F_{is}\cdot\left[\frac{(F_o)^{n-1}}{\prod\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq s}} f_i}\right]^{-1}\cdot\frac{f_s}{F_o} =$$

$$= -\prod_{\substack{i\in I\\ i\neq s}} F_{is}\cdot\frac{|D|\cdot\prod\limits_{i\in I} f_i}{(F_o)^{n-1}}$$

Korzystając z (29) otrzymamy ostatecznie:

$$(59)\qquad M_s = -\prod_{\substack{i\in I\\ i\neq s}} F_{is}\cdot\frac{1}{(F_o)^{n-2}}$$

Udowodniliśmy zatem, że funkcję $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ możemy przedstawić w postaci Soreau na n różnych sposobów (dla każdego $s\in I$). Przyjmują one postaci:

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = M_s \det W_s \tag{60}$$

gdzie M_s dane jest wzorem (59), macierz zaś

$$W_s = \left[\frac{X_i^k}{u_{ik}^s}\right]_{\substack{i=1,2,\ldots,n\\ k=1,2,\ldots,n}}$$

dana jest następująco:

$$W_s = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc}
\ddots & i<k<s: \ \frac{X_i^k}{T_{sik}} & & \frac{X_i^s}{F_{is}} & & i<s<k: \ \frac{X_i^k}{T_{ski}} & \\
& \frac{X_s^k}{F_{ks}} & & \vdots & & & \\
k<i<s: \ \frac{X_i^k}{T_{isk}} & & \ddots & \vdots & & & \\
\hline
\cdot\ \frac{X_s^k}{F_{ks}} & \cdots & \cdots & \frac{X_s^s}{-F_0} & \cdots & \frac{X_s^k}{F_{sk}} & \cdots \\
\hline
k<s<i: & & & \vdots & & s<i<k: \ \frac{X_i^k}{T_{ksi}} & \\
\frac{X_i^k}{T_{iks}} & & & \frac{X_i^s}{F_{si}} & & \frac{X_k^k}{F_{sk}} & \\
& & & \vdots & \frac{X_k^k}{F_{sk}} & s<k<i & \ddots
\end{array}\right] \tag{61}$$

dla każdego $s\in I$.

Wśród wszystkich macierzy W_s (dla $s \in I$) wyróżnimy macierz W_1, której budowa jest najprostsza (dla $s = 1$):

$$
(62) \quad W_1 = \left[\begin{array}{c|ccccc}
\frac{x_1^1}{-F_0} & \cdot & \cdot & \frac{x_1^k}{F_{1k}} & \cdot & \cdot \\
\hline
\cdot & \ddots & & & 1<i<k & \\
\cdot & & \ddots & & & \frac{x_i^k}{T_{k1i}} \\
\frac{x_i^1}{F_{1i}} & & & \frac{x_k^k}{F_{1k}} & & \\
\cdot & \frac{x_i^k}{T_{ki1}} & & & \ddots & \\
\cdot & & 1<k<i & & & \ddots
\end{array} \right]
$$

Przeprowadziliśmy zatem dowód konieczności twierdzenia w części dotyczącej przedstawialności funkcji $F(x_1,x_2,\dots,x_n)$ w postaci Soreau, tzn. udowodniliśmy, że jeśli funkcja $F(x_1,x_2,\dots,x_n)$ daje się przedstawić w postaci (S), to dla każdego $s \in I$ spełniona jest każda z n tożsamości postaci (18).

Dowód dostateczności jest oczywisty, wystarczy pomnożyć w każdej postaci któryś z wierszy lub którąś kolumnę wyznacznika $\det W_s$ przez M_s (dla $s \in I$).

B. Przeprowadzimy teraz drugą część dowodu dotyczącą rzędu funkcji $F(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ze względu na każdą ze zmiennych x_i ($i \in I$) zgodnie z definicją 4.

Zacytuję twierdzenie z pracy M. Warmusa "Nomographic functions" [3]:

Funkcja rzeczywista $G(u,v)$ określona na zbiorze $\Phi = \Phi_u \times \Phi_v$

jest rzędu większego niż n wtedy i tylko wtedy, jeśli istnieją w ϕ_u elementy $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ i w ϕ_v elementy $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ takie, że

$$\begin{vmatrix} G^{11} & G^{12} & \ldots & G^{1,n+1} \\ G^{21} & G^{22} & \ldots & G^{2,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ G^{n+1,1} & G^{n+1,2} & \ldots & G^{n+1,n+1} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{63}$$

gdzie $G^{ij} \overset{def}{=} G(u_i, u_j)$.

Odpowiednio zmodyfikowane (odpowiednio do def. 3 i naszych potrzeb) twierdzenie powyższe brzmieć będzie:

Lemat 1. Jeśli dla funkcji $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv G(u,v)$, gdzie $u = x_i$, zaś $v = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, określonej w $\phi = \phi_u \times \phi_v$, gdzie $\phi_u = Y_i$, $\phi_v = \underset{\substack{s \in I \\ s \neq i}}{\times} Y_i$, istnieją elementy $u_1, u_2 \in \phi_u$ i elementy $v_1, v_2 \in \phi_v$ takie, że

$$\begin{vmatrix} G(u_1,v_1) & G(u_1,v_2) \\ G(u_2,v_1) & G(u_2,v_2) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{64}$$

to funkcja $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = G(u,v)$ jest rzędu większego niż 1 ze względu na zmienną x_i $(i \in I)$.

Dowód. Ponieważ warunek (64) zachodzi, zatem funkcja $G(u,v)$ nie jest rzędu zero ($G(u,v) \not\equiv 0$).

Załóżmy wbrew tezie, że jest ona rzędu 1, to znaczy

$$G(u,v) = U_1(u) \cdot V_1(v)$$

gdzie $U_1(u) \not\equiv 0$, $V_1(v) \not\equiv 0$. Wówczas wyznacznik (64) przyjmuje postać

$$\begin{vmatrix} U_1(u_1)\cdot V_1(v_1) & U_1(u_1)\cdot V_1(v_2) \\ U_1(u_2)\cdot V_1(v_1) & U_1(u_2)\cdot V_1(v_2) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} U_1(u_1) & 0 \\ U_1(u_2) & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_1(v_1) & V_1(v_2) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Wbrew założeniu (64). A zatem, ponieważ rząd funkcji $G(u,v)$ jest różny od 1 i zera, musi być ona rzędu $r \geqslant 2$ c.n.d.

Opierając się na lemacie 1 wykażę, że funkcja $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ jest rzędu większego niż 1 ze względu na każdą x_i $(i \in I)$.

Niech $u_1 = a_i$, $u_2 = b_i$,

$$v_1 = (a_1,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_{k-1},a_k,a_{k+1},\ldots,a_n)$$
$$v_2 = (a_1,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_{k-1},b_k,a_{k+1},\ldots,a_n)$$

Podstawiając u_1,u_2,v_1,v_2 do wyznacznika (64) otrzymamy

$$\begin{vmatrix} G(u_1,v_1) & G(u_1,v_2) \\ G(u_2,v_1) & G(u_2,v_2) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} F(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_{k-1},a_k,a_{k+1},\ldots,a_n) & F(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_{k-1},b_k,a_{k+1},\ldots,a_n) \\ F(a_1,\ldots,a_{i-1},b_i,a_{i+1},\ldots a_{k-1},a_k,a_{k+1},\ldots,a_n) & F(a_1,\ldots,a_{i-1},b_i,a_{i+1},\ldots,a_{k-1},b_k,a_{k+1},\ldots,a_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} F_o & F_k \\ F_i & F_{ik} \end{vmatrix} \neq 0$$

bo $F_o \neq 0$, $F_{ik} \neq 0$, $F_i = F_k = 0$ z założeń (11) - (13).

Zatem funkcja $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ jest rzędu większego niż 1 ze względu na każdą zmienną x_i $(i \in I)$.

Tak więc, zgodnie z definicją 4, funkcja $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ spełniająca warunki (11)-(15) jest nomograficzna wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek (18). Twierdzenie nasze zostało zatem dowiedzione.

Część II

A. W sformułowaniu twierdzenia 1 wystąpiło - zgodnie z (18) - n różnych przedstawień w postaci Soreau rozpatrywanej funkcji $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Posługując się pojęciem "równoważności różnych postaci Soreau" - wprowadzonych przez M. Warmusa w pracy "Nomographic functions" - zbadam zależności zachodzące między postaciami występującymi w (18) dla $s \in I$.

Definicja 5. Dwie postacie Soreau funkcji $F(x_1, \ldots, x_n)$:

$$(65) \qquad F(x_1, \ldots, x_n) \equiv \begin{vmatrix} \bar{X}_1^1 & \bar{X}_1^2 & \ldots & \bar{X}_1^n \\ \bar{X}_2^1 & \bar{X}_2^2 & \ldots & \bar{X}_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{X}_n^1 & \bar{X}_n^2 & \ldots & \bar{X}_n^n \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \bar{\bar{X}}_1^1 & \bar{\bar{X}}_1^2 & \ldots & \bar{\bar{X}}_1^n \\ \bar{\bar{X}}_2^1 & \bar{\bar{X}}_2^2 & \ldots & \bar{\bar{X}}_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{\bar{X}}_n^1 & \bar{\bar{X}}_n^2 & \ldots & \bar{\bar{X}}_n^n \end{vmatrix}$$

będziemy nazywali równoważnymi wtedy i tylko wtedy, jeśli istnieje macierz liczbowa

$$(66) \qquad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

nieosobliwa, to znaczy

$$(67) \qquad |C| = \det C \neq 0$$

i n liczb $d_1, d_2, \ldots, d_n$ spełniających warunek

$$|C| \cdot \prod_{i \in I} d_i = 1$$

takich, że

$$(68)\qquad \begin{bmatrix} \bar{x}_1^1 & \bar{x}_1^2 & \dots & \bar{x}_1^n \\ \bar{x}_2^1 & \bar{x}_2^2 & \dots & \bar{x}_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{x}_n^1 & \bar{x}_n^2 & \dots & \bar{x}_n^n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} d_1\bar{\bar{x}}_1^1 & d_1\bar{\bar{x}}_1^2 & \dots & d_1\bar{\bar{x}}_1^n \\ d_2\bar{\bar{x}}_2^1 & d_2\bar{\bar{x}}_2^2 & \dots & d_2\bar{\bar{x}}_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_n\bar{\bar{x}}_n^1 & d_n\bar{\bar{x}}_n^1 & \dots & d_n\bar{\bar{x}}_n^n \end{bmatrix} \cdot C$$

lub

$$\begin{bmatrix} \bar{\bar{x}}_1^1 & \bar{\bar{x}}_1^2 & \dots & \bar{\bar{x}}_1^n \\ \bar{\bar{x}}_2^1 & \bar{\bar{x}}_2^2 & \dots & \bar{\bar{x}}_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\bar{x}}_n^1 & \bar{\bar{x}}_n^2 & \dots & \bar{\bar{x}}_n^n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1}\bar{x}_1^1 & \frac{1}{d_1}\bar{x}_1^2 & \dots & \frac{1}{d_1}\bar{x}_1^n \\ \frac{1}{d_2}\bar{x}_2^1 & \frac{1}{d_2}\bar{x}_2^2 & \dots & \frac{1}{d_2}\bar{x}_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{d_n}\bar{x}_n^1 & \frac{1}{d_n}\bar{x}_n^2 & \dots & \frac{1}{d_n}\bar{x}_n^n \end{bmatrix} \cdot C^{-1}$$

gdzie C^{-1} jest macierzą odwrotną do macierzy C.

Jeśli każda z dwóch postaci Soreau danej funkcji $F(x_1,\dots,x_n)$ jest równoważna do trzeciej, to są one równoważne między sobą. Tak określona relacja "równoważności postaci Soreau" spełnia warunek zwrotności, symetrii i przechodniości. Jest zatem równoważnością w zbiorze postaci Soreau naszej funkcji $F(x_1,x_2,\dots,x_n)$ i dzieli ten zbiór na klasy abstrakcji. Ilość tych klas charakteryzuje funkcję $F(x_1,\dots,x_n)$. Zatem, jeśli wszystkie postacie Soreau nomograficznej funkcji są równoważne, to taką funkcję nazywamy funkcją jedno-nomograficzną. Jeśli funkcja nomograficzna ma dokładnie dwie klasy nie-równoważnych postaci Soreau, to nazywamy ją dwu-nomograficzną funkcją. Jeśli funkcja nomograficzna ma dokładnie $k > 2$ klas nierównoważnych postaci Soreau, to nazywamy ją k-nomograficzną funkcją.

Równoważność dwóch postaci Soreau ma prostą interpretację geometryczną.

Weźmy równanie $F(x_1,\ldots,x_n) = 0$ i zbudujmy dlań dwa nomogramy kolineacyjne dla dwóch różnych postaci Soreau funkcji $F(x_1,\ldots,x_n)$. Otóż, jeśli postacie Soreau, na podstawie których zbudowaliśmy nomogramy, są równoważne, to możemy otrzymać jeden nomogram z drugiego za pomocą przekształcenia rzutowego. Nie jest to możliwe w przypadku dwóch nierównoważnych postaci Soreau.

<u>Lemat 2</u>. Jeśli jeden z wierszy postaci (S) jest pomnożony przez liczbę $a \neq 0$ i jedna z kolumn jest pomnożona przez $1/a$, to wtedy tak otrzymana postać Soreau jest równoważna z postacią wyjściową Soreau.

<u>Dowód</u>. Pomnóżmy i_0-ty wiersz postaci (S) przez $a \neq 0$, zaś k_0-tą kolumnę przez $1/a$. Otrzymamy wtedy

$$(69)\qquad \left[\begin{array}{ccc|c|cc} & X_i^k & & \frac{1}{a}X_1^{k_0} & & X_i^k \\ & i<i_0,\ k<k_0 & & \vdots & & \\ \hline aX_{i_0}^1 & aX_{i_0}^2 & \ldots & X_{i_0}^{k_0} & \ldots & aX_{i_0}^n \\ \hline & X_i^k & & \frac{1}{a}X_i^{k_0} & & X_i^k \\ & & & \frac{1}{a}X_n^{k_0} & & . \end{array}\right] \equiv$$

$$(70)\ \equiv \left[\begin{array}{c} \frac{1}{a}\bar{X}_i^k \\ i<i_0,\ k\in I \\ \hline \bar{X}_{i_0}^1\ \ \bar{X}_{i_0}^2\ \ldots\ \bar{X}_{i_0}^{k_0}\ \ldots\ \bar{X}_{i_0}^n \\ \hline \frac{1}{a}\bar{X}_i^k \\ i_0<i,\ k\in I \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{ccccccc} a & & & & & & 0 \\ & a & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & a & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & a & \\ 0 & & & & & & \ddots \ a \end{array}\right]$$

k_0-ta kolumna

$$\bigwedge_{s \in I} d_s = \begin{cases} 1/a & \text{gdy} \quad s \neq i \\ 1 & \text{gdy} \quad s = i \end{cases}$$

$$\det C = a^{n-1}$$

Dowód zachodzi dla każdego z n^2 przypadków $(i,k \in I)$.

Lemat 3. Jeśli jeden z wierszy (lub kolumny) postaci (S) pomnożymy przez liczbę $a \neq 0$, a inny przez $1/a$, to wtedy tak otrzymana postać Soreau jest równoważna z postacią wyjściową (S).

Dowód. Pomnóżmy i_o-ty wiersz przez a, zaś j_o-ty wiersz przez $1/a$. Otrzymamy wtedy

$$(71) \qquad \left[\begin{array}{ccc} & X_i^k & \\ & i < i_o, k \in I & \\ \hline aX_{i_o}^1 \ \ldots & aX_{i_o}^k & \ldots \ aX_{i_o}^n \\ \hline & X_i^k & \\ & i_o < i < j_o, k \in I & \\ \hline \frac{1}{a} X_{j_o}^1 \ \ldots & & \ldots \ \frac{1}{a} X_{j_o}^n \\ \hline & X_i^k & \\ j_o < i & & k \in I \end{array}\right] \equiv$$

$$
(72) = \left[\begin{array}{cccc}
\multicolumn{4}{c}{\frac{1}{a}\,\bar{x}_i^k \quad \begin{array}{l} i < i_0 \\ k \in I \end{array}} \\
\hline
\bar{x}_{i_0}^1 & \bar{x}_{i_0}^2 & \dots & \bar{x}_{i_0}^n \\
\hline
\multicolumn{4}{c}{\frac{1}{a}\,\bar{x}_i^k \quad \begin{array}{l} i_0 < i < j_0 \\ k \in I \end{array}} \\
\hline
\frac{1}{a^2}\,\bar{x}_{j_0}^1 & \frac{1}{a^2}\,\bar{x}_{j_0}^2 & \dots & \frac{1}{a^2}\,\bar{x}_{j_0}^n \\
\hline
\multicolumn{4}{c}{\frac{1}{a}\,x_i^k \quad \begin{array}{l} j_0 < i \\ k \in I \end{array}}
\end{array}\right] \cdot
$$

$$
\cdot \begin{bmatrix}
a & & & & & & & & \\
& a & & & & & & 0 & \\
& & a & & & & & & \\
& & & a & & & & & \\
& & & & a & & & & \\
& & 0 & & & a & & & \\
& & & & & & a & & \\
& & & & & & & a & \\
& & & & & & & & a
\end{bmatrix}
$$

$$
\bigwedge_{s \in I} \quad d_s = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{dla} \quad s \in I,\ s \neq i_0,\ j_0 \\ 1 & \text{dla} \quad s = i_0 \\ \left(\frac{1}{a}\right)^2 & \text{dla} \quad s = j_0 \end{cases} \qquad \det C = a^n
$$

Dowód zachodzi dla każdego z $\binom{n}{2}$ przypadków.

<u>Twierdzenie 2</u>. Przy ustalonym położeniu "kostki" Y, tzn. przy ustalonych (3) wartościach $(a_s)_{s \in I}$ i $(b_s)_{s \in I}$, wszystkie n postaci (18) Soreau (dla $s \in I$) funkcji $F(x_1,\dots,x_n)$ występujących w twierdzeniu 1 są postaciami równoważnymi.

<u>Dowód</u>. Wykażę, że każda z postaci (18) (dla $s = 2,3,\dots,n$) jest równoważna z postacią dla $s = 1$.

Dla $s = 1$ mamy

$$(73) \qquad F(x_1,x_2,\dots,x_n) = \prod_{\substack{s \in I \\ s \neq 1}} F_{1s} \cdot (F_0)^{2-n} \cdot \det W_1$$

Zapiszmy $\det W_1$ w następującej postaci:

$$(74) \quad \det W_1 =$$

$$= \left|\begin{array}{c|ccc|c|ccc}
\frac{X_1^1}{-F_0} & \dots & \frac{X_1^k}{F_{1k}} & \dots \; 1<k<s & \frac{X_1^s}{F_{1s}} & \dots & \frac{X_1^k}{F_{1k}} & \dots \; s<k\leq n \\
\hline
\vdots & \ddots & & \frac{X_i^k}{T_{k1i}} \; {\scriptstyle 1<i<k<s} & \vdots & & & \\
\frac{X_i^1}{F_{1i}} & & \frac{X_k^k}{F_{1k}} & & \frac{X_i^s}{T_{s1i}} & & \frac{X_i^k}{T_{k1i}} & \\
1<i<s & \frac{X_i^k}{T_{ki1}} & & \ddots & \vdots & & 1<i<s<k\leq n & \\
\vdots & & {\scriptstyle 1<k<i<s} & & & & & \\
\hline
\frac{X_s^1}{F_{1s}} & \dots & \frac{X_s^k}{T_{ks1}} & \dots & \frac{X_s^s}{F_{1s}} & \dots & \frac{X_s^k}{T_{k1s}} & \dots \\
\hline
\vdots & & & & \vdots & \ddots & & \frac{X_i^k}{T_{k1i}} \; {\scriptstyle s<i<k\leq n} \\
\frac{X_i^1}{F_{1i}} & & \frac{X_i^k}{T_{ki1}} & & \frac{X_i^s}{T_{si1}} & & \frac{X_k^k}{F_{1k}} & \\
\vdots & & & & \vdots & \frac{X_i^k}{T_{ki1}} & & \ddots \\
s<i\leq n & & 1<k<s<i\leq n & & \vdots & & s<k<i\leq n &
\end{array}\right|$$

Na podstawie lematu 2 i 3 będziemy poprzez odpowiednie kolejne mnożenie i-tych wierszy i wiersza pierwszego oraz k-tych kolumn i wiersza pierwszego tak przekształcali postać (74), aby otrzymać pożądaną s-tą (18)(dla $s = 2, 3, \ldots, n$) postać funkcji $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Dzięki lematom 2 i 3 postacie te będą sobie równoważne (w sensie definicji 5).

Wykonamy następujące operacje:

1) każdą k-tą kolumnę (k 1) mnożymy przez $\frac{-F_{1k}\, F_{1s}}{F_o}$

2) każdy i-ty wiersz (i 1) mnożymy przez F_{1i},

3) każdą k-tą kolumnę, prócz $k = 1$ i $k = s$, mnożymy przez $\frac{1}{T_{s1k}}$ dla $k < s$ oraz przez $\frac{1}{T_{sk1}}$ dla $k > s$,

4) każdy i-ty wiersz, prócz $i = 1$ i $i = s$, mnożymy przez $\frac{1}{T_{is1}}$ dla $i < s$ oraz przez $\frac{1}{T_{i1s}}$ dla $i > s$,

5) pierwszy wiersz ($i = 1$) mnożymy przez $(-F_o)$,

6) wiersze $i = 1$ i $i = s$ mnożymy przez $\frac{1}{F_{1s}}$,

7) kolumnę $k = s$ mnożymy przez $\frac{1}{F_{1s}}$.

Jednocześnie przez odwrotności mnożymy pierwszy wiersz wyznacznika (zgodnie z lematami 2 i 3).

Dla wygody i przejrzystości obliczeń iloczyn wartości, przez które mnożymy pierwszy wiersz, zapiszemy przed wyznacznikiem.

W postaci (74) utworzone zostało 20 pól, w których wyrazy pożądanego (dla s-tej postaci) wyznacznika $\left[X_i^k/\bar{u}_{ik}^s \right]$ będą miały budowę podobną.

Obliczmy zatem otrzymane w powyższy sposób wyrazy $X_i^k/\bar{u}_{ik}^s$ przekształconego wyznacznika dla kilku wybranych pól (w przekształceniach wykorzystamy zależności (15)-(17)):

a) dla $1 < i < k < s$ otrzymamy

$$\bar{u}^{s}_{ik} = \frac{T_{k1i}\, F_o\, T_{s1k} \cdot T_{is1}}{-F_{1i}\, F_{1k}\, F_{1s}} =$$

$$= \frac{T_{k1i}\, T_{s1k}\, T_{is1}\, F_o}{-F_{1k}\, F_{1i}\, F_{1s}} \cdot \frac{T_{sik}\, T_{ksi}\, F_o}{-F_{ik}\, F_{is}\, F_{ks}} = T_{sik}$$

b) dla $1 < s < k$ otrzymamy

$$\bar{u}^{s}_{1k} = \frac{F_{1k}\, T_{sk1}\, F_o\, F_{1s}}{-F_{1k}\, F_{1s}(-F_o)} = T_{sk1}$$

c) dla $1 < k < s$ otrzymamy

$$\bar{u}^{s}_{sk} = \frac{T_{ks1}\, F_o\, T_{s1k}\, F_{1s}}{-F_{1k}\, F_{1s}\, F_{1s}} = F_{ks}$$

d) dla $1 < s < i$ otrzymamy

$$\bar{u}^{s}_{i1} = \frac{F_{1i}\, T_{i1s}}{F_{1i}} = T_{i1s}$$

e) dla $1 < k < s$ otrzymamy

$$\bar{u}^{s}_{kk} = \frac{F_{1k}\, F_o\, T_{s1i}\, T_{is1}}{-F_{1k}\, F_{1s}\, F_{1i}} = F_{is}$$

f) $$\bar{u}^{s}_{ss} = \frac{F_{1s}\, F_o\, F_{1s}\, F_{1s}}{-F_{1s}\, F_{1s}\, F_{1s}} = -F_o$$

Obliczymy teraz wartość K_s będącą iloczynem wielkości, przez które musimy pomnożyć pierwszy wiersz

$$\frac{1}{K_s} = \prod_{\substack{j\in J\\ j\neq 1}} \left[-\frac{F_{1j}F_{1s}}{F_o}\right] \cdot \prod_{\substack{j\in J\\ j\neq 1}} F_{1j} \cdot \prod_{j=2}^{s-1} \frac{1}{T_{s1j}T_{js1}} \cdot \prod_{j=s+1}^{n} \frac{1}{T_{sj1}T_{j1s}} \cdot$$

$$\cdot (-F_o)\,(F_{1s})^{-3}$$

Ale

$$\prod_{j=2}^{s-1} \frac{1}{T_{s1j}T_{js1}} \cdot \prod_{j=s+1}^{n} \frac{1}{T_{sj1}T_{j1s}} = \prod_{\substack{j=2\\ j\neq s}}^{n} \frac{-F_o}{F_{1s}F_{1j}F_{js}} =$$

$$= (-1)^{n-2} \cdot \left[\frac{F_o}{F_{1s}}\right]^{n-2} \cdot \prod_{\substack{j=2\\ j\neq s}} \frac{1}{F_{1j}F_{js}} = g_s$$

skąd

$$\frac{1}{K_s} = (-1)^{n-1} \cdot F_o \cdot \left[\frac{F_{1s}}{F_o}\right]^{n} \cdot \prod_{\substack{j=2\\ j\neq s}}^{n} F_{1j} \cdot \prod_{\substack{j=2\\ j\neq s}}^{n} F_{1j} \cdot (-F_o)(F_{1s})^{-3} \cdot g_s =$$

$$= \frac{\prod_{j=2}^{n} F_{1j}}{\prod_{\substack{j\in J\\ j\neq s}} F_{js}} .$$

W wyniku wykonanych operacji przeszliśmy z postaci (18) dla $s = 1$ do dowolnej innej postaci (18) $s \neq 1$, $s \in I$. Rzeczywiście:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = M_1 \det W_1 = M_1\, k_s \det W_s =$$

$$= \prod_{\substack{j\in I\\ j\neq 1}} F_{1j} (F_o)^{2-n} \frac{\prod_{\substack{j\in I\\ j\neq s}} F_{js}}{\prod_{\substack{j\in I\\ j\neq 1}} F_{1j}} \cdot \det W_s =$$

$$= \prod_{\substack{j\in I\\ j\neq s}} F_{js}(F_o)^{2-n}\cdot \det W_s = M_s \det W_s$$

Dowód twierdzenia 2 został zatem zakończony.

B. Rozpatrzmy teraz zagadnienie niezależności liniowej zdefiniowanych w założeniach twierdzenia 1 funkcji $X_i^1(x_i)$, $X_i^2(x_i)$, ..., $X_i^n(x_i)$ dla każdego $i \in I$.

Z warunków (4)-(13) wynika, że dla każdego $k \in I$ oraz $i \in I$ mamy

(75) $$X_i^k(x_i) \not\equiv \text{const}$$

gdyż dla $i \neq k$

(76) $$X_i^k(a_i) = F_k = 0$$

(77) $$X_i^k(b_i) = F_{ik} \neq 0$$

oraz dla każdego $i = k$

(78) $$X_i^k(a_i) = F_o \neq 0$$

(79) $$X_i^k(b_i) = F_k = 0$$

Lemat 4. Jeśli spełnione są warunki (4)-(13), to funkcje $X_i^i(x_i)$, $X_i^k(x_i)$ są niezależne liniowo (dla $i \neq k$), to znaczy

(80) $$\bigwedge_{i\in I}\ \bigwedge_{k\in I} \Big\{(i\neq k) \Longrightarrow \Big[C_i^i X^i(x_i) + C_i^k X_i^k(x_i) \equiv 0\Big] \Longleftrightarrow \Big[C_i^k = C_i^i = 0\Big]\Big\}$$

Dowód. Jeśli tożsamość występująca w lemacie ma zachodzić, to dla $x_i = a_i$ mamy

$$C_i^i X_i^i(a_i) + C_i^k X_i^k(a_i) \equiv 0$$

czyli

$$C_i^i F_o + C_i^k F_k = 0$$

Stąd, ponieważ $F_k = 0$ i $F_o \neq 0$, mamy

$$C_i^i = 0$$

Ale $X_i^k(x_i) \not\equiv 0$, zatem również

$$C_i^k = 0$$

Ponieważ wynikanie w przeciwną stronę jest oczywiste, zatem lemat 4 należy uważać za dowiedziony.

C. Rozważmy przypadek szczególny. Niech wymiar przestrzeni liniowej generowanej przez funkcje $X_i^1(x_i), X_i^2(x_i), \ldots, X_i^n(x_i)$ równa się 2, to znaczy

$$\dim\left\{X_i^1(x_i), X_i^2(x_i), \ldots, X_i^n(x_i)\right\} = 2 \quad \text{dla każdego} \quad i \in I. \tag{81}$$

Z (80) wynika, że funkcja $X_i^i(x_i)$ oraz dowolna inna funkcja $X_i^k(x_i)$ $(k \neq i)$ tworzą bazę tej przestrzeni liniowej, gdyż są one niezależne liniowo.

<u>Lemat 5</u>. Jeśli spełnione są warunki (4)-(13) oraz założenie (81), to dla każdego $i \in I$ mamy

$$\frac{X_i^{k_1}(x_i)}{F_{ik_1}} \equiv \frac{X_i^{k_2}(x_i)}{F_{ik_2}} \tag{82}$$

dla każdego $k_1 \in I$, $k_2 \in I$ $(k_1 \neq i,\ k_2 \neq i)$.

<u>Dowód</u>. Rozpatrzmy trójkę funkcji $X_i^i(x_i), X_i^{k_1}(x_i), X_i^{k_2}(x_i)$. Jeżeli spełnione jest założenie (81), to istnieją liczby C_i^i, $C_i^{k_1}$,

$C_i^{k_2}$ (nie wszystkie równe zeru) takie, że

(83) $$C_i^i X_i^i(x_i) + C_i^{k_1} X_i^{k_1}(x_i) + C_i^{k_2} X_i^{k_2}(x_i) \equiv 0$$

dla każdego $x_i \in [a_i, b_i]$.

Niech $x_i = a_i$; otrzymamy wtedy

$$C_i^i F_o + C_i^{k_1} F_{k_1} + C_i^{k_2} F_{k_2} = 0 .$$

Ale, ponieważ $F_{k_1} = F_{k_2} = 0$ i $F_o \neq 0$, zatem

(84) $$C_i^i = 0$$

Z powyższego wynika, że tożsamość (83) sprowadza się do postaci

(85) $$C_i^{k_1} X_i^{k_1}(x_i) + C_i^{k_2} X_i^{k_2}(x_i) \equiv 0$$

Niech $x_i = b_i$; otrzymamy wtedy

(86) $$C_i^{k_1} F_{ik_1} + C_i^{k_2} F_{ik_2} = 0$$

Z (85) i (86) wynika teraz lemat 5, c.n.d.

D. W sformułowaniu twierdzenia 1 wystąpiły pary wielkości $(T_{k_2k_3k_1}, T_{k_3k_1k_2})$ określone układami równań (14)-(15). Pary te występują w mianownikach wyrażów wyznaczników det W_s (dla każdego $s \in I$) symetrycznie względem głównej przekątnej zgodnie z (18). Jednak ze wzorów (14)-(15) nie możemy jednoznacznie wyznaczyć wielkości $T_{k_2k_3k_1}$ i $T_{k_3k_1k_2}$. Możemy je wyznaczyć jedynie alternatywnie, nie wiedząc jednak "która z dwóch wielkości jest która".

Przypuśćmy teraz, że utrafiliśmy na właściwe rozwiązanie (przez"utrafienie na właściwe rozwiązanie" rozumieć należy takie ustawienie par rozwiązań,aby spełniały zależności (16),(17) oraz aby tak otrzymany wyznacznik M_s det W_s był tożsamościowo równy funkcji $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$) dla wszystkich $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ par $(T_{k_2k_3k_1}, T_{k_3k_1k_2})$ występujących w det W_s.

Powstaje pytanie: czy we właściwie zbudowanym (dobrze utrafionym) wyznaczniku det W_s możemy zamienić symetrycznie wszystkie pary $(T_{k_2k_3k_1}, T_{k_3k_1k_2})$ nie zmieniając przez to jednocześnie wartości wyznacznika det W_s ?

Odpowiedź na to pytanie jest pozytywna, jeśli spełnione jest założenie (81). Pozytywna jest, oczywiście, również w trywialnym przypadku, gdy obie wartości występujące we wszystkich parach są sobie równe.

Twierdzenie 3. Jeśli dla każdego $i \in I$

$$\dim\left\{X_i^1(x_i),\ X_i^2(x_i),\ \ldots,\ X_i^n(x_i)\right\} = 2$$

oraz

$$\det W_s = \det\left[\frac{X_i^k}{u_{ik}}\right]_{\substack{i\in I\\ k\in I}}$$

to

$$\det\left[\frac{X_i^k}{u_{ik}}\right]_{\substack{i\in I\\ k\in I}} \equiv \det\left[\frac{X_i^k}{u_{ki}}\right]_{\substack{i\in I\\ k\in I}}$$

Dowód. W dowodzie tego twierdzenia będą stosowane oznaczenia i twierdzenia dotyczące permutacji z książki A. Mostowski i M. Stark: "Elementy algebry wyższej" [5].

Przez $\{I\}$ oznaczymy zbiór elementów ciągu I. Dowolną permutację zbioru $\{I\}$ oznaczymy

(87) $$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

albo

(88) $$f(i) = p_i \quad \text{dla każdego} \quad i \in I$$

Permutację odwrotną do wyżej określonej permutacji f oznaczymy

(89) $$f^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

albo

$$f(p_i) = i \quad \text{dla każdego} \quad i \in I$$

Przez $\operatorname{sgn} f$ oznaczymy znak permutacji

(90) $$\operatorname{sgn} f = (-1)^{I_f}$$

gdzie I_f - ilość inwersji permutacji f.

Oczywiście dla każdej permutacji f zachodzi

(91) $$\operatorname{sgn} f = \operatorname{sgn} f^{-1}$$

Przez $\{f\}$ oznaczymy zbiór wszystkich permutacji f zbioru $\{I\}$.

Wobec powyższego i zgodnie z definicją wyznacznika można zapisać

(92) $$\det \left[\frac{x_i^k}{u_{ik}}\right]_{\substack{i \in I \\ k \in I}} = \sum_{\{f\}} \left[\operatorname{sgn} f \cdot \prod_{i \in I} \frac{x_i^{p_i}}{u_{ip_i}}\right]$$

Skorzystamy z twierdzeń (A. Mostowski i M. Stark "Elementy algebry wyższej" [51]):

a. Każda permutacja jest albo równa permutacji identycznościowej, albo jest cyklem, albo superpozycją cyklów rozłącznych.

b. Istnieje tylko jeden rozkład danej permutacji na cykle rozłączne, jeśli za jednakowe uważamy rozkłady różniące się tylko porządkiem cyklów.

Zbiór wszystkich permutacji $\{f\}$ rozbijmy na dwa rozłączne zbiory permutacji $\{f_1\}$ i $\{f_2\}$. Zbiór $\{f_1\}$ jest to zbiór tych permutacji f, z których każda daje się rozłożyć na cykle rozłączne co najwyżej dwuwyrazowe. Zbiór zaś $\{f_2\}$ składa się z pozostałych permutacji zbioru f .

Dla każdej z permutacji $f \in \{f\}$ postaci (87) utworzymy zbiory

(93) $$G_1(f) \overset{def}{=} \{i \in I : i = p_i\}$$

(94) $$G_2(f) \overset{def}{=} \Big\{ i \in I: \bigvee_{k \in I} \big[(i \neq k) \wedge (p_i = k) \wedge (p_k = i)\big]\Big\}$$

(95) $$G_3(f) \overset{def}{=} \Big\{ i \in I: \big[i \notin G_1(f)\big] \wedge \big[i \notin G_2(f)\big]\Big\}$$

Dla każdej permutacji $f_2 \in \{f_2\}$ istnieje permutacja odwrotna $f_2^{-1} \in \{f_2\}$ różna od permutacji f_2.

W zbiorze f_2 można zatem utworzyć zbiór par permutacji odwrotnych względem siebie.

W zbiorze $\{f_1\}$ każda permutacja jest odwrotna względem siebie samej: $f_1^{-1} = f_1$.

Przykład.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 2 & 5 & 3 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 & 5 & 3 & 6 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G_1(f) = G_1(f^{-1}) = \{6, 8\}$$
$$G_2(f) = G_2(f^{-1}) = \{1, 7\}$$
$$G_3(f) = G_3(f^{-1}) = \{2, 3, 5, 4\}$$

Dzięki założeniu (81) możemy skorzystać z lematu 5 wprowając dodatkowo dla każdego $i \in I$ "funkcję proporcjonalności" $X_i(x_i)$ taką, że

$$\frac{X_i^{k_1}}{F_{ik_1}} \equiv \frac{X_i^{k_2}}{F_{ik_2}} \equiv X_i(x_i)$$

Stąd dla każdego $i \in I$ oraz $k \in I$ $(k \neq i)$ mamy

$$X_i^k(x_i) \equiv X_i(x_i) \cdot F_{ik} \tag{96}$$

Dla ułatwienia zapisu będziemy stosować prostszy umowny zapis:

$$X_i^k \equiv X_i \cdot F_{ik} \tag{97}$$

Postać (92) można teraz zapisać następująco:

$$\det \left[\frac{X_i^k}{u_{ik}}\right]_{\substack{i \in I\\ k \in I}} \equiv \sum_{\{f_1\}} \operatorname{sgn} f_1 \prod_{i \in I} \frac{X_i^{p_i}}{u_{ip_i}} + \tag{98}$$

$$+ \sum_{\{f_2\}} \operatorname{sgn} f_2 \prod_{i \in I} \frac{X_i^{p_i}}{u_{ip_i}}$$

Ale

$$\sum_{\{f_1\}} \operatorname{sgn} f_1 \prod_{i \in I} \frac{X_i^{p_i}}{u_{ip_i}} = \tag{99}$$

$$= \sum_{\{f_1\}} \operatorname{sgn} f_1 \cdot \prod_{i \in G_1(f_1)} \frac{X_i^i}{u_{ii}} \cdot \prod_{i \in G_2(f_1)} \frac{X_i^{p_i}}{u_{ip_i}}$$

Weźmy teraz dowolną permutację $f_2 \in \{f_2\}$ i odwrotną do niej permutację $f_2^{-1} \in \{f_2\}$. Obliczmy dla nich odpowiednie iloczyny:

$$(100) \quad \operatorname{sgn} f_2 \prod_{i \in G_1(f_2)} \frac{x_i^i}{u_{ii}} \prod_{i \in G_2(f_2)} \frac{x_i^{p_i}}{u_{ip_i}} \prod_{i \in G_3(f_2)} \frac{x_i^{p_i}}{u_{ip_i}}$$

$$(101) \quad \operatorname{sgn} f_2^{-1} \prod_{i \in G_1(f_2^{-1})} \frac{x_i^i}{u_{ii}} \prod_{i \in G_2(f_2^{-1})} \frac{x_{p_i}^i}{u_{p_i i}} \prod_{i \in G_3(f_2^{-1})} \frac{x_{p_i}^i}{u_{p_i i}}$$

W powyższych zapisach rozumieć należy, że jeśli $G_j(f) = \emptyset$ (jest zbiorem pustym), to

$$\prod_{i \in G_j(f)} \frac{x_i^{p_i}}{u_{ip_i}} = 1 \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, 3$$

Z (91) wynika, że

$$(102) \qquad \operatorname{sgn} f_2 = \operatorname{sgn} f_2^{-1}$$

Z określeń (93)-(95) wynika również, że

$$(103) \qquad G_j(f_2) = G_j(f_2^{-1}) \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, 3$$

Założenie (81) naszego twierdzenia i tożsamość (96) będącą jego konsekwencją pozwolą nam teraz wykazać, że suma funkcji (100) i (101) jest pewnego rodzaju funkcją symetryczną.

Wykorzystując w trakcie przekształceń oczywistą tożsamość

$$(104) \qquad \prod_{i \in G_j(f_2)} x_{p_i} = \prod_{i \in G_j(f_2)} x_i \quad \text{dla} \quad j = 2, 3$$

oraz (102) i (103) otrzymamy

$$\operatorname{sgn} f_2 \cdot \prod_{i \in G_1(f_2)} \frac{x_i^i}{u_{ii}} \cdot \prod_{i \in G_2(f_2)} \frac{x_i F_{ip_i}}{u_{ip_i}} \cdot \prod_{i \in G_3(f_2)} \frac{x_i F_{ip_i}}{u_{ip_i}} +$$

$$+ \operatorname{sgn} f_2^{-1} \cdot \prod_{i \in G_1(f_2)} \frac{X_i^i}{u_{ii}} \cdot \prod_{i \in G_2(f_2)} \frac{X_{p_i} F_{ip_i}}{u_{p_i i}} \cdot \prod_{i \in G_3(f_2)} \frac{X_{p_i} F_{ip_i}}{u_{p_i i}} =$$

$$= \operatorname{sgn} f_2 \cdot \prod_{i \in G_1(f_2)} X_i^i \cdot \prod_{i \in G_2(f_2) \cup G_3(f_2)} (X_i F_{ip_i}) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\prod\limits_{i \in G(f_2)} u_{ii}} \cdot \left[\frac{1}{\prod\limits_{i \in G_2(f_2) \cup G_3(f_2)} u_{ip_i}} + \frac{1}{\prod\limits_{i \in G_2(f_2) \cup G_3(f_2)} u_{p_i i}} \right] =$$

$$= \operatorname{sgn} f_2 \cdot \prod_{i \in G_1(f_2)} X_i^i \cdot \prod_{i \in \{I\} - G_1(f_2)} (X_i F_{ip_i}) \cdot$$

$$(105) \qquad \cdot \left[\frac{1}{\prod\limits_{i \in I} u_{ip_i}} + \frac{1}{\prod\limits_{i \in I} u_{p_i i}} \right]$$

Dla przekształcenia (99) wykorzystanie (104) nie jest konieczne. Skorzystamy natomiast z tego, że dla każdej permutacji $f_1 \in \{f_1\}$ jest ona sama dla siebie permutacją odwrotną:

$f_1^{-1} = f_1$, tzn. $f_1(i) = p_i$ i $f_1(p_i) = i$ dla każdego $i \in I$. Mamy zatem

$$(106) \qquad \prod_{i \in I} u_{ip_i} = \prod_{i \in I} u_{p_i i} \quad \text{dla każdego } f_1 \in \{f_1\}.$$

Stąd wynika, że dla $f_1 \in \{f_1\}$ możemy zapisać

$$(107) \qquad \prod_{i \in I} u_{ip_i} = k \cdot \prod_{i \in I} \left| u_{ip_i} \cdot u_{p_i i} \right|^{1/2}$$

gdzie

$$k = \begin{cases} +1 & \text{dla } \prod\limits_{i\in I} u_{ip_i} > 0 \\ -1 & \text{dla } \prod\limits_{i\in I} u_{ip_i} < 0 \end{cases}$$

Przykłady. Niech

$$f_1 = \binom{1\ \ 2}{2\ \ 1}\binom{3\ \ 5}{5\ \ 3}\binom{4}{4}\binom{6}{6}$$

Wówczas $\prod\limits_{i\in I} u_{ip_i} = u_{12}u_{21}u_{35}u_{53}u_{44}u_{66} = \prod\limits_{i\in I} u_{p_i i}$.

Niech $f_2 = \binom{1\ \ 3\ \ 4}{3\ \ 4\ \ 1}\binom{2}{2}\binom{5\ \ 6}{6\ \ 5}$

$$f_2^{-1} = \binom{3\ \ 4\ \ 1}{1\ \ 3\ \ 4}\binom{2}{2}\binom{5\ \ 6}{6\ \ 5}$$

Wówczas $\prod\limits_{i\in I} u_{ip_i} + \prod\limits_{i\in I} u_{p_i i} =$

$$= (u_{13}u_{34}u_{41} + u_{31}u_{43}u_{14})u_{22}u_{56}u_{65}.$$

Ostatecznie korzystając z (99), (104) i (107) możemy zapisać (92) w następującej postaci:

$$\det\left[\frac{X_i^k}{u_{ik}}\right]_{\substack{i\in I\\ k\in I}} \equiv \sum_{\{f_1\}} \operatorname{sgn} f_1 \cdot \prod_{i\in I} X_i^{p_i} \cdot \frac{k}{\prod\limits_{i\in I} \left|u_{ip_i}\cdot u_{p_i i}\right|^{1/2}} +$$

(108)

$$+ \frac{1}{2}\sum_{\{f_2\}} \operatorname{sgn} f_2 \cdot \prod_{i\in G_1(f_2)} X_i^i \cdot \prod_{i\in I-G_1(f_2)} (X_i\ F_{ip_i}) \cdot$$

$$\cdot\left[\frac{1}{\prod\limits_{i\in I} u_i p_i} + \frac{1}{\prod\limits_{i\in I} u_{p_i i}}\right]$$

Przedstawiona powyżej postać (108) wyznacznika $\det \left[\frac{X_i^k}{u_{ik}}\right]_{\substack{i\in I\\ k\in I}}$ traktowana jako funkcja n^2 zmiennych $G\,(u_{ik})_{\substack{i\in I\\ k\in I}}$ jest funkcją symetryczną względem pewnej permutacji g argumentów u_{ik}; takiej permutacji g (co widać z postaci (108)), że dokonuje ona symetrycznej względem głównej przekątnej macierzy $\left[\frac{X_i^k}{u_{ik}}\right]$ jednoczesnej zamiany wszystkich mianowników u_{ik} wyrazów macierzy na u_{ki} i odwrotnie (tzn. permutacja g jest superpozycją rozłącznych cyklów co najwyżej dwuwyrazowych). Oznacza to zatem, że

$$\det \left[\frac{X_i^k}{u_{ik}}\right]_{\substack{i\in I\\ k\in I}} \equiv \det \left[\frac{X_i^k}{u_{ki}}\right]_{\substack{i\in I\\ k\in I}}$$

Dowód twierdzenia 3 został tym samym zakończony.

Część III

Opierając się na wynikach uzyskanych w Części I i II niniejszej pracy oraz na pracy M. Warmusa "Nomographic Functions" [3] przeprowadzimy bardziej szczegółowe badanie kryterium nomograficzności funkcji $F(x_1,x_2,x_3)$ (tzn. dla przypadku $n = 3$).

Zgodnie z założeniami twierdzenia 1 mamy zatem $I = (1,2,3)$.

Niech ciągi $(a_s)_{s\in I}$ oraz $(b_s)_{s\in I}$ wyznaczające (3) położenie kostki Y będą tak dobrane, że spełnione są założenia (11)-(13). Wówczas, jeśli liczby T_{231} i T_{312} są rozwiązaniem układu równań

$$(109)\qquad \begin{cases} T_{231} + T_{312} = F_{123} \\ T_{231}\,T_{312} = -\dfrac{F_{12}\,F_{13}\,F_{23}}{F_0} \end{cases}$$

to zachodzi teza twierdzenia 1 (dla $n = 3$):

Warunkiem koniecznym i dostatecznym nomograficzności funkcji $F(x_1,x_2,x_3)$ jest zachodzenie tożsamości

$$(110_1)\quad F(x_1,x_2,x_3) \equiv -\frac{F_{12}F_{13}}{F_0}\cdot\begin{vmatrix} \frac{X_1^1}{-F_0} & \frac{X_1^2}{F_{12}} & \frac{X_1^3}{F_{13}} \\ \frac{X_2^1}{F_{12}} & \frac{X_2^2}{F_{12}} & \frac{X_2^3}{T_{312}} \\ \frac{X_3^1}{F_{13}} & \frac{X_3^2}{T_{231}} & \frac{X_3^3}{F_{13}} \end{vmatrix} \equiv$$

$$(110_2)\quad \equiv -\frac{F_{12}F_{23}}{F_0}\cdot\begin{vmatrix} \frac{X_1^1}{F_{12}} & \frac{X_1^2}{F_{12}} & \frac{X_1^3}{T_{231}} \\ \frac{X_2^1}{F_{12}} & \frac{X_2^2}{-F_0} & \frac{X_2^3}{F_{23}} \\ \frac{X_3^1}{T_{312}} & \frac{X_3^2}{F_{23}} & \frac{X_3^3}{F_{23}} \end{vmatrix} \equiv$$

$$(110_3)\quad \equiv -\frac{F_{13}F_{23}}{F_0}\cdot\begin{vmatrix} \frac{X_1^1}{F_{13}} & \frac{X_1^2}{T_{312}} & \frac{X_1^3}{F_{13}} \\ \frac{X_2^1}{T_{231}} & \frac{X_2^2}{F_{23}} & \frac{X_2^3}{F_{23}} \\ \frac{X_3^1}{F_{13}} & \frac{X_3^2}{F_{23}} & \frac{X_3^3}{-F_0} \end{vmatrix}$$

Na podstawie twierdzenia 2 postacie Soreau (110_1), (110_2), (110_3) funkcji nomograficznej $F(x_1,x_2,x_3)$ są postaciami równoważnymi w sensie definicji 5.

W celu dalszych badań potrzebne nam będzie powiązanie pojęcia zależności liniowych funkcji $X_i^k(x_i)$ dla $i,k \in I$ (pojęcia te występowały w lematach 4 i 5) z pojęciem rzędu funkcji $F(x_1,x_2,x_3)$ ze względu na zmienną x_i $(i = 1,2,3)$ (definicje 2 i 3).

Twierdzenie 4. Jeśli spełnione są założenia (4)-(17) oraz funkcja $F(x_1,x_2,x_3)$ jest nomograficzna (tzn. na podstawie twierdzenia 1 zachodzą tożsamości (110_1)-(110_3)), to dla każdego i $(i = 1,2,3)$ oraz k $(k = 2,3)$:

$$(111) \qquad \left[\dim \left\{ X_i^1(x_i),\ X_i^2(x_i),\ X_i^3(x_i) \right\} = k \right] \Longleftrightarrow$$

$$(112) \Longleftrightarrow \left[\text{funkcja } F(x_1,x_2,x_3) \text{ jest rzędu } k \text{ ze względu na zmienną } x_i \right].$$

Dowód. Dla dowodu naszego twierdzenia skorzystamy z następującego lematu z pracy M. Warmusa

Lemat 6. Niech funkcja $G(u,v)$ będzie dana w postaci

$$(113) \qquad G(u,v) \equiv U_1(u)\,V_1(v) + U_2(u)\,V_2(v) + U_3(u)\,V_3(v)$$

(określenia powyższych funkcji jak w definicji 2).

Wówczas funkcja $G(u,v)$ jest rzędu 3 wtedy i tylko wtedy, jeśli funkcje $U_1(u)$, $U_2(u)$, $U_3(u)$ oraz funkcje $V_1(v)$, $V_2(v)$, $V_3(v)$ - traktowane oddzielnie - są liniowo niezależne.

Przekształćmy postać (110_i) $(i = 1,2,3)$ funkcji $F(x_1,x_2,x_3)$ w następujący sposób (zilustrujemy to na przykładzie $i = 2$):

$$F(x_1,x_2,x_3) \equiv M_2 \cdot \begin{vmatrix} \frac{X_1^1}{F_{12}} & \frac{X_1^2}{F_{12}} & \frac{X_1^3}{T_{231}} \\ \frac{X_2^1}{F_{12}} & \frac{X_2^2}{-F_0} & \frac{X_2^3}{F_{23}} \\ \frac{X_3^1}{T_{312}} & \frac{X_3^2}{F_{23}} & \frac{X_3^3}{F_{23}} \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv -\frac{M_2}{F_0}x_2^2\cdot\left[\frac{x_1^1x_3^3}{F_{12}F_{23}}-\frac{x_1^3x_3^1}{T_1T_2}\right]+$$

(114)
$$-\frac{M_2}{F_{12}}x_2^1\cdot\left[\frac{x_1^2x_3^3}{F_{12}F_{23}}-\frac{x_1^3x_3^2}{T_1F_{23}}\right]+$$

$$-\frac{M_2}{F_{23}}x_2^3\cdot\left[\frac{x_1^1x_3^2}{F_{12}F_{23}}-\frac{x_1^2x_3^1}{F_{12}T_2}\right]$$

Dla uproszczenia oznaczyliśmy

(115)
$$T_1 = T_{231} \quad \text{i} \quad T_2 = T_{312}$$

Oznaczając

(116)
$$H_2^2(x_2)\equiv -\frac{M_2}{F_0}x_2^2\ ,\ H_2^1(x_2)\equiv -\frac{M_2}{F_{12}}x_2^1,\ H_2^3(x_2)\equiv -\frac{M_2}{F_{23}}x_2^3$$

oraz

$$G_2^2(x_1,x_3)\equiv \frac{x_1^1x_3^3}{F_{12}F_{23}}-\frac{x_1^3x_3^1}{T_1T_2}$$

(117)
$$G_2^1(x_1,x_3)\equiv \frac{x_1^2x_3^3}{F_{12}F_{23}}-\frac{x_1^3x_3^2}{T_1F_{23}}$$

$$G_2^3(x_1,x_2)\equiv \frac{x_1^1x_3^2}{F_{12}F_{23}}-\frac{x_1^2x_3^1}{F_{12}T_2}$$

tożsamość (114) wyrazi się następująco:

(118)
$$F(x_1,x_2,x_3)\equiv H_2^2(x_2)\ G_2^2(x_1,x_3)+H_2^1(x_2)\ G_2^1(x_1,x_3)+$$
$$+H_2^3(x_2)\ G_2^3(x_1,x_3)$$

Aby móc skorzystać z lematu 6 potraktuję funkcję $F(x_1,x_2,x_3)$ jako funkcję dwóch zmiennych: $u = x_2$ i $v = (x_1,x_3)$, gdzie

$u \in \Omega_{x_2}$, $v \in \Omega_{x_1} \times \Omega_{x_3}$ (analogicznie jak w definicji 3 i lemacie 1).

Wykażemy, że funkcje $G_2^2(v)$, $G_2^1(v)$, $G_2^3(v)$ są niezależne liniowo.

Jak wynika z odpowiedniego twierdzenia w pracy [3] funkcje $G_2^1(v)$, $G_2^2(v)$, $G_2^3(v)$ są niezależne liniowo wtedy i tylko wtedy, jeśli istnieją takie elementy $v_1, v_2, v_3 \in \Omega_v$ ($\Omega_v = \Omega_{x_1} \times \Omega_{x_3}$), że

$$(119) \qquad \begin{vmatrix} G_2^1(v_1) & G_2^2(v_1) & G_2^3(v_1) \\ G_2^1(v_2) & G_2^2(v_2) & G_2^3(v_2) \\ G_2^1(v_3) & G_2^2(v_3) & G_2^3(v_3) \end{vmatrix} \neq 0$$

Niech

$$(120) \qquad v_1 = (b_1, a_3), \quad v_2 = (a_1, a_3), \quad v_3 = (a_1, b_3)$$

Ze wzorów (9) i (10) mamy

$$(121) \qquad \begin{aligned} X_1^1(a_1) &= X_3^3(a_3) = F_0 \\ X_1^1(b_1) &= X_1^2(a_1) = X_1^3(a_1) = 0 \\ X_3^1(a_3) &= X_3^2(a_3) = X_3^3(b_3) = 0 \\ X_1^3(b_1) &= X_3^1(b_3) = F_{13} \\ X_3^2(b_3) &= F_{23} \end{aligned}$$

Wstawiając wartości (121) do tożsamości (117) i obliczając wyznacznik (119) otrzymamy

$$\begin{vmatrix} \frac{F_0}{F_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(F_0)^2}{F_{12}F_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F_0}{F_{12}} \end{vmatrix} = \frac{(F_0)^4}{(F_{12})^2 (F_{23})^2} \neq 0$$

Wakazaliśmy zatem niezależność liniową funkcji

(122) $G_2^1(x_1,x_3)$, $G_2^2(x_1,x_3)$, $G_2^3(x_1,x_3)$

Z powyższego wynika natychmiast teza dowodzonego twierdzenia.

Z lematów 4 i 5 wynika bowiem, że

$$\dim\left\{X_2^1(x_2),\ X_2^2(x_2),\ X_2^3(x_3)\right\}$$

równa się 2 lub 3.

Z założenia, że funkcja $F(x_1,x_2,x_3)$ jest nomograficzna, wynika (definicja 4), że funkcja $F(x_1,x_2,x_3)$ jest funkcją rzędu 2 lub 3 ze względu na zmienną x_2 (definicje 2 i 3 oraz twierdzenie 1).

Jeśli mamy $\dim\left\{X_2^1(x_2),X_2^2(x_2),X_2^3(x_2)\right\} = 3$, to z (122) i z lematu 6 wynika, że funkcja $F(x_1,x_2,x_3)$ jest rzędu 3 ze względu na zmienną x_2.

Jeśli funkcja nomograficzna $F(x_1,x_2,x_3)$ jest rzędu 3 ze względu na zmienną x_2, to $\dim\left\{X_2^1(x_2),X_2^2(x_2),X_2^3(x_2)\right\}$ też musi równać się 3. Gdybyśmy bowiem przypuścili, że $\dim\left\{X_2^1(x_2),X_2^2(x_2),X_2^3(x_2)\right\}$ równa się 2, to na podstawie lematu 5 mielibyśmy

$$\frac{X_2^1(x_2)}{F_{12}} \equiv \frac{X_2^3(x_2)}{F_{23}} \tag{123}$$

Z powyższego (123) i (116) mielibyśmy

$$H_2^1(x_2) \equiv H_2^3(x_2)$$

a wówczas (118) zapisywałoby się

$$F(x_1,x_2,x_3) \equiv H_2^2(x_2)\, G_2^2(x_1,x_3) + H_2^1(x_2)\left[G_2^1(x_1,x_3) + G_2^3(x_1,x_3)\right] \tag{124}$$

Z powyższego (124) przedstawienia funkcji $F(x_1,x_2,x_3)$ oraz z definicji 2 i 3 wynikałoby, że funkcja $F(x_1,x_2,x_3)$ jest rzędu co najwyżej 2 ze względu na zmienną x_2 - wbrew założeniu.

Twierdzenie 4 zostało zatem dowiedzione.

Jak już zaznaczyliśmy we wstępie (Część II.D) do twierdzenia 3, wielkości T_{231} i T_{312} będące rozwiązaniami układu (109) nie są wyznaczone jednoznacznie, a jedynie z dokładnością do alternatywy. Wynika to z symetrii równań (109) względem niewiadomych T_{231} i T_{312}.

Powstaje zatem pytanie: czy wielkości te można używać wymiennie w wyznacznikach postaci (110_i) $(i = 1, 2, 3)$?

Odpowiedź na to pytanie uzyskujemy dzięki twierdzeniu 3 dla $n = 3$, co sformułujemy w kolejnym lemacie.

Lemat 7. Jeśli dla każdego i $(i = 1, 2, 3)$

$$\dim\left\{X_i^1(x_i),\ X_i^2(x_i),\ X_i^3(x_i)\right\} = 2 \tag{125}$$

to

$$\begin{vmatrix} \frac{X_1^1}{-F_0} & \frac{X_1^2}{F_{12}} & \frac{X_1^3}{F_{13}} \\ \frac{X_2^1}{F_{12}} & \frac{X_2^2}{F_{12}} & \frac{X_2^3}{T_{312}} \\ \frac{X_3^1}{F_{13}} & \frac{X_3^2}{T_{231}} & \frac{X_3^3}{F_{13}} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \frac{X_1^1}{-F_0} & \frac{X_1^2}{F_{12}} & \frac{X_1^3}{F_{13}} \\ \frac{X_2^1}{F_{12}} & \frac{X_2^2}{F_{12}} & \frac{X_2^3}{T_{231}} \\ \frac{X_3^1}{F_{13}} & \frac{X_3^2}{T_{312}} & \frac{X_3^3}{F_{13}} \end{vmatrix} \tag{126}$$

Analogiczne tożsamości wynikające z zamiany miejscami wielkości T_{312} i T_{231} zachodzą także dla pozostałych postaci (110_2) i (110_3).

Powstaje dalsze pytanie: czy oba tożsamościowe wyznaczniki

(126) określające det W_1 są postaciami równoważnymi w sensie definicji 5?

Odpowiedź otrzymamy w kolejnym twierdzeniu, które wystarczy rozpatrzyć dla postaci (110_1). Dla uproszczenia oznaczmy $T_1 = T_{231}$ i $T_2 = T_{312}$.

Twierdzenie 5. Postacie (126) są postaciami Soreau funkcji nomograficznej $M_1^{-1} \cdot F(x_1, x_2, x_3)$ równoważnymi sobie w sensie definicji 5 wtedy i tylko wtedy, jeśli

$$T_1 = T_2 \tag{127}$$

Dowód. Zgodnie z definicją 5 dwie postacie Soreau (126) funkcji $M_1^{-1} \cdot F(x_1, x_2, x_3)$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, jeśli istnieje macierz liczbowa

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \tag{128}$$

nieosobliwa, to znaczy

$$|c| = \det C \neq 0 \tag{129}$$

i 3 liczby d_1, d_2, d_3 spełniające warunek

$$|c| \cdot d_1\, d_2\, d_3 = 1$$

takie, że

$$\begin{bmatrix} \frac{X_1^1}{-F_0} & \frac{X_1^2}{F_{12}} & \frac{X_1^3}{F_{13}} \\ \frac{X_2^1}{F_{12}} & \frac{X_2^2}{F_{12}} & \frac{X_2^3}{T_2} \\ \frac{X_3^1}{F_{13}} & \frac{X_3^2}{T_1} & \frac{X_3^3}{F_{13}} \end{bmatrix} \equiv \tag{130}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} \frac{d_1 X_1^1}{-F_0} & \frac{d_1 X_1^2}{F_{12}} & \frac{d_1 X_1^3}{F_{13}} \\ \frac{d_2 X_2^1}{F_{12}} & \frac{d_2 X_2^2}{F_{12}} & \frac{d_2 X_2^3}{T_1} \\ \frac{d_3 X_3^1}{F_{13}} & \frac{d_3 X_3^2}{T_2} & \frac{d_3 X_3^3}{F_{13}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

Z definicji mnożenia macierzy otrzymamy, że (130) następujące tożsamości:

$$\frac{X_1^1}{-F_0} \equiv d_1 \left[\frac{X_1^1}{-F_0} c_{11} + \frac{X_1^2}{F_{12}} c_{21} + \frac{X_1^3}{F_{13}} c_{31} \right] \tag{131}$$

$$\frac{X_1^2}{F_{12}} \equiv d_1 \left[\frac{X_1^1}{-F_0} c_{12} + \frac{X_1^2}{F_{12}} c_{22} + \frac{X_1^3}{F_{13}} c_{32} \right] \tag{132}$$

$$\frac{X_1^3}{F_{13}} \equiv d_1 \left[\frac{X_1^1}{-F_0} c_{13} + \frac{X_1^2}{F_{12}} c_{23} + \frac{X_1^3}{F_{13}} c_{33} \right] \tag{133}$$

$$\frac{X_2^1}{F_{12}} \equiv d_2 \left[\frac{X_2^1}{F_{12}} c_{11} + \frac{X_2^2}{F_{12}} c_{21} + \frac{X_2^3}{T_1} c_{31} \right] \tag{134}$$

$$\frac{X_2^2}{F_{12}} \equiv d_2 \left[\frac{X_2^1}{F_{12}} c_{12} + \frac{X_2^2}{F_{12}} c_{22} + \frac{X_2^3}{T_1} c_{32} \right] \tag{135}$$

$$\frac{X_2^3}{T_2} \equiv d_2 \left[\frac{X_2^1}{F_{12}} c_{13} + \frac{X_2^2}{F_{12}} c_{23} + \frac{X_2^3}{T_1} c_{33} \right] \tag{136}$$

$$\frac{X_3^1}{F_{13}} \equiv d_3 \left[\frac{X_3^1}{F_{13}} c_{11} + \frac{X_3^2}{T_2} c_{21} + \frac{X_3^3}{F_{13}} c_{31} \right] \tag{137}$$

$$(138)\qquad \frac{x_3^2}{T_1} = d_3\left[\frac{x_3^1}{F_{13}}c_{12} + \frac{x_3^2}{T_2}c_{22} + \frac{x_3^3}{F_{13}}c_{32}\right]$$

$$(139)\qquad \frac{x_3^3}{F_{13}} = d_2\left[\frac{x_3^1}{F_{13}}c_{13} + \frac{x_3^2}{T_2}c_{23} + \frac{x_3^3}{F_{13}}c_{33}\right]$$

Na podstawie rozważań (83)-(84) lematu 5 wynikają z (131) - (139) następujące równości:

$$(140)\qquad \begin{array}{ll} c_{11}d_1 = 1 & c_{12} = c_{13} = 0 \\ c_{22}d_2 = 1 & c_{21} = c_{22} = 0 \\ c_{33}d_3 = 1 & c_{31} = c_{32} = 0 \end{array}$$

Z powyższych równości i z (131)-(139) wynikają dalsze równości

$$(141)\qquad \begin{array}{ll} d_1c_{22} = 1 & \dfrac{T_1}{T_2} = d_2c_{33} \\ d_1c_{33} = 1 & \\ d_2c_{11} = 1 & \dfrac{T_2}{T_1} = d_3c_{22} \\ d_3c_{11} = 1 & \end{array}$$

Z równości (140)-(141) mamy kolejno

$$c_{11} = c_{22} = c_{33} = c$$

$$d_1 = d_2 = d_3 = d$$

$$cd = 1$$

$$T_1 = T_2$$

Dowód twierdzenia 5 został zatem zakończony.

Ważną rolę w naszych rozważaniach odegra następujące

<u>Twierdzenie 6</u>. Jeśli funkcja nomograficzna $F(x_1,x_2,x_3)$ ma dla położenia kostki γ_1 - określonej przez ciągi $(a_s^1)_{s\in I}$ i $(b_s^1)_{s\in I}$ - przedstawienie (110) takie, że

(142) $$T_1 = T_2$$

oraz dla każdego $i \in \{1,2,3\}$

(143) $$\dim\{X_i^1,\ X_i^2,\ X_i^3\} = 2$$

to funkcja $F(x_1,x_2,x_3)$ jest funkcją jednonomograficzną w sensie definicji 5.

Dowód. Z założenia (143) na podstawie lematu 5 mamy

(144) $$\frac{X_1^3}{F_{13}} = \frac{X_1^2}{F_{12}},\quad \frac{X_2^1}{F_{12}} = \frac{X_2^3}{F_{23}},\quad \frac{X_3^1}{F_{13}} = \frac{X_3^2}{F_{23}}$$

Korzystając z powyższego (144) przekształcimy postać (110_1) funkcji $F(x_1,x_2,x_3)$ następująco:

(145)
$$F(x_1,x_2,x_3) \equiv -\frac{F_{12}F_{13}}{F_0}\cdot\begin{vmatrix} \frac{X_1^1}{-F_0} & \frac{X_1^2}{F_{12}} & \frac{X_1^2}{F_{12}} \\ \frac{X_2^3}{F_{23}} & \frac{X_2^2}{F_{12}} & \frac{X_2^3}{T_2} \\ \frac{X_3^2}{F_{23}} & \frac{X_3^2}{T_1} & \frac{X_3^3}{F_{13}} \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv -\frac{F_{12}F_{13}}{F_0}\left\{-\frac{X_1^1X_2^2X_3^3}{F_{12}F_{13}F_0} + \frac{X_1^1X_2^3X_3^2}{F_0T_1T_2} - \frac{X_1^2X_2^3X_3^3}{F_{12}F_{23}F_{13}} + \right.$$
$$\left. + \frac{X_1^2X_2^3X_3^2}{F_{12}T_2F_{23}} - \frac{X_1^2X_2^2X_3^2}{(F_{12})^2F_{23}} + \frac{X_1^2X_2^3X_3^2}{F_{12}T_1F_{23}}\right\}$$

Wykorzystując (109), to znaczy

(146)
$$\begin{cases} T_1\cdot T_2 = -\frac{F_{12}F_{13}F_{23}}{F_0} \\ T_1 + T_2 = F_{123} \end{cases}$$

otrzymamy

$$F(x_1,x_2,x_3) \equiv -\frac{F_{12}F_{13}}{F_0}\left\{-\frac{x_1^1}{F_{12}F_{13}}\left[\frac{x_2^2x_3^3}{F_0}+\frac{x_2^3x_3^2}{F_{23}}\right]+\right.$$

(147)

$$\left.-\frac{x_1^2}{F_{12}F_{23}}\left[\frac{x_2^3x_3^3}{F_{13}}+\frac{x_2^2x_3^2}{F_{12}}+\frac{x_2^3x_3^2F_0F_{123}}{F_{12}F_{13}F_{23}}\right]\right\}.$$

Z założenia (142) i warunku (146) otrzymujemy równość

(148) $$F_0(F_{123})^2 + 4F_{12}F_{13}F_{23} = 0$$

Postać (147) funkcji $F(x_1,x_2,x_3)$ nie zależy od T_1 i T_2. Powstaje pytanie: czy przy innych położeniach kostki Y_2 (określonej przez jakieś ciągi $(a_s^2)_{s\in I}$ i $(b_s^2)_{s\in I}$ tak dobranej, by spełnione były warunki (11)-(13)) mogą pojawić się w odpowiednich postaciach funkcji $F(x_1,x_2,x_3)$ (110) wielkości T_1' i T_2' różne? Konsekwencją tego byłoby na podstawie lematu 6 i twierdzenia 5, że funkcja $F(x_1,x_2,x_3)$ jest podwójnie nomograficzna (w sensie definicji 5).

Zgodnie z tezą naszego twierdzenia odpowiedź jest negatywna. Aby to wykazać, oprzemy się na Drugim Podstawowym Twierdzeniu (Second Fundamental Theorem) pracy [3], które mówi (między innymi): Jeśli funkcja $F(x_1,x_2,x_3)$ jest nomograficzna, to jest ona jednomonograficzna w trzecim głównym przypadku ze spełnionym warunkiem

(149) $$(r_{31} - r_{42})^2 + 4r_{32}r_{41} = 0$$

(w przeciwnym razie, gdy $(r_{31} - r_{42})^2 - 4r_{32}r_{41} \neq 0$, funkcja $F(x_1,x_2,x_3)$ jest podwójnie nomograficzna).

<u>Definicja 6</u> (Warmus [3]). Funkcja rzeczywista $F(x_1,x_2,x_3)$

spełnia trzeci główny przypadek wtedy i tylko wtedy, gdy:

a) funkcja $F(x_1,x_2,x_3)$ jest rzędu 2 ze względu na każdą ze zmiennych x_i $(i = 1,2,3)$,

b) istnieją funkcje rzeczywiste $\bar{X}_i^k(x_i)$ $(i = 1,2,3;\ k = 1,2,3,4;\ x_i \in \Omega_{x_i})$ oraz funkcje rzeczywiste $\bar{G}_1^1(x_2,x_3)$ i $\bar{G}_1^2(x_2,x_3)$ określone na zbiorze $\Omega = \Omega_{x_2} \times \Omega_{x_3}$ takie, że

$$F(x_1,x_2,x_3) \equiv \bar{X}_1^1(x_1)\,\bar{G}_1^1(x_2,x_3) + \bar{X}_1^2(x_1)\,\bar{G}_1^2(x_2,x_3) \tag{150}$$

oraz obie funkcje $\bar{G}_1^1(x_2,x_3)$ i $\bar{G}_1^2(x_2,x_3)$ są rzędu 2, to znaczy

$$\bar{G}_1^1(x_2,x_3) \equiv \bar{X}_2^1(x_2)\,\bar{X}_3^1(x_3) + \bar{X}_2^2(x_2)\,\bar{X}_3^2(x_3) \tag{151}$$

$$\bar{G}_1^2(x_2,x_3) \equiv \bar{X}_2^3(x_2)\,\bar{X}_3^3(x_3) + \bar{X}_2^4(x_2)\,\bar{X}_3^4(x_3) \tag{152}$$

$$\begin{aligned} \bar{X}_2^3(x_2) &\equiv m_{31}\,\bar{X}_2^1(x_2) + m_{32}\,\bar{X}_2^2(x_2) \\ \bar{X}_2^4(x_2) &\equiv m_{41}\,\bar{X}_2^1(x_2) + m_{42}\,\bar{X}_2^2(x_2) \\ \bar{X}_3^3(x_3) &\equiv n_{31}\,\bar{X}_3^1(x_3) + n_{32}\,\bar{X}_3^2(x_3) \\ \bar{X}_3^4(x_3) &\equiv n_{41}\,\bar{X}_3^1(x_3) + n_{42}\,\bar{X}_3^2(x_3) \end{aligned} \tag{153}$$

Wielkości występujące w warunku (149) są określone następująco:

$$\begin{aligned} r_{31} &= m_{31}n_{31} + m_{41}n_{41} \\ r_{41} &= m_{31}n_{32} + m_{41}n_{42} \\ r_{32} &= m_{32}n_{31} + m_{42}n_{41} \\ r_{42} &= m_{32}n_{32} + m_{42}n_{42} \end{aligned} \tag{154}$$

<u>Lemat 8</u>. Funkcja nomograficzna $F(x_1,x_2,x_3)$ określona tożsamością (147) spełnia trzeci główny przypadek (w sensie definicji 6).

Oznaczając

(155) $$\bar{X}_1^1(x_1) \equiv X_1^1(x_1)\,\frac{1}{F_0}$$

(156) $$\bar{X}_1^2(x_1) \equiv X_1^2(x_1)\,\frac{F_{13}}{F_0F_{23}}$$

(157) $$\bar{G}_1^1(x_2,x_3) \equiv \frac{X_2^2(x_2)\,X_3^3(x_3)}{F_0} + \frac{X_2^3(x_2)\,X_3^2(x_3)}{F_{23}}$$

(158) $$\bar{G}_1^2(x_2,x_3) \equiv \frac{X_2^3(x_2)\,X_3^3(x_3)}{F_{13}} + \frac{X_2^2(x_2)\,X_3^2(x_3)}{F_{12}} + \frac{X_2^3(x_2)\,X_3^2(x_3)\,F_0\,F_{123}}{F_{12}F_{13}F_{23}}$$

otrzymujemy tożsamość (147) w postaci (150). Wystarczy zatem wykazać, że obie funkcje $\bar{G}_1^1(x_2,x_3)$ i $\bar{G}_1^2(x_2,x_3)$ określone tożsamościami (157) i (158) są funkcjami rzędu 2. Dla funkcji $\bar{G}_1^1(x_2,x_3)$ sprawa jest łatwa. Zarówno bowiem funkcje $X_2^2(x_2)$, $X_2^3(x_2)$ jak i funkcje $X_3^3(x_3)$, $X_2^3(x_3)$ są (lemat 4) niezależne liniowo. Stąd na mocy lematu 6 funkcja $\bar{G}_1^1(x_2,x_3)$ (157) jest rzędu 2.

Skorzystamy z lematu 6 również dla wykazania, że funkcja $\bar{G}_1^2(x_2,x_3)$ jest również rzędu 2.

Oznaczając

$$U_1(x_2) \equiv X_2^2(x_2), \quad U_2(x_2) \equiv X_2^3(x_2)$$

$$V_1(x_3) \equiv X_3^2(x_3)\,\frac{1}{F_{12}}$$

$$V_2(x_3) \equiv X_3^3(x_3)\,\frac{1}{F_{13}} + X_3^2(x_3)\,\frac{F_0\,F_{123}}{F_{12}F_{13}F_{23}}$$

widzimy, że funkcje $U_1(x_2)$, $U_2(x_2)$ są niezależne liniowo (lemat

4). Ale dla $x_3 = a_3$ i $x_3 = b_3$ mamy

$$\begin{vmatrix} V_1(a_3) & V_1(b_3) \\ U_1(a_3) & U_1(b_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{F_{23}}{F_{12}} \\ \dfrac{F_0}{F_{13}} & \dfrac{F_0F_{123}}{F_{12}F_{13}} \end{vmatrix} \neq 0$$

Zatem i funkcje $V_1(x_3)$ i $V_2(x_3)$ są niezależne liniowo. Wykazaliśmy zatem, że funkcja $\bar{G}_1^2(x_2,x_3)$ (158) jest również rzędu 2. Ponieważ warunek a) definicji 6 jest spełniony z założenia (143), zatem lemat 8 został udowodniony.

Możemy skorzystać zatem z definicji 6 dla odpowiedniego przedstawienia funkcji $F(x_1,x_2,x_3)$ danej w postaci (147). Utrzymując w mocy oznaczenia (150)-(158) oraz wprowadzając nowe oznaczenia

$$\bar{X}_2^1(x_2) \equiv X_2^2(x_2); \quad \bar{X}_3^1(x_3) \equiv X_3^3(x_3)\frac{1}{F_0}$$

$$\bar{X}_2^2(x_2) \equiv X_2^3(x_2); \quad \bar{X}_3^2(x_3) \equiv X_3^2(x_3)\frac{1}{F_{23}}$$

otrzymujemy ze (158)

$$\begin{aligned} &\bar{X}_2^3(x_2) \equiv 1\cdot\bar{X}_2^1(x_2) + 0\cdot\bar{X}_2^2(x_2) \\ &\bar{X}_2^4(x_2) \equiv 0\cdot\bar{X}_2^1(x_2) + 1\cdot\bar{X}_2^2(x_2) \\ (159) \quad &\bar{X}_3^3(x_3) \equiv 0\cdot\bar{X}_3^1(x_3) + \frac{F_{23}}{F_{12}}\cdot\bar{X}_3^2(x_3 \\ &\bar{X}_3^4(x_3) \equiv \frac{F_0}{F_{13}}\cdot\bar{X}_3^1(x_3) + \frac{F_0F_{123}}{F_{12}F_{13}}\cdot\bar{X}_3^2(x_3) \end{aligned}$$

Porównując (159) z (153) otrzymamy

$$m_{31} = 1 \qquad m_{32} = 0$$

$$m_{41} = 0 \qquad m_{42} = 1$$

(160)
$$n_{31} = 0 \qquad n_{32} = \frac{F_{23}}{F_{12}}$$

$$n_{41} = \frac{F_0}{F_{13}} \qquad n_{42} = \frac{F_0 F_{123}}{F_{12} F_{13}}$$

Wstawiając (160) do (154) otrzymamy

(161)
$$r_{31} = 0 \qquad r_{41} = \frac{F_{23}}{F_{12}}$$

$$r_{32} = \frac{F_0}{F_{13}} \qquad r_{42} = \frac{F_0 F_{123}}{F_{12} F_{13}}$$

Wstawiając (161) do (149) i korzystając z (148) otrzymamy

$$\left[0 - \frac{F_0 F_{123}}{F_{12} F_{13}}\right]^2 + 4\,\frac{F_0}{F_{13}}\,\frac{F_{23}}{F_{12}} =$$

$$= \frac{F_0}{(F_{12})^2 (F_{13})^2}\left[(F_{123})^2 F_0 + 4F_{12}F_{13}F_{23}\right] = 0$$

Zatem na podstawie Drugiego Podstawowego Twierdzenia z pracy [3] twierdzenie 6 zostało dowiedzione.

<u>Wniosek 1</u>. Jeśli dla pewnego położenia kostki Y_1 ($Y_1 \subset \Omega$) - określonej przez ciągi $(a_s^1)_{s \in I}$ i $(b_s^1)_{s \in I}$ należące do Ω - przedstawienie $(110)^1$ funkcji nomograficznej $F(x_1, x_2, x_3)$ spełniającej warunek

$$\dim\left\{X_i^1,\ X_i^2,\ X_i^3\right\} = 2 \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3$$

jest takie, że

$$T_1^1 = T_2^1$$

to także i dla innego położenia kostki Y_2 ($Y_2 \subset \Omega$) - określonej prz przez ciągi $(a_s^2)_{s\in I}$ i $(b_s^2)_{s\in I}$ należące do Ω - odpowiadające mu przedstawienie $(110)^2$ tej samej funkcji $F(x_1,x_2,x_3)$ jest takie, że

$$T_1^2 = T_2^2$$

W przeciwnym bowiem razie (na podstawie definicji 5 oraz twierdzenia 5 i 6) funkcja $F(x_1,x_2,x_3)$ byłaby zarazem jedno- i dwunomograficzna, co nie jest możliwe.

Drugie Podstawowe Twierdzenie z pracy [3] mówi także:

(162) Jeśli funkcja $F(x_1,x_2,x_3)$ jest nomograficzna i jest rzędu 3 przynajmniej ze względu na jedną ze zmiennych x_i ($i\in I$), to funkcja $F(x_1,x_2,x_3)$ jest funkcją jednonomograficzną.

Otrzymane w części III wyniki zbierzmy w następującym twierdzeniu:

<u>Twierdzenie 7.</u> Jeśli funkcja rzeczywista $F(x_1,x_2,x_3)$ określona na zbiorze Ω jest nomograficzna oraz dla pewnego położenia kostki Y_1 ($Y_1 \subset \Omega$) otrzymamy odpowiadającą mu postać $(110)^1$ funkcji $F(x_1,x_2,x_3)$, to:

a) jeśli

(163) $\dim\{X_i^1(x_i),\ X_i^2(x_i),\ X_i^3(x_i)\} = 2$

dla każdego $i\in I$ oraz

(164) $$T_1^1 = T_2^1$$

to funkcja $F(x_1,x_2,x_3)$ jest funkcją jednonomograficzną (twierdzenie 6) i dla każdego innego położenia kostki Y_2 elementy odpowiadającej mu postaci $(110)^2$ muszą spełniać własności (163) i (164);

b) jeśli

(165) $\dim \left\{ X_i^1(x_i),\ X_i^2(x_i),\ X_i^3(x_i) \right\} = 2$

dla każdego $i \in I$ oraz

(166) $$T_1^1 \neq T_2^1$$

to funkcja $F(x_1, x_2, x_3)$ jest funkcją dwunomograficzną (lemat 7) i dla każdego innego położenia kostki Y_2 elementy odpowiadającej mu postaci $(110)^2$ spełniają własności (165) i (166) (reprezentanty nierównoważnych sobie postaci Soreau otrzymamy zamieniając elementy T_1 i T_2 miejscami jak w postaciach (126));

c) jeśli istnieje i $(i \in I)$ takie, że

(167) $\dim \left\{ X_i^1(x_i),\ X_i^2(x_i),\ X_i^3(x_i) \right\} = 3$

to funkcja $F(x_1, x_2, x_3)$ jest jednonomograficzna, oraz jeśli

$$T_1^1 \neq T_2^1$$

to tylko jedno z ustawień (126) może służyć do przedstawienia naszej funkcji.

Część IV

Twierdzenie 1 zostało sformułowane w sposób poniekąd już tradycyjny analogicznie do sformułowań twierdzenia dla n = 3 oraz n = 4 w pracach [1] oraz [2].

Tradycja ta tkwi w założeniach i pewnych fragmentach dowodu. Niemniej jednak niniejsza praca w wielu swoich sformułowaniach zawiera pewne tendencje do uogólnień, co wynika z możliwości rozszerzenia zakresu stosowalności twierdzenia 1. Zadaniem tej części pracy będzie sprecyzowanie charakteru tych uogólnień.

Twierdzenie 1 (Część I) dotyczy funkcji rzeczywistej n zmiennych rzeczywistych. Oznacza to, że Ω (str. 3) uważać należy za podzbiór przestrzeni metrycznej R^n, czyli dla każdego $i \in I$ mamy $\Omega_{x_i} \subset R$, zaś kostka Y (str. 5) jest n-wymiarową kostką zawartą w n-wymiarowej przestrzeni metrycznej ($Y \subset \Omega \subset R^n$). Z tych też względów w definicji 1 (str. 3) o przedstawialności funkcji $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ w postaci Soreau możemy nawet mówić (zupełnie zresztą niepotrzebnie) o "obszarze Ω". Aby nie zmniejszać jednak ogólności (dla celów twierdzenia 01) wprowadzonego w definicji 1 pojęcia, należało zamiast mówić o "obszarze Ω" użyć po prostu terminu "zbiór Ω" (przykłady 2, 3 i 4). W uogólnionym twierdzeniu 1 (nazwijmy je twierdzeniem 01) określone (str. 3) zbiory Ω_{x_i} $(i \in I)$ mogą być zbiorami dowolnego rodzaju. Mogą być zbiorami liczb, zbiorami wektorów, zbiorami elementów dowolnej przestrzeni, zbiorami krzeseł w kinie A lub zbiorami jakiegokolwiek innego rodzaju. Żądamy jedynie, aby zbiory te nie były puste. Nieco ściślejsze wymagania jesteśmy zmuszeni postawić względem mocy zbiorów Ω_{x_i}, jeśli zażądamy, aby spełnione były założenia (11) - (13). A mianowicie:

$$\overline{\overline{\Omega}}_{x_i} \geqslant 2 \tag{168}$$

W twierdzeniu 1 określiliśmy bowiem kostkę Y (str. 5), ale korzystaliśmy tylko z jej "punktów wierzchołkowych". Dlatego też w twierdzeniu 01 określimy Y jako zbiór 2^n wyróżnionych elementów zbioru Ω generowanych przez dwa elementy zbioru Ω (z tego rodzaju sugestią można spotkać się było przy formułowaniu założeń twierdzenia 1 dla $n = 3$ w Części III (str. 51)):

(169) $$a = (a_s)_{s \in I} \quad i \quad b = (b_s)_{s \in I}$$

takie, że dla każdego $s \in I$

(170) $$a_s \neq b_s, \quad a_s \in \Omega_s, \quad b_s \in \Omega_s .$$

Pozostałe elementy zbioru Y są określone przez "kombinacje" tych dwu (169) ciągów zgodnie ze wzorem (8_1) (str. 6-7):

(171) $(z_s)_{s \in I}$, gdzie

$$z_s = \begin{cases} b_s, & \text{gdy } s \in I_k^i \\ a_s, & \text{gdy } s \notin I_k^i \end{cases}$$

Oczywiście wszystkie 2^n elementy $(z_s)_{s \in I}$ (171) zbioru Y dzięki (str. 3) i (170) należą do zbioru Ω.

Z powyższych rozważań widać, że w porównaniu z twierdzeniem 1 w twierdzeniu 01 zwiększyliśmy dowolność zbiorów Ω_{x_i} $(i \in I)$ (modyfikując z konieczności określenie zbioru Y $(Y \subset \Omega)$), czyli zbiorów argumentów występujących w twierdzeniu funkcji. Same funkcje określone na tych zbiorach budujemy identycznie. A zatem funkcja $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ określona na zbiorze $\Omega = \underset{i \in I}{\times} \Omega_{x_i}$ jest funkcją przyjmującą wartości liczbowe rzeczywiste, tak jak funkcje $\overset{-i}{X}_k(x_k)$ określone na zbiorach Ω_{x_k} (dla każdego $i \in I$ i każdego $k \in I$)(str. 3). I wreszcie funkcje $X_k^i(x_k)$ określone wzorem (4) (str. 5-6) należy rozumieć jako obcięcie (zwężenie) funkcji rzeczywistej $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ określonej na zbiorze Ω do zbioru $\Omega_{ik} = \underset{s \in I}{\times} \Omega_s$, gdzie

$$\Omega_s = \begin{cases} x_s & \text{dla } s = k \\ \{b_s\} & \text{dla } (s \neq k) \wedge (s = i) \\ \{a_s\} & \text{dla } (s \neq k) \wedge (s \neq i) \end{cases}$$

dla każdego $i \in I$ i każdego $k \in I$.

Dalej dla $\binom{n}{3}$ par $T_{k_2 k_3 k_1}$ i $T_{k_3 k_1 k_2}$ będących rozwiązaniem układów równań (14)- (15) dopuszczamy wszelkie rozwiązania liczbowe, a zatem mogą to być liczby zespolone (przykład 2).

Prześledźmy teraz, czy modyfikacja założeń będzie miała istotny wpływ na przebieg dowodu twierdzenia. W dowodzie twierdzenia 1 określiliśmy (19) (str. 10) n krzywych c_s dla każdego $s \in I$:

(172) $\quad c_s: \quad \bigwedge_{i \in I} \xi_i = \overset{-i}{X}_s(x_s)$, gdzie $a_s \leq x_s \leq b_s$

Ale stwierdzenie, że są to krzywe, zakłada przynajmniej ciągłość wszystkich (dla każdego $i \in I$) funkcji $\overset{-i}{X}_s(x_s)$. Założenia takiego nigdzie jednak nie robiliśmy i nigdzie nie było ono konieczne w dowodzie twierdzenia 1. Poza tym założenie takie sugeruje <u>konieczność</u> zinterpretowania wektora

(173) $\quad \overline{X}_s(x_s) \equiv \left[\overset{-1}{X}_s(x_s), \overset{-2}{X}_s(x_s), \ldots, \overset{-n}{X}_s(x_s)\right]$

jako krzywej. Nie ma jednak i tej potrzeby. Nie będziemy zatem w twierdzeniu 01 interpretować wektorów (173) $(s \in I)$ jako krzywych, ale będziemy je nazywali ogólnie tworami przestrzeni R^n (funkcje $\overset{-i}{X}_s(x_s)$ $(i \in I)$ są wszak z definicji funkcjami rzeczywistymi) określonymi przez zbiór $\overline{X}_s(x_s)$ (173); gdy x_s "przebiega" zbiór Ω_{x_s}.

Twory te mogą być zbiorami punktów izolowanych, krzywymi, powierzchniami (hiperpowierzchniami)itp. zależnie od charakteru zbiorów Ω_{x_s} i funkcji $\bar{X}^k_s(x_s)$ $(k\in I)$. Na przykład, gdy $x_s = (x,y)$, $\Omega_{x_s} = \Omega_x \times \Omega_y$, $\Omega_x = \{x\in R: a\leq x\leq b\}$, $\Omega_y = \{y\in R: c\leq y\leq d\}$, $(I = (1,2,3))$, a funkcje $\bar{X}^k_s$ $(k\in I)$ są ciągłe, to twór nasz (173) będzie powierzchnią.

Przy takiej interpretacji (173) przebieg dowodu twierdzenia 01 różniłby się tylko terminologią od toku dowodu twierdzenia 1.

Nadal warunek (20) (str. 10) oznacza, że punkty, tym razem nie krzywych, lecz tworów c_s $(s\in I)$ odpowiadające pewnym elementom x_s ("przebiegającego" dowolnie określony zbiór Ω_{x_s})$(s\in I)$ oraz początek układu 0, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ (punkt 0 układu R^n) leżą w jednej hiperpłaszczyźnie (w jednej metrycznej przestrzeni (n-1)- wymiarowej).

Po dokonanej w toku dowodu zamianie (21) (str. 10) układu współrzędnych (co można traktować także jako przekształcenie afiniczne) punkty tworów c_s (dla różnych s twory te mogą być całkiem różne) uprzednio współhiperpłaszczyznowe pozostana nadal współhiperpłaszczyznowymi (leżącymi w jednej przestrzeni (n-1)-wymiarowej).

Na dalszym toku dowodu twierdzenia 01 poczynione przez nas modyfikacje w stosunku do przebiegu dowodu twierdzenia 1 nie mają już żadnego znaczenia, gdyż ma on dalej charakter wyłącznie obliczeniowy.

Tak postawione zagadnienie ujęte w twierdzeniu 01 pozwala nam rozstrzygnąć problem nomograficzności funkcji w szerszym aspekcie. Możemy bowiem rozstrzygnąć na przykład problem przedstawialności funkcji rzeczywistej

(174) $$F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$$

zmiennych rzeczywistych u_i, gdzie

$$a_i \leqslant u_i \leqslant b_i \quad \text{dla każdego} \quad i = 1,2,3,4,5,6,7$$

rozumianej jako funkcja czterech zmiennych

$$x_1 = (u_3,u_4),\ x_2 = u_2,\ x_3 = (u_1,u_5,u_6),\ x_4 = u_7$$

Będziemy zatem rozstrzygać o przedstawialności rozpatrywanej funkcji w postaci

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7) \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \bar{X}_1^1(u_3,u_4) & \bar{X}_1^2(u_3,u_4) & \bar{X}_1^3(u_3,u_4) & \bar{X}_1^4(u_3,u_4) \\ \bar{X}_2^1(u_2) & \bar{X}_2^2(u_2) & \bar{X}_2^3(u_2) & \bar{X}_2^4(u_2) \\ \bar{X}_3^1(u_1,u_5,u_6) & \bar{X}_3^2(u_1,u_5,u_6) & \bar{X}_3^3(u_1,u_5,u_6) & \bar{X}_3^4(u_1,u_5,u_6) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{X}_4^1(u_7) & \bar{X}_4^2(u_7) & \bar{X}_4^3(u_7) & \bar{X}_4^4(u_7) \end{vmatrix}$$

W razie negatywnej odpowiedzi (przykład 4) możemy spróbować rozstrzygnąć przedstawialnoś tej samej funkcji $F(u_1,u_2,\dots,u_7)$ w innej postaci (S), gdzie na przykład

$$x_1 = (u_3,u_6,u_7),\ x_2 = (u_1,u_4,u_5),\ x_3 = (u_2,\cancel{u_7})\ \text{itp.}$$

Tego rodzaju badania ilustrują przykłady.

Przykłady

Przykład 1. Zbadamy, czy funkcja $(\Omega = R^5)$

(175) $$F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \equiv x_1x_2x_3 - x_4 - x_5$$

jest nomograficzna.

Niech $a = (1, 2, 3, 4, 5)$. Wówczas

$F_0 = F(1, 2, 3, 4, 5) = -3$

$X_1^1 = F(x_1, 2, 3, 4, 5) = 6x_1 - 9$, stąd $b_1 = 1,5$

$X_2^2 = F(1, x_2, 3, 4, 5) = 3x_2 - 9$, stąd $b_2 = 3$

$X_3^3 = F(1, 2, x_3, 4, 5) = 2x_3 - 9$, stąd $b_3 = 4,5$

$X_4^4 = F(1, 2, 3, x_4, 5) = 1 - x_4$, stąd $b_4 = 1$

$X_5^5 = F(1, 2, 3, 4, x_5) = 2 - x_5$, stąd $b_5 = 2$

Dalej mamy

$F_{12} = F(\frac{3}{2}, 3, 3, 4, 5) = 4,5$

$F_{13} = F(\frac{3}{2}, 2, \frac{9}{2}, 4, 5) = 4,5$

$F_{14} = F(\frac{3}{2}, 2, 3, 1, 5) = 3$

$F_{15} = F(\frac{3}{2}, 2, 3, 4, 2) = 3$

$F_{23} = F(1, 3, \frac{9}{2}, 4, 5) = 4,5$

$F_{24} = F(1, 3, 3, 1, 5) = 3$

$F_{25} = F(1, 3, 3, 4, 2) = 3$

$F_{34} = F(1, 2, \frac{9}{2}, 1, 5) = 3$

$F_{35} = F(1, 2, \frac{9}{2}, 4, 2) = 3$

$F_{45} = F(1, 2, 3, 1, 2) = 3$

Widzimy więc, że dla $a = (1,2,3,4,5)$ i $b = (\frac{3}{2}, 3, \frac{9}{2}, 1, 2)$ są spełnione założenia (11)-(13). Dalej mamy:

$F_{123} = F(\frac{3}{2}, 3, \frac{9}{2}, 4, 5) = 11,25$

$F_{124} = F(\frac{3}{2}, 3, 3, 1, 5) = 7,5$

$F_{125} = F(\frac{3}{2}, 3, 3, 4, 2) = 7,5$

$F_{134} = F(\frac{3}{2}, 2, \frac{9}{2}, 1, 5) = 7,5$

$F_{135} = F(\frac{3}{2}, 2, \frac{9}{2}, 4, 2) = 7,5$

$F_{145} = F(\frac{3}{2}, 2, 3, 1, 2) = 6$

$F_{234} = F_{235} = 7{,}5; \quad F_{245} = F_{345} = 6$

Stosując wzór (4) wyznaczamy pozostałe funkcje $X_k^i(x_k)$ dla $i,k \in \{1,2,3,4,5\}$:

$X_1^2 = F(x_1,\ 3,\ 3,\ 4,\ 5) = 9(x_1 - 1)$

$X_1^3 = F(x_1,\ 2,\ \frac{9}{2},\ 4,\ 5) = 9(x_1 - 1)$

$X_1^4 = F(x_1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 5) = 6(x_1 - 1)$

$X_1^5 = F(x_1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 2) = 6(x_1 - 1)$

$X_2^1 = X_2^3 = \frac{9}{2}(x_2 - 2); \quad X_2^4 = X_2^5 = 3(x_2 - 2)$

$X_3^1 = X_3^2 = 3(x_3 - 3); \quad X_3^4 = X_3^5 = 2(x_3 - 3)$

$X_4^1 = X_4^2 = X_4^3 = X_4^5 = -1(x_4 - 4)$

$X_5^1 = X_5^2 = X_5^3 = X_5^4 = -1(x_5 - 5)$

Obliczymy wartości T_{kli} i T_{kli} występujące w wyznaczniku (18) dla s = 1 (postać (62)) zgodnie ze wzorami (14)-(15):

$$\begin{cases} T_{231} + T_{312} = F_{123} = \frac{45}{4} \\ T_{231}\, T_{312} = -\frac{F_{12}F_{13}F_{23}}{F_0} = \frac{243}{8}. \end{cases}$$

stąd

$$\begin{cases} T_{231} = \frac{27}{4} \\ T_{312} = \frac{9}{2} \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} T_{231} = \frac{9}{2} \\ T_{312} = \frac{27}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_{241} + T_{412} = F_{124} = \frac{15}{2} \\ T_{241}\, T_{412} = -\frac{F_{12}F_{14}F_{24}}{F_0} = \frac{27}{2} \end{cases}$$

stąd

$$\begin{cases} T_{241} = \frac{9}{2} \\ T_{412} = 3 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} T_{241} = 3 \\ T_{412} = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_{251} + T_{512} = F_{125} = \frac{15}{2} \\ T_{251}\, T_{512} = -\dfrac{F_{12}F_{15}F_{25}}{F_0} = \frac{27}{2} \end{cases}$$

stąd

$$\begin{cases} T_{251} = \frac{9}{2} \\ T_{512} = 3 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} T_{251} = 3 \\ T_{512} = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_{341} + T_{413} = F_{134} = \frac{15}{2} \\ T_{341}\, T_{413} = -\dfrac{F_{13}F_{14}F_{34}}{F_0} = \frac{27}{2} \end{cases}$$

stąd

$$\begin{cases} T_{341} = \frac{9}{2} \\ T_{413} = 3 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} T_{341} = 3 \\ T_{413} = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_{351} + T_{513} = F_{135} = \frac{15}{2} \\ T_{351}\, T_{513} = -\dfrac{F_{13}F_{15}F_{35}}{F_0} = \frac{27}{2} \end{cases}$$

stąd

$$\begin{cases} T_{351} = \frac{9}{2} \\ T_{513} = 3 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} T_{351} = 3 \\ T_{513} = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_{451} + T_{514} = F_{145} = 6 \\ T_{451}\, T_{514} = -\dfrac{F_{14}F_{15}F_{45}}{F_0} = 9 \end{cases}$$

(176) stąd $T_{451} = T_{514} = 3$

$$\begin{cases} T_{453} + T_{534} = F_{345} = 6 \\ T_{453}\, T_{534} = -\dfrac{F_{34}F_{35}F_{45}}{F_0} = 9 \end{cases}$$

(177) stąd $T_{453} = T_{534} = 3$

$$\begin{cases} T_{452} + T_{524} = F_{245} = 6 \\ T_{452}\, T_{524} = -\dfrac{F_{24}F_{25}F_{45}}{F_0} = 9 \end{cases}$$

(178) stąd $T_{452} = T_{524} = 3$

$$\begin{cases} T_{352} + T_{523} = F_{235} = \dfrac{15}{3} \\ T_{352}\, T_{523} = -\dfrac{F_{23}F_{25}F_{35}}{F_0} = \dfrac{27}{2} \end{cases}$$

(179) stąd $\begin{cases} T_{352} = \dfrac{9}{2} \\ T_{523} = 3 \end{cases}$ lub $\begin{matrix} T_{352} = 3 \\ T_{523} = \dfrac{9}{2} \end{matrix}$

$$\begin{cases} T_{342} + T_{423} = F_{234} = \dfrac{15}{2} \\ T_{342}\, T_{423} = -\dfrac{F_{23}F_{24}F_{34}}{F_0} = \dfrac{27}{2} \end{cases}$$

(180) stąd $\begin{cases} T_{342} = \dfrac{9}{2} \\ T_{523} = 3 \end{cases}$ lub $\begin{matrix} T_{342} = 3 \\ T_{523} = \dfrac{9}{2} \end{matrix}$

Wykorzystajmy równości (16)-(17):

(181) $T_{341}T_{451}T_{513}T_{534} = T_{413}T_{351}T_{514}T_{453}$

(182) $T_{241}T_{451}T_{512}T_{524} = T_{412}T_{251}T_{514}T_{452}$

(183) $T_{231}T_{351}T_{512}T_{523} = T_{312}T_{251}T_{513}T_{352}$

(184) $T_{231}T_{341}T_{412}T_{423} = T_{312}T_{241}T_{413}T_{342}$

Wstawiając do równości (181)-(182) wartości (176)-(180) otrzymujemy

(185) $T_{341}T_{513} = T_{413}T_{351}$

(186) $T_{241}T_{512} = T_{412}T_{251}$

Dla równości (183)-(186) uwzględniając (175_1)-(180) znajdujemy następujące rozwiązanie:

$$
(187)\quad \begin{cases} T_{513} = T_{512} = T_{412} = T_{413} = T_{342} = 3 \\ T_{351} = T_{251} = T_{241} = T_{341} = T_{423} = T_{231} = 4{,}5 \\ T_{312} = \frac{27}{4} \end{cases}
$$

Wówczas otrzymujemy następującą postać (18) (dla $s = 1$) lub (62) odpowiadającą funkcji $F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$:

$$
M_1 = -\frac{F_{12}F_{13}F_{14}F_{15}}{(F_0)^3} = \frac{27}{4}
$$

$$
(188)\qquad \det W_1 \equiv
$$

$$
\equiv \begin{vmatrix} \frac{6(x_1-1{,}5)}{3} & \frac{9(x_1-1)}{4{,}5} & \frac{9(x_1-1)}{4{,}5} & \frac{6(x_1-1)}{3} & \frac{6(x_1-1)}{3} \\ \frac{4{,}5(x_2-2)}{4{,}5} & \frac{3(x_2-3)}{4{,}5} & \frac{4{,}5(x_2-2)}{T_{312}} & \frac{9(x_2-2)}{T_{412}} & \frac{3(x_2-2)}{T_{512}} \\ \frac{3(x_3-3)}{4{,}5} & \frac{3(x_3-3)}{T_{231}} & \frac{2(x_3-4{,}5)}{4{,}5} & \frac{2(x_3-3)}{T_{413}} & \frac{2(x_3-3)}{T_{513}} \\ \frac{4-x_4}{3} & \frac{4-x_4}{T_{241}} & \frac{4-x_4}{T_{341}} & \frac{1-x_4}{3} & \frac{4-x_4}{3} \\ \frac{5-x_5}{3} & \frac{5-x_5}{T_{251}} & \frac{5-x_5}{T_{351}} & \frac{5-x_5}{3} & \frac{2-x_5}{3} \end{vmatrix}
$$

Wstawiając odpowiednie wartości z (187) do wyznacznika (188) i wykonując odpowiednie działania otrzymamy

$$
\det W_1 \equiv \frac{4}{27}(x_1x_2x_3 - x_4 - x_5)
$$

A zatem

$$
F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \equiv M_1 \det W_1 \equiv x_1x_2x_3 - x_4 - x_5
$$

Rozpatrywana przez nas funkcja (175) jest funkcją nomograficzną i postać (183) jest jedną z jej przedstawień w postaci Soreau. Inne jej przedstawienie w postaci Soreau uzyskamy korzystając z twierdzenia 3. Spełnione są bowiem założenia twierdzenia 3:

$$\dim \{X_i^1, X_i^2, X_i^3, X_i^4, X_i^5\} = 2$$

dla każdego $i \in I$

Zatem drugim "symetrycznym" w sensie twierdzenia 3 przedstawieniem badanej funkcji w postaci Soreau jest postać (183), gdzie zamiast warunków (187) będziemy mieli

$$(189)\qquad \begin{cases} T_{312} = T_{412} = T_{512} = T_{413} = T_{513} = 4{,}5 \\ T_{241} = T_{341} = T_{251} = T_{351} = 3 \\ T_{231} = \dfrac{27}{4} \end{cases}$$

Przykład 2. Niech $\Omega_{x_i} = \{A_i, B_i\}$ $(\overline{\overline{\Omega}}_{x_i} = 2)$ dla każdego $i = 1,2,3$.

Zgodnie z definicją (str. 3): $\Omega = \Omega_{x_1} \times \Omega_{x_2} \times \Omega_{x_3}$, $(\overline{\overline{\Omega}} = 2^3)$.

Niech funkcja rzeczywista $F(x_1, x_2, x_3)$ będzie dana następująco:

$$(190)\qquad \begin{cases} F(A_1,A_2,A_3) = R_0 \neq 0, & F(B_1,B_2,A_3) = R_{12} \neq 0 \\ F(A_1,A_2,B_3) = 0, & F(B_1,A_2,B_3) = R_{13} \neq 0 \\ F(A_1,B_2,A_3) = 0, & F(A_1,B_2,B_3) = R_{23} \neq 0 \\ F(B_1,A_2,A_3) = 0, & F(B_1,B_2,B_3) = R_{123} \end{cases}$$

Wykażemy, że powyższa funkcja $F(x_1, x_2, x_3)$ jest nomograficzna.

Niech $a = (A_1, A_2, A_3)$. Wówczas

$$F_0 = F(A_1, A_2, A_3) = R_0 \neq 0$$

$$X_1^1 = F(x_1,A_2,A_3) = \begin{cases} F_0 & \text{dla } x_1 = A_1 \\ 0 & \text{dla } x_1 = B_1 \end{cases} \quad \text{stąd} \quad b_1 = B_1$$

$$X_2^2 = F(A_1,x_2,A_3) = \begin{cases} F_0 & \text{dla } x_2 = A_2 \\ 0 & \text{dla } x_2 = B_2 \end{cases} \quad \text{stąd} \quad b_2 = B_2$$

$$X_3^3 = F(A_1,A_2,x_3) = \begin{cases} F_0 & \text{dla } x_3 = A_3 \\ 0 & \text{dla } x_3 = B_3 \end{cases} \quad \text{stąd} \quad b_3 = B_3$$

Dalej mamy

$$F_{12} = F(B_1,B_2,A_3) = R_{12} \neq 0$$

$$F_{13} = F(B_1,A_2,B_3) = R_{13} \neq 0$$

$$F_{23} = F(A_1,B_2,B_3) = R_{23} \neq$$

Widzimy więc, że dla $a = (A_1,A_2,A_3)$ i $b = (B_1,B_2,B_3)$ spełnione są założenia (11)-(13). Dalej mamy: $F_{123} = F(B_1,B_2,B_3) = R_{123}$ (dowolna liczba rzeczywista).

Stosując wzór (4) wyznaczam pozostałe funkcje $X_k^i(x_k)$ dla $i,k \in \{1,2,3\}$):

$$X_1^2 = F(x_1,B_2,A_3) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x_1 = A_1 \\ F_{12} & \text{dla } x_1 = B_1 \end{cases}$$

$$X_1^3 = F(x_1,A_2,B_3) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x_1 = A_1 \\ F_{13} & \text{dla } x_1 = B_1 \end{cases}$$

$$X_2^1 = F(B_1,x_2,A_3) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x_2 = A_2 \\ F_{12} & \text{dla } x_2 = B_2 \end{cases}$$

$$X_2^3 = F(A_1,x_2,B_3) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x_2 = A_2 \\ F_{23} & \text{dla } x_2 = B_2 \end{cases}$$

$$X_3^1 = F(B_1, A_2, x_3) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x_2 = A_2 \\ F_{13} & \text{dla} \quad x_3 = B_3 \end{cases}$$

$$X_3^2 = F(A_1, B_2, x_3) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x_3 = A_3 \\ F_{23} & \text{dla} \quad x_3 = B_3 \end{cases}$$

Obliczam wartości T_{312} i T_{231} (lub krócej, T_2 i T_1) występujace np. w wyznaczniku (18) dla $s = 1$ (postać (110_1)) zgodnie z wzorami (14)-(15):

$$\text{(191)} \qquad \begin{cases} T_1 + T_2 = F_{123} \\ T_1 \, T_2 = - \dfrac{F_{12}F_{13}F_{23}}{F_0} \end{cases}$$

lub

$$T^2 - F_{123}\, T - \frac{F_{12}F_{13}F_{23}}{F_0} = 0$$

$$\text{(192)} \qquad \Delta = (F_{123})^2 + 4\,\frac{F_{12}F_{13}F_{23}}{F_0}$$

Wartość Δ może przyjmować wartości ujemne, zatem rozwiązanie równania (192) mogą być liczbami zespolonymi.

Łatwo zauważyć, że dla każdego $i = 1,2,3$ zachodzi

$$\dim \left\{ X_i^1,\ X_i^2,\ X_i^3 \right\} = 2$$

Zatem na podstawie lematu 7 oba wyznaczniki postaci (126) są sobie równe. Czyli oba rozwiązania równania (   )

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{2}\left(F_{123} \pm \sqrt{(F_{123})^2 + 4\,\dfrac{F_{12}F_{13}F_{23}}{F_0}}\right. \\ T_2 = \frac{1}{2}\left(F_{123} \mp \sqrt{(F_{123})^2 + 4\,\dfrac{F_{12}F_{13}F_{23}}{F_0}}\right. \end{cases}$$

są dopuszczalne.

Aby sprawdzić tożsamość (110_1), należy sprawdzić ją dla wszystkich 8 elementów zbi Ω. Rzeczywiście, tożsamość (110_1) zachodzi dla wszystkich tych punktów. Sprawdzimy przykładowo kilka z nich (wykorzystując (191)):

$$F(A_1,A_2,A_3) = -\frac{F_{12}F_{13}}{F_0}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{F_0}{F_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F_0}{F_{13}} \end{vmatrix} = F_0 = R_0$$

$$F(A_1,B_2,A_3) = -\frac{F_{12}F_{13}}{F_0}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{F_{23}}{T_1} \\ 0 & 0 & \frac{F_0}{F_{13}} \end{vmatrix} = 0$$

$$F(B_1,B_2,A_3) = -\frac{F_{12}F_{13}}{F_0}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{F_{23}}{T_1} \\ 0 & 0 & \frac{F_0}{F_{13}} \end{vmatrix} = F_{12} = R_{12}$$

$$F(B_1,B_2,B_3) = -\frac{F_{12}F_{13}}{F_0}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{F_{23}}{T_1} \\ 1 & \frac{F_{23}}{T_2} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{F_{12}F_{13}}{F_0}\left(\frac{F_{23}}{T_1} + \frac{F_{23}}{T_2}\right) =$$

$$= -\frac{F_{12}F_{13}F_{23}}{F_0}\;\frac{T_1 + T_2}{T_1T_2} = F_{123} = R_{123}$$

(R_{123} - dowolna liczba rzeczywista) .

Wykazaliśmy zatem nomograficzność funkcji danej wzorami ( ).

Przykład 3. Zbadamy, czy funkcja ($\Omega = R^4$)

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4) \equiv 8x_1x_2x_3x_4 - 4(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) - (x_1+x_2+x_3+x_4) + 1 \tag{193}$$

jest nomograficzna.

Niech $a = (0, 0, 0, 0)$. Wówczas

$$F_0 = F(0, 0, 0, 0) = 1$$

$X_1^1 = F(x_1, 0, 0, 0) = 1 - x_1$, stąd $b_1 = 1$

$X_2^2 = F(0, x_2, 0, 0) = 1 - x_2$, stąd $b_2 = 1$

$X_3^3 = F(0, 0, x_3, 0) = 1 - x_3$, stąd $b_3 = 1$

$X_4^4 = F(0, 0, 0, x_4) = 1 - x_4$, stąd $b_4 = 1$

Dalej mamy

$$F_{12} = F(1, 1, 0, 0) = 1$$

$$F_{13} = F(1, 0, 1, 0) = 1$$

$$F_{14} = F(1, 0, 0, 1) = 1$$

$$F_{23} = F(0, 1, 1, 0) = 1$$

$$F_{24} = F(0, 1, 0, 1) = 1$$

$$F_{34} = F(0, 0, 1, 1) = 1$$

Widzimy więc, że dla $a = (0,0,0,0)$ i $b = (1,1,1,1)$ spełnione są założenia (11)-(13). Dalej mamy:

$$F_{123} = F(1, 1, 1, 0) = 0$$

$$F_{124} = F(1, 1, 0, 1) = 0$$

$$F_{134} = F(1, 0, 1, 1) = 0$$

$$F_{234} = F(0, 1, 1, 1) = 0$$

Stosując wzór (4) wyznaczymy pozostałe funkcje $X_k^i(x_k)$ dla $i,k \in \{1,2,3,4\}$):

$$X_1^2 = X_1^3 = X_1^4 = x_1$$
$$X_2^1 = X_2^3 = X_2^4 = x_2$$
$$X_3^1 = X_3^2 = X_3^4 = x_3$$
$$X_4^1 = X_4^2 = X_4^3 = x_4$$

Obliczymy wartości T_{kil} i T_{kil} występujące w wyznaczniku (18) dla $s = 1$ (postać (62)) zgodnie z wzorami (14)-(15):

$$\begin{cases} T_{231} + T_{312} = F_{123} = 0 \\ T_{231}T_{312} = -\dfrac{F_{12}F_{13}F_{23}}{F_0} = -1 \end{cases}$$

stąd
$$\begin{cases} T_{231} = 1 \\ T_{312} = -1 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} T_{231} = -1 \\ T_{312} = 1 \end{cases}$$

I ogólnie

$$\begin{cases} T_{kil} + T_{ilk} = 0 \\ T_{kil}T_{ilk} = -1 \end{cases}$$

stąd

$$\begin{cases} T_{kil} = 1 \\ T_{ilk} = -1 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} T_{kil} = -1 \\ T_{ilk} = 1 \end{cases}$$

dla każdego $i,k \in \{2,3,4\}$ $(k < i)$.

Wykorzystajmy równanie (16)-(17):

(194) $T_{231}\,T_{412}\,T_{341}\,T_{423} = 1$

(195) $T_{312}\,T_{241}\,T_{413}\,T_{342} = 1$

Wybierzmy rozwiązanie

$$T_{412} = T_{312} = T_{413} = T_{423} = -1$$

$$T_{241} = T_{231} = T_{341} = T_{342} = 1$$

Budując dla tych rozwiązań odpowiednią ($s = 1$) postać (18) lub (62) otrzymamy

$$M_1 = -\frac{F_{12}F_{13}F_{14}}{(F_0)^2} = -1$$

$$\det W_1 = \begin{vmatrix} x_1-1 & x_1 & x_1 & x_1 \\ x_2 & 1-x_2 & -x_2 & -x_2 \\ x_3 & x_3 & 1-x_3 & -x_3 \\ x_4 & x_4 & x_4 & 1-x_4 \end{vmatrix}$$

Po wykonaniu odpowiednich działań otrzymamy

$$M_1 \det W_1 \equiv F(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

A zatem badana funkcja ( ) jest rzeczywiście nomograficzna. Rozpatrywany przykład pokazuje, że funkcja $F(x_1,x_2,x_3,x_4)$ nie musi przyjmować na wszystkich wierzchołkach kostki (z wyjątkiem czterech - F_1, F_2, F_3, F_4 (wzór (13)) równych zeru) wartości różnych od zera. Podobnie, pokazaliśmy to dla funkcji $F(x_1,x_2,x_3)$ w poprzednim przykładzie (R_{123} - dowolna liczba rzeczywista).

Przykład 4. Przykład ten zilustruje twierdzenie 01 (część IV). Niech będzie dana funkcja określona na zbiorze $D = \bigtimes_{i=1}^{i=5} D_i = R^5$:

$$S(s_1,s_2,s_3,s_4,s_5) = s_3 - s_4 - s_1s_2s_4 - s_1s_3s_5 + s_1s_4s_5 +$$

(196) $$- s_2s_3s_5 + s_2s_4s_5 + s_1s_2s_3s_5$$

Traktując tę funkcję jako funkcję następujących trzech zmiennych

(197) $$x_1 = s_1, \quad x_2 = (s_2, s_3), \quad x_3 = (s_4, s_5)$$

gdzie
$$\Omega_{x_1} = D_1 = R, \quad \Omega_{x_2} = D_2 \times D_3 = R^2,$$
$$\Omega_{x_3} = D_4 \times D_5 = R^2$$

sprawdźmy, czy jest ona nomograficzna.

Niech $a_1 = 1$, $a_2 = (2, 3)$, $a_3 = (4, 5)$. Zatem

$$F_0 = F(a_1, a_2, a_3) = S(1, 2, 3, 4, 5) = 36$$
$$X_1^1 = F(x_1, a_2, a_3) = S(s_1, 2, 3, 4, 5) = 27s_1 + 9$$
$$X_2^2 = F(a_1, x_2, a_3) = S(1, s_2, s_3, 4, 5) = 16s_2 - 4s_3 + 16$$
$$X_3^3 = F(a_1, a_2, x_3) = S(1, 2, 3, s_4, s_5) = 3(s_4 - 1)(s_5 - 1)$$

Stąd $b_1 = -\frac{1}{3}$, $b_2 = (1, 8)$, $b_3 = (1, 0)$.

Dalej mamy:

$$F_{12} = F(b_1, b_2, a_3) = S(-\frac{1}{3}, 1, 8, 4, 5) = -\frac{64}{3}$$
$$F_{13} = F(b_1, a_2, b_3) = S(-\frac{1}{3}, 2, 3, 1, 0) = \frac{8}{3}$$
$$F_{23} = F(a_1, b_2, b_3) = S(1, 1, 8, 1, 0) = 6$$

Widzimy więc, że dla $a = (1, 2, 3, 4, 5)$, $b = (-\frac{1}{3}, 1, 8, 1, 0)$ spełnione są założenia (11)-(13). Dalej mamy

$$F_{123} = F(b_1, b_2, b_3) = S(-\frac{1}{3}, 1, 8, 1, 0) = \frac{22}{3}$$

Stosując wzór (4) obliczamy pozostałe funkcje $X_k^i(x_k)$ dla i,k 1, 2, 3):

$$X_1^2 = F(x_1, b_2, a_3) = S(s_1, 1, 8, 4, 5) = 16(s_1 - 1)$$
$$X_1^3 = F(x_1, a_2, b_3) = S(s_1, 2, 3, 1, 0) = 2(1 - s_1)$$
$$X_2^1 = F(b_1, x_2, a_3) = S(-\frac{1}{3}, s_2, s_3, 4, 5) = \frac{4}{3}(2s_3 + 16s_2 - 5s_2s_3 - 8)$$
$$X_2^3 = F(a_1, x_2, b_3) = S(1, s_2, s_3, 1, 0) = s_3 - s_2 - 1$$

$$x_3^1 = F(b_1, a_2, x_3) = S(-\frac{1}{3}, 2, 3, s_4, s_5) =$$
$$= \frac{1}{3}(9 - s_4 - 21s_5 + 5s_4s_5)$$
$$x_3^2 = F(a_1, b_2, x_3) = S(1,1,8,s_4,s_5) = 2(4 - s_4 - 4s_5 + s_4s_5)$$

Otrzymujemy układ (14)-(15)

$$\begin{cases} T_{231} + T_{312} = F_{123} = \frac{22}{3} \\ T_{231}T_{312} = -\frac{F_{12}F_{13}F_{23}}{F_0} = \frac{656}{27} \end{cases}$$

Okazuje się, że dla obu rozwiązań T_{231}; T_{312} postać (18) ($s = 1$) (lub (110_1)) odpowiadająca badanej funkcji $S(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ nie jest z nią tożsama:

$$M_1 = -\frac{F_{12}F_{13}}{F_0} = \frac{128}{81}$$

$$\det W_1 =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{27s_1 + 9}{-36} & \frac{16(s_1 - 1)}{-64/3} & \frac{2(1 - s_1)}{8/3} \\ \frac{4/3(2s_3 + 16s_2 - 5s_2s_3 - 8)}{-64/3} & \frac{16s_2 - 4s_3 + 16}{-64/3} & \frac{s_3 - s_2 - 1}{T_{312}} \\ \frac{1/3(9 - s_4 - 21s_5 + 5s_4s_5)}{9/3} & \frac{2(s_4 - 4)(s_5 - 1)}{T_{231}} & \frac{3(s_4 - 1)(s_5 - 1)}{8/3} \end{vmatrix}$$

Po wykonaniu odpowiednich działań okazuje się; że

$$M_1 \det W_1 \not\equiv S(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$$

Zatem na mocy twierdzenia 01 funkcja $S(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6)$ traktowana jako funkcja trzech zmiennych $x_1 = s_1$, $x_2 = (s_2, s_3)$, $x_3 = (s_4, s_5)$ nie jest funkcją nomograficzną.

<u>Przykład 5</u>. Sprawdzimy, czy ta sama funkcja $S(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ (wzór (196)) traktowana tym razem jako funkcja trzech następują-

cych zmiennych

$$(198)\quad x_1 = (s_1, s_2),\quad x_2 = (s_3, s_4),\quad x_3 = s_5$$

jest funkcją nomograficzną.

Niech $a_1 = (2, -1)$, $a_2 = (2, 3)$, $a_3 = -1$. Zatem

$$F_0 = F(a_1, a_2, a_3) = S(2, -1, 2, 3, -1) = 8$$

$$X_1^1 = F(x_1,a_2,a_3) = S(s_1,s_2,2,3,-1) = -5s_1s_2 - s_1 - s_2 - 1$$

$$X_2^2 = F(a_1,x_2,a_3) = S(2,-1,s_3,s_4,-1) = 4s_3$$

$$X_3^3 = F(a_1,a_2,x_3) = S(2,-1,2,3,s_5) = 5 - 3s_5$$

stąd $b_1 = (-2, -\frac{1}{9})$, $b_2 = (0, 9)$, $b_3 = \frac{5}{3}$.

Dalej mamy

$$F_{12} = F(b_1,b_2,a_3) = S(-2, -\frac{1}{9}, 0, 9, -1) = 8$$

$$F_{13} = F(b_1,a_2,b_3) = S(-2, -\frac{1}{9}, 2, 3, \frac{5}{3}) = -\frac{40}{9}$$

$$F_{23} = F(a_1,b_2,b_3) = S(2, -1, 0, 9, \frac{5}{3}) = 24$$

Widzimy więc, że dla $a = (2, -1, 2, 3, -1)$ i $b = (-2, -\frac{1}{9}, 0, 9, \frac{5}{3})$ spełnione są założenia (11)-(13). Dalej mamy

$$F_{123} = F(b_1,b_2,b_3) = S(-2, \frac{1}{9}, 0, 9, \frac{5}{3}) = -\frac{128}{3}$$

Stosując wzór (4) obliczamy pozostałe funkcje $X_k^i(x_k)$ $(i,k \in \{1,2,3\})$:

$$X_1^2 = F(x_1,b_2,a_3) = S(s_1,s_2,0,9,-1) = -9(s_1s_2 + s_1 + s_2 + 1)$$

$$X_1^3 = F(x_1,a_2,b_3) = S(s_1,s_2,2,3, \frac{5}{3}) =$$

$$= \frac{1}{3}(s_1s_2 + 5s_1 + 5s_2 - 3)$$

$$X_2^1 = F(b_1,x_2,a_3) = S(-2, -\frac{1}{9}, s_3,s_4,-1) = \frac{4}{9}(2s_4 - 3s_3)$$

$$X_2^3 = F(a_1,x_2,b_3) = S(2,-1, s_3,s_4, \frac{5}{4}) = \frac{4}{3}(2s_4 - 3s_3)$$

$$X_3^1 = F(b_1,a_2,x_3) = S(-2, -\frac{1}{9}, 2, 3, s_5) = -\frac{5}{3}(s_5 + 1)$$

$$X_3^2 = F(a_1,b_2,x_3) = S(2,-1,0,9,s_5) = 9(s_5+1)$$

Otrzymujemy układ (14)-(15):

$$\begin{cases} T_{231} + T_{312} = F_{123} = -\dfrac{128}{3} \\ T_{231}T_{312} = -\dfrac{F_{12}F_{13}F_{23}}{F_0} = \dfrac{320}{3} \end{cases}$$

stąd

(198)
$$\begin{cases} T_{231} = -40 \\ T_{312} = -\dfrac{8}{3} \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} T_{231} = -\dfrac{8}{3} \\ T_{312} = -40 \end{cases}$$

Mamy:

$$\dim \left\{X_2^1, X_2^2, X_2^3\right\} = 2$$

$$\dim \left\{X_3^1, X_3^2, X_3^3\right\} = 2$$

ale

$$\dim \left\{X_1^1, X_1^2, X_1^3\right\} = 3.$$

Zatem na podstawie twierdzenia 7 tylko jedna para rozwiązań jest dopuszczalny. Wówczas otrzymujemy następującą postać (18) (dla s = 1) (lub (110_1)):

$$M_1 = -\frac{F_{12}F_{13}}{F_0} = \frac{40}{9}$$

(199) $\det W_1 =$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{-5s_1s_2-s_1-s_2-1}{-8} & \dfrac{-9(s_1s_2+s_1+s_2+1)}{8} & \dfrac{1/3(s_1s_2+5s_1+5s_2-3}{-40/9} \\ \dfrac{4/9(2s_4-3s_3)}{8} & \dfrac{4s_3}{8} & \dfrac{4/3(2s_4-3s_3}{T_{312}} \\ \dfrac{-5/3(s_5+1)}{-40/9} & \dfrac{9(s_5+1)}{T_{231}} & \dfrac{5-3s_5}{-40/9} \end{vmatrix}$$

Rozwiązanie (198) $T_{312} = -8/3$, $T_{231} = -40$ nie jest dobre. Ale dla (198): $T_{231} = -8/3$, $T_{312} = -40$ $\det W_1$ (199) przekształca się do postaci

$$(200)\ \det W_1 = \begin{vmatrix} s_1+s_2 & 1 & s_1s_2 \\ s_3 & s_4 & s_3-s_4 \\ 1 & s_5 & 0 \end{vmatrix}$$

która po odpowiednich przekształceniach jest tożsamościowo równa badanej funkcji $S(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$. (196).

Zatem wykazaliśmy nomograficzność funkcji $S(s_1,s_2,s_3,s_4,s_5)$ traktowanej jako funkcja trzech zmiennych (198_1) $x_1 = (s_1,s_2)$, $x_2 = (s_3,s_4)$, $x_3 = s_5$.

Literatura

1. E. Otto: Nomografia BM24. Warszawa 1964.
2. M. Czyżykowski: Kryteria nomogramowalności funkcji czterech zmiennych. Zesz. nauk. PWarsz. nr 83 Matematyka nr 1, 1964.
3. M. Warmus: Nomographic functions. Rozpr. matem. 1959.
4. E. Duporcq: Sur la théorie des abaques à alignements. Comptes Rendus 127, 1898.
5. A. Mostowski, M. Stark: Elementy algebry wyższej, BM16. Warszawa 1958.
6. J. Wojtowicz: Metody sprowadzania równań czwartego i piątego rzędu nomograficznego do postaci kanonicznej. Zast. Matem. 1960.
7. J. Wojtowicz: Sprowadzanie równań do postaci kanonicznych. Równania czwartego rzędu nomograficznego z czterema zmiennymi. Zast. Matem. 1960.

8. J. Wojtowicz: O sprowadzaniu równań z czterema zmiennymi do postaci kanonicznej Cauchy'ego z czterema zmiennymi. Zast. Matem. 1961.

9. J. Wojtowicz: O sprowadzaniu równania g(v) = F(u,w) do postaci kanonicznej Cauchy'ego. Zast. Matem. 1963.

10. E. Stegienka: O sprowadzaniu równania z czterema zmiennymi do dwu postaci kanonicznych, dla których istnieją nomogramy z transparentem. Rozpr. dokt. Gdynia 1967.

11. A. Haman: O sprowadzaniu funkcji do I postaci kanonicznej wielomianu nomograficznego rzędu n o n zmiennych. Zesz. nauk. PWarsz. nr 119 Matematyka nr 6, 1965.

12. A. Adamski: O przedstawialności funkcji n zmiennych w postaci sumy, iloczynu i iloczynu sum (w druku).

13. G.S. Chowanski: Nomogramy s orientirowannym transparantom. Miskwa 1957.

14. G.S. Chowanski: Mietody nomografirowanija. Moskwa 1967.

15. G.A. Mazajewa: O priwiedienii urawnienija s piatiu pieriemiennymi k niekatorym kanoniczeskim formam. Nomograficzeskij sbornik nr 5, 1968.

16. J.I. Bogolubow: O priedstawimosti sistiemy dwuch urawnienij s szestiu pieriemiennymi w widie $A_{rh} = A_{ij} + A_{pq}$, $B_{rh} = B_{ij} + B_{pq}$ dopuskajuszczem pastrojenije nomogram s prozracznym orientirowannym transparantom. Nomograficzeskij sbornik nr 7, 1970.

17. Nguen Szi Tuen: O razjedinienii pieriemiennych w urawnienii so mnogimi pieriemiennymi. Nomograficzeskij sbornik nr 8, 1971.