ROZDZIAŁ V.

Rozwiązywanie równań kwaternionowych.

76. Przy rozwiązywaniu rozmaitych zadań za pomocą kwaternionów zachodzi często potrzeba rozwiązywania równań, w których niewiadome są kwaternionami lub wektorami (porówn § 62,3). Otóż rozwiązywanie podobnych równań przedstawia pewne trudności, pochodzące ztąd, że mnożenie kwaternionów nie podlega prawu przemiennościowemu. Tak np. równanie

$$aq+qb=c,$$

gdzie a i b oznaczają kwaterniony wiadome, q zaś kwaternion niewiadomy nie możemy, wogólności mówiąc, rozwiązać pisząc $(a+b)q=c$. *Hamilton*, to równanie rozwiązuje w sposób następujący:

Mnożąc dane równanie przez Ka, następnie b przez dane równanie otrzymuje

$$Ka.aq+Ka.qb=Ka.c$$

czyli

$$(Ta)^2q+Ka.qb=Ka.c$$

i

$$aqb+qb^2=cb$$

Dodając do siebie ostatnie i pierwsze z tych trzech równań otrzymamy

$$q.(Ta)^2+(Ka+a)qb+qb^2=Ka\,c+cb,$$

czyli

$$q[(Ta)^2+2Sa.qb+b^2]=Ka.c+cb,$$

ztąd bardzo łatwo otrzymać q.

Przykład ten dowodzi już, że należy zastosować szczególne metody dla rozwiązywania równań kwaternionowych.

Ponieważ iloczyny aqb i bqa nie są w ogólności równemi, więc ogólnym kształtem równań linijnych kwaternionowych będzie

$$\Sigma_n a_n q b_n = c.$$

Równania stopnia drugiego obok wyrazów aq^2, q^2b, aq^2b mogą jeszcze zawierać wyrazy $aqbqc$, więc ogólnym kształtem równań stopnia drugiego będzie

$$\sum_n a_n q b_n q c_n + \sum_m d_m q c_m = k.$$

Można też łatwo widzieć, jaki będzie ogólny kształt równania stopnia n-go. Dla rozwiązania takiego równania możnaby było wszystkie wiadome kwaterniony wchodzące w skład tego równania przedstawić w kształcie $\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$, niewiadomy zaś kwaternion w kształcie $q=x_0+x_1 i+x_2 j+x_3 k$. Porównywając ze sobą współczynniki jednostek i, j, k, i ilości od tych jednostek niezależne, otrzymamy cztery równania stopnia n z czterema niewiadomemi x_0, x_1, x_2, x_3. Równania te prowadzą do równania stopnia n^4. Sprzeciwiałoby się jednakże zastosowaniu rachunku kwaternionów do geometryi, gdybyśmy rozwiązanie równań podobnego rodzaju redukowali do wyznaczenia czterech współczynników, gdyż takie rozwiązanie nic dałoby bezpośrednio znaczenia geometrycznego otrzymanych wypadków. Z tego to powodu *Hamilton* podał metody rozwiązywania równań linijnych i kwadratowych opierając się na wyznaczeniu skalaru i wektoru szukanego kwaternionu. Metody te są bardzo skomplikowanemi i nadzwyczaj dowcipnemi (Lectures on Quat. § 559 i 631). Metod tych w całej rozciągłości podać nie możemy i ograniczać się musimy na równaniach linijnych w formie podanej przez *Taita* (Element. Treatise of Quater. Rozdział V).

77. Nim przystąpimy do rozwiązywania równań kwaternionowych, musimy jeszcze powiedzieć kilka słów o tak nazwanych *b'kwaternionach*. Dotychczas rozpatrywaliśmy tylko takie kwaterniony, w których współczynniki jednostek i, j i k są ilościami rzetelnemi. Może się jednak zdarzyć, że rachunek z wektorami lub kwaternionami doprowadzi do ilości urojonych zwyczajnych. Tak np. szukając promieni wodzących punktów przecięcia się prostej

$$\varrho=\beta+x\gamma$$

z powierzchnią kuli

$$\varrho^2=\alpha^2,$$

otrzymamy dla wyznaczenia skalaru niewiadomego x, równanie

$$\beta^2+2xS\beta\gamma+x^2\gamma^2=\alpha^2,$$

które, w przypadku

$$(S\beta\gamma)^2<\gamma^2(\beta^2-\alpha^2)$$

daje dla x pierwiastki urojone kształtu $a+b\sqrt{-1}$. Ponieważ zaś x jest skalarem, więc i $\sqrt{-1}$ jest skalarem, podlegającym prawu przemiennościowemu.

Otóż wektor kształtu

$$\varrho=\alpha+\beta\sqrt{-1},$$

Hamilton nazywa *biwektorem*, kwaternion zaś

$$q=q_1+q_2\sqrt{-1},$$

w którym q_1 q_2 są kwaternionami o współczynnikach rzetelnych nazywa *bikwaternionami.*

Łatwo widzieć, że

$$S(q_1+q_2\sqrt{-1})=Sq_1+\sqrt{-1}Sq_2$$

$$V(q_1+q_2\sqrt{-1})=Vq_1+\sqrt{-1}Vq_2$$

Dla otrzymania tensoru Tq uważamy, że

$$(Tq)^2=qKq=(Sq+Vq)\,(Sq-Vq)=$$

$$(Sq_1+\sqrt{-1}Sq_2+Vq_1+\sqrt{-1}Vq_2)\times(Sq_1+Sq_2\sqrt{-1}-Vq_1-\sqrt{-1}Vq_2)=$$

$$(Tq_1)^2-(Tq_2)^2+2\sqrt{-1}.S(q_1Kq_2).$$

Z tego kształtu tensoru widzimy, że tensor kwaternionu urojonego może się równać zeru chociażby składniki q_1 i q_2 nie były zerami, gdyż $Tq=o$, w przypadku gdy

$$Tq_1=Tq_2,\quad S(q_1Kq_2)=o.$$

Równanie

$$q^2=o,$$

gdzie q oznacza kwaternion urojony ma nieskończenie wiele pierwiastków.

Jakoż kładąc

$$q=x_0+x_1i+x_2j+x_3k,$$

otrzymamy

$$q^2=(Tq)^2=x_0{}^2+x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2=o,$$

które to równanie ma nieskończenie wiele pierwiastków, w przypadku gdy x_0, x_1, x_2, x_3 są ilościami urojonemi zwyczajnemi.

Wypada stąd, że *iloczyn dwóch czynników nie zawsze się zmienia ze zmianą jednego z czynników.* Jakoż oznaczając prze q' jeden z pierwiastków równania $q^2=o$, otrzymamy, że za równaniem

$$q'q''=r,$$

idzie równanie

$$q'(q''+xq')=r,$$

gdzie x jest dowolną liczbą urojoną zwyczajną.

Poprzednie rozumowanie dowodzi, że dzielenie bikwaternionów jest działaniem wieloznacznem.

78. Równanie kwaternionowe wtedy tylko ma zupełnie oznaczone rozwiązanie, gdy strona wiadoma równania zawiera skalar i wektor.

Tak np. równanie $q=c$, gdzie

$$c=c_0+c_1i+c_2j+c_3k=Tc(\cos\varphi+\iota\sin\varphi)$$

jest zupełnie dostatecznem dla wyznaczenia q.

Jeśli zaś mamy równanie $Tq=c_0$, gdzie c_0 jest skalarem, to otrzymamy

$$q=c_0 Uc,$$

gdzie c jest zupełnie dowolnym kwaternionem.

Tak samo równanie $Sq=a$, gdzie a jest skalarem daje

$$q=a+\alpha,$$

gdzie α jest dowolnym wektorem.

Również i równanie $TVq=b$ ma rozwiązanie, zawierające trzy dowolne skalary. Jakoż z danego równania wynika, że

$$q=w+b\beta,$$

równanie to zawiera trzy nieoznaczone wielkości a mianowicie w i dwie, służące do wyznaczenia kierunku promienia β.

Równanie $V\alpha Vq=\beta$ daje rozwiązanie, zawierające dwie ilości nieoznaczone. Jakoż kładąc $Sq=x$, otrzymamy

$$V\alpha q=V\alpha(Sq+Vq)=x\alpha+\beta,$$

zkąd

$$\alpha q=y+x\alpha+\beta,$$

gdzie y oznacza skalar αq. Widzimy więc, że rozwiązywaniem danego równania będzie

$$q=\alpha^{-1}y+x+\alpha^{-1}\beta$$

Rozwiązanie równania $V\alpha q=\beta$ otrzymuje się w sposób następujący. Oznaczając $S\alpha q$ przez x, znajdujemy

$$\alpha q=x+\beta,$$

zkąd

$$q=\alpha^{-1}(x+\beta).$$

Równanie to zawiera jedną tylko ilość nieoznaczoną,

Nakoniec równanie

$$\alpha q=\beta$$

daje

$$q=\alpha^{-1}\beta.$$

79. Przychodzimy teraz do rozwiązania ogólnego równania stopnia pierwszego

$$\Sigma a_n q b_n=c.$$

Przedewszystkiem dowiedziemy, że równanie takie zawsze się sprowadza do równania, zawierającego tylko same wektory.

Jakoż kładąc

$$a_n q b=Sa_n q b_n+Va_n q b_n=Sa_n b_n q+Va_n q b_n=Sf_n q+Va_n q b_n,$$

otrzymamy

$$\Sigma Sf_n q+\Sigma Va_n q b_n=c,$$

albo po uproszczeniu

$$Sfq+\Sigma Va_n q b_n=c.$$

Biorąc skalar i wektor obu stron tego równania, znajdujemy

$$Sc = Sfq = Sf.Sq + S(Vf.Vq)$$
$$Vc = \Sigma Va_n q b_n = \Sigma V[a_n(Sq + Vq)b_n]$$
$$= \Sigma Sq.Va_n b_n + \Sigma V(a_n Vq b_n)$$
$$= Sq \Sigma Va_n b_n + \Sigma V(a_n Vq b_n).$$

Po wyrugowaniu Sq otrzymujemy równanie linijne dla Vq. Oznaczając Vq przez ϱ znajdujemy, że to równanie będzie miało kształt

$$\delta = \alpha S\beta\varrho + \gamma Va\varrho b,$$

jeśli dla uproszczenia opuścimy znak Σ. Lecz według (§ 55,7)

$$\varrho S\alpha\beta\gamma = V\alpha\beta S\gamma\varrho + V\beta\gamma S\alpha\varrho + V\gamma\alpha S\beta\varrho.$$

Podstawiając w poprzednie równanie wartość dla ϱ z tego ostatniego równania otrzymamy dla wyznaczenia ϱ równanie kształtu

$$\Sigma\alpha S\beta\varrho = \gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Jeżeli z tego równania wyznaczymy $\varrho = Vq$, to jedno z równań dla S lub Vc da nam Vq, a tem samem $q = Sq + Vq$.

80. Zajmiemy się teraz rozwiązaniem równania (*1*) § 79. W tym celu pierwszą stronę tego równania oznaczmy przez $\varphi\varrho$. Funkcya ta jest przerwszego stopnia względem ϱ i oznacza promień wodzący.

Oznaczając przez φ^{-1} funkcyę odwrotną względem φ, t. j. taką, że $\varphi^{-1}(\varphi\varrho) = \varrho$, widzimy, że równanie (*1*) § 79 daje $\varrho = \varphi^{-1}\gamma$. Wypada ztąd, że dla rozwiązania równania wektoryalnego dość będzie wyznaczyć kształt funkcyi φ^{-1}. W tym celu musimy zbadać zasadnicze własności funkcyi φ.

81. Z samego kształtu funkcyi φ wypada:

1. $\varphi(\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \ . \ . \ . \ ) = \varphi\varrho + \varphi\varrho_1 + \varphi\varrho_2 + \ . \ . \ .$

2. $d\varphi\varrho = \varphi d\varrho$. Równanie to jest wynikiem poprzedniego i określenia różniczki.

3. $\varphi a\varrho = a\varphi\varrho$, gdzie a jest dowolnym skalarem.

4. $\varphi^{-1}\varphi = \varphi\varphi^{-1}$, gdyż działania wyrażone znakami funkcyi φ i φ^{-1} wzajemnie się znoszą.

W tem miejscu wypada nam nadmienić, że działanie oznaczone przez φ n razy powtórzone oznaczać będziemy przez φ^n, tak samo i działanie oznaczone przez φ^{-1}, n razy powtórzone, oznaczać będziemy przez φ^{-n}.

82. Dla otrzymania $\varphi^{-1}\varrho$ czyli dla odwrócenia funkcyi φ (inwersyi funkcyi φ) musimy jeszcze wprowadzić *funkcyę sprzężoną* z $\varphi\varrho$ i którą oznaczemy przez $\varphi'\varrho$.

Z równania

$$\varphi\varrho = \Sigma\alpha S\beta\varrho$$

za pomocą działania $S.\sigma$, gdzie σ oznacza dowolny promień wodzący otrzymamy

$$S\sigma\varphi\varrho = \Sigma S\sigma\alpha S\beta\varrho = \Sigma S\varrho\beta S\sigma\alpha..$$

Oznaczając $\Sigma\beta S\alpha\sigma$ przez $\varphi'\sigma$ otrzymamy

$$S\sigma\varphi\varrho = S\varrho\varphi'(\sigma) \quad \ldots \ldots \quad (1).$$

Funkcya φ' nazywa się funkcyą *sprzężoną* względem φ i równanie (*1*) stanowi jej własność charakterystyczną. Funkcya φ' różni się od φ tem, że w niej przestawiono litery α i β. Łatwo widzieć, że na odwrót funkcya φ jest sprzężoną względem ϱ.

Jeżeli $\varphi' = \varphi$, to powiadamy, że funkcya φ jest *sprzężoną względem siebie samej*.

Dodając do równania (*1*) równanie

$$S\sigma\varphi'\varrho = S\varrho\varphi\sigma$$

otrzymamy równanie

$$S\sigma(\varphi + \varphi')\varrho = S\varrho(\varphi + \varphi')\sigma,$$

które dowodzi, że funkcya $\varphi + \varphi'$ jest zawsze względem siebie sprzężoną.

Oprócz tego, ponieważ

$$S\varrho\varphi\varrho = S\varrho\varphi'\varrho, \text{ albo } S\varrho(\varphi - \varphi')\varrho = 0,$$

więc promień wodzący $(\varphi - \varphi')\varrho$ jest prostopadłym do ϱ, czyli, że

$$(\varphi - \varphi')\varrho = V\delta\varrho.$$

Wypada ztąd, że

$$\varphi\varrho = \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi')\varrho + \tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi')\varrho = \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi')\varrho + \tfrac{1}{2}V\delta\varrho,$$

t. j. że każda funkcya wektoryalna i linijna ϱ różni się od funkcyi sprzężonéj względem siebie wyrazem kształtu $V\delta\varrho$, gdzie δ oznaczy dowolny wektor. Jeżeli funkcya φ jest sprzężoną względem siebie, to promień δ staje się zerem.

Łatwo widzieć, że kolejne zastosowanie działań φ i ψ, odpowiadających dwóm funkcyom wektoryalnym i linijnym prowadzi do nowej funkcyi linijnej i wektoryalnej.

Za pomocą tej prostej uwagi można dowieść, że funkcya $\varphi\varphi'$ jest sprzężoną względem siebie. Jakoż

$$S\varrho\varphi\varphi'\sigma = S\varphi'\sigma\varphi'\varrho = S\varphi'\varrho\varphi'\sigma = S\sigma\varphi\varphi'\varrho.$$

Oznaczając przez g dowolny skalar znajdziemy, że funkcya $(\varphi + g)\varrho$ jest wektoryalną i linijną, jeżeli nią jest φ i że funkcyą względem niej sprzężoną jest $\varphi' + g$.

83. Po wyłożeniu wyżej podanych własności funkcyi φ' możemy przystąpić do odwrócenia funkcyi φ.

Ponieważ każdy promień wodzący możemy wyrazić przez trzy inne, nie na jednej płaszczyźnie leżące, więc przyjmując, że wogólności trzy promienie ϱ, $\varphi\varrho$, $\varphi^2\varrho$ nie leżą na jednej płaszczyźnie, otrzymamy

$$-\varphi^3\varrho = x\varrho + y\varphi\varrho + z\varphi^2\varrho, \quad \ldots \quad (1)$$

gdzie x, y, z oznaczają współczynniki rzetelne, od ϱ niezależne.

Stosując do obu stron poprzedniego równania działanie, wyrażone przez φ^{-1} otrzymamy

$$-\varphi^2\varrho = x\varphi^{-1}\varrho + y\varrho + z\varphi\varrho$$

$$-x\varphi^{-1}\varrho=y\varrho+z\varphi\varrho+\varphi^2\varrho. \quad (2).$$

Tym sposobem wyraziliśmy funkcyę φ^{-1} za pomocą działań bezpośrednich.

Dla wyznaczenia współczynników x, y, z dostatecznem będzie zastąpić w równaniu (*1*) promień ϱ przez trzy dane promienie np. i, j, k, przez co otrzymamy trzy równania z trzema niewiadomemi.

Pozostaje nam teraz dowieść, że nawet w przypadku, gdy promienie ϱ, $\varphi\varrho$ i $\varphi^2\varrho$ nie czynią zadość postawionemu wyżej warunkowi, to jednak równanie (*1*) ma miejsce.

Jeżeli promień $\varphi\varrho$ jest równoległym do ϱ, t. j. gdy ma kształt $k\varrho$, to $\varphi^3\varrho=k^3\varrho$, a zatem $\varphi^3\varrho$ ma kształt (*1*), w którym $y=o$, $z=o$.

Jeśli ϱ, $\varphi\varrho$ i $\varphi^2\varrho$ leżą na jednej płaszczyźnie, to

$$\varphi^2\varrho=p\varrho+q\varphi\varrho$$

zkąd

$$\varphi^3\varrho=p\varphi\varrho+q\varphi^2\varrho=pq\varrho+(p+q^2)\varphi\varrho,$$

równanie mające kształt (*1*), w którém $z=o$.

Jeżeli w równaniu (*2*) $x=o$, to przy $y \gtrless o$, działając symbolem φ^{-1}, otrzymamy

$$y\varphi^{-1}\varrho=-(z\varrho+\varphi\varrho).$$

Nakoniec, jeżeli $x=o$ i $y=o$, to

$$z\varphi^{-1}\varrho=-\varrho.$$

84. Dla objaśnienia ogólnej metody podamy przykład ciekawy, znajdujący ważne zastosowanie w teoryi powierzchni, mających środek. Zobaczemy później, że dla elipsoidy $\varphi\varrho$ przybiera kształt

$$\varphi\varrho=-ia^2Si\varrho-jb^2Sj\varrho-kc^2Sk\varrho.$$

Zastępując kolejno w tem równaniu ϱ przez i, j, k, otrzymamy

$$\varphi i=ia^2,\ \varphi^2 i=ia^4,\ \varphi^3 i=ia^6$$
$$\varphi j=jb^2,\ \varphi^2 j=jb^4,\ \varphi^3 j=jb^6$$
$$\varphi k=kc^2,\ \varphi^2 k=kc^4,\ \varphi^3 k=kc^6.$$

Podstawiając te wartości w równanie (*1*) poprzedniego paragrafu otrzymamy

$$-a^6=x+ya^2+za^4,\ -b^6=x+yb^2+zb^4,\ -c^6=x+yc^2+zc^4.$$

Wynika ztąd, że a^2, b^2, c^2 są pierwiastkami równania

$$\zeta^3+z\zeta^2+y\zeta+x=o.$$

Otrzymamy więc

$$z=-(a^2+b^2+c^2),\ y=a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2,\ x=-a^2b^2c^2$$
$$\varphi^3\varrho=a^2b^2c^2\varrho-(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\varphi\varrho+(a^2+b^2+c^2)\varphi^2\varrho$$

Równanie to po podstawieniu w niem $\varphi^{-1}\varrho$ zamiast ϱ daje wzór

$$a^2b^2c^2\varphi^{-1}\varrho=(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\varrho-(a^2+b^2+c^2)\varphi\varrho+\varphi^2\varrho,$$

będący inwersyą funkcyi $\varphi\varrho$, albo rozwiązaniem równania $\varphi\varrho=\gamma$.

Rozwiązanie to może służyć jako wyjaśnienie przypadków bardziej skomplikowanych. Jako dalsze przygotowanie zrobimy jeszcze jedną uwagę.

Równanie

$$o=\Phi\varrho=\varphi^3\varrho-(a^2+b^2+c^2)\varphi^2\varrho+(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\varphi\varrho-a^2b^2c^2\varrho=$$
$$[\varphi^3-(a^2+b^2+c^2)\varphi^2+(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\varphi-a^2b^2c^2]\varrho$$

możemy napisać w kształcie

$$o=(\varphi-a^2)(\varphi-b^2)(\varphi-c^2)\varrho,$$

gdyż $\varphi(m^2\varrho)=m^2\varphi\varrho$.

85. *Metoda inwersyi Hamiltona.* Niech λ i μ będą dwoma takiemi wektorami, że

$$\varphi\varrho=V\lambda\mu \quad \ldots\ldots\ldots (1):$$

Operując kolejno symbolami $S\lambda$ i $S\mu$ otrzymamy

$$S\lambda\varphi\varrho=o,\quad S\mu\varphi\varrho=o,$$

a przez wprowadzenie funkcyj sprzężonych

$$S\varrho\varphi'\lambda=o,\quad S\varrho\varphi'\mu=o.$$

Promień zatem ϱ jest prostopadłym do $\varphi'\mu$ i $\varphi'\lambda$, a więc będzie kształtu

$$m\varrho=V\varphi'\lambda\varphi'\mu,$$

gdzie m jest skalarem.

Z równania (1) wypada, że

$$\varrho=\varphi^{-1}V\lambda\mu,$$

równanie zatem

$$m\varphi^{-1}V\lambda\mu=V\varphi'\lambda\varphi'\mu \quad \ldots\ldots (2)$$

rozwiązuje zadanie o inwersyi funkcyi φ. Pozostaje tylko wyznaczyć m i wyrazić $V\varphi'\lambda\varphi'\mu$ przez $V\lambda\mu$.

86. Niech ν będzie promieniem wodzącym, nieleżącym na jednej płaszczyźnie z promieniami λ i μ. Działajmy na obie strony równania (2) symbolem $S\varphi'\nu$, otrzymamy

$$mS\varphi'\nu\varphi^{-1}V\lambda\mu=S(\varphi'\nu V\varphi'\lambda\varphi'\mu).$$

Uwzględniając zasadniczą własność funkcyj sprzężonych znajdujemy

$$mS\varphi'\nu\varphi^{-1}V\lambda\mu=mS\nu\varphi\varphi^{-1}V\lambda\mu=mS\nu V\lambda\mu=mS\lambda\mu\nu.$$
$$S\varphi'\nu V\varphi'\lambda\varphi'\mu=S\varphi'\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu,$$

zkąd

$$mS\lambda\mu\nu=S\varphi'\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu$$

$$m=\frac{S\varphi'\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu}{S\lambda\mu\nu} \quad \ldots\ldots (3).$$

Łatwo dowieść, że wartość m jest niezależną od szczególnych kierunków promieni λ, μ i ν. Jakoż zastępując λ przez $\lambda+\mu p$, znajdziemy, że licznik i mianownik ułamku (3) zostają bez zmiany.

87. Zastąpmy teraz w równaniu (1) § 86 φ przez $\varphi+g$, gdzie g oznacza dowolny skalar, t. j., innemi słowami, przypuśćmy, że równaniem danem jest $(\varphi+g)\varrho=V\lambda\mu$, gdzie λ i μ mogą być odmiennemi od λ i μ poprzedniego paragrafu, otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} m_g(\varphi+g)^{-1}V\lambda\mu &= V.(\varphi'+g)\lambda(\varphi'+g)\mu \\ &= V\varphi'\lambda\varphi'\mu+gV(\lambda\varphi'\mu+\varphi'\lambda.\mu)+g^2V\lambda\mu \\ &= (m\varphi^{-1}+g\psi+g^2)V\lambda\mu, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (1)$$

gdzie przez $\psi V\lambda\mu$ oznaczamy funkcyę $V(\lambda.\varphi'\mu+\varphi'\lambda.\mu)$.

Według wzoru (3) poprzedniego paragrafu otrzymamy

$$m_g=\frac{S[(\varphi'+g)\lambda(\varphi'+g)\mu(\varphi'+g)\nu]}{S\eta\mu\nu}=$$

$$m+m_1g+m_2g^2+\lambda_3g^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2),$$

gdzie

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \frac{S[\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu+\mu\varphi'\nu\varphi'\lambda+\nu\varphi'\gamma\varphi'\mu]}{S\lambda\mu\nu} \\ m_2 &= \frac{S[\mu\nu\varphi'\lambda+\nu\lambda\varphi'\mu+\lambda\mu\varphi'\nu]}{S\lambda\mu\nu} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (3)$$

Ilości te m_1 i m_2, podobnie jak i m są niezależne od kierunku promieni λ, μ, ν.

Podstawiając teraz w równanie (1) wartości m_g i działając symbolem $\varphi+g$, znajdziemy równanie

$$(m+m_1g+m_2g^2+g^3)V\lambda\mu=[m+g(\varphi\psi+m\varphi^{-1})+g^2(\varphi+\psi)+g^3]V\lambda\mu,$$

z którego otrzymamy równania symboliczne

$$m_1=\varphi\psi+m\varphi^{-1},\; m_2=\varphi+\psi \quad . \; . \; . \; . \; . \; (4).$$

Drugie z tych równań, które jest identycznem z równaniem $\psi=m_2-\varphi$ pokazuje, że funkcya ψ jest także linijną i wektoryalną.

Rugując funkcyę ψ z dwóch równań (4), otrzymamy

$$m\varphi^{-1}=m_1-m_2\varphi+\varphi^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (5).$$

Równanie to daje nam rozwiązanie zupełne wszystkich równań linijnych wektoryalnych za pomocą metody *Hamiltona*.

88. Metoda powyższa daje nam sposób wyrażania funkcyj odwrotnych φ^{-1} i $(\varphi+g)^{-1}$ za pomocą działań bezpośrednich. Całe zadanie w tej metodzie sprowadza się do wyznaczenia ilości m, m_1, m_2. Po wyznaczeniu tych wielkości, ma miejsce równanie symboliczne (5), które jest identycznem z równaniem

$$\varphi^3-m_2\varphi^2+m_1\varphi-m=o \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6),$$

t. j., że w tym przypadku dla każdego promienia wodzącego ϱ ma miejsce równanie

$$(\varphi^3-m_2\varphi^2+m_1\varphi-m)\varrho=o \quad . \; . \; . \; . \; (7).$$

To ostatnie równanie odgrywa ważną rolę przy wyznaczeniu osi powierzchni drugiego stopnia, głównych osi bezwładności, przy badaniu przekształceń ciał stałych i innych kwestyach podobnego rodzaju

Jeżeli utworzemy równanie stopnia 3-go

$$s^3-m_2s^2+m_1s-m=o$$

i wyznaczemy jego pierwiastki s_1, s_2, s_3, to równaniu symbolicznemu (*6*) możemy nadać kształt symboliczny:

$$(\varphi-s_1)(\varphi-s_2)(\varphi-s_3)=o \quad . \; . \; . \; . \; . \; (8).$$

89. Damy teraz kilka przykładów dla wyjaśnienia ogólnej metody.

Przykład 1. Niech będzie

$$\varphi\varrho=V\alpha\varrho\beta=\gamma.$$

Ponieważ

$$S\sigma V\alpha\varrho\beta=S\sigma\alpha\varrho\beta=S\varrho\beta\sigma\alpha=S\varrho V\beta\sigma\alpha,$$

więc

$$\varphi'\varrho=V\beta\varrho\alpha=V\alpha\varrho\beta, \quad (\S\ 55,3)$$

t. j., że

$$\varphi\varrho=\varphi'\varrho$$

Według wzoru (*3*) § 87

$$n=\frac{1}{S\lambda\mu\nu}S(V\alpha\lambda\beta V\alpha\mu\beta V\alpha\nu\beta).$$

Przyjmując, że promienie α, β, γ nie leżą na jednej płaszczyźnie, otrzymamy:

$$m=\frac{1}{S\alpha\beta\gamma}S(\alpha^2\beta.\alpha\beta^2.V\alpha\gamma\beta)=\alpha^2\beta^2S\alpha\beta,$$

a to na zasadzie wzoru

$$V\alpha\beta\gamma=\alpha S\beta\gamma-\beta S\gamma\alpha+\gamma S\alpha\beta.$$

W taki sam sposób otrzymamy

$$m_1=\frac{1}{S\alpha\beta\gamma}S(\alpha.\alpha\beta^2V\alpha\gamma\beta+\alpha\beta^2.\beta V\alpha\gamma\beta+\beta\alpha^2\alpha\beta^2\gamma)=-\alpha^2\beta^2$$

$$m_2=\frac{1}{S\alpha\beta\gamma}S(\alpha\beta V\alpha\gamma\beta+\alpha\alpha.\beta^2\gamma+\alpha^2\beta\beta\gamma)=-S\alpha\beta.$$

Wstawiając te wartości w równanie (*5*) § 87

$$\varrho\alpha^2\beta^2S\alpha\beta=-\gamma\alpha^2\beta^2+S\alpha\beta V\alpha\gamma\beta+V\alpha(V\alpha\gamma\beta)\beta.$$

Rozwijając wektor $V\alpha\gamma\beta$ otrzymamy

$$\varrho=\frac{1}{S\alpha\beta}(\alpha^{-1}S\alpha\gamma+\beta^{-1}S\beta\gamma-\gamma).$$

Rozwiązanie powyższego równania można było otrzymać daleko prościej przez zastosowanie szczególnego sposobu.

Jakoż stosując do danego równania symbole $S\alpha$ i $S\beta$ otrzymamy

$$\alpha^2S\varrho\beta=S\alpha\gamma, \; \beta^2S\alpha\varrho=S\beta\gamma,$$

ztąd

$$\alpha S\beta\varrho=\alpha^{-1}S\alpha\gamma, \; \beta S\alpha\varrho=\beta^{-1}S\beta\gamma.$$

Lecz dane równanie możemy jeszcze napisać w kształcie

$$V\alpha\varrho\beta=\alpha S\beta\varrho-\varrho S\alpha\beta+\beta S\alpha\varrho=\gamma.$$

Podstawiając wyżej otrzymane wartości przyjdziemy do otrzymanego sposobem ogólnym rozwiązania.

Łatwo sprawdzić, że rozwiązanie powyższe czyni zadość danemu równaniu.

90. *Przykład II.* Rozwiązać równanie

$$\varphi\varrho = V\alpha\beta\varrho = \gamma.$$

$$S\sigma\varphi\varrho = S\sigma\alpha\beta\varrho = S\varrho\sigma\alpha\beta = S\varrho V\sigma\alpha\beta = S\varrho\varphi'\sigma,$$

zkąd

$$\varphi'\varrho = V\varrho\alpha\beta = V\beta\alpha\varrho.$$

Przyjmując α, β, γ zamiast λ, μ i ν otrzymamy

$$m = \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta,\ m_1 = 2(S\alpha\beta)^2 + \alpha^2\beta^2,\ m_2 = 3S\alpha\beta.$$

$$\varrho\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta = \gamma[2(S\alpha\beta)^2 + \alpha^2\beta^2] - 3V\alpha\beta\gamma S\alpha\beta + V(\alpha\beta . V\alpha\beta\gamma).$$

Rozwijając wektory iloczynów otrzymamy ostatecznie:

$$\varrho\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta = -\alpha\beta^2 S\alpha\gamma + \beta(2S\alpha\beta S\alpha\gamma - \alpha^2 S\beta\gamma) + \gamma\alpha^2\beta^2.$$

W tym przykładzie zupełnie tak samo jak w poprzednim, przyjęliśmy, że α, β i γ nie leżą na jednej płaszczyźnie.

91. *Przykład III.* Rozwiązać równanie

$$V\varepsilon\varrho = \gamma.$$

Bardzo proste rozwiązanie otrzymamy, uważając, że $S\varepsilon\varrho$ jest ilością nieoznaczoną x. Możemy więc napisać

$$\varepsilon\varrho = x + \gamma,$$

zkąd

$$\varrho = \varepsilon^{-1}(x + \gamma).$$

Zastosujmy teraz metodę ogólną. W danym przykładzie

$$S\sigma V\varepsilon\varrho = S\varrho V\sigma\varepsilon,$$

ięc

$$\varphi'\varrho = V\varrho\varepsilon.$$

Ponieważ $S\varepsilon\gamma = o$, więc $\varepsilon\gamma$ jest wektorem. Możemy zatem zamiast λ, μ i ν obrać ε, γ, $\varepsilon\gamma$. Otrzymamy wtedy

$$m = o,\ m_1 = -\varepsilon^2,\ m_2 = o.$$

Podstawiają te wartości w równanie symbolicznem (6) § 88 otrzymamy

$$\varphi^3 - \varepsilon^2\varphi = o.$$

Działając symbolem φ^{-2}, znajdziemy

$$\varphi - \varepsilon^2\varphi^{-1} = \varphi^{-2}o.$$

Lecz oznaczając $\varphi^{-2}o$ przez σ, otrzymamy

$$\varphi^2\sigma = o,\ V(\varepsilon V\varepsilon\sigma) = V(\varepsilon^2\sigma - \varepsilon S\varepsilon\sigma) = o,$$

t. j.

$$\varepsilon^2\sigma - \varepsilon S\varepsilon\sigma = o,$$

zkąd

$$\sigma = -x\varepsilon.$$

Znajdziemy więc ostatecznie

$$V\varepsilon\gamma - \varepsilon^2\varrho = -x\varepsilon,\ \varrho = \varepsilon^{-1}(x + \gamma).$$

92. *Przykład IV.* Rozwiązać równanie

$$\varphi\varrho = \alpha S\beta\varrho + \alpha_1 S\beta_1\varrho + \alpha_2 S\beta_2\varrho = \gamma.$$

Łatwo widzieć (§ 82), że

$$\varphi'\varrho = \beta S\alpha\varrho + \beta_1 S\alpha_1\varrho + \beta_2 S\alpha_2\varrho.$$

Przyjmując, że α, α_1, α_2 nie leżą na jednej płaszczyźnie, możemy je obrać zamiast λ, μ, ν.

$$\begin{aligned}\varphi'\alpha &= \beta S\alpha\alpha + \beta_1 S\alpha_1\alpha + \beta_2 S\alpha_2\alpha\\ \varphi'\alpha_1 &= \beta S\alpha\alpha_1 + \beta_1 S\alpha_1\alpha_1 + \beta_2 S\alpha_2\alpha_1\\ \varphi'\alpha_2 &= \beta S\alpha\alpha_2 + \beta_1 S\alpha_1\alpha_2 + \beta_2 S\alpha_2\alpha_2.\end{aligned}$$

Z tych równań otrzymamy

$$S(\varphi'\alpha\varphi'\alpha_1\varphi'\alpha_2) = S\beta\beta_1\beta_2 \begin{vmatrix} S\alpha\alpha & S\alpha_1\alpha & S\alpha_2\alpha \\ S\alpha\alpha_1 & S\alpha_1\alpha_1 & S\alpha_2\alpha_1 \\ S\alpha\alpha_2 & S\alpha_1\alpha_2 & S\alpha_3\alpha_2 \end{vmatrix} \quad \text{§ 53 i mnożenie wyznaczników}$$

$$= (AS\alpha\alpha + A_1 S\alpha_1\alpha + A_2 S\alpha_2\alpha) S\beta\beta_1\beta_2.$$

gdzie minory A, A_1, A_2, dane są równaniami:

$$\begin{aligned} A &= S\alpha_1\alpha_1 S\alpha_2\alpha_2 - S\alpha_1\alpha_2 S\alpha_2\alpha_1 = -SV\alpha_1\alpha_2 V\alpha_1\alpha_2 \\ A_1 &= S\alpha_2\alpha_1 S\alpha\alpha_2 - S\alpha\alpha_1 S\alpha_2\alpha_2 = -SV\alpha_2\alpha V\alpha_1\alpha_2 \qquad [\text{§ 56 } (1) \text{ i } (3)] \\ A_2 &= S\alpha\alpha_1 S\alpha_1\alpha_2 - S\alpha_1\alpha_1 S\alpha\alpha_2 = -SV\alpha\alpha_1 V\alpha_1\alpha_2. \end{aligned}$$

Podstawiając te wartości znajdziemy, że wyznacznik równa się

$$\begin{aligned} &-(S\alpha\alpha SV\alpha_1\alpha_2 V\alpha_1\alpha_2 + S\alpha_1\alpha SV\alpha_2\alpha V\alpha_1\alpha_2 + S\alpha_2\alpha SV\alpha\alpha_1 V\alpha_1\alpha_2) \\ &= -S[\alpha(\alpha SV\alpha_1\alpha_2 V\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1 SV\alpha_2\alpha V\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2 SV\alpha\alpha_1 V\alpha_1\alpha_1)] \\ &= -S[\alpha(\alpha S\alpha_1\alpha_2 V\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1 S\alpha_2\alpha V\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2 S\alpha\alpha_1 V\alpha_1\alpha_2)] \\ &= -S\alpha . V\alpha_1\alpha_2 S\alpha\alpha_1\alpha_2 = -(S\alpha\alpha_1\alpha_2)^2. \qquad [\text{§ 54}]. \end{aligned}$$

Wartość ta daje

$$m = -S\alpha\alpha_1\alpha_2 S\beta\beta_1\beta_2.$$

W podobny sposób otrzymamy

$$m_1 = -S(V\beta\beta_1 V\alpha\alpha_1 + V\beta_2\beta V\alpha_2\alpha + V\beta_1\beta_2 V\alpha_1\alpha_2)$$

$$m_2 = S(\alpha\beta + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2).$$

Rozwiązaniem zatem danego równania będzie

$$\varphi^{-1}\gamma S\alpha\alpha_1\alpha_2 S\beta\beta_1\beta_2 = \gamma\Sigma SV\alpha\alpha_1 V\beta\beta_1 + \varphi\gamma\Sigma\alpha\beta - \varphi^2\gamma.$$

Po wykonaniu wskazanych działań otrzymamy

$$\varrho S\alpha\alpha_1\alpha_2 S\beta\beta_1\beta_2 = V\beta_1\beta_2 S\alpha_1\alpha_2\gamma + V\beta_2\beta S\alpha_2\alpha\gamma + V\beta\beta_1 S\alpha\alpha_1\gamma.$$

Do tego samego wzpadku można było dojść drogą daleko krótszą działając na obie strony danego równania symbolami $S\alpha_1\alpha_2$, $S\alpha_2\alpha$, $S\alpha\alpha_1$.

Otrzymamy wtedy

$$S\alpha\alpha_1\alpha_2 S\beta\varrho = S\alpha_1\alpha_2\gamma, \quad S\alpha_1\alpha_2\alpha S\beta_1\varrho = S\alpha_2\alpha\gamma, \quad S\alpha\alpha_1\alpha_2 S\beta_2\varrho = S\alpha\alpha_1\gamma.$$

Mnożąc kolejno te równania przez $V\beta_1\beta_2$, $V\beta_2\beta$, $V\beta\beta_1$ i uwzględniając wzór

$$\delta S\alpha\beta\gamma = V\alpha\beta S\gamma\delta + V\beta\gamma S\alpha\delta + V\gamma\alpha S\beta\delta,$$

otrzymamy

$$\rho S\alpha\alpha_1\alpha_2 S\beta\beta_1\beta_2 = V\beta_1\beta_2 S\alpha_1\alpha_2\gamma + V\beta_2\beta S\alpha_2\alpha\gamma + V\beta\beta_1 S\alpha\alpha_1\gamma$$

93. *O kierunkach głównych.* Szukajmy teraz warunku, ażeby po wykonaniu na promieniu wodzącym ρ działanie oznaczone przez $\varphi\rho$ otrzymać promień wodzący, mający ten sam kierunek co i ρ t. j., ażeby

$$\varphi\rho = z\rho \text{ lub } V\rho\varphi\rho = o.$$

Z tego warunku wypływa, że

$$\varphi^2\rho = z^2\rho, \ \varphi^3\rho = z^3\rho.$$

Podstawiając te wartości w równanie (*6*) § 88 otrzymamy dla wyznaczenia z następujące równanie

$$(z^3 - m_2 z^2 + m_1 z - m)\rho = o,$$

tak że z jest jednym z pierwiastków s, s_1, s_2 równania $z^3 - m_2 z^2 + m_1 z - m = o$.

Ponieważ powyższe równanie jest stopnia 3-go, więc jeden przynajmniej z jego pierwiastków jest rzetelnym. Przypuśćmy przedewszystkiem, że wszystkie są rzetelnemi

W tym przypadku, każdy z promieni wodzących, ρ_1, ρ_2, ρ_3, czyniący zadość warunkom

$$(\varphi - s_1)\rho_1 = o, \ (\varphi - s_2)\rho_2 = o, \ (\varphi - s_3)\rho_3 = o \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

będzie rozwiązaniem naszego zadania.

Wyznaczywszy te trzy kierunki ρ_1, ρ_2, ρ_3, które nazwiemy *głównemi*, rozłóżmy promień wodzący dowolny ρ na trzy składowe części wzdłuż ρ_1, ρ_2 i ρ_3 otrzymamy

$$\rho = \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2 + \alpha_3\rho_3 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Działając na to równanie symbolem $\varphi - s_1$ i uwzględniając równania (*1*), otrzymamy

$$(\varphi - s_1)\rho = \alpha_2(s_2 - s_1)\rho_2 + \alpha_3(s_3 - s_1)\rho_3.$$

Działanie więc wyrażone symbolem $\varphi - s_1$ znosi tę składową promienia ρ, która idzie wzdłuż ρ_1.

Działając na ostatnie równanie symbolem $(\varphi - s_2)$, otrzymamy

$$(\varphi - s_1)(\varphi - s_2)\rho = \alpha_3(s_3 - s_2)(s_3 - s_1)\rho_3$$

i w taki sam sposób znajdziemy

$$\left.\begin{aligned}(\varphi - s_1)(\varphi - s_3)\rho &= \alpha_2(s_2 - s_1)(s_2 - s_3)\rho_2 \\ (\varphi - s_2)(\varphi - s_3)\rho &= \alpha_1(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)\rho_1\end{aligned}\right\} \ . \ . \ . \ . \ (3).$$

W przypadku więc, gdy pierwiastki s_1, s_2, s_3 są różnemi pomiędzy sobą kierunki główne dane są przez wyrażenia:

$$(\varphi - s_1)(\varphi - s_2)\rho, \ (\varphi - s_1)(\varphi - s_3)\rho, \ (\varphi - s_2)(\varphi - s_3)\rho \ . \ . \ . \ . \ (4),$$

gdzie ρ oznacza dowolny promień wodzący.

Łatwo dowieść, że w tym przypadku, oprócz kierunków ρ_1, ρ_2, ρ_3, niema innego kierunku, czyniącego zadość równaniu (*1*). Jakoż, jeżeli by taki kierunek σ_1 istniał, to możnaby było dowolny promień wodzący ϱ rozłożyć w kierunku σ_1, ϱ_2 i ϱ_3 i wykonając takie same jak poprzednio działanie, otrzymalibyśmy

$$(\varphi-s_2)(\varphi-s_3)\varrho=\beta_1(s_1-s_2)(s_1-s_3)\sigma_1,$$

a ztąd równanie

$$\alpha_1(s_1-s_2)(s_1-s_3)\varrho_1=\beta_1(s_1-s_2)(s_1-s_3)\sigma_1,$$

z powodu różności kierunków ϱ_1 i σ_1, mogłoby mieć miejsce tylko przy

$$s_1=s_2 \text{ lub } s_1=s_3,$$

t. j. w wypadku równych pierwiastków.

Jeżeli dwa pierwiastki s_2 i s_3 są sobie równemi, to operując znakiem $\varphi-s_2$ na równanie (2) otrzymamy

$$(\varphi-s_2)\varrho=\alpha_1(s_1-s_2)\varrho_1.$$

Działając znowu na równanie (2) symbolem $(\varphi-s_1)$ otrzymamy

$$(\varphi-s_1)\varrho=(s_2-s_1)(\alpha_2\varrho_2+\alpha_3\varrho_3)$$

t. j, że każdy promień wodzący σ płaszczyzny $(\varrho_2\varrho_3)$ danym jest co do kierunku przez $(\varphi-s_1)\varrho$, jakimkolwiek był by promień ϱ. Łatwo też widzieć, że każdy promień wodzący σ tej płaszczyzny czyni zadość równaniu $(\varphi-s_2)\sigma=o$. Nakoniec, jeżeli wszystkie trzy pierwiastki s_1, s_2 i s_3 są sobie równemi, to operując na równanie (2) symbolem $(\varphi-s_1)$ otrzymamy

$$(\varphi-s_1)\varrho=o,$$

t. j., że w tym przypadku każdy promień wodzący jest kierunkiem głównym.

Jeżeli dwa pierwiastki równania stopnia 3-go są urojonemi, to będziemy mieli jeden tylko kierunek główny, gdyż znaczenie pierwiastków urojonych podstawione w równanie (3) dają biwektory.

94. Przypadek, gdy funkcya φ jest sprzężoną względem siebie samej, zasługuje na oddzielne badanie. Przedewszystkiem dowiedziemy, że w tym przypadku wszystkie pierwiastki s_1, s_2, s_3 są rzetelnemi. Jakoż przypuszczając, że jeden z tych pierwiastków jest urojonym kształtu $g_2+h_2\sqrt{-1}$ i że odpowiadający mu kierunek główny jest $\varrho_2+\sigma_2\sqrt{-1}$ (rów 3 § 93), znajdziemy

$$\varphi(\varrho_2+\sigma_2\sqrt{-1})=(g_2+h_2\sqrt{-1})(\varrho_2+\sigma_2\sqrt{-1}),$$

które to równanie rozpada się na dwa inne:

$$\varphi\varrho_2=g_2\varrho_2-h_2\sigma_2,\ \varphi\sigma_2=g_2\sigma_2+h_2\varrho_2.$$

Operując odpowiednio symbolami $S\sigma_2$ i $S\varrho_2$ i uwzględniając równanie $S\sigma_2\varphi\varrho_2=S\varrho_2\varphi\sigma_2$, znajdziemy

$$h_2(\sigma_2^2+\varrho_2^2)=o,$$

ztąd $h_2=o$, gdyż σ_2 i ϱ_2 nie mogą być jednocześnie równemi zeru.

W tym więc przypadku mamy trzy kierunki główne ϱ_1, ϱ_2 i ϱ_3. Ponieważ identycznie $(\varphi-s_1)\varrho_1=o$, więc $S\varrho(\varphi-s_1)\varrho_1=o$; oprócz tego, ponieważ z założenia $\varphi=\varphi'$, zatem $S\varrho_1(\varphi-s_1)\varrho=o$, przy zupełnie dowolnym kierunku ϱ. Lecz według równań (*3*) paragrafu poprzedniego, kierunki ϱ_1 i ϱ_3 są kształtu $(\varphi-s_1)\varrho$, więc kierunek ϱ_1 jest prostopadłym do kierunków ϱ_2 i ϱ_3. W taki sam sposób można dowieść, że i ϱ_2 jest prostopadłym do ϱ_3. Trzy zatem kierunki główne tworzą układ trzech prostych, do siebie prostopadłych.

Ponieważ tensory kierunków głównych są nieoznaczonemi, więc możemy przyjąć, że one są jednostkami. To założywszy widzimy, że równanie

$$\varrho S\varrho_1\varrho_2\varrho_3=\varrho_1 S\varrho_2\varrho_3\varrho+\varrho_2 S\varrho_3\varrho_1\varrho+\varrho_3 S\varrho_1\varrho_2\varrho$$

przybiera kształt

$$-\varrho=\varrho_1 S\varrho_2\varrho_3\varrho+\varrho_2 S\varrho_3\varrho_1\varrho+\varrho_3 S\varrho_1\varrho_2\varrho,$$

z niego zaś wypada

$$-\varphi\varrho=s_1\varrho_1 S\varrho_2\varrho_3\varrho+s_2\varrho_2 S\varrho_3\varrho_1\varrho+s_3\varrho_3 S\varrho_1\varrho_2\varrho \quad . \; . \; . \; (1).$$

Przyjmując zamiast ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 kierunki i, j, k, znajdziemy

$$\varphi\varrho=-s_1 iSi\varrho-s_2 jSj\varrho-s_3 kSk\varrho \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Za pomocą tego wzoru możemy otrzymać cały szereg innych wzorów, z których najważniejszym jest następujący

$$\varphi\varrho=l\varrho+mV(i+nk)\varrho(i-nk) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

Rozwijając drugą stronę tego równania po zastąpieniu ϱ przez $\alpha_1 i+\alpha_2 j+\alpha_3 k$, $\varphi\varrho$ zaś przez $s_1\alpha_1 i+s_2\alpha_2 j+s_3\alpha_3 k$, łatwo znajdziemy, że równanie (*3*) ma miejsce gdy

$$s_1=l-m-mn^2,\; s_2=l+m-mn^2,\; s_3=l+m+mn^2,$$

zkąd

$$n^2=\frac{s_3-s_2}{s_2-s_1},\; l=\frac{s_1+s_3}{2},\; m=\frac{s_2-s_1}{2}.$$

Wartość zatem n będzie rzetelną gdy za i i k wybierzemy kierunki, odpowiadające największemu i najmniejszemu z pierwiastw równania § 93.

95. Rozwiązanie równań kwaternionowych wyższych stopni, jakieśmy już wyżej (§ 77) wspomnieli przedstawia nadzwyczajne trudności i dotychczas nie wynaleziono jeszcze ogólnych metod rozwiązywania równań stopni wyższych nad 1-szy.

Hamilton podał sposób rozwiązywania równań stopnia 2-go, kształtu

$$q^2=aq+b.$$

Sposób ten polega na tem, że kwaternion q przedstawia w kształcie

$$q={}^1/_2(a+w+\varrho),$$

gdzie w jest skalarem i ϱ wektorem.

Równanie dane przybiera po podstawieniu tej wartości kształt

$$a^2+(w+\varrho)^2+2wa+a\varrho+\varrho a=2(a^2+wa+\varrho a)+4b,$$

i sprowadza się do

$$(w+\varrho)^2+a\varrho-\varrho a=a^2+4b.$$

Połóżmy teraz

$$Va=\alpha,\ S(a^2+4b)=c,\ V(a^2+4b)=2\gamma,$$

otrzymamy

$$(w+\varrho)^2+2Va\varrho=c+2\gamma.$$

Równanie to rozpada się na dwa inne:

$$w^2+\varrho^2=c,\ V(w+\alpha)\varrho=\gamma.$$

Działając na ostatnie równanie symbolem $S\alpha$, otrzymamy ze względu na $Sw\varrho=o$

$$S(w+\alpha)\varrho=\frac{S\alpha\gamma}{w}.$$

Tym sposobem znajdziemy

$$(w+\alpha)\varrho=\frac{S\alpha\gamma}{w}+\gamma,\ \text{czyli}\ (w+\alpha)w\varrho=(w+\alpha)\gamma-V\alpha\gamma,$$

i ztąd

$$\varrho^2w^2=\gamma^2-\frac{(V\alpha\gamma)^2}{w^2-\alpha^2}.$$

Podstawiając zamiast ϱ^2 wartość $c-w^2$ otrzymamy ostatecznie równanie

$$(w^2-\alpha^2)(w^4-cw^2+\gamma^2)-(V\alpha\gamma)^2=o.$$

Równanie to daje sześć wartości dla w i dla każdej z nich otrzymamy odpowiednią wartość dla ϱ, a tem samem dla q.

Hamilton dowiódł, że tylko dwa kwaterniony q są rzetelnemi.

Równanie $q^2=aq+b$ jest identycznem co do kształtu z równaniem $q^2=qa+b$, gdyż w ostatniem możemy q, a i b uważać jako sprzężone z literami odpowiedniemi pierwszego równania.

Równanie nakoniec

$$q^2=aq+qb$$

lubo ma kształt równania stopnia drugiego sprowadza się do równania stopnia pierwszego. Jakoż mnożąc obie strony tego równania przez q^{-1}, a następnie q^{-1} przez każdy wyraz iloczynu otrzymamy równanie

$$1=q^{-1}a+bq^{-1},$$

mające ten sam kształt co równanie (§ 76).

ZADANIE DO ROZDZIAŁU V.

1. Rozwiązać równanie $V\alpha\varrho\beta = V\alpha\gamma\beta$.
2. Rozwiązać równanie $\alpha\varrho\beta\varrho = \varrho\alpha\varrho\beta$.
3. Rozwiązać równanie $\alpha\varrho + \varrho\beta = \gamma$.
4. Rozwiązać równanie $\varrho + \alpha\varrho\beta = \alpha\beta$.
5. Rozwiązać równanie $\alpha\varrho\alpha^{-1} + \beta\varrho\beta^{-1} = \gamma\varrho\gamma^{-1}$.
6. Rozwiązać równanie $\alpha\varrho\beta\varrho = \varrho\beta\varrho\alpha$.
7. Rozwiązać równanie $S\alpha\beta\varrho + \beta S\alpha\varrho - \alpha V\beta\varrho = \gamma$.
8. Kładąc

$$\varrho = ix + jy + kz$$
$$\varphi\varrho = aiSi\varrho + bjSj\varrho + ckSk\varrho$$

chcemy wyrazić we funkcyi x, y, z niezależnie od i, j, k następujące równania:

$$T\varphi\varrho = 1,\ S\varrho\varphi^2\varrho = -1,\ S\varrho(\varphi^2 - \varrho^2)^{-1}\varrho = -1,\ T\varrho = T(\varphi U\varrho).$$

9. Dowieść, że jeżeli α, β, γ są trzema jednostkami promieni, do siebie prostopadłych, to

$$S.V\alpha\varphi\alpha V\beta\varphi\beta V\gamma\varphi\gamma = -mS\beta\varphi'^{-1}\alpha S\beta(\varphi - \varphi')\alpha,$$

a zatem wyrażenie to równa się zeru, jeżeli funkcya φ jest sprzężoną względem siebie samej.

10. Dowieść, że

$$\varphi'(V\varphi\varrho\varphi^2\varrho) = \frac{S(\varphi\varrho\varphi^2\varrho\varphi^3\varrho)}{S(\varrho\varphi\varrho\varphi^2\varrho)} V\varrho\varphi\varrho = mV\varrho\varphi\varrho.$$

11. Wyrazić $V\varrho\varphi\varrho$ we funkcyi $\varrho, \varphi\varrho$ i $\varphi^2\varrho$ i z otrzymanego wypadku znaleść warunek, aby promień $\varphi\varrho$ miał ten sam kierunek co ϱ.

12. Znając współczynniki równania zasadniczego stopnia trzeciego, którego niewiadomą jest φ, znaleść współczynniki takichże równań, których niewiadome są φ^2, φ^3, . . . φ^n.

13. Dowieść, że zasadnicze równania stopnia trzeciego o niewiadomych $\varphi\psi$ i $\psi\varphi$ są identycznemi.

14. Znaleść niewiadome funkcye linijowe φ i φ_1 z równań

$$\varphi + \varphi_1 = \psi,\ \varphi\varphi_1 = \lambda.$$

15. Dowieść, że jeżeli φ i ψ oznaczają dwie funkcye liniijne, to promień

$$= V(\varphi\alpha\psi\alpha + \varphi\beta\psi\beta + \varphi\gamma\psi\gamma)$$

jest stałym bez względu na układ trzech jednostek promieni α, β, γ, do siebie prostopadłych.

16. Rozwiązać układ równań jednoczesnych

$$S\alpha\varrho = o,\ S\alpha\varrho\varphi\varrho = o.$$

17. Rozwiązać układ równań jednoczesnych

$$S\alpha\varrho = o,\ S\varrho\varphi\varrho = o.$$

18. Dowieść, że każdą funkcyę linijną, sprzężoną względem siebie samej φ można napisać w kształcie

$$\varphi + z = a(\psi + \varrho)^2 + b(\psi + \varrho)\,(\omega + y) + c(\omega + y)^2,$$

gdzie $a, b, c, x, y, z,$ oznaczają liczby rzetelne, a ψ i ω dwie dane funkcye linijne.