Jakoż, jeżeli

$$q=Tq(\cos\varphi+\eta\sin\varphi)=Tq.\eta^{\varphi},$$

to kładąc $\sqrt[\varphi]{Tq}=a$, gdzie a jest skalarem i oznaczając $a\eta$ przez α, otrzymamy

$$q=\alpha^{\varphi} \; . \; . \; . \; . \; (4).$$

Forma normalna kwaternionów.—Algiebra kwaternionów.

48. Wiemy, że

$$\frac{\beta}{\alpha}=q=Tq(\cos\varphi+\eta\sin\varphi)=Sq+Vq \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

gdzie Vq oznacza promień wodzący długości $Tq\sin\varphi$ w kierunku prostopadłym do płaszczyzny kwaternionu. Prowadząc przez początek promieni wodzących układ osi prostolinijnych i oznaczając prze x, y, z współrzędne końca promienia Vq i oznaczając jeszcze Sq przez w, otrzymamy

$$q=w+xi+yj+zk \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Ten ostatni wzór nazywa się *formą normalną kwaternionu.*

Z tego wynika, że

$$\left.\begin{aligned} Sq&=Tq\cos\varphi=w \\ Vq&=Tq\sin\varphi.\eta=xi+yj+zk \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; (3).$$

Podnosząc obie strony tych równań do kwadratu i odejmując od siebie otrzymamy

$$(Sq)^2-(Vq)^2=(Tq)^2=w^2+x^2+y^2+z^2, \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

ztąd

$$Tq=\sqrt{w^2+x^2+y^2+z^2}, \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

a że

$$q=Tq.Uq,$$

więc

$$Uq=\frac{w+xi+yj+zk}{\sqrt{w^2+x^2+y^2+z^2}} \; . \; . \; . \; . \; (6).$$

49. Przekonawszy się, że normalny kształt kwaternionów jest

$$q=w+xi+yj+zk$$

możemy kwaterniony uważać jako liczby złożone wyższego gatunku, w skład których wchodzą trzy jednostki urojone i, j, k czyniące zadość równaniom (*1*) § 39 i od jednostki liczebnej *1*. Jednostki urojone podlegają prawu łącznościowemu, wyrażonemu równaniem:

$$ijk=(ij).k=i(jk),$$

nie podlegają prawu przemiennościowemu

$$ij=ji,$$

czynią zaś zadość równaniu

$$ai = ia,$$

jeżeli a jest liczbą rzetelną lub urojoną pospolitą.

Zamiast wyprowadzić wyżej wyłożone własności z poglądów geometrycznych możnaby było postawić je z góry jako określenie i badać własności liczb kształtu $q = w + xi + yj + zk$, posługując się formułami algiebry zwyczajnej (z temi ograniczeniami, które pociągają ze sobą postawione określenia) *).

50. Dwa kwaterniony

$$q = w + xi + yj + zk, \quad q_1 = w_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k$$

nazywają się równemi, gdy mają miejsce następujące równania

$$w = w_1, \quad x = x_1, \quad y = y_1, \quad z = z_1.$$

51. Przy pomocy formy normalnej kwaternionów można dowieść, że wypadki działań nad kwaternionami są zawsze kwaternionami.

a). Przyjmując, że zasadnicze własności dodawania liczb zwyczajnych (rzetelnych lub urojonych) mają też miejsce i dla kwaternionów, otrzymamy

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (w_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k) + (w_2 + x_2 i + y_2 i + z_2 k) = \\ &(w_1 + w_2) + x_1 i + x_2 i + y_1 j + y_2 j + z_1 k + z_2 k = \\ &(w_1 + w_2) + (x_1 + x_2) i + (y_1 + y_2) j + (z_1 + z_2) k. \end{aligned}$$

Z tego wypada bezpośrednio, że

$$q_1 + q_2 = q_2 + q_1$$
$$(q_1 + q_2) + q_3 = q_1 + (q_2 + q_3).$$

b). Opierając się na zwykłem określeniu odejmowania, otrzymamy

$$\begin{aligned} q_1 - q_2 &= (w_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k) - (w_2 + x_2 i + x_2 i + y\,j + z_2 k) = \\ &(w_1 - w_2) + (x_1 - x_2) i + (y_1 - y_2) j + (z_1 - z_2) k. \end{aligned}$$

Widzimy ztąd, że jeżeli

$$q_1 = q_2,$$

to

$$w_1 = w_2, \quad x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2, \quad z_1 = z_2. \quad (\S\ 50).$$

c). Przyjmując, że mnożenie kwaternionów jest rozdzielnościowem i opierając się na własnościach jednostek urojonych i, j, k, otrzymamy:

$$\begin{aligned} q_1 q_2 = &(w_1 w_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2) + (w_1 x_2 + x_1 w_2 + y_1 z_2 - z_1 y_2) i \\ &+ (w_1 y_2 - x_1 z_2 + y_1 w_2 + z_1 x_2) j + (w_1 z_2 + x_1 y_2 - y_1 x_2 + z_1 w_2) k. \quad . \quad . \quad . \quad (1). \end{aligned}$$

Oprócz tego, mamy

$$\left.\begin{aligned} q_1 q_2 &= (Sq_1 + Vq_1)(Sq_2 + Vq_2) = Sq_1 . Sq_2 + Sq_2 . Vq_1 + Sq_1 . Vq_2 + Vq_1 . Vq_2 . \\ q_2 . q_1 &= (Sq_2 + Vq_2)(Sq_1 + Vq_1) = Sq_1 . Sq_2 + Sq_2 . Vq_1 + Sq_1 . Vq_2 . + Vq_2 . Vq_1 . \end{aligned}\right\} . \ (2)$$

---

*) Stanowi to przedmiot algiebry formalnej, której zasady wskazaliśmy w przedmowie.

Widzimy ztąd, że dwa iloczyny q_1q_2 i q_2q_1 różnią się tylko ostatnim wyrazem.

Dla uwidocznienia tej różnicy wypiszemy ostatnie wyrazy równań (2)

$$Vq_1.Vq_2=-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)+(y_1z_2-z_1y_2)i+ \\ (z_1x_2-z_2x_1)j+(x_1y_2-x_2y_1)k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

$$Vq_2.Vq_1=-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)-(y_1z_2-z_1y_2)i- \\ (z_1x_2-z_2x_1)j-(x_1y_2-x_2y_1)k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

ztąd otrzymamy następujące dwa równania:

$$\left.\begin{array}{l} S(Vq_1.Vq_2)=S(Vq_2Vq_1) \\ V(Vq_1.Vq_2)=-V(Vq_2,Vq_2) \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Na zasadzie tych równań możemy równaniom (2) nadać następujący kształt:

$$\left.\begin{array}{l} q_1.q_2=Sq_1.Sq_2+Sq_2.Vq_1+Sq_1.Vq_2+S(Vq_1.Vq_2)+V(Vq_1.Vq_2) \\ q_2.q_1=Sq_1.Sq_2+Sq_2.Vq_1+Sq_1.Vq_2+S(Vq_1.Vq_2)-V(Vq_1.Vq_2) \end{array}\right\} \quad . \; . \quad (6)$$

Iloczyn

$$q_1.Kq_1=(Sq_1+Vq_1)\,(Sq_1-Vq_1)=(Sq_1)^2-(Vq_1)^2=Nq_1= \\ w_1{}^2+x_1{}^2+y_1{}^2+z_1=(Tq_1)^2. \quad \text{(porówn. § 34, 2).}$$

Przy tej sposobności dowiedziemy jednego twierdzenia algiebraicznego. Czyniąc

$$q_1.q_2=q_3,\; Kq_3=K(q_1.q_2)=Kq_2.Kq_1,$$

otrzymamy

$$q_3.Kq_3=Nq_3=q_1.q_2.Kq_2.Kq_1=Nq_1.Nq\;,$$

t. j.

$$w_3{}^2+x_3{}^2+y_3{}^2+z_3{}^2=(w_1{}^2+x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2)\,(w_2{}^2+x_2{}^2+y_2{}^2+z_2{}^2),$$

gdzie

$$\begin{array}{l} w_3=w_1w_2-x_1x_2-y_1y_2-z_1z_2 \\ x_3=w_1x_2+x_1w_2+y_1z_2-z_1y_2 \\ y_3=w_1y_2+y_1w_2+z_1x_2-x_1z_2 \\ z_3=w_1z_2+z_1w_2+x_1y_2-y_1x_2. \end{array}$$

Za pomocą formy normalnej kwaternionów, opierając się na prawie rozdzielnościowem tych liczb i prawie łącznościowem jednostek i, j, k możemy, dowieść [prawa łącznościowego mnożenia kwaternionów, wyrażonego równaniem

$$q_1q_2q_3=(q_1q_2).q_3=q_1.(q_2q_3).$$

Jakoż, kładąc

$$\begin{array}{l} q_1=w_1+x_1i+y_1j+z_1k \\ q_2=w_2+x_2i+y_2j+z_2k \\ q_3=w_3+x_3i+y_3j+z_3k \end{array}$$

i wykonywając działania wyrażone przez $(q_1q_2)q_3$ i $q_1(q_2q_3)$ otrzymamy wypadki identyczne.

d). Przez iloraz

$$q_3=\frac{q_2}{q_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

dwóch kwaternionów q_2 i q_1 określamy nowy kwaternion q_3, czyniący zadość równaniu

$$q_3 . q_1 = q_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Z tego ostatniego równania otrzymujemy

$$q_3 . q_1 . Kq_1 = q_2 Kq_1,$$

czyli

$$q_3 . Nq_1 = q_2 . Kq_1 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Z tego równania otrzymamy,

$$\begin{aligned} Nq_1 . w_3 &= w_1 w_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \\ Nq_1 . x_3 &= x_2 w_1 - w_2 x_1 + z_2 y_1 - y_2 z_1 \\ Nq_1 . y_3 &= y_2 w_1 - w_2 y_1 + z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ Nq_1 . z_3 &= w_1 z_2 - z_1 w_2 + y_2 x_1 - y_1 x_2 . \end{aligned}$$

Zbadamy teraz nieco bliżej własności dzielenia kwaternionów.

Z równania (*3*) otrzymujemy

$$\frac{q_2}{q_1} = q_3 = \frac{q_2 . Kq_1}{Nq_1}, \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

ztąd, kładąc $q_2 = 1$, otrzymamy

$$\frac{1}{q_1} = q_1^{-1} = \frac{Kq_1}{Nq_1}, \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

a tem samem

$$q_2 . \frac{1}{q_1} = q_2 . \frac{Kq_1}{Nq_1} = \frac{q_2 . Kq_1}{Nq_1} = \frac{q_2}{q_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Mamy też

$$q_1 . \frac{q_2}{q_3} = q_1 \frac{q_2 . Kq_3}{Nq_3} = \frac{q_1 . q_2 Kq_3}{Nq_3} = \frac{q_1 q_2}{q_3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$\frac{\left(\frac{q_1}{q_2}\right)}{q_3} = \frac{\left(\frac{q_1}{q_2}\right) . Kq_3}{Nq_3} = \frac{q_1 . Kq_2 . Kq_3}{Nq_2 \, Nq_3} =$$

$$= \frac{q_1 K(q_3 q_2)}{N(q_3 q_2)} = \frac{q_1}{q_3 q_2} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

$$\frac{q_1}{\left(\frac{q_2}{q_3}\right)} = \frac{q_1 . Nq_3}{q_2 Kq_3} = \frac{q_1 Nq_3 K(q_2 Kq_3)}{N(q_2 Kq_3)} = \frac{q_1 . K(q_2 Kq_3)}{Nq_2} =$$

$$\frac{q_1 K(Kq_3) Kq_2}{Nq_2} = \frac{q_1 q_3 Kq_2}{Nq_2} = \frac{q_1 . q_3}{q_2} \quad (9)$$

Z tego cośmy wyżej przytoczyli wynika, że

$$\frac{q_1}{q_2} . \frac{q_2}{q_3} = \frac{q_1}{q_3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

Jakoż

$$\frac{q_1}{q_2}\cdot\frac{q_2}{q_3}=q_1.\frac{1}{q_2}\cdot q_2\frac{1}{q_3}=q_1.\frac{1}{q_3}=\frac{q_1}{q_3}.$$

Niemniej prawdziwem jest też równanie

$$\frac{q_1}{q_2}\cdot\frac{q_2}{q_3}\cdot\frac{q_3}{q_3}=1,$$

lecz za to równania

$$q_1.\frac{q_2}{q_1}=q_3,\ \frac{q_1q_2}{q_1}=q_2,\ \frac{q_1}{\left(\frac{q_2}{q_3}\right)}=\frac{q_1}{q_2}\cdot q_3$$

nie są prawdziwemi.

Wyłożyliśmy tym sposobem teoryę pierwszych czterech działań nad kwaternionami, co się zaś tyczy wyższych działań, to dla szczupłości miejsca nie możemy ich wyłożyć i odsyłamy czytelnika do klasycznego dzieła *Hamiltona*: Elements of Quaternions, Section II. On Powers and Logarithms of Diplanar Quaternions; with some additional Formulas.

Twierdzenie o iloczynach promieni wodzących.

52. **Twierdzenie.** *Skalar iloczynu trzech promieni wodzących wtedy tylko zmienia swój znak, gdy zachodzi zmiana w porządku cyklicznym czynników t. j.*

$$\left.\begin{array}{l}+S\alpha\beta\gamma=+S\beta\gamma\alpha=+S\gamma\alpha\beta=\\ -S\alpha\gamma\beta=-S\beta\alpha\gamma=-S\gamma\beta\alpha.\end{array}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(1)$$

Jakoż

$$S\alpha\beta\gamma=S\alpha(\beta\gamma)=S\left\{\alpha(V\beta\gamma)\right\}+S\left\{\alpha(S\beta\gamma\right\}.$$

Lecz ponieważ $\alpha S\beta\gamma$ jest wektorem, więc $S\left\{\alpha(S\beta\gamma\right\}=o$, a przeto

$$S\alpha\beta\gamma=S\left\{\alpha(V\beta\gamma)\right\}=-S\left\{\alpha(V\gamma\beta)\right\}=-S\alpha\gamma\beta.$$

W taki sam sposób otrzymamy

$$S\alpha\gamma\beta=S\left\{V(\alpha\gamma).\beta\right\}=-S\gamma\alpha\beta=$$

$$S\left\{\beta.V(\alpha\gamma)\right\}=-S\beta\gamma\alpha.$$

$$S\alpha\beta\gamma=S\left\{V(\alpha\beta).\gamma\right\}=-S\beta\alpha\gamma.$$

Otrzymujemy więc

$$S\alpha\beta\gamma = S\beta\gamma\alpha = S\gamma\alpha\beta = -S\alpha\gamma\beta = -S\beta\alpha\gamma = -S\gamma\beta\alpha.$$

53. Oznaczając trzy promienie wodzące α, β, γ przez

$$x_1i + y_1j + z_1k,\ x_2i + y_2j + z_2k,\ x_3i + y_3j + z_3k$$

i wykonywając mnożenie otrzymamy

$$S\alpha\beta\gamma = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \ldots\ldots\ldots (1).$$

Jeżeli w tym wyznaczniku zmienimy porządek kolumn lub wierszy, to otrzymamy te związki, zachodzące pomiędzy skalarami iloczynu trzech promieni wodzących, któreśmy w poprzednim paragrafie podali.

Jeżeli $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$, to wyznacznik równa się zeru i będziemy mieli.

$$S\alpha\alpha\gamma = S\alpha^2\gamma = 0,$$

co też powinno być, gdyż $\alpha^2\gamma$ jest wektorem.

Jeżeli pomiędzy współczynnikami jednostek urojonych zachodzą trzy równania linijne

$$x_1x + x_2y + x_3z = o$$
$$y_1x + y_2y + y_3z = o$$
$$z_1x + z_2y + z_3z = o,$$

to ma też miejsce równanie

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = o,$$

oznaczające, że trzy promienie wodzące α, β, γ leżą na jednej płaszczyźnie.

Wypada ztąd, że jeżeli

$$S\alpha\beta\gamma = o \ldots\ldots (2)$$

to trzy promienia wodzące α, β, γ leżą na jednej płaszczyźnie.

Do tego wypadku możnaby było dojść w sposób następujący:

Wiemy (§ 44), że

$$V\alpha\beta = T\alpha T\beta \sin\varphi . \eta,$$

więc

$$S(V\alpha\beta . \gamma) = T\alpha T\beta \sin\varphi .\ S\eta\gamma.$$

Oznaczając przez kąt ϑ pomiędzy promieniami η i γ, otrzymamy

$$S(V\alpha\beta . \gamma) = S\alpha\beta\gamma = -T\alpha T\beta T\gamma \sin\varphi \cos\vartheta.$$

Lecz $T\gamma . \cos\vartheta$ jest długością prostopadłej, spuszczonej z końca promienia γ na płaszczyznę $(\alpha\beta)$, a że $T\alpha T\beta \sin\varphi$ oznacza podwójne pole trójkąta, zbudowanego na promieniach α, β, więc $S\alpha\beta\gamma$ *oznacza sześciokrotną objętość pyramidy, zbudowanej na promieniach wodzących* α, β, γ *jako na krawędziach i mającej wierzchołek w początku.* Jeśli zatem $S\alpha\beta\gamma = o$, to promienie wodzące leżą na jednej płaszczyźnie.

Odwrotnie, jeżeli α, β, γ leżą na jednej płaszczyźnie, to $V\alpha\beta$, jako prostopadły do płaszczyzny $(\alpha\beta)$, jest też prostopadłym i do promienia γ i dla tego

$$S(V\alpha\beta.\gamma)=S\alpha\beta\gamma=o.$$

Ztąd wypada, że równanie $S\alpha\beta\gamma=o$ służy jako cechę do wyznaczania, czy trzy promienie wodzące leżą na jednej płaszczyźnie.

54. Możemy zawsze wyznaczyć takie trzy wielkości x, y, z aby było

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta=x_4 i+y_4 j+z_4 k,$$

gdyż równanie to wychodzi na układ trzech następujących równań:

$$\begin{aligned} x_1 x+x_2 y+x_3 z&=x_4\\ y_1 x+y_2 y+y_3 z&=y_4\\ z_1 x+z_2 y+z_3 z&=z_4. \end{aligned}$$

Z powyższych równań otrzymujemy równanie

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}=o$$

które można napisać w następującym kształcie

$$\delta S\alpha\beta\gamma=\alpha S\beta\gamma\delta+\beta S\gamma\alpha\delta+\gamma S\alpha\beta\delta \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

służące do wyrażenia promienia wodzącego δ za pomocą trzech innych α, β, γ. Równanie to jest niezmiernie ważnem, bo daje nam możność rozłożenia dowolnego promienia wodzącego δ w kierunku trzech innych α, β, γ, nieleżących na jednej płaszczyźnie.

55. Wyprowadzimy teraz związki, zachodzące pomiędzy wektorami iloczynów trzech promieni wodzących.

Ponieważ

$$2V\alpha\delta=-2V\delta\alpha=\alpha\delta-\delta\alpha,$$

więc podstawiając w to równanie $V\beta\gamma$ zamiast δ, otrzymamy

$$2V(\alpha.V\beta\gamma)=\alpha.V\beta\gamma-V\beta\gamma.\alpha,$$

dodając do tego równania

$$o=\quad \alpha.S\beta\gamma-S\beta\gamma.\alpha,$$

otrzymamy

$$2V(\beta V\alpha\gamma)=\alpha\beta\gamma-\beta\gamma\alpha=(\alpha\beta+\beta\alpha)\gamma-\beta(\gamma\alpha+\alpha\gamma)= 2\gamma S\alpha\beta-2\beta S\gamma\alpha,$$

ztąd

$$V(\alpha V\beta\gamma)=\gamma S\alpha\beta-\beta S\gamma\alpha \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Dodając do tego równania tożsamość

$$V(\alpha S\beta\gamma)=\alpha S\beta\gamma,$$

otrzymujemy ważne równanie

$$V\alpha\beta\gamma=\alpha S\beta\gamma-\beta S\gamma\alpha+\gamma S\alpha\beta \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Zmieniając w tem równaniu α na γ i γ na α, otrzymamy

$$V\gamma\beta\alpha = \gamma S\beta\alpha - \beta S\alpha\gamma + \alpha S\gamma\beta,$$

ztąd wypada, że

$$V\alpha\beta\gamma = V\gamma\beta\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Z równania (*1*)

$$V(\alpha V\beta\gamma) = \gamma S\alpha\beta - \beta S\gamma\alpha$$

otrzymujemy

$$V(\beta V\gamma\alpha) = \alpha S\beta\gamma - \gamma S\alpha\beta$$

$$V(\gamma V\alpha\beta) = \beta S\gamma\alpha - \alpha S\beta\gamma,$$

a z nich

$$V(\alpha V\beta\gamma) + V(\beta V\gamma\alpha) + V(\gamma V\alpha\beta) = o \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Jeżeli w równaniu (*1*) zamienimy α na $V\alpha\beta$, to otrzymamy

$$V(V\alpha\beta . V\beta\gamma) = \gamma S(V\alpha\beta . \beta) - \beta S(\gamma . V\alpha\beta) = -\beta S\alpha\beta\gamma . \ (5).$$

Ponieważ na zasadzie (§ 52)

$$S(\alpha V\beta\gamma) + S(\beta V\gamma\alpha) + S(\gamma V\alpha\beta) = 3S\alpha\beta\gamma,$$

więc dodając to równanie do równania (*4*) otrzymamy

$$\alpha V\beta\gamma + \beta V\gamma\alpha + \gamma V\alpha\beta = 3S\alpha\beta\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

W § 54 podaliśmy wzór dla $\delta S\alpha\beta\gamma$, podamy teraz drugi wzór dla tego samego wyrażenia.

Łatwo widzieć, że

$$V(\gamma . \delta\alpha\beta) = V . \gamma(S\delta\alpha\beta + V\delta\alpha\beta) = \gamma S\delta\alpha\beta + V . \gamma(\delta S\alpha\beta - \alpha S\beta\delta + \beta S\delta\alpha)$$

$$= \gamma S\delta\alpha\beta + V\gamma\delta S\alpha\beta - V\gamma\alpha S\beta\delta + V\gamma\beta S\delta\alpha \quad . \quad . \quad (a)$$

Z drugiej znów strony

$$V(\gamma\delta . \alpha\beta) = V . (S\gamma\delta + V\gamma\delta)\ (S\alpha\beta + V\alpha\beta) = V\alpha\beta S\gamma\delta + V\gamma\delta S\alpha\beta + V . V\gamma\delta V\alpha\beta$$

$$= V\alpha\beta S\gamma\delta + V\gamma\delta S\alpha\beta - V . V\alpha\beta V\gamma\delta$$

$$= V\alpha\beta S\gamma\delta + V\gamma\delta S\alpha\beta - \delta S\alpha\beta\gamma + \gamma S\alpha\beta\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Porównywając wzory (*a*) i (*b*) otrzymamy

$$\delta S\alpha\beta\gamma = V\alpha\beta S\gamma\delta + V\beta\gamma S\alpha\delta + V\gamma\alpha S\beta\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

56. Dla czterech wektorów α, β, γ, δ ma oczywiście miejsce równanie

$$S\alpha\beta\gamma\delta = S(\alpha V\beta\gamma\delta),$$

lecz ponieważ (2, § 55)

$$V\beta\gamma\delta = \beta S\gamma\delta - \gamma S\beta\delta + \delta S\beta\gamma,$$

więc

$$S\alpha\beta\gamma\delta = S\alpha\beta . S\gamma\delta - S\alpha\gamma . S\beta\delta + S\alpha\delta . S\beta\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Na zasadzie tego wzoru otrzymamy

$$S\beta\gamma\delta\alpha = S\beta\gamma . S\alpha\delta - S\beta\delta . S\alpha\gamma + S\alpha\beta . S\gamma\delta$$

a zatem

$$S\alpha\beta\gamma\delta = S\beta\gamma\delta\alpha = S\gamma\delta\alpha\beta = S\delta\alpha\beta\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Ponieważ

$$\alpha\beta . \gamma\delta = (S\alpha\beta + V\alpha\beta)\ (S\gamma\delta + V\gamma\delta),$$

więc

$$S\alpha\beta\gamma\delta = S\alpha\beta . S\gamma\delta + S(V\alpha\beta . V\gamma\delta),$$

a ztąd

$$S(V\alpha\beta . V\gamma\delta) = S\alpha\beta\gamma\delta - S\alpha\beta . S\gamma\delta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

57. Podamy jeszcze dwa wzory dla iloczynu dowolnej liczby czynników, z których każdy jest promieniem wodzącym.

Wiemy (§ 45, 7), że

$$K(\alpha\beta\gamma \; . \; . \; . \; . \; \lambda\mu) = (-1)^n \mu\lambda \; . \; . \; . \; . \; \gamma\beta\alpha.$$

Równanie to możemy napisać w kształcie

$$S\alpha\beta\gamma \; . \; . \; \lambda\mu - V\alpha\beta\gamma \; . \; . \; \lambda\mu = (-1)^n \mu\lambda \; . \; . \; \gamma\beta\alpha,$$

a że

$$S\alpha\beta\gamma \; . \; . \; \lambda\mu + V\alpha\beta\gamma \; . \; . \; \lambda\mu = \alpha\beta\gamma \; . \; . \; . \; . \; \lambda\mu,$$

więc

$$2S\alpha\beta\gamma \; . \; . \; \lambda\mu = \alpha\beta\gamma \; . \; . \; \lambda\mu + (-1)^n \mu\lambda \; . \; . \; \gamma\beta\alpha$$

$$2V\alpha\beta\gamma \; . \; . \; \lambda\mu = \alpha\beta\gamma \; . \; . \; \lambda\mu - (-1)^n \mu\lambda \; . \; . \; \gamma\beta\alpha,$$

ztąd oczywiście wypływa, że

$$\left.\begin{array}{l} S\alpha\beta\gamma \; . \; . \; . \; \lambda\mu = (-1)^n S\mu\gamma \; . \; . \; . \; \gamma\beta\alpha \\ V\alpha\beta\gamma \; . \; . \; . \; \lambda\mu = -(-1)^n V\mu\lambda . \; . \; \gamma\beta\alpha \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

58. Podane wyżej wzory geometryczne jasno pokazują bogactwo prz e kształceń, którym podane być mogą iloczyny promieni wodzących, a że, jak później zobaczymy, każda forma takiego iloczynu ma pewne znaczenie geometryczne, więc łatwo widzieć, jak ważną rolę odgrywa rachunek kwaternionów w badaniach geometrycznych.

Dla wykazania rozmaitości przekształceń, którym podane być mogą najprostsze nawet wyrażenia, podamy dwa przykłady, które się często powtarzają przy badaniach geometrycznych.

Jeżeli O oznacza środek odcinka AA', to oznaczając OA przez α musimy OA' oznaczyć przez $-\alpha$. Nazywając promień wodzący dowolnego punktu P przez ϱ, otrzymamy, że dla wszystkich punktów płaszczyzny prostopadłej do odcinka AA' i prowadzonej przez jego środek O, ma miejsce następujące równanie

$$T(\varrho + \alpha) = T(\varrho - \alpha) \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Lecz równanie to możemy jeszcze napisać w kształcie

$$(\varrho + \alpha)^2 = (\varrho - \alpha)^2, \; . \; . \; . \; (2)$$

z którego otrzymujemy następujące równanie

$$\varrho^2 + 2S\varrho\alpha + \alpha^2 = \varrho^2 - 2S\varrho\alpha + \alpha^2,$$

czyli

$$S\varrho\alpha = o \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

Temu ostatniemu równaniu możemy nadać kształt

$$\varrho\alpha + \alpha\varrho = o, \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

który jest identycznym z równaniami

$$\alpha\varrho + K\alpha\varrho = o \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

$$SU\frac{\varrho}{\alpha}=0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (6)$$

$$TVU\frac{\varrho}{\alpha}=1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (7).$$

Każde z powyższych równań wyraża pewną własność płaszczyzny.

W ten sam sposób możemy też i równaniu kuli opisanej z punktu O promieniem równym $OA=T\alpha$ nadać następujące kształty:

$$T\varrho = T\alpha \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$$

$$\varrho^2=\alpha^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (2)$$

$$T\left(\frac{\varrho}{\alpha}\right)=1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (3)$$

$$\left(S\frac{\varrho}{\alpha}\right)^2-\left(V\frac{\varrho}{\alpha}\right)^2=1 \;.\;.\;.\; (4)$$

$$S[(\varrho+\alpha)\,(\varrho-\alpha)]=0 \;.\;.\;.\;.\; (5)$$

$$2TV\alpha\varrho=T[(\varrho+\alpha)\,(\varrho-\alpha)] \;.\; (6)$$

$$\varrho=(\varrho+\alpha)^{-1}.\alpha(\varrho+\alpha) \;.\;.\;.\; (7)$$

$$(\varrho+\alpha)^2-2S\alpha(\varrho+\alpha)=0 \;.\;.\; (8).$$

Każde z tych równań wyraża pewną własność kuli.

Zastosowania geometryczne wzorów wyżej podanych.

§ 59, 1) Niech będzie równoległobok $ABCD$ i oznaczmy $AB=DC$ przez α, $AD=BC$ przez β. Przy tem oznaczeniu będzie $AC=\alpha+\beta$, $BD=\beta-\alpha$.

Ponieważ

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2S\alpha\beta+\beta^2 \;.\;.\; (\S\ 45).$$

Uwzględniając (§ 44) i nadając temu równaniu kształt zwyczajny, otrzymamy

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB.BC\cos B,$$

znany wzór trygonometryczny.

2) Ponieważ

$$(\alpha-\beta)^2=\alpha-2S\alpha\beta+\beta^2,$$

więc

$$(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+\alpha^2+\beta^2,$$

czyli

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{DC}^2+\overline{AD}^2$$

3) Ponieważ

$$V(\beta+\alpha)\,(\beta-\alpha)=-V\beta\alpha+V\alpha\beta=2V\alpha\beta,$$

więc biorąc tensory obu stron tego równania otrzymamy twierdzenie następujące Pole równoległoboku, którego boki przyległe są równe i równoległe przekątnym danego równoległoboku jest dwa razy większem od pola tego równoległoboku.

4) $$S(\beta+\alpha)\,(\beta-\alpha)=\beta^2-\alpha^2,$$

z równania tego widzimy, że ten saklar wtedy tylko staje się zerem, gdy $\alpha^2=\beta^2$, t. j., gdy $T\alpha=T\beta$. Ztąd wniosek, że przekątne równoległoboku wtedy tylko przecinają się pod kątem prostym, gdy równoległobok jest ukośnikiem.

5) Oznaczając wielkości i kierunki boków trójkąta branych w jednym kierunku przez α, β, γ, przez λ, μ, ν—kąty zewnętrzne trójkąta, przez ε zaś—jednostkę długości w kierunku promienia prostopadłego do płaszczyzny trójkąta, otrzymamy (§ 47)

$$\frac{\beta}{\alpha}=\varepsilon^{\frac{2\lambda}{\pi}},\quad \frac{\gamma}{\beta}=\varepsilon^{\frac{2\mu}{\pi}},\quad \frac{\alpha}{\gamma}=\varepsilon^{\frac{2\nu}{\pi}},$$

zkąd $\beta=\varepsilon^{\frac{2\lambda}{\pi}}.\alpha$; $\gamma=\varepsilon^{\frac{2\mu}{\pi}}.\beta$; $\alpha=\varepsilon^{\frac{2\nu}{\pi}}.\gamma=\varepsilon^{\frac{2\lambda}{\pi}+\frac{2\mu}{\pi}+\frac{2\nu}{\pi}}.\alpha$;

ostatnie z tych równań pokazuje, że

$$\frac{2\lambda}{\varepsilon\pi}+\frac{2\mu}{\pi}+\frac{2\nu}{\pi}=1.$$

Równanie to jest tylko wtedy możliwem, gdy wykładnik potęgi ε jest wielokrotnością 4. Najprostszy przypadek ma miejsce wtedy, gdy

$$\lambda+\mu+\nu=2\pi.$$

ztąd wypada że summa kątów zewnętrznych trójkąta równa się czterem kątom prostym.

6) Wyrażenia $\varrho=\alpha\beta\alpha^{-1}$ (z którego bezpośrednio wypada $\varrho\alpha=\alpha\beta$). jest oczywiście promieniem wodzącym, którego tensor równa się tensorowi β.

Ponieważ

$$\beta\alpha\varrho=\beta\alpha\alpha\beta\alpha^{-1}=\alpha^2\beta^2\alpha^{-1},$$

więc

$$S\beta\alpha\varrho=\alpha^2\beta^2S\alpha^{-1}=o,$$

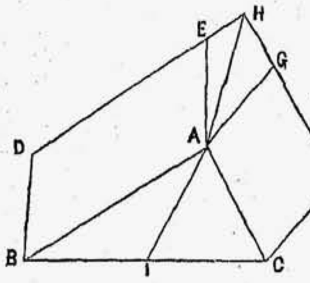
które to równanie pokazuje, że ϱ leży na płaszczyźnie promieni α i β.

Ponieważ dalej

$$S\alpha\varrho=S\varrho\alpha=S\alpha\beta\alpha^{-1}\alpha=S\alpha\beta,$$

więc promienie ϱ i β tworzą jednakowe kąty z promieniem α, lecz po stronach różnych, gdyż w przeciwnym razie ϱ i β zlewałyby się ze sobą. Jeśli więc promień α jest normalnym do jakiejś powierzchni odbijającej i β kierunkiem promienia padającego, to ϱ będzie kierunkiem promienia odbitego.

7) Niech ABC (*Fig. 14*) będzie trójkątem; $ABDE$, $ACFG$ dwoma równoległobokami, zbudowanemi na bokach AB i AC, H—punktem przecięcia



(*Fig. 14*).

się DE i GF; należy dowieść, że summa pól tych dwóch równoległoboków równa się polu równoległoboku, zbudowanego na prostych równych i równoległych BC i AH.

W tym celu czyniąc

$$AE=\alpha,\ AB=\beta,\ AC=\gamma,\ AG=\delta,$$

otrzymamy

$$AH=\alpha+x\beta,$$
$$AH.\beta=(\alpha+x\beta)\beta$$
$$VAH.\beta=V\alpha\beta\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

W ten sam sposób otrzymamy

$$AH=\delta+y\gamma$$
$$AH.\gamma=(\delta+y\gamma)\gamma$$
$$VAH.\gamma=V\delta\gamma\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

Odejmując od siebie równania (*1*) i (*2*) otrzymamy

$$VAH(\beta-\gamma)=V\alpha\beta-V\delta\gamma=V\alpha\beta+V\gamma\delta,$$

czyli

$$VAH.CB=VAE.AB+VAC.AG.$$

Biorąc tensory obu stron równania otrzymamy wyżej wypowiedziane twierdzenie.

Uwaga. Łatwo widzieć, że $V\alpha\beta$ i $V\gamma\delta$ mają jednakowe znaki. Dodając więc do siebie dwa równania (*1*) i (*2*) otrzymamy

$$VAH(\beta+\gamma)=V\alpha\beta+V\delta\gamma=V\alpha\beta-V\gamma\delta$$

t. j. że jeżeli przez I oznaczymy środek boku BC, to różnica pól równoległoboków $ABDE$ i $ACGF$ równa się polu równoległoboku, zbudowanego na AI i AH.

8) Summa kwadratów boków czworokąta równa się summie kwadratów przekątnych i poczwórnego kwadratu z prostej, łączącej środki przekątnych. Jakoż, oznaczając w czworokącie $ABCD$, AB przez α, AC przez β, AD przez γ, otrzymamy dla boków czworokąta następujące wartości: $AB=\alpha$, $BC=\beta-\alpha$, $CD=\gamma-\beta$, $AD=\gamma$, dla przekątnych zaś: $AC=\beta$, $BD=\gamma-\alpha$, dla prostej nakoniec IK, łączącej środki I i K przekątnych $IK=\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}$.

Lecz łatwo widzieć, że

$$\alpha^2+(\beta-\alpha)^2+(\gamma-\beta)^2+\gamma^2=\beta^2+(\gamma-\alpha)^2+(\alpha+\gamma-\beta)^2.$$

Biorąc tensory obu stron tego równania otrzymamy wypowiedziane twierdzenie.

9) Iloczyn promieni wodzących, przedstawiających trzy kolejno po sobie następujące boki czworokąta, wpisanego w koło jest promieniem wodzącym, idącym w kierunku boku czwartego.

Jakoż niech będzie czworokąt $ABCD$ wpisany w koło i niech $AB=\alpha$, $BC=\beta$, $CD=\gamma$ i $DA=\delta$ będą bokami tego czworokąta. Oznaczając przez α_1, β_1, γ_1 i δ_1 jednostki długości brane w kierunku boków otrzymamy

$$\alpha_1\beta_1=-cos\varphi+\eta sin\varphi,$$

gdzie φ oznacza kąt zewnętrzny czworokąta przy B, η—zaś jednostkę długości w kierunku prostopadłej do płaszczyzny czworokąta. Ponieważ kąt φ równa się kątowi wewnętrznemu przy D, więc oznaczając kąt zewnętrzny przy D przez ψ, otrzymamy

$$\alpha_1\beta_1=cos\psi+\eta sin\psi.$$

Lecz ponieważ

$$\frac{\delta_1}{\gamma_1}=cos\psi+\eta sin\psi,$$

więc

$$\delta_1=(cos\psi+\eta sin\psi)\gamma_1=\alpha_1\beta_1\gamma_1.$$

Wprowadzając tensory otrzymamy

$$\alpha\beta\gamma=\frac{T\alpha.T\beta.T\gamma}{T\delta}.\delta \quad . \; . \; . \; . \; (1).$$

Z tego równania otrzymujemy

$$\alpha\beta\gamma\delta=-T\alpha.T\beta T\gamma T\delta, \; . \; . \; . \; (2)$$

t. j., że iloczyn promieni wodzących, przedstawiających boki czworokąta wpisanego w koło, brane w jednym kierunku jest ilością rzetelną.

Wniosek I. Jeżeli punkt D coraz bardziej się zbliżając do punktu A ostatecznie z nim się zleje, to czworokąt wpisany przejdzie w trójkąt wpisany i bok DA w styczną do koła w punkcie A. Równanie (*1*) pokazuje wtedy, że iloczyn trzech promieni wodzących, przedstawiających kolejno po sobie następujące boki trójkąta jest promieniem wodzącym stycznym do koła opisanego w punkcie, który służył za punkt wyjścia dla obiegu trójkąta.

Wniosek II. Jeżeli w równaniu (2), napisanem w kształcie

$$AB.BC.CD.DA=-a^2$$

wyrazimy boki trójkąta przez różnice promieni wodzących boków, otrzymamy

$$(\beta-\alpha)\,(\gamma-\beta)\,(\delta-\gamma)\,(\alpha-\delta)=-a^2$$

Uważając teraz punkt D jako zmienny i oznaczając jego promień wodzący przez ϱ otrzymamy równanie koła w postaci

$$V(\beta-\alpha)\,(\gamma-\beta)\,(\varrho-\gamma)\,(\alpha-\varrho)=o$$

§ 60. 10) Znaleść warunek przecięcia się wysokości pyramidy trójściennej.

Niech $ABCD$ będzie dowolną pyramidą trójścienną i niech $OA=\alpha$, $CB=\beta$, $OC=\gamma$ będą krawędziami, wychodzącemi z puktu O. Wysokości pyramidy wychodzące z punktów A i B można co do kierunku przedstawić w kształcie $V\beta\gamma$, $V\gamma\alpha$. Jeżeli te dwie wysokości się przecinają, to trzy promienie wodzące $\beta-\alpha$, $V\beta\gamma$, $V\gamma\alpha$ leżą na jednej płaszczyźnie i na zasadzie (§ 53) będzie miało miejsce równanie

$$S(\beta-\alpha)V\beta\gamma V\gamma\alpha=S(\beta-\alpha)V(V\beta\gamma V\gamma\alpha)=o.$$

Lecz według § 55

$$V(V\beta\gamma V\gamma\alpha)=-\gamma S\beta\gamma\alpha,$$

więc

$$S(\beta-\alpha)V(V\beta\gamma V\gamma\alpha)=-S(\beta-\alpha)\gamma S\beta\gamma\alpha$$
$$=-S(\beta\gamma-\alpha\gamma)S\beta\gamma\alpha=(S\alpha\gamma-S\beta\gamma)S\beta\gamma\alpha=o,$$

a że $S\beta\gamma\alpha$ nie może być zerem, gdyż promienie α, β, γ nie leżą na jednej płaszczyźnie, więc musi być

$$S\beta\gamma=S\alpha\gamma,$$

czyli

$$(\gamma-\beta)^2-\gamma^2-\beta^2=(\gamma-\alpha)^2-\gamma^2-\alpha^2,$$

które to równanie przechodzi w

$$(\gamma-\beta)^2+\alpha^2=(\gamma-\alpha)^2+\beta^2,$$

t. j. w

$$BC^2+OA^2=AC^2+OB^2.$$

Równanie to pokazuje, że warunkiem przecięcia się wysokości czworościanu w jednym punkcie jest ten, aby summa kwadratów każdej pary krawędzi przeciwległych była zawsze jedną i tą samą.

11). Jeżeli $ABCD$ jest czworobokiem (skośnym lub płaskim), którego kolejno po sobie następującemi bokami są α, β, γ, δ, to iloczyn $\alpha\beta\gamma\delta$ jest kwaternionem, którego płaszczyzna jest styczną do kuli, opisanej około czworoboku w punkcie A, będącym początkiem obiegu.

Jakoż

$$AB.BC.CD.DA=(AB.BC.CA)\,(AC\,CD.DA):\,(TAC)^2$$

Lecz iloczyny w nawiasach wyrażają promienie wodzące, styczne do kół opisanych około trójkątów ABC i ACD (§ 59, 9, wn. II), więc oznaczając te styczne przez τ_1 i τ_2 otrzymamy

$$AB.BC.CD.DA=\tau_1\tau_2:\,(TAC)^2$$

Ponieważ wyżej wspomnione koła leżą na kuli opisanej około czworoboku $ABCD$, więc τ_1 i τ_2 leżą na płaszczyźnie stycznej do kuli w punkcie A, więc $\tau_1\tau_2:(TAC)^2$ wyraża kwaternion, którego płaszczyzna jest styczną do kuli w punkcie A.

c. b. d. o.

Wniosek. Oś kwaternionu $AB.BC.CD.DA$ jest oczywiście skierowaną wzdłuż promienia OA, więc

$$V(AB.BC.CD.DA)=x.OA$$

Uwaga. Poprzednie twierdzenie pozwala nam wpisać w daną kulę czworobok, którego boki są równoległe do czterech danych prostych.

61. 12). Oznaczając boki trójkąta ABC, uważane jako promienie wodzące przez α, β, γ otrzymamy

$$\beta=\gamma+\alpha,$$
$$\beta^2=\beta\gamma+\beta\alpha,$$

$$-S\beta^2 = S\beta\gamma + S\beta\alpha$$
$$(T\beta)^2 = -T\beta T\gamma \cos A - T\beta T\alpha \cos C,$$
a zachowując znakowanie, używane w trygonometryi, otrzymamy
$$b = a\cos C + c\cos A.$$

13). Mamy też
$$\gamma\beta = \gamma^2 + \gamma\alpha,$$
zkąd
$$V\gamma\beta = V\gamma^2 + V\gamma\alpha = V\gamma\alpha,$$
$$T\gamma T\beta \sin A.\eta = T\gamma T\alpha \sin(180^\circ - B)\eta = T\gamma T\alpha \sin B.\eta,$$
które to ostatnie równanie po wprowadzeniu zwykłego znakowania przechodzą i
$$b\sin A = a\sin B.$$

14). Nakoniec z równania
$$\alpha = \beta - \gamma$$
otrzymujemy
$$\alpha^2 = \beta^2 - 2S\beta\gamma + \gamma^2,$$
z którego wypada znany wzór trygonometryczny
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

62. 15). Niech α, β, γ oznaczają jednostki promieni wodzących, poprowadzonych od środka O kuli do wierzchołków A, B, C trójkąta sferycznego ABC.

Oznaczając kąty tego trójkąta przez A, B, C, boki zaś im przeciwległe przez a, b, c otrzymamy:
$$S\alpha\beta = -\cos c,\ S\beta\gamma = -\cos a,\ S\gamma\alpha = -\cos b$$
$$TV\alpha\beta = \sin c,\ TV\beta\gamma = \sin a,\ TV\gamma\alpha = \sin b.$$

Jeżeli teraz przez A', B', C', oznaczymy wierzchołki trójkąta biegunowego względem trójkąta ABC, to otrzymamy:
$$UV\alpha\beta = OC',\ UV\beta\gamma = OA',\ UV\gamma\alpha = OB'.$$

Ztąd wypada, że
$$S(UV\alpha\beta.UV\beta\gamma) = -\cos(\pi - B) = \cos B,$$
$$S(UV\beta\gamma.UV\gamma\alpha) = -\cos(\pi - C) = \cos C,$$
$$S(UV\gamma\alpha.UV\alpha\beta) = -\cos(\pi - A) = \cos A.$$

Widzimy też, że
$$TV(UV\alpha\beta.UV\beta\gamma) = \sin(\pi - B) = \sin B, \text{ i t. d.}$$

Lecz
$$S(V\alpha\beta.V\beta\gamma) = S[(V\alpha\beta + S\alpha\beta)V\beta\gamma] = S(\alpha\beta V\beta\gamma)$$
$$= S\alpha(\beta V\beta\gamma) = S\alpha V(\beta V\beta\gamma) = S\alpha(\gamma S\beta^2 - \beta S\beta\gamma) \text{ (§ 55, 1)}$$
$$= -S\alpha\gamma - S\alpha\beta S\beta\gamma = \cos b - \cos a \cos c.$$

Z drugiej znów strony
$$S(V\alpha\beta.V\beta\gamma) = TV\alpha\beta.TV\beta\gamma S(UV\alpha\beta.UV\beta\gamma) = \sin a \sin c \cos B,$$
otrzymujemy więc znany wzór trygonometryi sferycznej
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Do tego samego wypadku można też było dojść daleko prościej wychodząc z równania

$$\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\gamma},$$

Jakoż z tego równania otrzymujemy

$$S\frac{\beta}{\gamma}=S\frac{\beta}{\alpha}.S\frac{\alpha}{\gamma}+S(V\frac{\beta}{\alpha}.V\frac{\alpha}{\gamma}),$$

a z niego, po wprowadzeniu zwykłego znakowania

$$cosa=cosbcosc+sinbsincS(OC'.OB'),$$

czyli ostatecznie

$$cosa=cosbcosc+sinbsinc\, cosA.$$

16). Oznaczając przez α_1, β_1, γ_1 promienie wodzące OA', OB', OC', otrzymamy

$$V\alpha\beta.V\beta\gamma=\gamma_1 sinc.\alpha_1 sina=sinasincsinB.\beta,$$

gdyż trójkąt ABC jest biegunowym dla trójkąta $A'B'C'$, lecz z drugiej strony według § 55, 5

$$V(V\alpha\beta.V\beta\gamma)=-\beta S\alpha\beta\gamma=\beta T\alpha T\beta T\gamma sinc\; sin\varphi, \text{ (§ 53)}$$

gdzie φ oznacza kąt nachylenia promienia γ do płaszczyny $\alpha\beta$, więc uwzględniając, że $T\alpha=T\beta=T\gamma=1$, otrzymamy

$$sin\varphi=sinasinB.$$

W taki sam sposób otrzymamy

$$sin\varphi=sinbsinA.$$

Przychodzimy więc tym sposobem do znanego wzoru trygonometryi sferycznej

$$\frac{sinA}{sina}=\frac{sinB}{sinb}=\frac{sinC}{sinc}.$$

Zadania do rozdziału II.

1. Dowieść, że $S(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=2S\alpha\beta\gamma$. (Dowodzi się przez bezpośrednie mnożenie).

2. Dowieść, że $S(V\alpha\beta.V\beta\gamma.V\gamma\alpha)=-(S\alpha\beta\gamma)^2$. (Stosować § 55, 5 do $V(V\alpha\beta V\beta\gamma)$.

3. Dowieść, że $S[V(V\alpha\beta V\beta\gamma)V(V\beta\gamma V\gamma\alpha)V(V\gamma\alpha V\alpha\beta)]=-(S\alpha\beta\gamma)^4$.

4. Dowieść, że $S(V\beta\gamma V\gamma\alpha)=\gamma^2 S\alpha\beta-S\beta\gamma S\gamma\alpha$.

5. Dowieść, że $\alpha^2\beta^2\gamma^2=(V\alpha\beta\gamma)^2-(S\alpha\beta\gamma)^2$. (§ 57).

6. Dowieść, że $\alpha^2\beta^2\gamma^2=\alpha^2(S\beta\gamma)^2+\beta^2(S\gamma\alpha)^2+\gamma^2(S\alpha\beta)^2-(S\alpha\beta\gamma)^2-2S\alpha\beta S\beta\gamma S\gamma\alpha$. (§ 55, 2).

7. Dowieść, że $S\gamma V\alpha\beta\gamma=\gamma^2 S\alpha\beta$ (tak jak poprzednie).

8. Dowieść, że $(\alpha\beta\gamma)^2=\alpha^2\beta^2\gamma^2+2\alpha\beta\gamma S\alpha\beta\gamma$.

9. Dowieść, że $S[V(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)V(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)V(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)]=-4(S\alpha\beta\gamma)^2$

10. Dowieść, że $S(V\alpha\beta\gamma V\beta\gamma\alpha V\gamma\alpha\beta)=4S\alpha\beta S\beta\gamma S\gamma\alpha S\alpha\beta\gamma$.

11. Dowieść, że $S\alpha\eta S\beta\gamma\delta-S\beta\eta S\gamma\delta\alpha+S\gamma\eta S\delta\alpha\beta-S\delta\eta S\alpha\beta\gamma=o$.

12. Dowieść, że $(\alpha\beta\gamma)^2=2\alpha^2\beta^2\gamma^2+\alpha^2(\beta\gamma)^2+\beta^2(\alpha\gamma)^2+\gamma^2(\alpha\beta)^2-4\alpha\gamma S\alpha\beta S\beta\gamma$.

13. Dowieść, że $\delta V\alpha\beta\gamma+\alpha V\beta\gamma\delta+\beta V\gamma\delta\alpha+\gamma V\delta\alpha=4S\alpha\beta z\delta$.

14. Dowieść, że wyrażenic $V\alpha\beta V\gamma\delta+V\alpha\gamma V\delta\beta+V\alpha\delta V\beta\gamma$ jest wektorem. (§ 57).

15. Dowieść, że $\alpha^2\beta^2\gamma^2+(S\alpha\beta\gamma)^2=(V\alpha\beta\gamma)^2$

16. Dowieść, że $Sq^2=2(Sq)^2-(Tq)^2$.

17. Dowieść, że $Sq^3=(Sq)^3-3Sq(TVq)^3$.

18. Dowieść, że $Vq^3=[3(Sq)^2-(TVq)^2]Vq$.

19. Jakie twierdzenia geometryczne można wyprowadzić, z samego kształtu równania prostej $\varrho=(1-x)\alpha+x\beta$?

20. Jakie twierdzenia geometryczne wyraża równanie $\varrho=\alpha\cos\varphi+\beta\sin\varphi$.

21. Dowieść, że jeżeli na bokach trójkąta ABC, prostokątnego przy A zbudujemy kwadraty zewnętrzne $ABFG$, $ACHK$, to proste BK i FC przecinają się w punkcie O, leżącym na wysokości trójkąta, poprowadzonej przez punkt A.

22. Dowieść, że summa kwadratów trzech boków trójkąta równa się potrójnej summie kwadratów z prostych, łączących wierzchołki trójkąta z jego środkiem ciężkości.

23. Jeżeli a, b, c oznaczają długości krawędzi równoległościanu prostokątnego, wychodzących z jednego punktu, to kwadrat pola trójkąta, mającego swoje wierzchołki w końcach tych krawędzi równa się $1/4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$.

24. W każdym czworoboku płaskim lub skośnym iloczyn z przekątnych i dostawy kąta przez nie utworzonego równa się summie lub różnicy dwóch iloczynów z boków przeciwległych i dostawy kątów przez też boki utworzonych.

25. Dowieść, że jeżeli w pyramidzie trójgraniastej $OABC$ krawędzie przeciwległe są sobie równe, to proste łączące środki krawędzi przeciwległych są prostopadłe do tych krawędzi.

26. Jeżeli ze sześciu krawędzi przeciwległych pyramidy trójgraniastej, cztery z nich tworzą dwie pary prostych, przecinających się pod kątem prostym, to i trzecia para tworzy układ dwóch prostych, prostopadłych do siebie.

27. Z wierzchołka O pyramidy trójgraniastej $OABC$ poprowadzono do podstawy ABC prostą OD, tworzącą równe kąty ze ścianami OAB, OBC i OCA; dowieść, że pola OAB, OBC i OCA są proporcyonalne do pól DAB, DBC i DCA.

28. Niech $ABCD$ będzie pyramidą trójgraniastą, A', B', C', D', środkami ciężkości ścian BCD, CDA . . . Dowieść, że summa potęg dowolnego punktu względem kul, których średnice są AA', BB', CC', DD' i summa potęg tego samego punktu względem punktów, których średnicami są krawędzie pyramidy mają się do siebie w stosunku $2:3$.

29. Iloczyn promieni wodzących, przedstawiających boki pięciokątu skośnego, wpisanego w kulę jest promieniem wodzącym, stycznym do kuli w początku obiegu.

30. Oznaczając przez OA, OB, OC jeden układ trzech osi do siebie prostopadłych, przez OA', OB' i OC'—drugi taki układ, wyprowadzić znane wzory dla przekształcenia współrzędnych jednego układu we współrzędne drugiego układu. (W tym celu należy dowolną długość OM wyrazić przez współrzędne końca M i kwaterniony elementarne).