ROZDZIAŁ VII.

Powierzchnie drugiego rzędu.

103. Łatwo widzieć, że równanie skalarowe, w którem promień wodzący ϱ wchodzi w stopniu drugim wyraża powierzchnię drugiego rzędu, gdyż w ogólności każdy promień wodzący $\varrho = n\alpha$ przecina tę powierzchnię w dwóch punktach. Równanie takie zawiera trzy rodzaje wyrazów: 1) wyrazy od ϱ niezależne; 2) wyrazy kształtu $Sa\varrho b$, w których promień wodzący wchodzi w stopniu pierwszym; 3) wyrazy kształtu $Sa\varrho b\varrho c$, w których promień wodzący wchodzi w stopniu drugim.

We wszystkich tych wyrazach $a, b, c, \ldots$ oznaczają wiadome kwaterniony. Wyrazom drugiego rodzaju możemy nadać kształt

$$S\varrho ba = S\varrho Vba = S\delta\varrho,$$

gdzie δ oznacza stały wektor.

Podobnież i wyrazy trzeciego rodzaju można przekształcić. Jakoż łatwo widzieć, że

$$\begin{aligned} Sa\varrho b\varrho c &= Sca\varrho b\varrho = Sa'\varrho b\varrho = S[(Sa'+Va')\varrho(Sb+Vb)\varrho] = S[Sa'.\varrho.Sb.\varrho \\ &+ Va'.\varrho.Sb.\varrho + Sa'.\varrho.Vb.\varrho + Va'.\varrho.Vb.\varrho] = Sa'Sb.\varrho^2 + S[Va'.\varrho.Vb.\varrho] \\ &= Sa'Sb.\varrho^2 + SVa'.\varrho.SVb.\varrho - SVa'.Vb.\varrho^2 + SVa'.\varrho.S\varrho.Vb \quad (\S\ 55,1) \\ &= (Sa'Sb - SVa'Vb)\varrho^2 + 2SVa'.\varrho.SVb.\varrho. \end{aligned}$$

Oznaczając Va' przez α, Vb przez β i wprowadzając $\gamma = \frac{\delta}{2}$, otrzymamy, że ogólnym kształtem równania powierzchni drugiego rzędu będzie

$$2\Sigma S\alpha\varrho S\beta\varrho + A\varrho^2 + 2S\gamma\varrho = C \quad \ldots \quad (1).$$

Przeniosłszy początek O promieni wodzących do punktu E i uczyniwszy $OE = \varepsilon$, otrzymamy po podstawieniu $\varrho + \varepsilon$ zamiast ϱ.

$$\left.\begin{aligned} &2\Sigma S\alpha\varrho S\beta\varrho + A\varrho^2 \\ &+ 2\Sigma(S\alpha\varrho S\beta\varepsilon + S\beta\varrho S\alpha\varepsilon) + 2AS\varepsilon\varrho + 2S\gamma\varrho \\ &+ 2\Sigma S\alpha\varepsilon S\beta\varepsilon + A\varepsilon^2 + 2S\gamma\varepsilon - C \end{aligned}\right\} = 0 \quad \ldots \quad (1^a).$$

W tem równaniu znikną wyrazy, zawierające ϱ w stopniu pierwszym i powierzchnia będzie miała środek, jeżeli

$$\Sigma(\alpha S\beta\varepsilon + \beta S\alpha\varepsilon) + A\varepsilon + \gamma = 0 \quad \ldots \quad (2).$$

Równanie to w ogólności daje tylko jedną wartość dla ε, gdyż ono jest stopnia pierwszego względem ε (Rozdz. V); dowodzi to, że wogólności otrzymujemy jeden tylko środek powierzchni. Opuszczamy przypadek, gdy równanie (2) wyraża linię prostą lub płaszczyznę t. j. gdy powierzchnia jest walcową lub redukuje się do układu dwóch płaszczyzn, jak też i ten przypadek, gdy równanie (2) jest niemożliwem. t. j., gdy m (§ 87) jest zerem (paraboloida).

Wyznaczywszy wartość ε, obliczamy następnie

$$D=C-2S\gamma\varepsilon-A\varepsilon^2-2\Sigma S\alpha\varepsilon S\beta\varepsilon,$$

przez co równanie powierzchni drugiego stopnia przybierze kształt

$$A\varrho^2+2\Sigma S\alpha\varrho S\beta\varrho=D.$$

W przypadku, gdy $D=o$, powierzchnia wyrażona powyższem równaniem będzie stożkiem, gdyż jest jednorodnem względem ϱ; w przypadku zaś gdy D nie jest zerem, równanie powyższe wyraża elipsoidę lub hiperboloidę.

W przypadku D, różnego od zera, dzielimy całe powyższe równanie przez D, które to działanie możemy uważać jako równoznaczne ze zmianą tensorów stałych promieni wodzących α i β. Przyjmiemy, że dalsze badania odnoszą się do elipsoidy.

Otrzymamy ostatecznie, że równaniem powierzchni drugiego rzędu, mających środek będzie

$$g\varrho^2+2\Sigma S\alpha\varrho S\beta\varrho=1 \quad . \; . \; . \; . \; (3).$$

104. Odwrotnie możemy dowieść, że równanie powierzchni drugiego rzędu będzie kształtu 3 § 103. W tym celu należy powierzchnię drugiego rzędu uważać jako miejsce geometryczne punktów, dla których stosunek odległości od punktu stałego i od prostej stałej jest ilością stałą e.

Niech F będzie punktem stałym (początek) $FD=\delta$— prostą, prostopadłą do danej prostej stałej, niech dalej β oznacza jednostkę długości w kierunku stałej prostej M— dowolny punkt szukanego miejsca geometrycznego, $MF=\varrho$, MQ— odległość punktu M od stałej prostej.

Łatwo widzieć, że

$$MQ=FQ-\varrho=\delta+y\beta-\varrho=x\delta.$$

Działając na to równanie symbolem $S.\delta$ i uważając, że kierunki δ i β są do siebie prostopadłemi otrzymamy

$$\delta^2-S\delta\varrho=x\delta^2.$$

Lecz według danego warunku $T\varrho:T(MQ)=e$, czyli $\varrho^2:x^2\delta^2=e$, t. j. $\varrho^2=e^2x^2\delta^2$.

Podnosząc obie strony wyżej podanego równania do kwadratu, otrzymamy

$$\varrho^2\delta^2=e^2(\delta^2-S\delta\varrho)^2 \quad . \; . \; . \; . \; (1),$$

równanie, mające kształt równania 3 paragrafu poprzedniego.

105. Przecinając powierzchnię, której równanie otrzymaliśmy płaszczyzną, przechodzącą przez punkt F i stałą prostą otrzymamy przecięcie stożkowe. W przypadku, gdy $e<1$, krzywa przecięcia będzie elipsą i wtedy równaniu (1) możemy nadać inny kształt. W tym celu szukamy punktów przecięcia elipsy z prostą FD. Dla nich $\varrho=z\delta$, więc podstawiając te wartości w rów. (1) § pop. otrzymamy

$$z^2=e^2(1-z)^2,$$

zkąd

$$z'=\frac{e}{1+e},\quad z''=-\frac{e}{1-e}.$$

Z tych dwóch wartości jedna jest dodatnią, druga — ujemną, więc szukane punkty A i A' leżą po stronach przeciwnych względem punktu F i dla nich będzie

$$FA=\frac{e}{1+e}FD,\quad FA'=-\frac{e}{1-e}FD.$$

Oznaczając przez O środek prostej AA' otrzymamy

$$A'A=\frac{2e}{1-e^2}FD,\quad OF=\frac{e^2}{1-e^2}FD,\ \frac{OF}{A'A}=\frac{e}{2},$$

albo też, kładąc $T(A'A)=2a$, znajdziemy $T(OF)=ea$.

Kładąc

$$OF=\omega,\ OA=\alpha,\ OM=\sigma,$$

otrzymamy

$$\omega=\frac{e^2}{1-e^2}\delta=e\alpha,\quad \sigma=\omega+\varrho.$$

Jeśli te wartości podstawiemy w równanie (1) § 104, to po wykonaniu działań otrzymamy równanie elipsy, odniesionej do jej środka

$$\frac{\sigma^2}{a^2(e^2-1)}+\left(S\frac{\omega\sigma}{a^2\sqrt{e^2-1}}\right)^2=1,$$

106. Różniczkując równanie (3) § 103 otrzymamy

$$2gS\varrho d\varrho+2\Sigma(Sad\varrho S\beta\varrho+S\alpha\varrho S\beta d\varrho)=o$$
$$Sd\varrho[g\varrho+\Sigma(\alpha S\beta\varrho+\beta S\alpha\varrho)]=o.$$

Ponieważ (według § 74) wektor $g\varrho+\Sigma(\alpha S\beta\varrho+\beta S\alpha\varrho)$ jest normalnym do wierzchni w punkcie ϱ, więc

$$S(\omega-\varrho)[g\varrho+(\Sigma\alpha S\beta\varrho+\beta S\alpha\varrho)]=o,$$

gdzie ω oznacza wektor bieżący, jest równaniem płaszczyzny stycznej w punkcie ϱ; równanie to na zasadzie równania (3) § 103 przybiera kształt

$$S\omega[g\varrho+\Sigma(\alpha S\beta\varrho+\beta S\alpha\varrho)]=1.$$

Ponieważ $g\varrho+\Sigma(\alpha S\beta\varrho+\beta S\alpha\varrho)$ jest funkcyą wektoryalną linijną i przytem sprzężoną względem siebie, więc możemy ją oznaczyć symbolem $\varphi\varrho$ (§ 80).

Przez takie znakowanie, równanie płaszczyzny stycznej przybiera kształt

$$S\omega\varphi\varrho=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

równanie zaś powierzchni

$$S\varrho\varphi\varrho=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

Ponieważ $(\varphi\varrho)^{-1}$ czyni zadość równaniu (1) płaszczyzny stycznej i kierunek $(\varphi\varrho)^{-1}=(\varphi\varrho):(\varphi\varrho)^2$ jest kierunkiem normalnej, więc $T(\varphi\varrho)^{-1}$ jest odległością środka od płaszczyzny stycznej i $T\varphi\varrho$ jest odwrotnością tej odległości.

107. Przypuśćmy, że mamy układ płaszczyzn stycznych, przechodzących przez dany punkt A, dla którego $OA=\alpha$. Dla wszystkich punktów styczności będzie

$$S\alpha\varphi\varrho=1,$$

czyli na zasadzie $\varphi\varrho=\varphi'\varrho$

$$S\varrho\varphi\alpha=1,$$

t. j. że wszystkie punkty styczności leżą na płaszczyźnie, prostopadłej do stałego promienia $\varphi\alpha$, t. j. równoległej do płaszczyzny stycznej do powierzchni w punkcie, w którym promień OA przecina tę powierzchnię. Płaszczyzna ta, której przecięcie z powierzchnią daje krzywą, według której układ płaszczyzn styka się z powierzchnią jest płaszczyzną biegunową. Jeżeli ta płaszczyzna przechodzi przez punkt stały, którego promień wodzący jest β to otrzymamy $S\beta\varphi\alpha=1$, czyli $S\alpha\varphi\beta=1$. Zkąd wypada, że miejscem geometrycznem biegunów, których płaszczyzny biegunowe przechodzą przez punkt stały jes- płaszczyzna.

108. Wyznaczmy teraz równanie stożka mającego swój wierzchołek w punkcie A i stycznego do danej powierzchni drugiego rzędu.

Oznaczając przez ϱ promień wodzący jednego z punktów styczności znajdziemy, że równaniem linii stycznej odpowiedniej będzie

$$\omega=\alpha+z(\varrho-\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

i oprócz tego mają miejsce równania:

$$S\alpha\varphi\varrho=1,\ S\varrho\varphi\varrho=1.$$

Jeżeli w te dwa ostatnie równania podstawimy wartość dla ϱ, otrzymaną z równania (1) i następnie wyrugujemy z, to otrzymamy

$$S\omega\varphi\omega S\alpha\varphi\alpha-S\omega\varphi\omega-S\alpha\varphi\alpha=(S\omega\varphi\alpha)^2-2S\omega\varphi\alpha.$$

Dodając do obu stron tego równania po 1 otrzymamy równanie stożka stycznego do powierzchni i mającego wierzchołek w α w kształcie

$$S(\omega\varphi\omega-1)\,(S\alpha\varphi\alpha-1)-S(\omega\varphi\alpha-1)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Przenosząc początek promieni wodzących do wierzchołka stożka, t. j. kładąc $\omega=\omega+\alpha$, otrzymamy

$$(S\omega\varphi\omega+2S\omega\varphi\alpha+S\alpha\varphi\alpha-1)-(S\omega\varphi\alpha+S\alpha\varphi\alpha-1)^2=o$$

albo

$$S\omega\varphi\omega(S\alpha\varphi\alpha-1)-(S\omega\varphi\alpha)^2=o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2^a),$$

równanie jednorodne względem $T\omega$, wyraża więc stożek.

Jeżeli w równanie (2) zamiast α podstawiemy $x\alpha$ i następnie uczynimy $x=\infty$, otrzymamy

$$(S\omega\varphi\omega-1)\ S\alpha\varphi\alpha-(S\omega\varphi\alpha)^2=o\ .\ .\ .\ .\ (3)$$

jako równanie walca stycznego do powierzchni drugiego rzędu i którego tworząca jest równoległą do α.

109. Dla lepszego zbadania powierzchni $S\varrho\varphi\varrho=1$ starajmy się wyznaczyć miejsce geometryczne środków cięciw równoległych.

Dajmy, że cięciwy te są równoległe do stałego promienia wodzącego α. Oznaczając przez ω promień wodzący środka jednej z tych cięciw otrzymamy, że promieniami wodzącemi jej końców będą $\omega\pm x\alpha$; promienie te muszą czynić zadość równaniu $S\varrho\varphi\varrho=1$, t. j. muszą mieć miejsce równania

$$S(\omega\pm x\alpha)\varphi(\omega\pm x\alpha)=1,$$

z których, odejmując jedno od drugiego otrzymamy

$$S\omega\varphi\alpha=o\ .\ .\ .\ .\ (1).$$

Jestto równanie płaszczyzny, przechodzącej przez środek elipsoidy i normalnej do $\varphi\alpha$, a zatem równoległej do płaszczyzny stycznej, poprawadzonej do powierzchni w punkcie, w którym promień wodzący α przecina tę powierzchnię. Płaszczyzna ta, jak wiadomo, jest *płaszczyzną średnicową, sprzężoną z kierunkiem* α.

Niech BOC będzie płaszczyzną średnicową sprzężoną z kierunkiem $OA=\alpha$ i niech B i C będą dwoma punktami krzywej przecięcia się tej płaszczyzny z powierzchnią. Na zasadzie równania (1) mamy

$$S\beta\varphi\alpha=o \text{ lub } S\alpha\varphi\beta=o\ .\ .\ .\ .\ (2),$$

gdzie β oznacza promień wodzący punktu B. Widzimy ztąd, że płaszczyzna średnicowa sprzężona z kierunkiem OB przechodzi przez OA. Przyjmując, że ta ostatnia płaszczyzna przechodzi przez punkt C ($\varrho=\gamma$), znajdziemy

$$S\gamma\varphi\beta=o, \text{ lub } S\beta\varphi\gamma=o.$$

Lecz ponieważ równanie (2) ma miejsce dla wszystkich punktów krzywej przecięcia się powierzchni z płaszczyzną średnicową sprzężoną z kierunkiem α, więc ma też miejsce równanie

$$S\alpha\varphi\gamma=o,$$

Wypada ztąd, że płaszczyzną średnicową, sprzężoną z γ jest AOB. Widzimy więc, że w powierzchni drugiego rzędu można wyznaczyć nieskończenie wiele układów trzech promieni wodzących α, β, γ takich, że cięciwy równoległe do któregokolwiek z nich dzielą się na dwie równe części przez płaszczyznę, przechodzącą przez dwa pozostałe. Takie trzy promiene tworzą układ *półśrednic sprzężonyh.*

110. Wypada więc ostatecznie, że pomiędzy trzema kierunkami półśrednic sprzężonych α, β, γ mają miejsce równania:

$$S\alpha\varphi\beta = S\beta\varphi\alpha = S\beta\varphi\gamma = S\gamma\varphi\beta = S\gamma\varphi\alpha = S\alpha\varphi\gamma = o \quad . \quad . \ (1).$$

Z tych równań wynika, że promień γ jest prostopadłym do $\varphi\alpha$ $\varphi\beta$, jest więc kształtu $w V\varphi\alpha\varphi\beta$; widzimy też, że $\varphi\gamma$ jest prostopadłym do α i β, jest więc kształtu $w' V\alpha\beta$. Otrzymamy ztąd dwa szeregi następujących równań:

$$\alpha = u V\varphi\beta\varphi\gamma, \ \beta = v V\varphi\gamma\varphi\alpha, \ \gamma = w V\varphi\alpha\varphi\beta \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

$$\varphi\alpha = u' V\beta\gamma, \ \ \varphi\beta = v' V\gamma\alpha, \ \varphi\gamma = w' V\alpha\beta \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

Musimy jeszcze zwrócić uwagę na równanie

$$\gamma = \varphi\varphi^{-1}\gamma = w'\varphi^{-1} V\alpha\beta,$$

czyli

$$w'\varphi^{-1} V\alpha\beta = w V\varphi\alpha\varphi\beta \ . \ . \ . \ . \ (4).$$

Szereg wyżej podanych równań jest identycznym z równaniami otrzymanemi przy metodzie inwersyi Hamiltona (§ 85).

111. Posiłkując się średnicami sprzężonemi α, β i γ możemy łatwo otrzymać równanie elipsoidy we współrzędnych zwyczajnych. Wiemy, że każdy promień wodzący ϱ można wyrazić we funkcyi linijnej trzech innych promieni, nierównoległych do jednej płaszczyzny, więc oznaczając przez α, β i γ kierunki trzech osi sprzężonych, otrzymamy

$$\varrho = x\alpha + y\beta + z\gamma,$$

gdzie α, β i γ czynią zadość równaniom (1) § 110. Przyjmując jeszcze, że te promienie czynią zadość równaniom $S\alpha\varphi\alpha = 1$, $S\beta\varphi\beta = 1$, $S\gamma\varphi\gamma = 1$, znajdziemy, że α, β i γ są promieniami wodzącemi punktów leżących na powierzchni. Podstawiając wartość ϱ w równanie powierzchni i uwzględniając własności funkcyi φ znajdziemy

$$S\varrho\varphi\varrho = S(x\alpha + y\beta + z\gamma)\ (x\varphi\alpha + y\varphi\beta + z\varphi\gamma) = x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Lecz x, y i z oznaczają stosunki składowych ϱ wzdłuż α, β i γ do tych promieni wodzących, wypada więc ztąd, że jeżeli przez ξ, η i ζ oznaczemy wspórzędne końca promienia ϱ, odniesione do układu średnic sprzężonych, przez a, b, c zaś—długości połówek tych średnic, to otrzymamy równanie

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1.$$

112. Podamy teraz nowy kształt równania elipsoidy. W tym celu uczynimy

$$\varphi = -\psi^2 \ . \ . \ . \ . \ (1).$$

Zobaczemy, że taką funkcyę ψ możemy znaleść i że ona czyni zadość tym samym równaniom co i funkcya φ. Przez wprowadzenie tej funkcyi równanie elipsoidy przybiera kształt

$$S\varrho\psi^2\varrho = -1,$$

a że funkcya $\psi\varrho$ jest sprzężoną względem siebie samej, więc

$$S\varrho\psi^2\varrho = S\psi\varrho\psi\varrho = (\psi\varrho)^2 = -1,$$

czyli

$$T(\psi\varrho)=1 \ . \ . \ . \ . \ (2).$$

Porównywając ten wypadek z równaniem kuli o promieniu równym jedności

$$T\varrho=1$$

widzimy, że zachodzi analogia pomiędzy temi dwiema powierzchniami, a mianowicie, że przez przekształcenie linijne promieni wodzących, przedstawione funkcyą ψ, elipsoida przechodzi w kulę i naodwrót przez przekształcenie promieni kuli za pomocą funkcyi ψ^{-1}, kula przechodzi w elipsoidę.

Równania (*1*) (§ 110) przechodzą w następujące

$$S\alpha\psi^2\beta=S\psi\alpha\psi\beta=o \ . \ . \ . \ . \ ,$$

tak, że jeżeli λ, μ, ν są promieniami kuli, odpowiadającemi promieniom α, β, γ elipsoidy, to

$$S\lambda\mu=S\mu\nu=S\nu\lambda=o,$$

t. j. że promienie kuli, odpowiadające trzem średnicom sprzężonym tworzą układ trzech prostych, do siebie prostopadłych.

113. Dla wyrobienia sobie jasnego pojęcia o związku, zachodzącego pomiędzy funkcyami φ i ψ odnieśmy promień wodzący ϱ do trzech osi elipsoidy. Oznaczając przez i, j, k jednostki długości w kierunkach tych osi otrzymamy

$$\varphi=xi+yj+zk, \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

a że równanie elipsoidy, odniesionej do osi jest tylko szczególnym przypadkiem równań elipsoidy, odniesionej do układy trzech średnic sprzężonych, więc oznaczając przez a, b, c połówki osi elipsoidy, otrzymamy, że równaniem tej powierzchni odniesionej do osi będzie

$$S\varrho\varphi\varrho=\frac{(Si\varrho)^2}{a^2}+\frac{(Sj\varrho)^2}{b^2}+\frac{(Sk\varrho)^2}{c^2}=1 \ . \ . \ . \ . \ (2),$$

gdyż z równania (*1*) wypada, iż

$$Si\varrho=-x, \ Sj\varrho=-y, \ Sk\varrho=-z.$$

Równanie (2) pokazuje, że

$$\varphi\varrho=\frac{iSi\varrho}{a^2}+\frac{jSj\varrho}{b^2}+\frac{kSk\varrho}{c^2} \ . \ . \ . \ . \ (3).$$

Ponieważ $\varphi\varrho=-\psi\psi\varrho$, więc łatwo widzieć, że

$$\psi\varrho=-\left(\frac{iSi\varrho}{a}+\frac{jSj\varrho}{b}+\frac{kSk\varrho}{c}\right) . \ . \ . \ . \ (4).$$

Równanie to pokazuje, że funkcya $\psi\varrho$ rzeczywiście ma te własności, o których w poprzednim paragrafie wspomnieliśmy. Podamy jeszcze kilka wzorów, odnoszących się do funkcyj φ i ψ.

Z równanie (3) wypada, że

$$\varphi i=-\frac{i}{a^2},\ \varphi j=-\frac{j}{b^2},\ \varphi k=-\frac{k}{c^2},$$

a że $\varphi(mx)=x\varphi m$, więc

$$\varphi^2\varrho=\varphi\Sigma\frac{iSi\varrho}{a^2}=\Sigma\varphi i\,\frac{Si\varrho}{a^2}=-i\frac{Si\varrho}{a^4}-j\frac{Sj\varrho}{b^4}-k\frac{Sk\varrho}{c^4}\ .\ .\ .\ (5).$$

Z równania

$$\varrho=-\Sigma iSi\varrho$$

otrzymamy

$$\varphi^{-1}\varrho=-\varphi^{-1}\Sigma iSi\varrho=-\Sigma\varphi^{-1}iSi\varrho.$$

Lecz ponieważ $\varphi i=-\frac{i}{a^2}$, więc $\varphi^{-1}\varphi i=-\frac{\varphi^{-1}i}{a^2}$, $\varphi^{-1}i=-a^2i$, $\varphi^{-1}j=-b^2j$, $\varphi^{-1}k=-c^2k$
a tem samem

$$\varphi^{-1}\varrho=a^2iSi\varrho+b^2jSj\varrho+c^2kSk\varrho\ .\ .\ .\ .\ (6).$$

W taki sam sposób uwzględniając, że, $\psi i=\frac{i}{a}$, $\psi j=\frac{j}{b}$, $\psi k=\frac{k}{c}$, otrzymamy

$$\psi^{-1}\varrho=-(aiSi\varrho+bjSj\varrho+ckSk\varrho)\ .\ .\ .\ .\ (7).$$

Podstawiając w to równanie $\psi\varrho$ zamiast ϱ, otrzymamy

$$\varrho=\psi^{-1}\psi\varrho=-(aiSi\psi\varrho+bjSj\psi\varrho+ckSk\psi\varrho)\ .\ .\ .\ (8).$$

114. W poprzednim paragrafie przypuściliśmy, że w elipsoidzie zawsze istnieją trzy osie do siebie prostopadłe. Przypuszczenie takie zawsze jest uzadnionem, gdyż za pomocą sposobu, podanego w §§ 93 i 94 można zawsze utworzyć równanie stopnia 3-go, służące do wyznaczenia wielkości i kierunku tych osi.

Jeżeli równanie elipsoidy ma kształt $S\varrho\varphi\varrho=1$ i jednym z pierwiastków równania stopnia 3-go (§ 93) jest s_1, to dla kierunku osi ϱ_1, odpowiadającego temu pierwiastkowi mamy

$$\varphi\varrho_1=s_1\varrho_1\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

zkąd

$$S\varrho_1\varphi\varrho_1=s_1\varrho_1{}^2=-s_1a^2\ .\ .\ .\ .\ (2),$$

gdzie a oznacza połowę osi, idącej w kierunku ϱ_1.

Z równania (1) wypada, że

$$\varphi^{-1}\varrho_1=\frac{1}{s_1}\varrho_1\ .\ .\ .\ .\ (3),$$

a zatem w przypadku, gdy równanie elipsoidy będzie kształtu

$$S\varrho\varphi^{-1}\varrho=1\ .\ .\ .\ .\ (4),$$

wtedy szukając połowy osi w kierunku ϱ_1 znajdziemy

$$1=S\varrho_1\varphi^{-1}\varrho_1=\frac{1}{s_1}\varrho_1{}^2=-\frac{1}{s_1}a_1{}^2,\ s_1=-a_1\ .\ .\ .\ .\ (5),$$

to jest, że w tym przypadku pierwiastki równania stopnia 3-go, brane ze znakami przeciwnemi wyrażają połowy osi elipsoidy.

115. Jeżeli w równaniu symbolicznem stopnia 3-go (§ 88,6) zamienimy φ na $\varphi+h$, a tem samem w równaniu (§ 88) s na $s+h$, to pierwiastki tego równania, a więc i kwadraty połów osi elipsoidy (*4*) § pop. powiększą się o h, a zatem różnice kwadratów tych połów pozostaną bez zmiany, czyli, że

$$S\varrho(\varphi+h)^{-1}\varrho=1 \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

jest kształtem równania wszystkich elipsoid współogniskowych z elipsoidą (4, § 114), gdzie h oznacza parametr zmienny. Z tego kształtu równania można wyprowadzić twierdzenie, że dwie powierzchnie współogniskowe, mające punkta wspólne przecinają się pod kątem prostym.

Jakoż, niech

$$S\varrho(\varphi+h')^{-1}\varrho=1 \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

będzie równaniem drugiej powierzchni współogniskowej z powierzchnią (1). Jeżeli ϱ jest promieniem wodzącym punktu, wspólnego obu powierzchniom, to normalne do tych powierzchni w punkcie wspólnym będą

$$\nu=(\varphi+h)^{-1}\varrho \text{ i } \nu'=(\varphi+h')^{-1}\varrho.$$

Ztąd

$$S\nu\nu'=S(\varphi+h')^{-1}\varrho(\varphi+h)^{-1}\varrho=S\varrho(\varphi+h)^{-1}(\varphi+h')^{-1}\varrho,$$

gdyż funkcye $(\varphi+h)^{-1}$ i $(\varphi+h')^{-1}$ są sprzężonemi.

Lecz ponieważ mamy równanie symboliczne

$$(\varphi+h)^{-1}(\varphi+h')^{-1}=\frac{1}{h-h'}\left[(\varphi+h')^{-1}-(\varphi+h)^{-1}\right],$$ (Porów. Tait. Quater. tłom. franc. T. I str. 290)

więc

$$S\nu\nu'=\frac{1}{h-h'}S\varrho\left[(\varphi+h')^{-1}-(\varphi+h)^{-1}\right]\varrho=o \quad . \; . \; . \; (3),$$

a to na zasadzie równań (*1*) i (2).

Równanie (*3*) zawsze ma miejsce z wyjątkiem przypadku gdy $h=h'$ t. j. gdy powierzchnie (*1*) i (2) się zlewają ze sobą. Dowiedliśmy więc, że powierzchnie współogniskowe drugiego rzędu przecinają się ze sobą pod kątem prostym.

116. Niech

$$\left.\begin{array}{l} S\varrho\varphi\varrho=1 \\ S\alpha\varrho=o \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

będą równaniami przecięcia elipsoidy z płaszczyzną, przechodzącą prze jej środek i starajmy się wyznaczyć osie tej elipsy, t. j. kierunki, w których $T\varrho$ ma największą i najmniejszą wartość, czyli $dT\varrho=o$.

Różniczkując równania (*1*) otrzymamy

$$S\varphi\varrho d\varrho=o,\ S\alpha d\varrho=o\ .\ .\ .\ .\ (2),$$

opró cz tego, warunek największości i najmniejszości daje

$$dT\varrho=S\varrho d\varrho=o\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (3).$$

Równania (*2*) i (*3*) pokazują, że $\varphi\varrho$, α i ϱ są prostopadłemi do $d\varrho$ a zatem leżą na jednej płaszczyźnie i dla tego czynią zadość równaniu

$$S\alpha\varrho\varphi\varrho=o\ .\ .\ .\ .\ (4).$$

To ostatnie równanie dowodzi, że tylko dwa kierunki czynią jemu zadość i że te kierunki są do siebie prostopadłemi. Jakoż, podstawiając w równanie (*4*) zamiast ϱ wektor $\varrho'=\alpha\varrho$, ($\alpha\varrho$ jest wektorem prostopadłym do α i ϱ, gdyż na zasadzie rów. *1* α jest prostopadłym do ϱ) otrzymamy

$$S\varrho'\alpha\varphi\varrho'=S\varphi\varrho' V\varrho'\alpha=S\varrho'\varphi(V\varrho'\alpha),$$

lecz $V\varrho'\alpha=-V\alpha\varrho'=-\alpha^2\varrho$, zkąd $S\varrho'\varphi(V\varrho'\alpha)=-\alpha^2 S\alpha\varrho\varphi\varrho=o.$
t. j., że kierunek ϱ', prostopadły do ϱ również czyni zadość równaniu (*4*).

Pozostaje nam teraz rozwiązać układ równań (*1*) i (*4*). Drugie równanie układu (*1*) możemy napisać w kształcie

$$S\alpha(\varphi^{-1}\varphi\varrho)=o \text{ lub } S\varphi\varrho\varphi^{-1}\alpha=o,$$

zkąd widzimy, że wektor $\varphi\varrho$ jest prostopadłym do $\varphi^{-1}\alpha$ i do $\alpha\varrho$, a tem samem czyni zadość równaniu

$$\varphi\varrho=xV(\varphi^{-1}\alpha.\alpha\varrho).$$

Operując symbolem $S\varrho.$, otrzymamy

$$1=x.\varrho^2 S\alpha\varphi^{-1}\alpha,$$

Zkąd, na zasadzie (§ 52,2)

$$\varrho^2\varphi\varrho=\varrho-\alpha\frac{S\varrho\varphi^{-1}\alpha}{S\alpha\varphi^{-1}\alpha}$$

$$\varrho=\frac{S\varrho\varphi^{-1}\alpha}{S\alpha\varphi^{-1}\alpha}(1-\varrho^2\varphi)^{-1}\alpha$$

i ostatecznie (rów *1*)

$$S\alpha(1-\varrho^2\varphi)^{-1}\alpha=o\ .\ .\ .\ .\ (5).$$

Temu ostatniemu równaniu możemy nadać kształt

$$S\alpha\left(\varphi-\frac{1}{\varrho^2}\right)^{-1}\alpha=o\ \ .\ .\ .\ (5^a).$$

Posiłkując się wzorami (§ 87,1), w których podstawiamy $g=-\frac{1}{\varrho^2}$ otrzymamy

$$m_g\left(\varphi-\frac{1}{\varrho^2}\right)=m\varphi^{-1}-\frac{1}{\varrho^2}(m_2-\varphi)+\frac{1}{\varrho^4}.$$

Stosując ten wzór do równania (*5*^{a}) znajdziemy

$$m\varrho^4 S\alpha\varphi^{-1}\alpha-\varrho^2 S\alpha(m_2-\varphi)\alpha+\alpha^2=o\ .\ .\ .\ .\ (6).$$

Rozwiązując to równanie względem ϱ^2 otrzymamy kwadraty połów osi przecięcia.

Z powyższego równania wypada, że

$$\varrho_1{}^2\varrho_2=\frac{\alpha^2}{mS\alpha\varphi^{-1}\alpha},$$

a zatem pole przecięcia, jeżeli ono jest eliptycznem będzie

$$\frac{\pi T\alpha}{\sqrt{-mS\alpha\varphi^{-1}\alpha}}$$

Równanie to dowodzi, że miejscem geometrycznem normalnych przecięć centralnych elipsoidy, mających jednakowe pola będzie stożek

$$S\alpha\varphi^{-1}\alpha=C\alpha^2.$$

Jeżeli pierwiastki $\varrho_1{}^2$ i $\varrho_2{}^2$ są równemi sobie, t. j. gdy

$$(m_2\alpha^2-S\alpha\varphi\alpha)^2=4m\alpha^2S\alpha\varphi^{-1}\alpha,$$

to przecięcie będzie kołem.

Widzieliśmy (§ 94,3), że funkcyi $\varphi\varrho$ można nadać kształt

$$\varphi\varrho=l\varrho+m V(i+nk)\varrho(i-nk);$$

oznaczając zatem przez λ i μ wektory $\frac{i+nk}{\sqrt{m}}$ i $\frac{i-nk}{\sqrt{m}}$, otrzymamy

$$\varphi\varrho=l\varrho+V\lambda\varrho\mu,$$

równaniu więc powierzchni drugiego rzędu możemy przedstawić w kształcie

$$l\varrho^2+S\lambda\varrho\mu\varrho=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

lub na zasadzie wzoru (§ 56,1), w kstałcie

$$2S\lambda\varrho S\mu\varrho+(l-S\lambda\mu)\varrho^2=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Kształt ten pokazuje, że *jeżeli dwa przecięcia kołowe powierzchni drugiego rzędu nie leżą na płaszczyznach równoległych, to one leżą na tej samej kuli, środek której przypada we środku powierzchni.* Jakoż przecinając powierzchnię (*8*) płaszczyzną $S\lambda\varrho=o$ lub $S\mu\varrho=o$, otrzymamy równanie kuli

$$(l-S\lambda\mu)\varrho^2=1.$$

117. Zbadamy teraz tworzące prostolinijne powierzchni drugiego rzędu. Niech $S\varrho\varphi\varrho=1$ będzie równaniem powierzchni. Tworząca prostolinijna, przechodząca przez punkt α powierzchni i równoległa do promienia ω będzie kształtu $\alpha+x\omega$. Ta ostatnia wartość podstawiona w równanie powierzchni czyni mu zadość przy każdem znaczeniu x. Otrzymujemy tym sposobem równanie

$$S\alpha\varphi\alpha+2xS\alpha\varphi\omega+x^2S\omega\varphi\omega=1,$$

które się rozpada na dwa inne

$$S\alpha\varphi\omega=o \text{ i } S\omega\varphi\omega=o \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Pierwsze z tych równań jest równaniem płaszczyzny średnicowej, sprzężonej z kierunkiem α, drugie jest równaniem stożka asymptotycznego.

Przecięcie zatem tej płaszczyzny z powierzchnią stożka da nam kierunki tworzących prostolinijnych.

Równania (1) dają

$$y\varphi\omega = V\alpha\omega,$$

gdzie y jest skalarem, który należy przedewszystkiem obliczyć. Operujmy na powyższe równanie dwoma symbolami $S.\beta$ i $S.\gamma$, gdzie β i γ oznaczają dowolne promienie wodzące, nie leżące na jednej płaszczyźnie z wektorem α. Otrzymamy

$$S\beta y\varphi\omega = S\beta V\alpha\omega,\ S\gamma y\varphi\omega = S\gamma V\alpha\omega,$$

a że $S\beta\varphi\omega = S\omega\varphi\beta$, $S\beta V\alpha\omega = -S\omega V\alpha\beta$, ... , więc

$$S\omega(y\varphi\beta + V\alpha\beta) = o,\ S\omega(y\varphi\gamma - V\gamma\alpha) = o \quad . \ . \ . \quad (2).$$

Wypada ztąd, że

$$z\omega = V(y\varphi\beta + V\alpha\beta)\,(y\varphi\gamma - V\gamma\alpha) \quad . \ . \ . \quad (2^a),$$

a ponieważ $S\alpha\varphi\omega = S\omega\varphi\alpha = o$, więc

$$S\varphi\alpha(y\varphi\beta + V\alpha\beta)\,(y\varphi\gamma - V\gamma\alpha) = o,$$

czyli

$$y^2 S\varphi\alpha\varphi\beta\varphi\gamma + yS\varphi\alpha(V\alpha\beta\varphi\gamma - \varphi\beta V\gamma\alpha) - S\varphi\alpha V\alpha\beta V\gamma\alpha = o,$$

a opierając że na (§ 66,3) jako też na wzorze $V(V\alpha\beta V\beta\gamma) = -\beta S\alpha\beta\gamma$, otrzymamy

$$my^2 S\alpha\beta\gamma + yS\varphi\alpha(V\alpha\beta\varphi\gamma - \varphi\beta V\gamma\alpha) - S\alpha\varphi\alpha S\alpha\beta\gamma = o.$$

Lecz łatwo widzieć, że współczynnik przy y równa się zeru. Jakoż wiemy (§ 55, 1), że $V\alpha V\beta\gamma = \gamma S\alpha\beta - \beta S\alpha\gamma$, więc

$$V(V\alpha\beta.\varphi\gamma) = -\beta S\varphi\gamma.\alpha + \alpha S\varphi\gamma.\beta,$$

$$-V(\varphi\beta.V\gamma\alpha) = -\alpha S\varphi\beta.\gamma + \gamma S\varphi\beta.\alpha,$$

$$V(V\alpha\beta.\varphi\gamma) - V(\varphi\beta.V\gamma\alpha) = \gamma S\varphi\beta.\alpha - \beta S\varphi\gamma.\alpha.) = V(\varphi\alpha V\beta\gamma);$$

współczynnik zatem przy y równa się $S\varphi\alpha\varphi\alpha V\beta\gamma = o$.

Tym sposobem równanie wyżej podane przechodzi w

$$my^2 = S\alpha\varphi\alpha = 1$$

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Z równania (2^a) posiłkując się wzorem (§ 85,2) i przekształcając je w sposób podobny do wyżej podanego otrzymamy

$$z\omega = my^2\varphi^{-1}V\beta\gamma + yV\varphi\alpha V\beta\gamma - \alpha S\alpha V\beta\gamma,$$

które to równanie, stosownie do znaku y daje nam tworzącą jednego lub drugiego układu; w równaniu tem zresztą $my^2 = 1$.

W wyżej podanym wzorze $V\beta\gamma$, jest wektorem dowolnym, lecz nie prostopadłym do α, gdyż β, γ i α nie leżą na jednej płaszczyźnie. Oznaczając go przez θ, otrzymamy

$$z\omega = \varphi^{-1}\theta - \alpha S\alpha\theta \pm \frac{V(\varphi\alpha.\theta)}{\sqrt{m}} = \varphi^{-1}\theta S\alpha\varphi\alpha - \alpha S\alpha\theta \pm \frac{V(\varphi\alpha.\theta)}{\sqrt{m}}$$

$$= V(\varphi\alpha V\alpha\varphi^{-1}\theta) \pm \frac{V(\varphi\alpha.\theta)}{\sqrt{m}}.$$

Ten ostatni wzór można jeszcze przedstawić w kształcie

$$z\omega = \varphi^{-1}[V(\alpha V\varphi\alpha.\theta)] \pm \frac{V(\varphi\alpha.\theta)}{\sqrt{m}},$$

jak się o tem łatwo przekonać możemy przekształcając pierwszy wyraz drugiej strony za pomocą wzoru $V\alpha V\beta\gamma = \gamma S\alpha\beta - S\alpha\gamma$.

Podstawiając $\tau = V(\varphi\alpha.\theta)$, otrzymamy wzór

$$z\omega = \varphi^{-1} V\alpha\tau \pm \sqrt{\frac{\tau}{m}},$$

w którym z przyczyny $\theta = V\beta\gamma$, $S\tau\varphi\alpha = o$.

Każdy z podanych wzorów dla $z\omega$ rozwiązuje zadanie o tworzących prostolinijnych powierzchni drugiego rzędu.

118. Dla lepszego wyjaśnienia wzorów i metod w tym rozdziale wyłożonych podamy zadania odnoszące się do powierzchni i linij drugiego rzędu.

Zadanie 1. Na elipsoidzie znaleść taki punkt, ażeby płaszczyzna styczna w tym punkcie do elipsoidy poprowadzona, odcięła od trzech osi równe odcinki (liczone od środka).

Równanie płaszczyzny stycznej w danym punkcie ϱ jest

$$S\omega\varphi\varrho = 1.$$

Jeśli więc trzy osie elipsoidy przyjmiemy za kierunki i, j, k, to oznaczając długość odcinka przez p otrzymamy

$$pSi\varphi\varrho = 1,$$

albo podstawiając w to równanie współrzędne zwyczajne, znajdziemy (§ 113).

$$p\frac{x}{a^2} = 1.$$

W taki sam sposób otrzymamy $\frac{py}{b^2} = 1$, $\frac{pz}{c^2} = 1$, tak że

$$\frac{x}{a^2} = \frac{y}{b^2} = \frac{z}{c^2} = \frac{1}{p} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

gdyż $x + y + z = p$.

Zadanie 2. Znaleść odległość środka elipsoidy od płaszczyzny stycznej.