PIERWSZE ZASADY KWATERNIONÓW HAMILTONA.

PIERWSZE ZASADY

KWATERNIONÓW HAMILTONA

NAPISAŁ

Dr Karol Hertz.

ALGIEBRA KWATERNIONÓW:

Linia prosta i płaszczyzna.—Powierzchnie i linie drugiego rzędu.

WARSZAWA.

DRUKIEM BRACI JEŻYŃSKICH (dawniej J. UNGRA)

przy ulicy Nowolipki Nr 9.

1887.

Дозволено Цензурою.
Варшава, 5 Августа 1886 года.

ZASŁUŻONEMU NA POLU PRZEMYSŁU KRAJOWEGO,

WUJOWI SWOJEMU

IZ. K. POZNAŃSKIEMU

W ŁODZI

pracę tę poświęca

Autor.

PRZEDMOWA.

Nasza literatura matematyczna dotychczas nie posiada żadnej pracy o kwaternionach, pomimo że metoda ta coraz więcej zyskuje zwolenników na stałym lądzie Europy, jak o tem świadczą liczne prace, które w ostatnich latach ukazały się we Francyi i Niemczech. Niniejsza książeczka ma na celu temu brakowi zaradzić. Nie mając zamiaru ubiegać się za oryginalnością, starałem się jedynie o jasność i dostępność wykładu, by rozniecić w młodzieży naszej zamiłowanie do pięknej metody angielskiego uczonego i szczęśliwym będę, jeżeli skromna moja praca przyczyni się do rozkrzewiania znajomości kwaternionów w naszym kraju. Na pierwszy początek ograniczyłem się wyłożeniem algiebry kwaternionów i jej zastosowań do linii prostej, płaszczyzny, powierzchni i linij drugiego rzędu. Jeżeli jednak moje zajęcia zawodowe na to mi pozwolą, to postaram się w jak najkrótszym czasie wydać, jako dalszy ciąg niniejszej pracy, zastosowanie kwaternionów do badań nad krzywizną linij i powierzchni, do cynematyki i fizyki matematycznej.

Przy układaniu niniejszej książki korzystałem z następujących prac:

P. G. Tait. „An elementary Treatise on Quaternions“ 2-gie wyd.

G. A. Laisant. „Introduction à la méthode des Quaternions.“

H. Uverzagt. „Theorie der goniometrischen und longimetrischen Quaternionen.“

F. Graefe. „Vorlesungen uber die Theorie der Quaternionen.“

R. W. Hamilton. „Elements of Quaternions.“

H. Hankel. „Vorlesungen über die complexen Zahlen.“

„Kelland and Tait“. „Introduction on Quaternions.“ 2-gie wydanie.

Kończąc tę przedmowę poczuwam się w obowiązku wynurzenia mojego podziękowania Zarządowi Kasy imienia Józefa Mianowskiego, który mi umożebnił wydanie niniejszej pracy.

K. Hertz.

Warszawa, d. 8 Sierpnia 1886 r.

WSTĘP.

Zwykle określają matematykę jako naukę o ilościach, nowsze jednak badania wykazały, że to określenie jest zbyt ograniczone i że matematykę należy uważać za naukę, wyprowadzającą z danych praw wszelkie możliwe wnioski i przedstawiającą je w postaci, która umożebnia porównywanie ich z bezpośrednią obserwacyą. Takie określenie pozwala zastosować matematykę do wszelkiego rodzaju badań, zarówno fizycznych jak i moralnych*). Rzecz jasna, że z powodu różnorodności dziedzin ludzkiego dociekania, gałęzie matematyki z konieczności będą bardzo liczne, lecz pomimo tej różnorodności treści, same sposoby wyprowadzania wniosków z danych praw będą bardzo do siebie zbliżone. Otóż teorya tych działań bez względu na treść przedmiotów, poddanych działaniu, stanowi tak nazwaną *matematykę formalną*. Ramy niniejszej pracy nie pozwalają mi wdawać się w bliższy rozbiór tej pięknej nauki, która ma przed sobą bardzo świetną przyszłość**), lecz z powodu blizkiego jej związku z kwaternionami muszę w tem miejscu kilka słów o niej powiedzieć. Znane działania algiebry zwyczajnej podlegają pewnym prawom (prawu przemienności owemu, łącznościowemu, rozdzielnościowemu i t. p.), wyprowadzonym w założeniu, że przedmioty, poddane działaniu, są wielkościami. Lecz wyobraźmy sobie, że prawa, w powyższy sposób otrzymane, zachowujemy (z pewnemi ograniczeniami) i wtedy, gdy przedmioty, poddane działaniom matematycznym, nie są ilościami, lecz ra-

*) *B. Peirce.* Linear Associative Algebra. American Journal of Mathematics T. IV. Zesz. 2.

**) Ciekawego czytelnika odsyłam do następujących prac:

H. Grassman. Lineale Ausdehnungslehre. 2-gie wyd. r. 1872.

R. Hamilton. Przedmowa do „Lectures on Quaternions."

H. Hankel. Vorlesungen über die complexen Zahlen.

O. Stolz. Vorlesungen über allgemeine Arithmetik.

B. Peirce. l. c.

czej jakiemiś pomyślanemi stosunkami, zachodzącemi pomiędzy przedmiotami, już to rzeczywistemi, już też idealnemi. Wykazało się, że związki czysto formalne, przy tem założeniu otrzymane, wyrażają własności, odpowiadające naturze przedmiotów badanych, tak że matematyka formalna może służyć do wyprowadzania nowych prawd w dziedzinie, nic wspólnego z ilościami nie mającej. Wyjaśnię to przykładem: działania zwyczajnej algiebry, zastosowane do przedmiotów przestrzennych (punktów, odcinków prostych, części pól i objętości) lub do przedmiotów, wchodzących w zakres mechaniki (siły, pary sił, momenty), dają wypadki w zupełności odpowiadające różnym twierdzeniom geometryi i mechaniki, tak że działania te mogą służyć do wykrywania prawd geometrycznych i mechanicznych. Taka metoda badań ma pewną wyższość nad metodą geometryi analitycznej. Ta ostatnia bowiem, dla wykazania wzajemnych związków pomiędzy położeniami danych przedmiotów musi się posługiwać przedmiotami pomocniczemi, które nic wspólnego z danemi przedmiotami nie mają (osie współrzędnych) i za ich pomocą otrzymywać *ilości* (współrzędne), ktore poddaje działaniom algiebry zwyczajnej, znalezione zaś wypadki tłómaczyć geometrycznie. Łatwo widzieć, że przy takich poszukiwaniach rachunek zasłania sobą prawdy geometryczne i często redukuje się do pracy czysto mechanicznej. Jestto ważna wada, którą starano się usunąć za pomocą rozmaitych metod analityczno-geometrycznych. Matematyka formalna wolna jest od tej wady, gdyż ona poddaje działaniom same przedmioty badane i otrzymane wypadki odrazu się przedstawiają w postaci geometrycznej.

Poszukiwania podobnego rodzaju dały początek nowym liczbom złożonym (liczby urojone wyższe), składającym się z różnych jednostek. Oddawna już znanem jest zastosowanie liczb złożonych zwyczajnych, kształtu $a+bi$ do geometryi na płaszczyźnie, lecz dopiero *Williamowi Hamiltonowi* udało się w r. 1843 znaleść liczby i działania nad niemi, które z wielką korzyścią mogą być zastosowywane do badań geometrycznych w przestrzeni. Liczby te, *Hamilton* nazwał *kwaternionami,* jako zawierające cztery różne jednostki. Pierwszą systematyczną pracą nad nowemi liczbami i ich zastosowaniami wydał on w r. 1853, pod tytułem „Lectures on Quaternions," praca ta jednak z powodu szczególnej swej formy nie mogła się przyczynić do rozpowszechnienia nowej metody na stałym lądzie. Dopiero pośmiertna praca znakomitego astronoma irlandzkiego, wydana przez jego syna pod tytułem „Elements of Quaternions" wykazała całą ważność i doniosłość nowych liczb. W obu przytoczonych tu pracach obok czystej teoryi znajdujemy bardzo znaczną liczbę zastosowań do wszystkich gałęzi matematyki.

W tem miejsu muszę wspomnieć, że niezależnie od *Hamiltona* i w formie daleko ogólniejszej *Hermann Grasmann* do podobnych przyszedł rezultatów, prace jednak tego uczonego, z powodu zbyt oderwanej postaci, w której je przedstawił—nie były dostępnemi dla szerszego koła matematyków i dla tego nie znalazły należnego uznania.

Obok *Hamiltona* wielkie zasługi dla metody kwaternionów położył profesor uniwersytetu oksfordzkiego *P. G. Tait*, który metodę tę stosował do różnych zadań fizyki matematycznej.

ERRATA.

Str.	*wiersz*	*zamiast*	*powinno być*
5	18 od góry	$\alpha U\alpha$	$a U\alpha$
12	18 "	α_1	m_1
33	9 od dolu	Uq^1	Uq^{-1}
81	17 "	$(Tq)^2=x_0{}^2+x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2$	$qq=x_0{}^2-(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)$.
114	15 "	$\varphi=$	$\varrho=$