ROZDZIAŁ III.

Geometrya linii prostej i płaszczyzny.

Równanie linii prostej.

63. Jeżeli przez α oznaczamy dany promień wodzący, przez ϱ zaś dowolny promień wodzący, przechodzący przez początek, to jak wiadomo, równaniem linii prostej, przechodzącej przez początek i równoległej do α będzie

$$\varrho = x\alpha.$$

Z tego równania otrzymujemy

$$V\alpha\varrho = o \text{ lub } U\varrho = U\alpha.$$

Zasadniczą własnością wszystkich tych równań jest ta, że są one wszystkie linijnemi względem ϱ i że ϱ zależy tylko od jednego zmiennego skalaru. Ostatnie dwa równania dają się łatwo sprowadzić do pierwszego, gdyż równania $V\alpha\varrho = o$ może tylko mieć miejsce, gdy $\alpha\varrho = \pm y$, gdzie y jest liczbą zwyczajną. Z tego równania wypada

$$\varrho = \frac{\pm y}{\alpha} = \mp \frac{y}{(T\alpha)^2} . \alpha = x\alpha.$$

Równanie dwóch prostych, do siebie równoległych i przechodzących przez końce promieni β_1 i β_2 są, jak wiadomo

$$\varrho = \beta_1 + x_1\alpha \text{ i } \varrho = \beta_2 + x_2\alpha.$$

Równania te mogą być zastąpione przez

$$V\alpha(\varrho - \beta_1) = o, \quad V\alpha(\varrho - \beta_2) = o.$$

1. *Zadanie.* Znaleść rownanie prostej, przechodzącej przez koniec promienia β i prostopadłej do promienia α.

Równanie tej prostej będzie miało kształt

$$\varrho = \beta + z\gamma,$$

gdzie γ oznacza promień wodzący prostopadły do α i leżący na płaszczyźnie, $\alpha\beta$. Ponieważ γ, α i $V\alpha\beta$ są do siebie prostopadłemi, więc $\gamma = y\alpha V\alpha\beta$, a zatem

$$\varrho = \beta + x\alpha V\alpha\beta$$

2. *Zadanie.* Wyznaczyć długość prostopadłej, spuszczonej z końca B promienia β na prostą $\varrho = \gamma + x\alpha$.

Dla rozwiązania tego zadania łączymy dowolny punkt M danej prostej z punktem B promieniem $BM=\delta$. Otrzymamy wtedy

$$\delta=\gamma+x\alpha-\beta.$$

Jeśli zatem promień δ jest prostopadłym do α, to $S\delta\alpha=o$, będzie więc

$$S(\gamma+x\alpha-\beta)\alpha=x\alpha^2+S(\gamma-\beta)\alpha=o,$$

zkąd

$$x\alpha=-\alpha^{-1}S(\gamma-\beta)\alpha.$$

Otrzymujemy więc, że promień wodzący δ dany jest równaniem

$$\delta=\gamma-\beta-\alpha^{-1}S(\gamma-\beta)\alpha,$$

z którego możemy obliczyć $-\delta^2=(T\delta)^2=S(\beta-\gamma)\delta$.

3. *Zadanie.* Znaleść równanie prostej, przechodzącej przez koniec danego promienia wodzącego α i prostopadłej do dwóch innych promieni równoległych do β i γ.

Łatwo widzieć, że równaniem szukanej prostej będzie

$$\varrho=\alpha+xV\beta\gamma.$$

4. *Zadanie.* Znaleść wyrażenie dla promienia wodzącego $P_1P_2=\delta$, będącego odległością dwóch prostych, nie na jednej płaszczyźnie leżących i wyrażonych równaniami

$$\varrho=\beta_1+x_1\alpha_1, \varrho=\beta_2+x_2\alpha_2.$$

Oznaczając promienie wodzące punktów P_1 i P_2 odpowiednio przez ϱ_1 i ϱ_2 otrzymamy

$$\delta=\varrho_2-\varrho_1=\beta_2-\beta_1+x_2\alpha_2-x_1\alpha_1=xV\alpha_1\alpha_2$$ (porównaj zadanie poprzednie).

Operując znakiem $S\alpha_1\alpha_2$ otrzymamy

$$S\delta\alpha_1\alpha_2=S(\beta_2-\beta_1)\alpha_1\alpha_2=xS(V\alpha_1\alpha_2.\alpha_1\alpha_2)$$
$$=x(V\alpha_1\alpha_2)^2,$$

zkąd

$$xV\alpha_1\alpha_2=\frac{S(\beta_2-\beta_1)\alpha_1\alpha_2}{V\alpha_1\alpha_2}.$$

Wyznaczyliśmy tym sposobem promień $\delta=\varrho_2-\varrho_1=\beta_2-\beta_1+x_2\alpha_2-x_1\alpha_1$. Dla wyznaczenia promienia wodzącego końca P_1 promienia δ operujemy znakiem $V\alpha_2$, przez co otrzymamy

$$x_1=\frac{V(\beta_2-\beta_1-\delta)\alpha_2}{V\alpha_1\alpha_2}$$

$$\varrho_1=\beta_1+\frac{V(\beta_2-\beta_1-\delta)\alpha_2}{V\alpha_1\alpha_2}.\alpha_1$$

W taki sam sposób otrzymamy

$$\varrho_2=\beta_2+\frac{V(\beta_2-\beta_1-\delta)\alpha_1}{V\alpha_1\alpha_2}.\alpha_2$$

Dla otrzymania długości promienia δ mamy wzór

$$T(\varrho_2-\varrho_1)=TxV\alpha_1\alpha_2=\frac{TS(\beta_2-\beta_1)\alpha_1\alpha_2}{TV\alpha_1\alpha_2}$$
$$=TSUV\alpha_1\alpha_2(\beta_2-\beta_1).$$

Równanie płaszczyzny.

64. Równaniem płaszczyzny, przechodzącej przez początek promieni wodzących i prostopadłej do promienia α będzie

$$S\alpha\varrho=o, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gdzie ϱ oznacza promień wodzący dowolnego punktu płaszczyzny.

Jeżeli płaszczyzna przechodzi przez koniec promienia β i jest prostopadłą do α, to $\varrho-\beta$ jest promieniem leżącym na płaszczyźnie, jeśli ϱ oznacza promień wodzący dowolnego punktu tej płaszczyzny, który zatem jest prostopadłym do α, a zatem

$$S\alpha(\varrho-\beta)=o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1^a)$$

będzie równaniem płaszczyzny.

Równaniu (1^a) możemy nadać kształt

$$S\alpha\varrho=S\alpha\beta,$$

zkąd otrzymujemy wniosek, że jeżeli równaniem płaszczyzny będzie

$$S\alpha\varrho=k$$

to α jest promieniem wodzącym prostopadłym do płaszczyzny.

65. 1. *Zadanie*. Znaleść równanie płaszczyzny, przechodzącej przez koniec δ i równoległej do prostych $\varrho=\alpha_1+x\beta_1$, $\varrho=\alpha_2+x\beta_2$.

Oznaczając przez ϱ promień wodzący dowolnego punktu płaszczyzny widzimy, że promień $(\varrho-\delta)$ leży na tej płaszczyźnie, a że na niej możemy poprowadzić dwie proste równoległe do β_1 i β_2, więc na zasadzie (§ 53) równaniem płaszczyzny będzie

$$S\beta_1\beta_2(\varrho-\delta)=o.$$

Wartość δ wyznacza położenie płaszczyzny. Jeżeli $\delta=\alpha_1$, to płaszczyzna zawiera prostą $\varrho=\alpha+x\beta_1$, jeżeli $\delta=\alpha_2$, to płaszczyzna przechodzi przez prostą $\varrho=\alpha_2+x\beta_2$.

2. *Zadanie*. Znaleść równanie płaszczyzny, przechodzącej przez końce a, b, c promieni wodzących α, β, γ.

Oznaczając przez ϱ promień wodzący dowolnego punktu płaszczyzny otrzymamy, że $\varrho-\alpha$, $\varrho-\beta$, $\varrho-\gamma$ leżą na płaszczyźnie, więc

$$S(\varrho-\alpha)\,(\varrho-\beta)\,(\varrho-\gamma)=o.$$

Równanie to po wykonaniu działań przybiera kształt

$$S\varrho(V\alpha\beta+V\beta\gamma+V\gamma\alpha)-S\alpha\beta\gamma=o$$

Ponieważ ono ma kształt $S\varrho\alpha=k$, więc na zasadzie § 65. $(V\alpha\beta+V\beta\gamma+V\gamma\alpha)$ jest promieniem wodzącym, prostopadłym do płaszczyzny

Oznaczając przez δ długość prostopadłej, spuszczonej z początku na płaszczyznę otrzymamy

$$\delta = x(V\alpha\beta + V\beta\gamma + V\gamma\alpha)$$

Dla wyznaczenia x, wstawiamy wartość δ w poprzednio podane równanie płaszczyzny, przez co otrzymamy

$$xSV(\alpha\beta + V\beta\gamma + V\gamma\alpha)^2 - S\alpha\beta\gamma = o,$$

ztąd

$$x = \frac{S\alpha\beta\gamma}{(V\alpha\beta + V\beta\gamma + V\gamma\alpha)^2},$$

$$\delta = \frac{S\alpha\beta\gamma}{V\alpha\beta + V\beta\gamma + V\gamma\alpha}.$$

Ponieważ zaś (§ 53)

$$-S\alpha\beta\gamma = 6 \textit{objętości piramidy } (Oabc) = (2 \textit{ pole } abc),$$

więc

$$V\alpha\beta + V\beta\gamma + V\gamma\alpha$$

równa się podwójnemu polu podstawy piramidy, wziętemu ze znakiem odjemnym.

Uwaga. Pola trzech ścian piramidy przylegających do wierzchołka O piramidy wyrażają się odpowiednio przez tensory wektorów

$$\tfrac{1}{2}V\alpha\beta,\ \tfrac{1}{2}V\beta\gamma,\ \tfrac{1}{2}V\gamma\alpha,$$

pole zaś podstawy piramidy wyraża się przez tensor jednego z trzech wektorów:

$$\tfrac{1}{2}V(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha),\ \tfrac{1}{2}V(\alpha-\beta)(\gamma-\beta),\ \tfrac{1}{2}V(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma),$$

które to wyrażenie rozwinięte dają

$$-\tfrac{1}{2}(V\alpha\beta + V\beta\gamma + V\gamma\alpha).$$

Wypada ztąd, że summa algiebraiczna promieni wodzących, prostopadłych do ścian piramidy i których długości są proporcyonalne do pól tychże ścian równa się zeru. Łatwo też widzieć, że to samo ma miejsce dla każdego wielościanu. W hydrostatyce twierdzenie to stosuje się do wypadkowej ciśnień na ściany wielościanu płynu, nie poddanego działaniu sił zewnętrznych.

3. *Zadanie.* Znaleść wyrażenie dla promienia wodzącego, będącego odległością końca B promienia β od płaszczyzny $S\alpha(\varrho-\gamma) = o$.

Równaniem prostopadłej, spuszczonej z punktu B na tę płaszczyznę będzie

$$\varrho = \beta + x\alpha.$$

Ponieważ promień wodzący spodka tej prostopadłej musi czynić zadość równaniu płaszczyzny, więc

$$S\alpha(\beta + x\alpha - \gamma) = o,$$

czyli

$$-x\alpha^2 = S\alpha(\beta-\gamma),$$

zkąd

$$\delta = x\alpha = -\alpha^{-1} S\alpha(\beta - \gamma).$$

Biorąc $T\delta$ znajdziemy odległość punktu B od płaszczyzny.

4. *Zadanie.* Znaleść równanie płaszczyzny, przechodzącej przez początek i jednakowo nachylonej do trzech danych prostych.

Oznaczając przez α, β, γ jednostki promieni, idących w kierunku trzech danych prostych, równanie zaś płaszczyzny przez $S\delta\varrho = o$, otrzymamy

$$S\alpha\delta = S\beta\delta = S\gamma\delta = x,$$

gdzie $-x:T\delta$ oznacza wstawę kąta nachylenia.

Lecz na zasadzie (§ 55,7)

$$\delta S\alpha\beta\gamma = (V\alpha\beta + V\beta\gamma + V\gamma\alpha)x,$$

a zatem równaniem szukanej płaszczyzny będzie

$$S\varrho(V\alpha\beta + V\beta\gamma + V\gamma\alpha) = o,$$

wstawa zaś kąta nachylenia równa się

$$-\frac{S\alpha\beta\gamma}{T(V\alpha\beta + V\beta\gamma + V\gamma\alpha)}.$$

5. *Zadanie.* Znaleść równanie linii wspólnego przecięcia się dwóch płaszczyzn $S\alpha\varrho = o$ i $S\beta\varrho = o$, przechodzących przez początek.

Ponieważ linia ta jest prostopadłą do promieni wodzących α i β, więc szukanem równaniem będzie

$$\varrho = xV\alpha\beta.$$

6. *Zadanie.* Znaleść równanie wspólnego przecięcia się płaszczyzn

$$S\alpha(\varrho - \gamma) = o \text{ i } S\beta(\varrho - \delta) = o.$$

Łatwo widzieć, że to wspólne przecięcie będzie miało kierunek $V\alpha\beta$ i dla tego do zupełnego wyznaczenia tej prostej dość będzie wyznaczyć jeden z jej punktów. W tym celu wybierzmy punkt, w którym prosta wspólnego przecięcia się płaszczyzn przecina płaszczyznę wektorów α i β i niech $\varrho = u\alpha + v\beta$ będzie promieniem wodzącym tego punktu.

Operując najprzód znakiem $S.\alpha$, następnie znakiem $S.\beta$, otrzymamy

$$S\alpha\gamma = u\alpha^2 + vS\alpha\beta, \quad S\beta\delta = v\beta^2 + uS\alpha\beta,$$

wyznaczymy u i v, przez co równanie szukanej prostej przyjmie kształt

$$\varrho = u\alpha + v\beta + xV\alpha\beta.$$

Uwaga I. Łatwo widzieć, że równaniem płaszczyzny, przechodzącej przez początek wektorów i prostopadłej do wspólnego przecięcia się dwóch płaszczyzn $S\alpha\varrho = o$ i $S\beta\varrho = o$ będzie

$$S\varrho V\alpha\beta = o.$$

Uwaga II. Równaniem płaszczyzny, przechodzącej przez początek i przez wspólne przecięcie się dwóch płaszczyzn, $S\alpha\varrho = S\alpha\gamma$ i $S\beta\varrho = S\beta\delta$ będzie

$$S\varrho\left(\frac{\alpha}{S\alpha\gamma} - \frac{\beta}{S\beta\delta}\right) = o,$$

gdyż płaszczyzna wyrażona tem równaniem przechodzi przez początek pomieni wodzących i dla wszystkich punktów, czyniących zadość równaniu $S\alpha\varrho = S\alpha\gamma$ ma też miejsce równanie $S\beta\varrho = S\beta\delta$.

ZADANIA.

1. Znaleść miejsce geometryczne środków prostych, których końce opierają się na danych dwóch prostych.

2. Znaleść miejsce geometryczne środków układu prostych, równoległych do danej płaszczyzny i opierających się swemi końcami na dwóch danych prostych.

Niech $S\gamma\varrho = o$ będzie równaniem stałej płaszczyzny, równaniami zaś kierownic prostoliniowych niech będą $\varrho = \beta + x\alpha$, $\varrho = \beta_1 + x_1\alpha_1$. Oznaczając przez x i x_1 wartości zmiennych, które odpowiadają końcom tworzącej, przez r zaś promień wodzący środka tworzącej, otrzymamy

$$r = \frac{\beta + \beta_1}{2} + \frac{x}{2}\alpha + \frac{x_1}{2}\alpha_1 \quad . \quad . \quad (1).$$

Ponieważ tworząca jest równoległą do płaszczyzny stałej, więc jest ona prostopadłą do promienia γ, a zatem

$$S\gamma(\beta - \beta_1 + x\alpha - x_1\alpha_1) = o.$$

Wyprowadzając z tego równania linijnego pomiędzy x i x_1 wartość dla x_1 i podstawiając w równanie (1) otrzymamy

$$r = \delta + x\varepsilon,$$

gdzie δ i ε są znanemi promieniami. Otrzymujemy ztąd, że szukanem miejscem geometrycznem jest linia prosta.

3. Znaleść miejsce geometryczne punktu, dzielącego w danym stosunku prostą, opierającą się swojemi końcami na dwóch danych prostych.

4. Znaleść miejsce geometryczne punktu dzielącego proste, opierające się na dwóch stałych prostych i równoległe do danej płaszczyzny w stosunku stałym.

5. Znaleść miejsce geometryczne punktów, których odległości od dwóch danych płaszczyzn są w stosunku stałym.

6. Płaszczyzna ruchoma odcina od kąta trójściennego o trzech krawędziach do siebie prostopadłych czworościan o stałej objętości. Znaleść miejsce geometryczne spodków wysokości czworościanu, spuszczonych z wierzchołka kąta trójściennego.

7. Jakie jest miejsce geometryczne wyrażone równaniem

$$(S\alpha\varrho)^2 + \varrho^2 = o.?$$

8. Dowieść, że jeżeli summa prostopadłych, spuszczonych z punktu A na dwie płaszczyzny równa się summie prostopadłych, spuszczonych z punktu B, to ta summa będzie stałą dla wszystkich punktów prostej AB.

9. Przez każdą krawędź kąta trójściennego poprowadzono płaszczyzny odpowiednio prostopadłe do ścian przeciwległych. Dowieść, że te płaszczyzny przecinają się według jednej linii prostej.

Za początek obierzmy wierzchołek kąta trójściennego i niech.

$$S\alpha\varrho = o, \; S\beta\varrho = o, \; S\gamma\varrho = o$$

będą równaniami trzech ścian trójścianu. Prosta przecięcia się dwóch pierwszych płaszczyzn jest równoległą do $V\alpha\beta$. Płaszczyzna prostopadła do trzeciej płaszczyzny i przechodząca przez linię $V\alpha\beta$ będzie miała normalną $V(\gamma V\alpha\beta)$. Równaniem więc tej płaszczyzny prostopadłej będzie

$$S[\varrho V(\gamma V\alpha\beta)] = o,$$

czyli (§ 55,1)

$$S\beta\varrho S\gamma\alpha - S\alpha\varrho S\beta\gamma = o.$$

Równania powstałych płaszczyzn otrzymamy z tego ostatniego równania za pomocą przestawień kołowych α, β, γ.

Lecz łatwo widzieć, że jedno z tych trzech równań jest wynikiem dwóch powstałych.

10. Znaleść warunek potrzebny na to, aby proste dane równościanu

$$V\alpha\varrho = \beta \text{ i } V\alpha_1\varrho = \beta_1$$

przecięły się ze sobą. Wyznaczyć najkrótszą odległość tych prostych w przypadku, gdy temu warunkowi nie staje się zadość. (Warunek ten otrzymamy wykazując, że trzy promienie wodzące α, α_1 i $\beta - \beta_1$ leżą na jednej płaszczyźnie).

11. Znaleść równanie płaszczyzny, przechodzącej przez proste równoległe:

$$V\alpha(\varrho - \beta) = o \text{ i } V\alpha(\varrho - \beta_1) = o.$$

12. Znaleść równanie płaszczyzny, przechodzącej przez prostą

$$V\alpha(\varrho - \beta) = o$$

i prostopadłej do płaszczyzny

$$S\gamma\varrho = o.$$

13. Znaleść równanie linii prostej, przechodzącej przez punkt dany i tworzącej dany kąt z daną płaszczyzną. Wyprowadzić z otrzymanego równania powierzchni stóżka prostego.

14. Znaleść równanie płaszczyzny, przechodzącej przez dwa punkty dane i tworzącej dany kąt z daną płaszczyzną.

15. Niech $OABC$ będzie piramidą trójścienną, wszystkie kąty dwójścienne przy O są prostemi. Dowieść, że jeżeli OD jest prostopadłą, spuszczoną z wierzchołka piramidy na jej podstawę ABC, to pole AOB jest średnio geometrycznie proporcyonalnem pomiędzy polami ACB i ADB.

16. Wyznaczyć punkt przecięcia się trzech płaszczyzn $S\alpha\varrho = a$, $S\beta\varrho = b$ i $S\gamma\varrho = c$ i znaleść warunek potrzebny na to, aby te trzy równania jednoczesne wyrażały linię prostą, a nie punkt.

17. Znaleść pole trójkąta, wierzchołki którego są końcami promieni α, β i γ.

18. Znaleść warunek przecięcia się czterech płaszczyzn w jednym punkcie.

19. Znaleść objętość piramidy trójściennej, ograniczonej danemi czterema płaszczyznami.

20. Przez punkt stały M, leżący wewnątrz kąta trójściennego, wierzchołek którego O, poprowadzono płaszczyznę, przecinającą krawędzie w punktach A, B, C. Niech V_1, V_2, V_3 będą odbjętościami trzech piramid $MOAB$, $MOBC$, $MOCA$, V zaś objętość piramidy $OABC$. Dowieść, że stosunek $\frac{V}{\sqrt{V_1 V_2 V_3}}$ jest stałym bez względu na położenie płaszczyzny przecinającej.