ROZDZIAŁ IV.

Różniczkowanie kwaternionów.

66. Wiadomo, że jeżeli zmienna x oznacza wielkość rzetelną lub złożoną pospolitą, to w ogólności mówiąc, każda funkcya $f(x)$ tej zmiennej ma pochodną $f'(x)$ i przyrost funkcyi równa się $f'(x)dx$, jeżeli dx oznacza przyrost zmiennej niezależnej. Jeżeli zaś zmienną niezależną będzie kwaternion lub wektor wtedy powstaje pewna trudność, pochodząca ztąd, że dla kwaternionów niema miejsca przemienność czynników iloczynu. Łatwo bowiem widzieć, że przez różniczkowanie funkcyi $f(q)$, gdzie q oznacza kwaternion nie otrzymuje się wyrażenia kształtu $f'(q)dq$, a zatem w tym przypadku nie może być mowy o pochodnej $f(q)$.

Tak np. dla $p=f(q)=q^2$

$$dp=(q+dq)^2-q^2=q.dq+dq.q,$$

a że wogólności q i dq są różnemi kwaternionami, więc druga strona poprzedniego równania nie będzie równą $2qdq$, a zatem dp nie można przedstawić w kształcie iloczynu czynnika niezależnego od q i czynnika dq.

67. Dla otrzymania różniczki funkcyj, których zmienna niezależna jest kwaternionem lub wektorem, *Hamilton* zmuszonym był wrócić się do określenia, danego przez *Newtona* w teoryj fluksyj, a mianowicie różniczkę dp określa on równaniem

$$dp=df(q)=\lim_{h=o}\frac{f(q+hdq)-f(q)}{h},$$

gdzie h oznacza wielkość rzetelną, od q niezależną Łatwo widzieć że określenie to zawiera w sobie jako szczególny przypadek zwyczajne określenie $df(q)$, gdy q jest zmienną rzetelną lub złożoną pospolitą.

Z tego określenia wynika bezpośrednio, że jeżeli c oznacza ilość stałą, to

$$dc=o,$$

$$d[c\varphi(q)]=cd\varphi(q),$$

$$d[\varphi(q)c]=d\varphi(q)c,$$

68. Z samego określenia różniczki funkcyi, której zmienna niezależna jest kwaternionem wynika, że

$$d[F_1(q)+F_2(q)+F_3(q)+\ldots]=dF_1(q)+dF_2(q)+dF_3(q)+\ldots$$

to jest że różniczka summy funkcyj równa się summie różniczek tychże funkcyj.

Jeżeli $p=f(q)=\varphi(q)\psi(q)$, to

$$dp=\lim_{h=o}\frac{\varphi(q+hdq)\psi(q+hdq)-\varphi(q)\psi(q)}{h}$$

$$=\lim_{h=o}\frac{\varphi(q+hdq)\left\{\psi(q+hdq)-\psi(q)\right\}+\left\{\varphi(q+hdq)-\varphi(q)\right\}\psi(q)}{h}$$

$$=\varphi(q)d\psi(q)+d\varphi(q)\psi(q)$$

Łatwo dowieść, że $df(q)=F(qdq)$ jest funkcyą rozdzielnościową względem dq, to jest, że

$$F(q,\ r+s)=F(q,\ r)+F(q,\ s).$$

Jakoż z samego określenia $F(q,\ dq)$ wypływa, że

$$F(q,\ r+s)=\lim_{h=o}\frac{f(q+hr+hs)-f(q)}{h}$$

$$=\lim_{h=o}\frac{f(q+hr+hs)-f(q+hs)+f(q+hs)-f(q)}{h}$$

$$=\lim_{h=o}\frac{f(q+hs+hr)-f(q+hs)}{h}+\lim_{h=o}\frac{f(q+hs)-f(q)}{h}$$

$$=F(q,\ r)+F(q,\ s).$$

W szczególnym przypadku oznaczając przez x dowolny skalar, otrzymamy

$$F(q,\ xr)=xF(q,\ r).$$

Równanie to dowodzi, że $df(q)$ jest funkcyą jednorodną pierwszego stopnia różniczki dq.

Określając różniczkę $df(q,\ r,\ s\ldots)$ funkcyi ilukolwiek zmiennych, $q,\ r,\ s\ldots$

równaniem

$$df(q,\ r,\ s\ldots)=\lim_{h=o}\frac{f(q+hdq,\ r+hdr,\ s+hds,\ldots)-f(q,\ r,\ s\ldots)}{h}$$

otrzymamy stosując sposób podany dla zmiennych rzetelnych

$$df(q,\ r,\ s\ldots)=df_q(q,\ r,\ s\ldots)+df_r(q,\ r,\ s\ldots)+df_s(q,\ r,\ s\ldots)+\ldots$$

gdzie df_q, df_r, df_s, ... oznaczają różniczki funkcyi $f(q,\ r,\ s\ldots)$, w której uważaliśmy za zmienną pokolei $q,\ r,\ s\ldots$

Wypada ztąd, że jeżeli różniczkujemy iloczyn lub potęgę, zawierającą jeden lub więcej kwaternionów, to należy uważać każdy czynnik jako jedyną zmienną i otrzymane wypadki do siebie dodać. Prawidło to różni się od zwyczajnego prawidła różniczkowania tém, że z powodu, iż iloczyn kwaternionów nie podlega prawu przemienności owemu, należy każdy czynnik różniczkować w tem miejscu gdzie się znajduje (*in situ*).

Tak np.

$$d(qrs)=dq.rs+q.dr.s+qr.ds$$

$$dq^m=dq.q^{m-1}+qdq.q^{m-2}+q^2dq.q^{m-3}+\ldots+q^{m-1}dq.$$

69. Podamy teraz kilka przykładów różniczkowania.

1). Widzieliśmy już, że

$$dq^2=d(qq)=q.dq+dq.q.$$

Temu ostatniemu równaniu możemy nadać kształt

$$dq^2=2S(qdq)+2Sq.Vdq+2Sdq.Vq,$$

które to równanie otrzymuje się uważając, że $S(qdq)$ i $S(dq.q)$ są sobie równe i że w rozwinięciu $V(qdq+dq.q)$, $V(VqVdq)$ i $V(VdqVq)$ znikają.

W szczególnym przypadku, gdy q zamienia się na wektor ϱ otrzymamy

$$d\varrho^2=2S\varrho d\varrho.$$

2). Wiemy, że $qq^{-1}=1$, ztąd

$$q.d(q^{-1})+dq.q^{-1}=o,$$

$$dq^{-1}=-q^{-1}dq.q^{-1}.$$

3). Ogólnie oznaczając przez n dowolną liczbę całkowitą otrzymamy

$$dq^{-n}=-q^{-1}dq.q^{-n}-q^2dq.q^{-n+1}-\ldots-q^{-n}dq.q^{-1}.$$

4). Gdy chodzi o różniczkowanie potęg ułamkowych napotykamy pewne trudności. Weźmy dla przykładu

$$q=r^{\frac{1}{2}}=\sqrt{r}.\ldots$$

Mamy

$$q^2=r,\ dq^2=dr, \text{ czyli } dr=qdq+dq.q,$$

dla otrzymania więc dq musimy rozwiązać ostatnie równanie.

Hamilton postępuje w sposób następujący: Równanie dla dr mnoży przez q, Kq zaś przez dr i otrzymuje

$$qdr=q^2dq+q\,dq.q$$

$$dr.Kq=q.dq.Kq+dq.q.Kq.$$

Dodając do siebie te dwa równania i uważając, że $q.dq\,q+q.dq.Kq=qdq(q+Kq)=qdq.2Sq$, otrzymuje

$$qdr+dr.Kq=[q^2+(Tq)^2+2qSq]dq,$$

z którego łatwo otrzymać dq w funkcyi dr.

Z poprzedniego przykładu widzimy, że wyznaczenie różniczki pierwiastku z kwaternionu wymaga rozwiązania równania w kwaternionach, które, jak później zobaczymy, przedstawia wielkie trudności.

70. Ponieważ z jednej strony

$$dq=d(Sq+Vq)=dSq+dVq,$$

z drugiej zaś

$$dq = Sdq + Vdq,$$

więc

$$dSq = Sdq,\ dVq = Vdq \quad . \ . \ . \ (1).$$

Ponieważ

$$dKq = d(Sq - Vq) = dSq - dVq = Sdq - Vdq,$$

więc

$$dKq = Kdq \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2).$$

Dla otrzymania dTq, wychodzimy z równania

$$(Tq)^2 = qKq,$$

a ponieważ Tq jest skalarem, więc przez różniczkowanie otrzymamy

$$2TqdTq = d(qKq) = \lim_{h=o} \frac{(q+hdq)\ [K(q+hdq) - qKq]}{h}$$

$$= qKdq + dq.Kq = qKdq + K(qKdq)$$
$$= 2S(qKdq) = 2S(Kq.dq).$$

Otrzymujemy ztąd

$$dTq = \frac{S(Kq.dq)}{Tq} = S(KUq.dq) = S(Uq.^{-1}dq),$$

czyli

$$\frac{dTq}{Tq} = S\frac{dq}{q} \text{ i } \frac{dT\varrho}{T\varrho} = S\frac{d\varrho}{\varrho} \ . \ . \ (3).$$

Ten ostatni wypadek można też było otrzymać wprost z równania

$$(T\varrho)^2 = -\varrho^2.$$

Z równania

$$q = Tq.Uq,$$

otrzymamy

$$dq = Tq.dUq + dTq.Uq,$$
$$\frac{dq}{q} = \frac{dUq}{Uq} + \frac{dTq}{Tq} = \frac{dUq}{Uq} + S\frac{dq}{q},$$

ztąd

$$\frac{dq}{q} - S\frac{dq}{q} = \frac{dUq}{Uq},$$

czyli

$$V\frac{dq}{q} = \frac{dUq}{Uq} \text{ i } V\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{dU\varrho}{U\varrho} \ . \ . \ . \ (4).$$

71. Z równania (4) otrzymujemy

$$\frac{dUVq}{UVq} = V\frac{Vdq}{Vq} \ . \ . \ . \ . \ . \ (1).$$

Jeśli zatem q i dq mają tę samą płaszczyznę, to ostatnie wyrażenie będzie zerem.

Łatwo też otrzymać następujące wzory:

$$dVUq = VdUq = V(V\frac{dq}{q}.Uq) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$dSUq = SdUq = S(V\frac{dq}{q}.Uq). \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

72. Zupełnie tak samo jak w zwyczajnym rachunku różniczkowym, możemy też i w rachunku różniczkowym, zastosowanym do kwaternionów wprowadzić różniczki wyższych porządków. Tak np. z równania

$$d(q^2) = dq.q + q.dq$$

możemy przez powtórne różniczkowanie otrzymać

$$d^2(q^2) = d^2q.q + 2(dq)^2 + qd^2q$$

$$d^2(\varrho^2) = 2dS\varrho d\varrho = 2d\varrho^2 + 2S\varrho d^2\varrho.$$

W przypadku, gdy pierwszą różniczkę dq uważamy za ilość *stałą*, następne różniczki d^2q, d^3q . . . są równemi zeru, a wzory dla wyższych różniczek funkcyj zmiennej kwaternionowej stają się znacznie prostszemi. *Hamilton* dowiódł, że w przypadku gdy pierwsza różniczka dq równa się zeru i gdy funkcya $f(q)$ czyni zadość tym samym warunkom ciągłości, jakie są niezbędne w analizie zwyczajnej dla prawdziwości wzoru *Taylora*, ten ostatni znajduje też zastosowanie dla $f(q)$, gdzie q jest kwaternionem i to w następującej postaci

$$f(q + xdq) = f(x) + xdf(q) + \frac{x^2}{1.2}d^2f(q) + \ . \ .$$

73. Łatwo widzieć, że jeżeli zmienna niezależna jest rzetelną, to pochodną otrzymujemy zupełnie tak samo jak w analizie zwyczajnej, Dajmy że mamy równanie krzywej $\varrho = \varphi(t)$. Oznaczając przez O początek promieni wodzących, przez P dowolny punkt krzywej, otrzymamy $OP = \varphi(t)$. Dla innego punktu Q tej krzywej otrzymamy $OQ = \varphi(t) = \varphi(t + \delta t)$, gdzie δt oznacza dowolną liczbę. Oczywiście, że cięciwa $PQ = OQ - OP = \varphi(t + \delta t) - \varphi(t)$. Jeżeli teraz punkt Q będzie się coraz bardziej zbliżał do punktu Q, to δt dąży do zera i w granicy otrzymamy, że $\frac{d\varrho}{dt} = \varphi'(t)$ jest promieniem wodzącym skończonym, równoległym do stycznej do krzywej w punkcie t.

Jako przykład weźmy równanie hyperboli, odniesionej do asymptot (§ 23,3).

$$\varrho = \alpha t + \frac{\beta}{t}.$$

Różniczkując otrzymamy

$$d\varrho = \left(\alpha - \frac{\beta}{t^2}\right)dt.$$

Wyprowadzamy ztąd wniosek, że styczna do hyperboli jest równoległą do promienia wodzącego

$$\alpha t - \frac{\beta}{t}.$$

Innemi słowami: *Jeżeli promień wodzący dowolnego punktu hyperboli, poprowadzony ze środka krzywej jako z początku tworzy jedną z przekątnych równoległoboku o bokach równoległych do asymptot, to druga przekątna będzie równoległą do stycznej w punkcie, w którym promień wodzący przecina krzywą.*

Jeżeli mamy równanie powierzchni

$$\varrho = \varphi(u, v),$$

to przez różniczkowanie otrzymamy

$$d\varrho = \frac{d\varrho}{du} du + \frac{d\varrho}{dv} dv,$$

gdzie $\frac{d\varrho}{du} = \varphi_u'(u, v), \frac{d\varrho}{dv} = \varphi'(u, v)$ oznaczają dwa promienie wodzące, styczne do dwóch krzywych, nakreślonych na powierzchni. Promienie więc te wyznaczają płaszczyznę styczną do powierzchni.

74. Niech $F(q)$ oznacza funkcyę rzetelną (w postaci skalaru) zmiennego kwiaternionu q. Zastępując q przez wyrażenie $w+xi+yj+zk$, otrzymamy na zasadzie § 68

$$dF = d_w F + d_x F + d_y F + d_z F.$$

W tem ostatniem równaniu $\frac{d_w F}{dw}, \frac{d_x F}{dx}, \ldots$ są zupełnie oznaczonemi, gdyż wszystkie elementa są ilościami rzetelnemi. Możemy więc uczynić

$$\frac{d_w F}{dw} = p_0, \quad \frac{d_x F}{dx} = -p_1, \quad \frac{d_y F}{dy} = -p_2, \quad \frac{d_z F}{dz} = -p_3,$$

gdzie p_0, p_1, p_2, p_3 są wprawdzie funkcyami q, ale są niezależnemi od dq.

Można zatem różniczkę funkcyi napisać w kształcie

$$dF = p_0 dw - p_1 dx - p_2 dy - p_3 dz,$$

czyli kładąc $P = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ otrzymamy

$$dF = SPdq.$$

Jeżeli będziemy mieli funkcyę rzetelną kilku zmiennych kwaternionów $F(q, r, s, \ldots)$, to łatwo widzieć, że zmieniając kolejno $q, r, s, \ldots$ otrzymamy

$$dF = SPdq + SQdr + SRds + \ldots$$

Nie potrzebujemy dowodzić, że te same wzory otrzymamy, gdy kwaternion przechodzi w promień wodzący.

75. Oznaczając promień wodzący ϱ przez

$$\varrho = xi + yj + zk,$$

funkcyę zaś tego promienia przez $F(\varrho)$, *Hamilton* wprowadza działanie wyrażone przez symbol $i\frac{d}{dx}+j\frac{d}{dy}+k\frac{d}{dz}$ i oznacza je znakiem ∇, tak że

$$\nabla F(\varrho)=i\frac{dF}{dx}+j\frac{dF}{dy}+k\frac{dF}{dz}.$$

Jeżeli $F(\varrho)$ oznacza funkcyę rzetelną, to $\nabla F(\varrho)$ sprowadza się do promienia wodzącego, a ponieważ

$$d\varrho=idx+jdy+kdz,$$

więc

$$-S[\nabla F(\varrho)d\varrho]=\frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dy}dy+\frac{dF}{dz}dz=dF(\varrho).$$

Dajmy teraz, że

$$F(\varrho)=C$$

oznacza równanie jakiejś powierzchni.

Z równania tego otrzymamy

$$dF(\varrho)=o,$$

czyli

$$S[\nabla F(\varrho)d\varrho]=o,$$

z czego wypada, że $\nabla F(\varrho)$ jest promieniem wodzącym, normalnym do powierzchni w punkcie, odpowiadającym znaczeniu ϱ, gdyż jest prostopadłym do wszystkich stycznych, idących w kierunku $d\varrho$.

Biorąc dwie powierzchnie, do jednej rodziny należące

$$F(\varrho)=C \text{ i } F(\varrho)=C_1,\ (C_1=C+dC)$$

i uważając, że $S[\nabla F(\varrho)d\varrho)=T\nabla F(\varrho)Td\varrho\cos\lambda$, gdzie λ oznacza kąt pomiędzy promieniem wodzącym $d\varrho$ i $\nabla F(\varrho)$, znajdziemy, że $T\nabla F(\varrho)$ jest odwrotnie proporcyonalnym do odległości normalnej dwóch powierzchni nieskończenie siebie blizkich.

ZADANIA.

Dowieść, że

1. $d.TVUq=S\frac{dUq}{UVq}$.
2. $d(U\alpha)^t=\frac{1}{2}\pi(U\alpha)^{t+1}dt$.
3. $d\alpha^t=(lT\alpha+\pi U\alpha)\alpha^t.dt$.

W obu tych przykładach α oznacza promień wodzący.

Dowieść, że

4. $d^2Tq=[(S.dqq^{-1})^2-S.(dq.q^{-1})^2]Tq=-Tq\left(V\frac{dq}{q}\right)^2$

5. Dowieść, że jeśli

$$F(\varrho)=\Sigma S\alpha\varrho S\beta\varrho+g\tfrac{1}{2}\varrho^2,$$

to

$$dF(\varrho)=Svd\varrho,$$

gdzie

$$v=\Sigma V.\alpha\varrho\beta+(g+\Sigma\alpha\beta)\varrho.$$

6. Wyznaczyć różniczkę $\sqrt[3]{\varrho}$.

7. Wyznaczyć $d^2U\varrho$.

8. Znaleść powłoczącą prostej, która tak się porusza na płaszczyźnie, że pole trójkąta, utworzonego przez tę prostą i przez odcinki dwóch prostych stałych, na tej płaszczyźnie leżących jest ilością stałą Dla rozwiązania tego zadania oznaczmy kierunki prostych stałych przez α i β, odcinki zaś na zasadzie postawionego warunku, można będzie oznaczyć przez αt i $\frac{\beta}{t}$, gdzie t oznacza zmienną niezależną. Równaniem prostej ruchomej będzie

$$\varrho=\alpha t+x\left(\frac{\beta}{t}-\alpha t\right),$$

warunkiem zaś dla powłoczącej będzie

$$d\varrho=o,$$

czyli

$$\left[\alpha-x\left(\frac{\beta}{t^2}+\alpha\right)\right]dt+\left(\frac{\beta}{t}-\alpha t\right)dx=o.$$

Z równania tego otrzymamy $x={}^1/_2$ przy dowolnych dx i dt.

Otrzymamy ztąd, że powłoczącą będzie hiperbola.

9. Znaleść najprostszą odległość końca B promienia β od prostej $\varrho=\gamma+x\alpha$.

Odległość δ punktu B od dowolnego punktu M danej prostej wyraża się równaniem $\delta=\gamma+x\alpha-\beta$. Warunek potrzebny na to, aby ta odległość stała się najmniejszością wyraża się równaniem

$$dT\delta=dT(\gamma+x\alpha-\beta)=o.$$

Lecz

$$dT\delta=T\delta S(\delta^{-1}d\delta)=-S(U\delta.d\delta)=-S(U\delta.\alpha dx).$$

Ztąd wypada, że $S(U\delta.\alpha)=o$, t. j., że δ musi być prostopadłym do α, czyli

$$S(\gamma+x\alpha-\beta)\alpha=o \text{ (porówn. § 64,3).}$$

10. Znaleść najkrótszą odległość dwóch prostych w przestrzeni $\varrho_1=\beta_1+x_1\alpha_1$, $\varrho_2=\beta_2+x_2\alpha_2$.

Oznaczywszy odległość δ dwóch punktów tych prostych przez $\varrho_2-\varrho_1$ otrzymamy

$$dT\delta=dT(\varrho_2-\varrho_1)=S(\varrho_2-\varrho_1)\,(d\varrho_2-d\varrho_1)=o$$

czyli

$$S(\varrho_2-\varrho_1)\,(\alpha_2 dx_2-\alpha_1 d_1 x_1)=o,$$

a że dx_2 i dx_1 są do siebie niezależnemi, więc musi być

$$S\alpha_2(\varrho_2-\varrho_1)=o \text{ i } S\alpha_1(\varrho_2-\varrho_1)=o,$$

czyli, że δ musi być prostopadłym do promieni α_1 i α_2, t. j. $\delta=xV\alpha_1\alpha_2$ porówn. § 63,4).