ROZDZIAŁ VI.

Równania kuli (koła) i stożka kołowego.

96. Jeżeli przez M oznaczemy dowolny punkt powierzchni kuli, której promień jest α, to

$$T\varrho = T\alpha \text{ lub } \varrho^2 = \alpha^2 \quad . \ . \ . \ . \ (1)$$

będzie równaniem kuli, mającej promień równy α i której środek znajduje się w początku promieni wodzących.

W § 58 podaliśmy cały szereg przekształceń równania (*1*), z których każde wyraża pewną własność kuli. Tak np. równanie (5, § 58)

$$S(\varrho+\alpha)\,(\varrho-\alpha)=o,$$

wyraża, że cięciwy poprowadzone od dowolnego punktu kuli do końców średnicy są do siebie prostopadłemi.

Uwaga. Łatwo widzieć, że równanie (*1*) wyraża też okrąg koła, mającego promień α i którego środek znaduje się w początku promieni wodzących.

97. Gdy kula o promieniu α ma swój środek na końcu promienia γ, wtedy równanie jej będzie

$$T(\varrho-\gamma)=T\alpha. \ . \ . \ . \ . \ . \ (1^a),$$

a w szczególnym przypadku, gdy początek promieni wodzących znajduje się na samej powierzchni kuli równanie powyższe przybiera kształt

$$\varrho^2-2S\alpha\varrho=o. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2).$$

Ponieważ równaniu temu możemy nadać kształt

$$S\varrho(\varrho-2\alpha)=o,$$

więc znowu otrzymujemy własność kąta wpisanego w półkole.

1. Zadanie. Wyznaczyć miejsce geometryczne spodków prostopadłych, spuszczonych z punktu danego ($\varrho=\beta$) na płaszczyzny, przechodzące przez początek promieni wodzących.

Jeżeli $S\alpha\varrho=o$ będzie równaniem jednej z takich płaszczyzn, to $-\alpha^{-1}S\alpha\beta$ będzie długością prostopadłej, spuszczonej z punktu $\varrho=\beta$ na tę płaszczyznę (§ 65). Równaniem zatem spodków tych prostopadłych będzie

$$\varrho=\beta-\alpha^{-1}S\alpha\beta=\alpha^{-1}V\alpha\beta.$$

Z równania tego otrzymujemy

$$(\varrho-\beta)^2=\alpha^{-2}(S\alpha\beta)^2.$$

Z drugiej znów strony, działając na to równanie symbolem $S.\beta$, otrzymamy

$$S\beta\varrho=\beta^2-\alpha^{-2}(S\alpha\beta)^2.$$

Dodając do siebie te dwa równania otrzymamy

$$\varrho^2-S\beta\varrho=o,\ \text{czyli}\left(\varrho-\frac{\beta}{2}\right)^2=\frac{\beta^2}{4},$$

$$\text{t. j. } T\left(\varrho-\frac{\beta}{2}\right)=T\frac{\beta}{2}.$$

Równanie to pokazuje, że szukanem miejscem geometrycznem jest powierzchnia kuli, której jedna średnica jest β.

2. *Znaleść wspólne przecięcie się dwóch kul*

$$T(\varrho-\alpha)=T\beta \text{ i } T(\varrho-\alpha_1)=T\beta_1.$$

Punkta wspólnego przecięcia się tych kul muszą czynić zadość obu równaniom, dla tych więc punktów musi być

$$(\varrho-\alpha)^2-\beta^2=o \text{ i } (\varrho-\alpha_1)^2-\beta_1{}^2=o, \ . \ . \ (1),$$

czyli

$$(\varrho-\alpha_1{}^2)^2-(\varrho-\alpha_1{}^2)^2-\beta^2+\beta_1{}^2=o$$

$$2S(\alpha-\alpha_1)\varrho=\alpha^2-\alpha_1{}^2-(\beta^2-\beta_1{}^2)\ . \ . \ . \ (2).$$

Otrzymane równanie wyraża płaszczyznę, prostopadłą do prostej, łączącej środki obu kul. Ponieważ pierwsze strony równań (*1*) wyrażają długości stycznych, poprowadzonych do kuli z punktu ϱ, więc otrzymana płaszczyzna (*2*) jest miejscem geometrycznem równych stycznych, czyli *płaszczyzną pierwiastną* danych kul.

98. Z równania kuli (koła)

$$T\varrho=T\alpha,\ \text{czyli } \varrho^2=\alpha^2$$

otrzymujemy przez różniczkowanie

$$S\varrho d\varrho=o,$$

co dowodzi, że promień ϱ jest normalnym do powierzchni kuli, gdyż $d\varrho$ oznacza element w kierunku stycznej (§ 73). Otrzymujemy tym sposobem znaną własność kuli.

Oznaczając przez ω promień wodzący dowolnego punktu płaszczyzny stycznej, poprowadzonej w punkcie ϱ, znajdziemy, że $\omega-\varrho$ jest prostą leżącą na płaszczyźnie stycznej, a zatem będzie ona prostopadłą do ϱ i

$$S\varrho(\omega-\varrho)=o,\ \text{czyli } S\varrho\omega=\alpha^2\ . \ . \ . \ (1)$$

będzie równaniem płaszczyzny stycznej do kuli, gdzie ω jest promieniem wodzącym bieżącym.

Jeżeli ta płaszczyzna przechodzi przez dany punkt B, którego promień wodzący jest β, to będziemy mieli

$$S\beta\varrho = \alpha^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Uważając w tem równaniu ϱ za zmienną widzimy, że ona wyraża płaszczyznę, prostopadłą do β. Jest to płaszczyzna okręgu koła, według którego stożek, mający swój wierzchołek w punkcie B i opisany około kuli dotyka się jej, czyli tak nazwana *płaszczyzna biegunowa.*

Ponieważ równaniu (2) możemy nadać kształt

$$S\beta\left[\varrho + \frac{(T\alpha)^2}{T\beta U\beta}\right] = S\beta\left[\varrho - U\beta\frac{(T\alpha)^2}{T\beta}\right] = o,$$

więc płaszczyzna biegunowa przecina promień wodzący β w odległości $\frac{(T\alpha)^2}{T\beta}$ od początku promieni (środka kuli O).

Oznaczając ten punkt przecięcia przez H znajdziemy

$$HB = h = T\beta - \frac{(T\alpha)^2}{T\beta} = \frac{(T\beta)^2 - (T\alpha)^2}{(T\beta)}$$

Wypada ztąd, że

$$\frac{2}{h} = \frac{2T\beta}{(T\beta)^2 - (T\alpha)^2} = \frac{1}{T\beta - T\alpha} + \frac{1}{T\beta + T\alpha} = \frac{1}{k} + \frac{1}{l},$$

gdzie k i l oznaczają odległości punktów przecięcia się promienia β z kulą od punktu B, które to równania dowodzi, że powierzchnia kuli i płaszczyzna biegunowa dzielą promień wodzący β harmonicznie.

Jeżeli płaszczyzna (2) przechodzi przez punkt stały, którego promień wodzący jest σ, to powinno być

$$S\beta\sigma = \alpha^2 \ldots\ldots\ldots (3).$$

Uważając w tem równaniu β za zmienną widzimy, że miejscem geometrycznem punktów, których promieniami są β jest płaszczyzna. Przychodzimy tym sposobem do znanego twierdzenia: Bieguny wszystkich płaszczyzn biegunowych, przechodzących przez jeden punkt leżą na płaszczyźnie biegunowej tego punktu.

99. *Zadanie* 1. Znaleść figurę odwrotną względem płaszczyzny (przekształconą za pomocą promieni wodzących wzajemnych).

Niech OP oznacza odcinek prosty, poprowadzony od początku O do płaszczyzny danej i kończącej się na tej płaszczyźnie. Na tej prostej wyznaczmy punkt Q tak ażeby $OQ.OP =$ stałej $= b^2$ i szukamy miejsca geometrycznego punktu Q.

Niech $S\alpha\varrho = a$ będzie równaniem danej płaszczyzny i ω — promieniem wodzącym punktu Q. Z postawionego warunku otrzymamy

$$T\varrho . T\omega = b^2.$$

Oprócz tego

$$U\omega = U\varrho,$$

zkąd

$$\varrho = T\varrho U\varrho = \frac{b^2 U\omega}{T\omega} = -\frac{b^2\omega}{\omega^2}.$$

Podstawiając tę wartość w równanie płaszczyzny otrzymamy

$$a\omega^2 + b^2 Sa\omega = o,$$

które to równanie dowodzi, że szukanem miejscem geometrycznem jest kula, przechodząca przez początek (biegun) O.

Zadanie 2. Znaleść miejsce geometryczne punktów, których odległości od dwóch punktów danych byłyby w stosunku stałym.

Niech O i A będą danemi punktami, z których pierwszy obierzemy za początek, drugi zaś leży na końcu promienia α. Niech dalej P będzie dowolnym punktem szukanego miejsca geometrycznego i $OP = \varrho$.

Oznaczając przez n stały stosunek odległości znajdziemy

$$T(\varrho - \alpha) = nT\varrho,$$

$$\varrho^2 - 2S\alpha\varrho + \alpha^2 = n^2\varrho^2,$$

czyli

$$\left(\varrho - \frac{\alpha}{1-n^2}\right)^2 = \left(\frac{n\alpha}{1-n^2}\right)^2.$$

Równanie to wyraża kulę, promień której równa się $\left(\frac{n\alpha}{1-n^2}\right)$, środek zaś znajduje się na prostej, łączącej punkty A i O.

Zadanie 3. Znaleść miejsce geometryczne punktów, których kwadraty odległości od pewnej liczby punktów danych tworzą sumę stałą. Znaleść najmniejszą możliwą wartość tej stałej i miejsce geometryczne, odpowiadającej tej ilości najmniejszej.

Oznaczając przez $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ promienie wodzące danych punktów, przez ϱ promień wodzący punktu szukanego miejsca znajdziemy

$$-c^2 = (\varrho - \alpha_1)^2 + (\varrho - \alpha_2)^2 + \ldots + (\varrho - \alpha_n)^2 = n\varrho^2 - 2S\varrho\Sigma\alpha + \Sigma\alpha^2.$$

Z równania tego otrzymamy

$$\left(\varrho - \frac{\Sigma\alpha}{n}\right)^2 = -\frac{c^2 + \Sigma\alpha^2}{n} + \left(\frac{\Sigma\alpha}{n}\right)^2,$$

jest to równanie kuli, mającej swój środek w środku układu danych punktów. Jeżeli początek promieni wodzących umieścimy we środku układu, to równanie powyższe przechodzi w

$$\varrho^2 = -\frac{c^2 + \Sigma\alpha^2}{n},$$

gdyż $\left(\frac{\Sigma\alpha}{n}\right) = o$ (§ 17).

Druga strona tego równania będzie ujemną i równanie wyraża kulę rzeczywistą, jeżeli

$$c^2 > \Sigma(T\alpha)^2.$$

W przypadku zaś, gdy $c^2 = \Sigma(T\alpha)^2$, kula przechodzi w punkt — środek układu punktów.

Zadanie 4. Znaleść miejsce geometryczne spodków prostopadłych, spuszczonych z danego punktu powierzchni kuli na wszystkie płaszczyzny styczne do kuli.

Biorąc środek kuli za początek znajdziemy, że równaniem płaszczyzny stycznej w punkcie ϱ będzie

$$S\omega\varrho = \alpha^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Przyjmując teraz, że dany punkt leży na końcu promienia α i uwzględniając, że prostopadła do płaszczyzny stycznej jest równoległą do ϱ, znajdziemy, że promień spodka prostopadłej musi czynić zadość równania

$$\omega = \alpha + x\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Dla otrzymania miejsca geometrycznego szukanego należy z równań *(1)* i *(2)* i z rów. $\varrho^2 = \alpha^2$ wyrugować x i ϱ.

Działając na równanie (2) symbolem $S.\omega$ znajdziemy

$$\omega^2 = S\alpha\omega + x\alpha^2.$$

Z tego równania wynika, że

$$\varrho = \frac{\omega - \alpha}{x} = \frac{\alpha^2(\omega - \alpha)}{\omega^2 - S\alpha\omega}.$$

Podniósłszy obie strony do kwadratu znajdziemy

$$(\omega^2 - S\alpha\omega)^2 = \alpha^2(\omega - \alpha)^2,$$

gdyż $\varrho^2 = \alpha^2$.

Równaniu temu możemy nadać kształt

$$\left(\frac{\omega^2 - S\alpha\omega}{\omega - \alpha}\right)^2 = \alpha^2, \text{ czyli } \left[\frac{S\omega(\omega - \alpha)}{\omega - \alpha}\right]^2 = \alpha^2,$$

zkąd po uproszczeniu

$$[S\omega U(\omega - \alpha)]^2 = -\alpha^2.$$

Jest to równanie powierzchni utworzonej obrotem linii *sercowej* około jej osi.

Zadanie 5. Znaleść krzywą przecięcia się kuli z płaszczyzną.

Niech początek promieni wodzących będzie we środku kuli i niech β będzie promieniem wodzącym, prostopadłym do płaszczyzny siecznej. Przy takiem założeniu równaniem kuli będzie $\varrho^2 = \alpha^2$, równaniem zaś płaszczyzny siecznej $S\beta(\varrho - \beta) = o$. Kładąc $\varrho - \beta = \omega$ otrzymamy

$$\omega^2 + 2S\omega\beta + \beta^2 = \alpha^2, \text{ gdzie } \omega^2 = (T\beta)^2 - (T\alpha)^2.$$

Jest to równanie okręgu koła, który wtedy tylko będzie rzeczywistym, gdy $T\beta < T\alpha$.

Zadanie 6. Dowieść, że jeżeli trzy powierzchni kul przecinają się parami, to trzy płaszczyzny ich przecięcia przechodzą przez jedną linię prostą.

Dajmy, że równaniami danych kul są:

$$\varrho^2 - 2S\alpha\varrho = 2A,\ \varrho^2 - 2S\beta\varrho = 2B,\ \varrho^2 - 2S\gamma\varrho = 2C,$$

wtedy równaniami płaszczyzny przecięcia będą:

$$S(\alpha-\beta)\varrho = B - A,\ S(\beta-\gamma)\varrho = C - B,\ S(\gamma-\alpha)\varrho = A - C.$$

Ponieważ każde z tych równań jest wynikiem dwóch pozostałych, więc wspólne przecięcie się dwóch płaszczyzn leży na trzeciej.

Zadanie 7. W trzech punktach A, B, C kuli poprowadzono do niej płaszczyzny styczne. Płaszczyzny styczne w punktach B i C przecinają się według prostej l, płaszczyzny styczne w punktach C i A przecinają się według prostej m, nakoniec płaszczyzny styczne w punktach A i B — według prostej n. Te proste i punkta A, B i C wyznaczają trzy płaszczyzny (A,l), (B,m), (C,n); dowieść, że te trzy płaszczyzny przecinają się według jednej prostej.

Za początek promieni wodzących obierzmy środek kuli i oznaczmy promienie wodzące punktów A, B, C przez α, β, γ, Otrzymamy, że równaniami płaszczyzn będą

$$S\alpha\omega = S\beta\omega = S\gamma\omega = \lambda^2,$$

gdzie λ oznacza promień wodzący punktu, stale obranego na powierzchni kuli.

Równaniem płaszczyzny, przechodzącej przez wspólne przecięcie płaszczyzn stycznych w α i β będzie

$$(S\alpha\omega - \lambda^2) - k(S\beta\omega - \lambda^2) = o,$$

gdzie k oznacza nieoznaczony skalar. Jeżeli ta płaszczyzna ma przechodzić przez punkt γ, to $k = (S\alpha\gamma - \lambda^2) : (S\beta\gamma - \lambda^2)$ i równaniem płaszczyzny przechodzącej przez prostą n i punkt γ będzie

$$S\alpha\omega S\beta\gamma - S\beta\omega S\alpha\gamma - \lambda^2 S(\alpha - \beta)\omega = \lambda^2 S(\beta - \alpha)\gamma.$$

W taki sam sposób otrzymamy, że równaniem płaszczyzn (m,B) i (l,A) będą

$$S\alpha\omega S\gamma\beta - S\gamma\omega . S\alpha\beta - \lambda^2 S(\alpha - \gamma)\omega = \lambda^2 S(\gamma - \alpha)\beta$$

$$S\beta\omega S\gamma\alpha - S\gamma\omega . S\alpha\beta - \lambda^2 S(\beta - \gamma)\omega = \lambda^2 S(\gamma - \beta)\alpha.$$

Ponieważ każde z tych równań jest wynikiem dwóch powstałych, więc wspólne przecięcie każdych dwóch płaszczyzn leży na trzeciej, czyli, że wszystkie trzy przecinają się według jednej prostej.

Zadanie 8. Kulę daną przecinamy układem nieskończenie wielu kul, których powierzchnie przechodzą przez trzy dane punkty, nieleżące na jednej prostej. Należy dowieść, że płaszczyzny wspólnego przecięcia się tych kul z kulą daną przechodzą przez jedną prostę.

Niech

$$\varrho^2 = \delta^2 \ .\ .\ .\ (1) \ \text{ i } \ (\varrho - \varepsilon)^2 = \lambda^2 \ .\ .\ .\ (2),$$

będą równaniami kuli stałej i kuli zmiennej i niech α, β, γ będą promieniami wodzącemi trzech punktów stałych.

Równaniem płaszczyzny przecięcia się kul (*1*) i (2) będzie (§ 97).

$$2S\varrho\varepsilon = \delta^2 + \varepsilon^2 - \lambda^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Ponieważ kula (*2*) ma pochodzić przez punkty α, β, γ, więc muszą mieć miejsce równania

$$2S\alpha\varepsilon = \alpha^2 + \varepsilon^2 - \lambda^2,\ 2S\beta\varepsilon = \beta^2 + \varepsilon^2 - \lambda^2,\ 2S\gamma\varepsilon = \gamma^2 + \varepsilon^2 - \lambda^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Szukamy teraz linii wspólnego przecięcia płaszczyzny oznaczonej trzema punktami stałemi z płaszczyzną (*3*). Rownanie płaszczyzny, przechodzącej przez końce promieni α, β i γ (§ 25,2) będzie

$$\varrho = \alpha + u(\gamma - \alpha) + v(\beta - \alpha): \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Dla wspólnego przecięcia tej płaszczyzny z płaszczyzną (*3*) musi być

$$2S[\alpha + u(\gamma - \alpha) + v(\beta - \alpha)]\varepsilon = \delta^2 + \varepsilon^2 - \lambda^2,$$

czyli, ze względu na równania (*4*)

$$u(\gamma^2 - \alpha^2) + v(\beta^2 - \alpha^2) = \delta^2 - \alpha^2,$$

zkąd

$$v = \frac{\delta^2 - \alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2} + u\,\frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\beta_2 - \alpha^2} = p + qu,$$

gdzie p i q oznaczają skalary od ε i λ niezależne.

Podstawiając te wartości w równanie (*5*) otrzymamy

$$\varrho = \alpha + u(\gamma - \alpha) + (p + qu)(\beta - \alpha),$$

czyli

$$\varrho = [(1 - p) - (1 - q)u]\alpha + (p + qu)\beta + u\gamma.$$

Jest to równanie prostej, niezależnej od szczególnych wartości ε i λ (§ 24, 1). Płaszczyzna zatem przechodząca przez końce promienia α, β i γ przecina wszystkie płaszczyzny (*3*) według jednej prostej, czyli, że wszystkie te płaszczyzny przechodzą przez tę samą prostą.

100. **O stożku.** *Znaleść równanie stożka obrotowego, mającego swój wierzchołek w początku promieni wodzących.*

Niech α oznacza jednostkę promienia wodzącego, idącego w kierunku osi, e— dostawę kąta pomiędzy tworzącemi i osią, ϱ zaś — promień wodzący dowolnego punktu powierzchni stożka. Przy takiem założeniu otrzymamy

$$S\alpha U\varrho = \mp e,$$

czyli

$$(S\alpha\varrho)^2 = -e^2\varrho^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

które to równanie jest równaniem stożka kołowego.

Jeżeli zmienimy początek promieni wodzących i umieścimy go na innym punkcie osi, którego promień wodzący jest $x\alpha$, to równanie (*1*) przechodzi w

$$(-x+S\alpha\omega)^2=-e^2(x\alpha+\omega)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

gdzie ω jest promieniem wodzącym dowolnego punktu powierzchni.

Uwaga. Dajmy, że stożek zmieniamy w ten sposób, że przecięcie kołowe i prostopadłe do osi pozostaje niezmiennem, zachowując stale tę samą wielkość promienia r, przy czem oczywiście e i odległość x wierzchołka stożka od środka przecięcia kołowego zmieniać się muszą. Przy takiem założeniu musi mieć miejsce równanie x: $\sqrt{r^2+x^2}=e$.

Gdy x ciągle się powiększając dąży do nieskończoności, wtedy e dążyć będzie do jedności i równanie (2), po podstawieniu wartości e w funkcyi x i po dokonaniu możliwych uproszczeń przechodzi dla $x=\infty$ w następujące:

$$(S\alpha\omega)^2+\omega^2+r^2=o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Jest to równanie walca, którego przecięcie prostopadłe do osi jest kołem o promienia r.

101. *Znaleść równanie stożka pochyłego o przecięciu kołowem.*

Obierzmy wierzchołek stożka za początek promieni wodzących i dajmy, że przecięcie kołowe wyznaczonem jest przez równanie płaszczyzny

$$S\alpha\varrho=1$$

i równanie kuli, przechodzącej przez początek

$$\varrho^2=S\beta\varrho.$$

Poprzednim dwóm równaniom możemy nadać kształt

$$S\alpha U\varrho=\frac{1}{T\varrho} \quad \text{i} \quad -T\varrho=S\beta U\varrho.$$

Jeżeli z tych dwóch równań wyrugujemy $T\varrho$, otrzymamy równanie któremu musi czynić zadość $U\varrho$

$$S(\alpha U\varrho)S(\beta U\varrho)=-1.$$

Wprowadzając teraz dowolne $T\varrho$, t. j. mnożąc obie strony przez $(T\varrho)^2$, znajdziemy

$$\varrho^2-S\alpha\varrho S\beta\varrho=o,$$

Ponieważ α i β jednakowo wchodzą w to równanie, więc możemy zamienić je pomiędzy sobą i tym sposobem z *samego* kształtu równania stożka kołowego widzimy, że stożek ma dwa przecięcia kołowe, przeciwrównoległe.

102. *Wyznaczyć równanie stożka kołowego, gdy dane są pięć jego tworzących;* innemi słowami, *wyznaczyć równanie stóżka drugiego stopnia, którego wierzchołek jest w początku promieni wodzących i którego powierzchnia zawiera pięć danych tworzących α, β, γ, δ, ε.*

Równanie

$$S.[V(V\alpha\beta V\delta\varepsilon)V(\beta\gamma V\varepsilon\varrho)V(V\gamma\delta V\varrho\alpha)]=o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wyraża stożek, wierzchołek którego znajduje się w początku, gdyż równaniu temu stanie się jeszcze zadość, gdy zamiast ϱ podstawimy $x\varrho$. Oprócz tego, ponieważ ϱ wchodzi dwa razy jako czynnik, więc stożek jest powierzchnią drugiego stopnia. Nakoniec łatwo dowieść, że α, β, γ, δ, ε są tworzącemi stożka. Jakoż podstawiając w dane równanie zamiast ϱ jeden z tych promieni przekonamy się, że równanie przechodzi w tożsamość. Zastąpmy np. ϱ przez β, znajdziemy, że pierwsza strona przechodzi

$$S\left\{V(V\alpha\beta V\delta\varepsilon)V[V(V\beta\gamma V\varepsilon\beta)V(V\gamma\delta V\beta\alpha)]\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (a).$$

Lecz według (§ 55,1)

$$V(\alpha V\beta\gamma)=\gamma S\alpha\beta-\beta S\alpha\gamma.$$

Zamieniając w tym wzorze α na $V\alpha\delta$ otrzymamy

$$V(V\alpha\delta V\beta\gamma)=\gamma S\alpha\delta\beta-\beta S\alpha\delta\gamma.$$

Stosując ten wzór do wyrażenia (a) znajdziemy, że to wyrażenie przybiera kształt

$$S\left[V\alpha\beta V\delta\varepsilon\left\{V\beta\alpha S(V\gamma\delta V\beta\gamma V\varepsilon\beta)-V\gamma\delta S(V\beta\alpha V\beta\gamma V\varepsilon\beta)\right\}\right].$$

Lecz

$$S\Big(V\alpha\beta V\delta\varepsilon V\beta\alpha\Big)=-S\Big((V\alpha\beta)^2 V\delta\varepsilon\Big)=o,$$

$$S(V\beta\alpha V\beta\gamma V\varepsilon\beta)=o,$$

gdyż $V\beta\alpha$, $V\beta\gamma$, $V\varepsilon\beta$ jako prostopadłe do β leżą na jednej płaszczyźnie

Pierwsza więc strona równania (1) po podstawieniu w niej β zamiast ϱ staje się identycznie równą zeru, czyli β leży na powierzchni stożka. Tego samego można dowieść odnośnie do γ, δ, ε, α.

Wniosek. *Hamilton* zwrócił uwagę, że równanie (1) dowodzi twierdzenia *Pascala*. Jakoż równanie to dowodzi, że trzy proste $V(V\alpha\beta V\delta\varepsilon)$, $V(V\beta\gamma V\varepsilon\varrho)$, $V(\gamma\delta V\varrho\alpha)$ leżą na jednej płaszczyźnie (płaszczyzna *Pascala*). Lecz te proste są oczywiście przecięciami płaszczyzn ($\alpha\beta$) i ($\delta\varepsilon$), ($\beta\gamma$) i ($\varepsilon\varrho$), ($\gamma\delta$) i ($\varrho\alpha$). (§ 65,5).

Dowodzi więc ono, że *ściany przeciwległe piramidy wpisanej w stożek drugiego stopnia przecinają się według trzech prostych, na jednej płaszczyźnie leżących.*

ZADANIA.

1. Jeżeli trzy koła dane przetniemy czwartem zmiennem, to trzy cięciwy przecięcia utworzą trójkąt, miejscem geometrycznem wierzchołków którego będą trzy proste, przecinające się w jednym punkcie.

2. Jeżeli AB jest średnicą koła, PQ - cięciwą równoległą do AB, M— dowolnym punktem na prostej AB, to $\overline{MP}^2+\overline{MQ}^2=\overline{MA}^2+\overline{MB}^2$.

3. Dowieść, że jeżeli przez jeden z dwóch punktów przecięcia się dwóch kół poprowadzimy średnice tych kół, to przeciwległe końce średnic i drugi punkt przecięcia się kół leżą na jednej prostej.

4. Prosta porusza się na płaszczyźnie w ten sposób, że summa prostopadłych, spuszczonych na nią z dwóch punktów stałych jest ilością stałą. Znaleść miejsce geometryczne środków odcinków, zawartych pomiędzy spodkami prostopadłych.

5. Niech O i O' będą środkami dwóch okręgów kół, z których drugi przechodzi przez punkt O. Przez punkt A, wspólny obu okręgom prowadzimy prostą AO', przecinającą oba okręgi w punktach C i D. Dowieść, że $AC.AD=2\overline{AO}^2$.

6. Dowieść, że miejscem geometrycznem punktów, z których dwa nierówne koła widzimy pod kątami równemi jest okrąg koła.

7. Niech A i B będą dwoma punktami stałemi, O—początkiem promieni wodzących, P—punktem w przestrzeni. Znaleść miejsce geometryczne punktów, czyniących zadość równaniu $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\overline{OP}^2$ i zbadać otrzymany rezultat dla przypadków, gdy kąt AOB jest ostrym, prostym lub rozwartym.

8. Nakreślić kulę, której środek znajdowałby się na danej prostej, którąby przechodziła przez punkt dany i którąby była styczną do danej płaszczyzny. Dla rozwiązania tego zadania należy wyznaczyć pewien skalar, dla którego w ogólności, otrzymujemy dwa rozwiązania. Zbadać kiedy te dwa rozwiązania stają się równemi i kiedy urojonemi.

9. Jeżeli dwie kule stałe przecięte są pod kątem stałym przez szereg kul, to zawsze znajduje się kula stała, przecinająca każdą z kul szeregu pod kątem prostym.

10. Znaleść miesce geometryczne spodków prostopadłych, spuszczonych z punktu danego na układ płaszczyzn, przechodzących przez drugi punkt dany.

11. Kula jest styczną do dwóch danych prostych, nie przecinających się Znaleść miejsce geometryczne środków tych kul

12. Mając dany czworościan opisać około niego kulę.

13. W dany czworościan wpisać kulę

14. Wyznaczyć kulę styczną do czterech kul.

15. Jeśli prosta ruchoma, przechodząca przez początek tworzy ze sta-

łemi prostemi, których liczba jest dowolną, kąty zmienne $\theta, \theta_1, \theta_2 \ldots,$ czyniące zadość równaniu

$a\cos\theta + a_1\cos\theta_1 + a_2\cos\theta_2 + \ldots = stałej,$

gdzie $a, a_1, a_2 \ldots$ są skalarami, to miejscem geometrycznem ruchomej prostej będzie stożek prosty o podstawie kołowej.

16. Wyznaczyć warunki, przy których równanie $S\varrho\varphi\varrho = o$ wyraża stożek prosty.

17. Znaleść miejsce geometryczne wierzchołków stożków prostych, mających za podstawę wspólną elipsę.