Wiemy, że

$$AB = \alpha_1 - \alpha,$$

a zatem

$$AC = \frac{m_1}{m+m_1}(\alpha_1 - \alpha),$$

ztąd

$$OC = OA + AC = \alpha + \frac{m_1}{m+m_1}(\alpha_1 - \alpha),$$

a więc

$$OC = \varrho = \frac{m\alpha + m_1\alpha_1}{m+m_1}.$$

Wprowadźmy teraz do układu nową massę m_2, znajdującą się na końcu promienia α_2. Wiadomo, że środek ciężkości układu trzech mass przypada we środku ciężkości punktu C i massy m_2; wynika ztąd, że promień wodzący środka ciężkości tych trzech mass dany będzie wyrażeniem:

$$\frac{(m+m_1)\dfrac{m\alpha+m_1\alpha_1}{m+m_1} + m_2\alpha_2}{(m+m_1)+m_2} = \frac{m\alpha + m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2}{m+m_2+m_2}$$

Dla dowolnej liczby mass otrzymamy

$$\varrho = \frac{\Sigma m\alpha}{\Sigma m}.$$

Równanie to możemy napisać

$$\Sigma m(\alpha - \varrho) = o.$$

Lecz biorąc pod uwagę jedną z mass np. m_1, widzimy, że $(\alpha_1 - \varrho)$ oznacza promień wodzący massy m odnośnie do środka ciężkości układu, a że $m_1 (\alpha_1 - \varrho)$ oznacza promień wodzący mający ten sam kierunek i początek co pierwszy, lecz m_1 razy od niego większy, więc przychodzimy do twierdzenia: *Summa promieni wodzących mass układu, wychodzących ze środka ciężkości tego układu i powiększonych proporcyonalnie do wielkości tych mass równa się zeru.*

Równanie linii prostej.

18. Jeżeli przez punkt stały O, obrany jako początek promieni wodzących poprowadzimy promień OM, równoległy do danego promienia α, to równanie

$$\varrho = p\alpha$$

oznacza promień wodzący OM, jeżeli długość OM jest p razy większą od długości α. Jeżeli teraz zamiast ilości stałej p podstawimy ilość zmienną x, mogącą przybierać wszelkie możliwe wartości rzetelne, to równanie

$$\varrho = x\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

oznaczyć może promień wodzący każdego punktu prostej równoległej do α i przechodzącej przez początek promieni wodzących, czyli innemi słowami, równanie (1) jest równaniem prostej równoległej do α i przechodzącej przez początek.

Odwrotnie, łatwo widzieć, że równanie (1) oznacza prostą, równoległą do stałego promienia α i przechodzącą przez początek, jeżeli początek ten jest danym; jeśli zaś początek ten nie jest danym, to równanie powyższe oznacza wszystkie proste równoległe do α.

Jeżeli z początku O poprowadzimy promień $OB=\beta$, a przezpunkt B— prostą nieograniczoną BN, równoległą do danego promienia α, to promień wodzący OP każdego punktu prostej BN będzie

$$OP=OB+BP,$$

czyli

$$\varrho=\beta+x\alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

równanie to jest równaniem linii prostej BN.

19. Jeżeli $OA=\alpha$ i $OB=\beta$ oznaczają promienie wodzące dwóch punktów A i B, to równanie prostej, łączącej dwa punkta A i B można przedstawić w jednym z dwóch kształtów.

$$\varrho=\alpha+x\ (\beta-\alpha)$$

$$\varrho=\beta+y\ (\alpha-\beta),$$

gdzie $x+y=1$.

Pierwsze z tych dwóch równań można przedstawić w kształcie

$$\varrho+(x-1)\ \alpha-x\beta=o.$$

W tem równaniu summa współczynników promieni wodzących ϱ, α i β jest identycznie równą zeru, gdyż

$$1+(x-1)+(-x)=o$$

Przychodzimy więc do wniosku, że ogólnem równaniem prostej, przechodzącéj przez końce A i B promieni wodzących α i β będzie:

$$A\alpha+B\beta+C\varrho=o, \quad . \quad . \quad (1)$$

jeżeli jednocześnie ma miejsce tożsamość

$$A+B+C=o \quad . \quad . \quad (2)$$

Odwrotnie, jeżeli równanie

$$A\alpha+B\beta+C\varrho=o$$

ma wyrazić prostą, przechodzącą przez końce promieni wodzących α i β, to musi miejsce tożsamość

$$A+B+C=o$$

Jakoż, widzieliśmy poprzednio, że równaniem prostej, przechodzącej przez końce promieni α i β jest

$$\varrho+\ (x-1)\ \alpha-x\ \beta=o,$$

Lecz równanie to od równania (1) może się tylko różnić stałym mnożnikiem m, tak że musi mieć miejsce tożsamość

$$A\alpha+B\beta+C\varrho=m\ \varrho+m\ (x-1)\ \alpha-mx\beta,$$

czyli że,

$$A=m,\ B=m\ (x-1),\ C=-mx,$$

które to równania dają

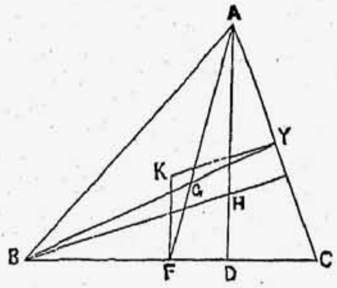
$$A+B+C=o$$

Wniosek. Z tego cośmy wyżej powiedzieli wypływa następujące twierdzenie:

Jeżeli jednorodna linijna funkcya trzech promieni wodzących, wychodzących z jednego punktu i leżących na jednej płaszczyźnie, równa się zeru i summa współczynników liczbowych promieni wodzących jest identycznie równą zeru, to końce tych promieni leżą na jednej linii prostej.

20. Twierdzenie wyrażone ostatnim wnioskiem objaśnimy przykładem dowodząc znanego twierdzenia.

Punkt przecięcia się dwójsiecznych boków trójkąta, punkt przecięcia się jego wysokości i środek koła opisanego około tego trójkąta leżą na jednej prostej, którą pierwszy z tych punktów dzieli w stosunku 1:3



(*Fig.* 7).

Niech G, H, K (*Fig.* 7) będą temi trzema punktami. Oznaczając jednostkę długości promienia wodzącego, idącego w kierunku CB przez α, długość boku CB przez a, jednostkę długości promieni CA przez β, długość CA zaś—przez b, otrzymamy:

$$CB=a\alpha,\ CA=b\beta.$$

Wiemy (§ 14), że

$$CG=\varrho=\tfrac{1}{3}\,(a\alpha+b\beta)\ .\ .\ .\ .\ (1).$$

Oprócz tego nie trudno dowieść, że

$$AD=AC+CD=b\ (\cos C.\alpha-\beta)$$
$$BE=BC+CE=a\ (\cos C.\beta-\alpha),$$

dla punktu więc H, przecięcia się tych dwóch prostych otrzymamy

$$CH=b\beta+yb\ (\cos C.\alpha-\beta)$$
$$CH=a\alpha+xa\ (\cos C.\beta-\alpha),$$

ztąd otrzymujemy następujące dwa równania:

$$b\ (1-y)=xa\cos C$$
$$a\ (1-x)=yb\cos C,$$

które dają

$$x=\frac{a-b\cos C}{\sin^2 C}.$$

Wartość ta podstawiona w wyrażenie dla CH daje

$$CH=\varrho_1=\frac{\cos C}{\sin^2 C}\ [\ (b-a\cos C)\ \alpha+(a-b\cos C)\ \beta]\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2).$$

Nakoniec dla otrzymania promienia wodzącego $CK=\varrho_2$ punktu K zwracamy uwagę na następujące dwa równania:

$$CK=CF+t\ AD$$
$$CK=CY+u\ BE,$$

gdzie t i u oznaczają wartości liczebne (§ 18).
Równania te przy uwzględnieniu wartości dla AD i BE, poprzednio otrzymanych dają:

$$CK=\varrho_2=\frac{1}{2\sin^2 C}\left[(a-b\cos C)\,\alpha+(b-a\cos C)\,\beta\right] \quad . \;.\; .\; (3).$$

Z równań (1), (2) i (3) otrzymujemy

$$2\varrho_2+\varrho_1-3\varrho=o,$$

a że $2+1-3=o$, więc na zasadzie poprzedniego wniosku punkty G, K i H leżą na jednej prostej.
Co więcej, ponieważ

$$2\varrho_1+\varrho_1-3\varrho=2(\varrho_2-\varrho)+(\varrho_1-\varrho),$$

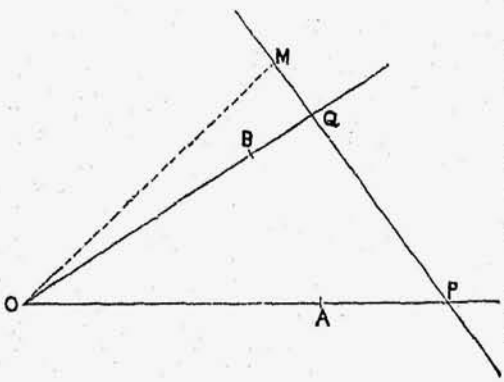
więc

$$2GK-GH=o,$$

czyli

$$2GK=GH.$$

21. Damy teraz ogólny kształt równania linii prostej, odniesionej do dwóch stałych promieni wodzących $OA=\alpha$ i $OB=\beta$ (*Fig. 8*).



(Fig. 8).

Niech PQ będzie prostą, przecinającą kierunki stałych promieni wodzących w punktach P i Q i niech M będzie dowolnym punktem tej prostej. Oznaczając OP przez $a\alpha$, OQ przez $b\beta$, gdzie a i b oznaczają liczby rzetelne, otrzymamy

$$OM=\varrho=OP+PM=a\alpha+xPQ,$$

gdzie x oznacza wartość liczebną zmienną, zależną od położenia punktu M na prostej PQ.

Lecz $PQ=b\beta-a\alpha$, więc

$$\varrho=a\alpha+x(b\beta-a\alpha)=(a-ax)\alpha+bx\beta,$$

t. j. równanie linii prostej, odniesionej do dwóch promieni α i β będzie

$$\varrho=m\alpha+n\beta, \quad . \;.\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; (1)$$

gdzie m i n są funkcyami liniejnemi jednej zmiennej niezależnej x.
Odwrotnie jeżeli w równaniu (1) m i n są funkcyami linijnemi jednej zmiennej, to równanie to przedstawia linię prostą.
Jakoż dajmy, że

$$m=a_1x+b_1$$
$$n=a_2x+b_2$$

Podstawiając te wartości w równanie (1), otrzymamy

$$\varrho=(a_1x+b_1)\alpha+(a_2x+b_2)\beta=b_1\alpha+b_2\beta+(a_1\alpha+a_2\beta)x.$$

Lecz równanie to (§ 18) oznacza prostą, poprowadzoną przez punkt, którego promień wodzący jest $b_1\alpha+b_2\beta$, równolegle do promienia wodzącego $a_1\alpha+a_2\beta$.

Równanie linii krzywej płaskiej.

22. Równanie

$$\varrho = m\alpha + n\beta$$

oznacza linię krzywą płaską, jeżeli m i n połączone są ze sobą równaniem, którego stopień wwyższym jest nad 1 szy.

Jakoż, przyjmując, że tem równaniem jest $\varphi(m, n) = o$, widzimy, że dla danego n otrzymujemy oznaczoną liczbę wartości dla m i równanie $\varrho = m\alpha + n\beta$ daje nam oznaczoną liczbę punktów, leżących na płaszczyźnie promieni wodzących α i β. Nadając wielkości n wartość odmienną od pierwszej, otrzymamy nowy szereg punktów, czyniących zadość równaniu $\varrho = m\alpha + n\beta$. Nadając n wszelkie wartości rzetelne, ciągle po sobie idące, otrzymamy na płaszczyźnie promieni α i β szereg punktów, których promienie wodzące czynią zadość równaniu danemu i dla tego szereg ten jest geometrycznem wyrażeniem danego równania.

Z tego to powodu równanie

$$\varrho = m\alpha + n\beta$$

jest równaniem *pewnej krzywej płaskiej*, jeżeli pomiędzy współczynnikami m i n zachodzi równanie $\varphi(m, n) = o$.

Zamiast jednego równania $\varphi(m, n) = o$, możemy przyjąć że pomiędzy m i n i dowolnej zmiennej t zachodzą dwa następujące równania: $\lambda(m, t) = o$ i $\mu(n, t) = o$, z których otrzymamy $m = f_1(t)$ i $n = f_2(t)$.

Otrzymamy więc ostatecznie, że

$$\varrho = f_1(t)\,\alpha + f_2(t)\,\beta \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

jest równaniem linii krzywej płaskiej.

Otrzymany wypadek w połączeniu z tem cośmy mówili w poprzednim paragrafie pokazuje, że równanie (1) oznacza linię prostą, gdy $f_1(t)$ i $f_2(t)$ są funkcyami linijnemi zmiennej niezależnej t, oznacza zaś krzywą, jeżeli $f_1(t)$ i $f_2(t)$ są dowolnemi funkcyami tej zmiennej.

Uwaga. Łatwo widzieć, że w przypadku, gdy α i β oznaczają promienie wodzące, mające jednostki długości, to $f_1(t)$ i $f_2(t)$, są współrzędnemi prostolinijnemi punktów krzywej.

23. *Przykłady.*

1. Przyjmując, że α i β oznaczają promienie wodzące równe co do długości i do siebie prostopadłe, widzimy, że

$$\varrho = m\alpha + n\beta$$

jest równaniem koła, którego środek przypada w początku promieni wodzących i którego promień równa się długości promieni wodzących α i β, jeżeli współczynniki m i n czynią zadość równania $m^2 + n^2 = 1$.

Równaniu powyższemu możemy nadać kształt

$$\varrho = m\alpha + \sqrt{1 - m^2}\,.\,\beta,$$

czyli

$$\varrho = \alpha \cos t + \beta \sin t$$

2. Oznaczając przez α i β długości i kierunki dwóch połów osi sprzężonych elipsy otrzymamy, że równanie

$$\varrho = m\alpha + n\beta$$

oznacza elipsę, jeżeli $m^2 + n^2 = 1$.

Równaniu temu możemy nadać kształt

$$\varrho = \alpha \cos t + \beta \sin t.$$

3. Oznaczając przez α i β jednakowe długości odcinków $\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)$, obranych na asymptotach hiperboli, otrzymamy, że równaniem hiperboli będzie

$$\varrho = m\alpha + n\beta,$$

w założeniu $mn = 1$.

Równaniu hiperboli możemy nadać kształt

$$\varrho = m\alpha + \frac{1}{m}\beta$$

lub

$$\varrho = \alpha \operatorname{tg} t + \beta \operatorname{cotg} t$$

4. Obrawszy dowolny punkt na paraboli i poprowadziwszy przez ten punkt średnicę oraz styczną do paraboli i odłożywszy następnie na średnicy jednostkę długości α, na stycznej zaś długość $\sqrt{2p}$ (gdzie p parametr), którą oznaczymy przez β, otrzymamy równanie

$$\varrho = m\alpha + n\beta,$$

które wyraża parabolę, jeżeli $m = n^2$.

Możemy też równanie paraboli predstawić w kształcie

$$\varrho = \alpha t^2 + \beta t.$$

6. Wyprowadzić równanie stycznej do paraboli.

Łatwo widzieć, że równanie siecznej, łączącej dwa punkta paraboli, którym odpowiadają wartości t i t_1 będzie

$$\varrho = \alpha t^2 + \beta t + y(t_1 - t)\left\{\alpha(t_1 + t) + \beta\right\},$$

czyli

$$\varrho = \alpha t^2 + \beta t + x\left\{\alpha(t_1 + t) + \beta\right\}.$$

Biorąc w tem równaniu $t_1 = t$, otrzymamy równanie stycznej do parabol w punkcie t

$$\varrho = \alpha t^2 + \beta t + x(2\alpha t + \beta).$$

Kładąc w tem równaniu $x = -t$, otrzymamy

$$\varrho = \alpha t^2 + \beta t - 2\alpha t^2 - \beta t = -\alpha t^2.$$

Jest-to promień wodzący punktu, leżącego na średnicy, gdyż nie zawiera β, a zatem jest-to promień wodzący punktu precięcia się stycznej ze średnicą. Ponieważ αt^2 jest odciętą punktu styczności, więc otrzymujemy znaną własność paraboli, że odcinek średnicy, zawarty pomiędzy początkiem współrzędnych i spodkiem stycznej równa się odciętej punktu styczności, wziętej ze znakiem przeciwnym.

7. Styczne poprowadzone do paraboli w trzech wierzchołkach trójkąta wpisanego w parabolę przecinają boki przeciwległe tym wierzchołkom w trzech punktach, leżących na jednej prostej.

Jeden z wierzchołków O trójkąta możemy obrać jako początek promieni wodzących i przez t i t_1 oznaczyć wartości zmiennej niezależnej w równaniu paraboli, odpowiadające dwóm drugim wierzchołkom A i B.

Równania boków trójkąta będą wtedy:

$$\begin{array}{ll} \textit{równ. } OA & \varrho=(\alpha t^2+\beta t)x \\ \textit{równ. } OB & \varrho=(\alpha t^2_1+\beta t_1)y \\ \textit{równ. } AB & \varrho=(\alpha t^2+\beta t)+\left\{(t_1+t)\alpha+\beta\right\}z. \end{array}$$

Równania stycznych do paraboli będą:

$$\begin{array}{ll} \textit{w punkcie } O & \varrho=u\beta \\ \textit{w punkcie } A & \varrho=\alpha t^2+\beta t+v(2\alpha t+\beta) \\ \textit{w punkcie } B & \varrho=\alpha t_1{}^2+\beta t_1+w(2\alpha t_1+\beta). \end{array}$$

Promienie zatem wodzące punktów przecięcia się stycznych z bokami trójkąta będą

$$\begin{array}{ll} \textit{Stycznej w } O \textit{ z bokiem } AB & \varrho_1=\dfrac{tt_1}{t+t_1}\beta. \\ \text{,, } \textit{w } A \textit{ z } \text{ ,, } OB & \varrho_2=\dfrac{t^2}{2t-t_1}(t_1\alpha+\beta) \\ \text{,, } \textit{w } B \textit{ z } \text{ ,, } OA & \varrho_3=\dfrac{t_1{}^2}{2t_1-t}(t\alpha+\beta). \end{array}$$

Z tych równań otrzymamy

$$\frac{\varrho_3(2t_1-t)}{t_1}-\frac{\varrho_2(2t-t_1)}{t}-\frac{\varrho_1(t_1{}^2-t^2)}{tt_1}=0$$

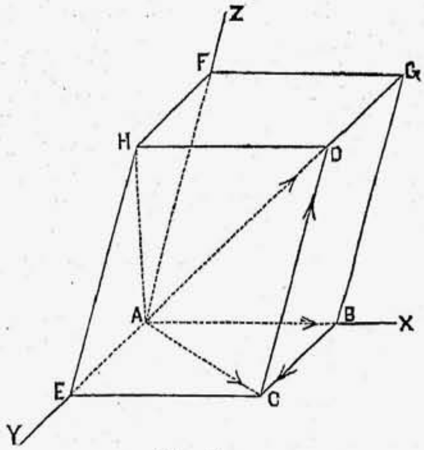
i jednocześnie

$$\frac{2t_1-t}{t_1}-\frac{2t-t_1}{t}-\frac{t_1{}^2-t^2}{tt_1}=0,$$

które to równania dowodzą, że punkta przecięcia się stycznych z bokami trójkąta leżą na jednej prostej (§ 19).

Równanie linii w przestrzeni.

24. Dla otrzymania równania linii w przestrzeni prowadzimy przez dowolny początek A (*Fig. 9*) trzy promienie wodzące $AX=\alpha$, $AY=\beta$ i $AZ=\gamma$ nieleżące na jednej płaszczyźnie. Przez dowolny punkt D w przestrzeni prowa-



(*Fig. 9*).

dzimy proste równoległe do obranych promieni wodzących i na nich jako na krawędziach budujemy równoległościan $ABCDEFGH$.

Łatwo widzieć, że promień wodzący AD punktu D dany jest równaniem

$$\varrho = a\alpha + b\beta + c\gamma.$$

Jeżeli punkt D opisuje krzywą w przestrzeni, to punkta C i H odpowiednio opisują krzywe na płaszczyznach promieni $\alpha\,\beta$ i $\beta\,\gamma$.

Jeżeli równanie krzywej, opisanej przez punkt C będzie

$$AC = \varrho = f_1(t)\alpha + f_2(t)\beta,$$

to równaniem krzywej, opisanej przez punkt H będzie

$$AH = \varrho = f_2(t)\beta + f_3(t)\gamma.$$

Jakoż

$$AH = AE + EH = f_2(t)\beta + p\gamma,$$

ponieważ zaś H opisuje krzywą, więc

$$p = EH = CD = f_3(t),$$

ztąd

$$AH = \varrho = f_2(t)\beta + f_3(t)\gamma.$$

Z figury widzimy, że

$$AD = AC + CD,$$

więc

$$AD = \varrho = f_1(t)\alpha + f_2(t)\beta + f_3(t)\gamma.$$

Przychodzimy tym sposobem do twierdzenia, że równanie

$$\varrho = a\alpha + b\beta + c\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wyraża linię krzywą w przestrzeni, jeżeli współczynniki a, b i c trzech promieni wodzących α, β, γ, nie leżących na jednej płaszczyźnie, są funkcyami jednej zmiennej niezależnej t.

Przykłady.

1. Jeżeli a, b i c są funkcyami linijnemi zmiennej t, wtedy równanie powyższe wyraża linię prostą.

Jakoż dajmy, że

$$a = mt + n,\ b = pt + q,\ c = rt + s,$$

podstawiając te wartości w równanie (*1*) otrzymamy

$$\varrho = n\alpha + q\beta + s\gamma + (m\alpha + p\beta + r\gamma)t,$$

Lecz $n\alpha + q\beta + s\gamma$ i $m\alpha + p\beta + r\gamma$ wyrażają oznaczone promienie wodzące, więc ϱ wyraża linię prostą, poprowadzoną przez koniec pierwszego z tych dwóch promieni równolegle do drugiego

2. Równaniem linii śrubowej będzie

$$\alpha\cos t + \beta\sin t + \gamma t,$$

jeżeli α, β, γ oznaczają trzy promienie wodzące do siebie prostopadłe, z których α i β są równe promieniowi podstawy walca, na powierzchni którego leży linia śrubowa, γ zaś oznacza odcinek wzdłuż osi walca.

Równanie powierzchni.

25. Jeżeli w równaniu

$$\varrho = a\alpha + b\beta + c\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

a, b i c są funkcyami dwóch zmiennych niezależnych u i v

$$a = \varphi_1(u, v),\ b = \varphi_2(u, v),\ c = \varphi_3(u, v)$$

to równanie (*1*) wyraża powierzchnię.

Jakoż, nadając zmiennej u wartość oznaczoną m, znajdziemy, że równanie

$$\varrho = \varphi_1(m, v)\alpha + \varphi_2(m, v)\beta + \varphi_3(m, v)\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1^a)$$

oznacza linię krzywą (§ 24), leżącą na miejscu geometrycznem, danem przez równanie (*1*). Zmieniając wartość zmiennej u w sposób ciągły, czyli przyjmując, że u jest parametrem zmiennym widzimy, że krzywa dana przez równanie (1^a) opisuje powierzchnię, której punkta czynią zadość równaniu (*1*) Tę samą powierzchnię otrzymamy przyjmując, że v jest parametrem zmiennym.

Naodwrót, jeżeli dana jest powierzchnia, to równanie jej musi mieć kształt (*1*), gdzie współczynniki a, b, c są funkcyami dwóch zmiennych niezależnych. Jakoż, jeśli wyobrazimy sobie powierzchnię utworzoną według pewnego prawa, to prosta MP poprowadzona z dowolnego punktu M tej powierzchni równolegle do promienia γ, musi przeciąć płaszczyznę promieni wodzących $\alpha\beta$ w oznaczonym punkcie P. Odwrotnie, nad każdym punktem P płaszczyzny α i β, leży oznaczony punkt powierzchni (jeden lub kilka), t. j. innemi słowami, gdy w równaniu

$$\varrho = a\alpha + b\beta + c\gamma$$

damy sobie dowolnie a i b, to c będzie zupełnie oznaczoną funkcyą a i b, czyli, że pomiędzy temi wielkościami musi mieć miejsce równanie $\psi(a, b, c) = o$, które jest równoznacznem z układem trzech równań: $a = \varphi_1(u, v)$, $b = \varphi_2(u, v)$, $c = \varphi_3(u, v)$.

Przykłady:

1. Dla otrzymania równania płaszczyzny uważamy ją jako utworzona ruchem linii prostej, ślizgającej się równolegle po drugiej danej prostej. Kierownica PR płaszczyzny jest zupełnie oznaczoną, jeśli znamy jeden jej punkt P i kierunek PR. Dajmy, że ta kierownica jest równoległą do prostej

$$c\alpha + c_1\beta + c_2\gamma$$

i że dla promienia wodzącego punktu P ma miejsce równanie

$$OP = a\alpha + a_1\beta + a_2\gamma.$$

Równaniem kierownicy przy tem założeniu będzie

$$\varrho = (a\alpha + a_1\beta + a_2\gamma) + v(c\alpha + c_1\beta + c_2\gamma),$$

gdzie v oznacza zmienną liczebną.

Przyjmując, że tworząca jest równoległą do prostej

$$b\alpha + b_1\beta + b_2\gamma$$

i prowadząc przez dowolny punkt M płaszczyzny równoległą MN do tworzącej aż do przecięcia się z kierownicą w punkcie N, otrzymamy

$$OM = ON + NM.$$

Lecz ponieważ N jest punktem kierownicy PR, więc

$$ON = a\alpha + a_1\beta + a_2\gamma + v(c\alpha + c_1\beta + c_2\gamma),$$

a że prosta NM jest równoległą do tworzącej, więc

$$NM = u(b\alpha + b_1\beta + b_2\gamma).$$

Otrzymamy ztąd, że

$$\varrho = (a + bu + cv)\alpha + (a_1 + b_1 u + c_1 v)\beta + (a_2 + b_2 u + c_2 v)\gamma$$

jest równaniem płaszczyzny.

Naodwrót, łatwo też dowieść że obrazem geometrycznym równania

$$\varrho = (a + bu + cv)\alpha + (a_1 + b_1 u + c_1 v)\beta + (a_2 + b_2 u + c_2 v)\gamma$$

jest płaszczyzna.

Chcąc tego dowieść, dajmy powyższemu równaniu kształt:

$$\varrho = (a\alpha + a_1\beta + a_2\gamma) + (b\alpha + b_1\beta + b_2\gamma)u + (c\alpha + c_1\beta + c_2\gamma)v.$$

Wyrażenia: $a\alpha + a_1\beta + a_2\gamma$, $b\alpha + b_1\beta + b_2\gamma$, $c\alpha + c_1\beta + c_2\gamma$ oznaczają trzy zupełnie określone promienie wodzące OM, OR_1, OR_2, tak, że powyższemu równaniu możemy nadać kształt

$$\varrho = OM + uOR_1 + vOR_2.$$

Lecz promień wodzący

$$OS = uOR + vOR_2$$

oznacza prostą, leżącą na płaszczyźnie OR_2R_1, więc

$$\varrho = (a\alpha + a_1\beta + a_2\gamma) + (b\alpha + b_1\beta + b_1\gamma)u + (c\alpha + c_1\beta + c_2\gamma)v$$

oznacza promień wodzący punktu M leżącego na prostej równoległej do płaszczyzny OR_1R_2, t. j. punkt M opisuje płaszczyznę równoległą do płaszczyzny OR_1R_2.

Przychodzimy więc do twierdzenia:

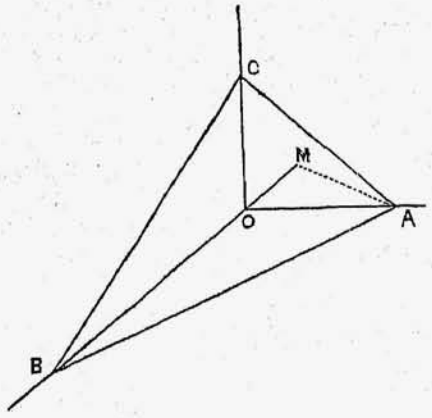
Równanie

$$\varrho = a\alpha + b\beta + c\gamma$$

wyraża płaszczyznę, jeżeli współczynniki a, b i c są funkcyami linijnemi dwóch zmiennych niezależnych u i v.

2. Znaleść równanie płaszczyzny przechodzącej przez końce trzech promieni wodzących α, β i γ.

Dajmy, że końce tych promieni są A, B i C *(Fig 10)* i że M jest dowolnym punktem tej płaszczyzny.



(Fig 10).

Promień wodzący ϱ punktu M czyni zadość równaniu

$$OM = \varrho = OA + AM$$

lecz

$$AM = uAC + vAB,$$
$$AC = AO + OC$$
$$AB = AO + OB,$$

ztąd

$$\varrho = \alpha + u(\gamma - \alpha) + v(\beta - \alpha),$$

czyli, że

$$\varrho + (u + v - 1)\alpha - v\beta - u\gamma = o$$

jest równaniem szukanej płaszczyzny.

Równanie to jest szczególnym przypadkiem ogólniejszego równania

$$A\varrho + B\alpha + C\beta + D\gamma = o,$$

w którem

$$A + B + C + D = o.$$

Przychodzimy więc do wniosku, że równanie linijne pomiędzy czterema promieniami wodzącemi, w którem summa współczynników identycznie równa się zeru, wyraża, że punkta końcowe tych promieni leżą na jednej płaszczyźnie.

2. W podobny powyższemu sposób można też otrzymać równania powierzchni utworzonych ruchem linii prostej.

Dla otrzymania równania takiej powierzchni wyobraźmy sobie na tej powierzchni jakąś linię krzywą $\varrho = f(t)$, *kierownicę*. Powierzchnię można uważać jako utworzoną ruchem linii prostej, *tworzącej*, ślizgającej się po kierownicy według danego prawa. Dla wyrażenia tego prawa ruchu tworzącej równaniem, zakreślamy z początku, jako ze środka, kulę promieniem równym jednostce długości. Promienie poprowadzone przez początek równolegle do wszystkich tworzących przetną powierznię kuli według pewnej oznaczonej krzywej, danej równaniem

$$\varrho = \varphi(t),$$

gdzie $\varphi(t)$ dla każdej wartości liczebnej zamienia się w jedność. Przez każdy punkt M powierzchni wogólności przechodzi tworząca, przecinająca kierownicę w punkcie A. Będzie więc

$$OA = f(t), \quad OA + AM = OM,$$

oznaczając zatem OM przez ϱ i uważając, że prosta AM jest równoległą do tworzącej $\varphi(t)$, otrzymamy

$$\varrho = f(t) + v\varphi(t).$$

Jeżeli w tem równaniu v i t będą zmiennemi niezależnemi, to ono wyraża powierzchnię, utworzoną ruchem linii prostej.

Przyjmując, że t jest ilością stałą znajdziemy, że równanie powyższe wyraża wszystkie punkta powierzchni, leżące wzdłuż jednej i tej samej tworzącej, przyjmując przeciwnie v za ilość stałą otrzymujemy wszystkie punkta powierzchni, które od krzywej $\varrho=f(t)$ są oddalone o wielkość v, mierzoną wzdłuż tworzących.

Jeżeli $f(t)=\varrho$ zamieni się w punkt, to równanie

$$\varrho=f(t)+v\varphi(t)$$

przedstawia ogólne równanie powierzchni stożkowych, jeżeli zaś $\varphi(t)=\varrho$ zamieni się na prostą, to równanie powyższe będzie ogólnem równaniem powierzni walcowych.

Przykłady:

1. Równanie.

$$\varrho=x\alpha+y\beta+c\gamma$$

wyraża elipsoidę trójosiową, jeśli

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

2. Równanie

$$\varrho=x^2\alpha+y^2\beta+(x+y)^2\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wyraża stożek drugiego stopnia, który przecięty płaszczyzną

$$\varrho=\gamma+z(\alpha-\gamma)+t(\beta-\gamma) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

daje elipsę styczną do boków trójkąta, którego wierzchołki przypadają w końcach promieni α, β, γ, a punkta styczności przypadają we środkach boków tego trójkąta.

Jakoż, kładąc $y=xv$, równanie powierzchni przyjmuje kształt

$$\varrho=x^2\alpha+x^2v^2\beta+x^2(1+v)^2\gamma,$$

czyli

$$\varrho=x^2[\alpha+v^2\beta+(1+v)^2\gamma].$$

Jeżeli w tem równaniu podstawimy za v ilość stałą otrzymamy równanie linii prostej, przechodzącej przez początek, powierzchnia zatem jest powierzchnią stożkową, mającą swój wierzchołek w początku.

Dla otrzymania przecięcia stożka (1) z płaszczyzną (2) musimy uczynić

$$x^2\alpha+y^2\beta+(x+y)^2\gamma=\gamma+z(\alpha-\gamma)+t(\beta-\gamma),$$

które to równanie rozpada się na trzy następujące,

$$x^2=z,\ y^2=t,\ (x+y)^2=1-(z+t),$$

czyli, że dla punktów przecięcia się stożka z płaszczyzną musi mieć miejsce równanie

$$1-(x^2+y^2)=x^2+y^2+2xy,$$

czyli

$$x^2+y^2+xy=\tfrac{1}{2},$$

równaniem więc tej krzywej będzie:

$$\varrho=x^2\alpha+y^2\beta+[1-(x^2+y^2)]\gamma,$$

czyli

$$\varrho-\gamma=x^2(\alpha-\gamma)+y^2(\beta-\gamma).$$

Przenosząc początek promieni wodzących do końca promienia γ i odnosząc krzywę przecięcia do promieni $(\alpha-\gamma)=\lambda$ i $(\beta-\gamma)=\mu$, otrzymamy równanie tej krzywej w postaci:

$$\varrho=x^2\lambda+y^2\mu,$$

czyli

$$\varrho=\xi\lambda+\eta\mu,$$

gdzie ξ i η czynią zadość równaniu

$$\xi+\eta+\sqrt{\xi\eta}={}^1/_2,$$

czyli

$$\xi^2+\eta^2-(\xi+\eta)+{}^1/_4=o$$

Prowadząc przez początek promieni wodzących dowolną prostą $\varrho=z\,(p\lambda+q\mu)$ znajdziemy, że ona w ogólności przecina krzywę $\varrho=x^2\lambda+y^2\mu$ w dwóch punktach i tylko w przypadku gdy $\varrho=zp\lambda$ lub $\varrho=zq\mu$, t. j. gdy prostemi przecinającemi będą same osie λ i μ otrzymamy dwa zlewające się punkta przecięcia, czyli, że osie są stycznemi do krzywej. Rachunek bardzo prosty pokaże, że punkta styczności przypadają we środkach osi λ i μ.

3. **Równanie**

$$\varrho=(a\alpha+b\beta)t+(a_1\alpha+b_1\beta+t\gamma)v$$

wyraża paraboloidę hiperboliczną.

Jakoż, widzimy że kierownica

$$\varrho=a\alpha+b\beta$$

jest prostą, leżącą na płaszczyźnie $\alpha\beta$. Tworzące zaś

$$\varrho=(a_1\alpha+b_1\beta+t\gamma)v$$

są równoległe do promieni wodzących punktów

$$\varrho=a_1\alpha+b_1\beta+t\gamma.$$

Lecz punkta te leżą wszystkie na płaszczyźnie, określonej prostemi $a_1\alpha+b_1\beta$ i γ. Więc powierzchnię naszą możemy uważać jako utworzoną ruchem prostej, ślizgającej się po drugiej prostej równolegle do danej płaszczyzny.

Lecz równanie tej powierzchni można jeszcze przedstawić w kształcie

$$\varrho=(a_1\alpha+b_1\beta)v+(a\alpha+b\beta+v\gamma)t,$$

który pokazuje, że daną powierzchnię można uważać, jako utworzoną ruchem tworzącej

$$\varrho=(a\alpha+b\beta+v\gamma)t,$$

ślizgającej się wzdłuż prostej

$$\varrho=(a_1\alpha+b_1\beta)v$$

równolegle do płaszczyzny dwóch prostych $a\alpha+b\beta$ i γ.

Dane zatem równanie wyraża paraboloidę hiperboliczną.

4. Niech w równaniu powierzchni

$$\varrho = \alpha a t + (\beta \cos t + \gamma \sin t) v$$

α, β i γ oznaczają trzy odcinki do siebie prostopadłe, wychodzące z jednego punktu i mające jednostki długości.

Kierownicą tej powierzchni jest nieograniczona prosta

$$\varrho = \alpha a t,$$

tworzące zaś

$$\varrho = (\beta \cos t + \gamma \sin t) v$$

są równoległe do płaszczyzny β, γ, t. j. prostopadłe do α.

Rownanie powierzchni pokazuje, że ona powstała ruchem prostej, która będąc stale prostopadłą do drugiej prostej posuwa się wzdłuż tej ostatniej w taki sposób, że wysokość o którą się wznosi jest proporcyonalną do kąta, o który się obraca.

Zadania do rozdziału I.

1. Czworobok, mający swoje wierzchołki we środkach boków danego czworoboku (płaskiego lub skośnego) jest równoległobokiem.

2. Przekątne równoległościanu dzielą się wzajemnie na części równe.

3. Jeżeli na bokach czworoboku $ABCD$ wyznaczymy punkty P, Q, R i S w ten sposób, aby

$$\frac{AP}{AB} = \frac{BQ}{BC} = \frac{CR}{CD} = \frac{DS}{DA} = k,$$

gdzie k różni się od $1/2$, to czworobok $PQRS$ będzie równoległobokiem, jeżeli nim jest czworobok $ABCD$.

4. Dwójsieczne dwóch kątów zewnętrznych i trzeciego kąta wewnętrznego trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

5. Proste, łączące środki boków przeciwległych czworoboku (płaskiego lub skośnego) dzielą się na równe części w punkcie dzielącym odcinek prostej pomiędzy środkami przekątnych, na dwie równe części.

6. Jeżeli przez punkt leżący wewnątrz trójkąta ABC poprowadzimy trzy proste MN, PQ i RS odpowiednio równoległe do boków AB, BC i CA aż do przecięcia się z temi bokami będziemy mieli

$$\frac{MN}{AB} + \frac{PQ}{BC} + \frac{RS}{CA} = 2.$$

7. Dwójsieczne kątów zewnętrznych trójkąta przecinają boki przeciwległe w trzech punktach, leżących na jednej prostej.

8. Punkty przecięcia się odpowiednich boków dwóch trojkątów, mających swoje wierzchołki na trzech prostych, przecinających się w jednym punkcie leżą na jednej prostej.

9. Środki trzech przekątnych czworoboku zupełnego leżą na jednej prostej. Czworobokiem zupełnym nazywamy układ czterech punktów na płaszczyźnie wraz ze wszystkiemi prostemi, łączącemi te punkty po dwa.

10. Za pomocą dowolnego pięcioboku tworzymy pięć czworoboków usuwając po jednym boku pięcioboku i przedłużając dwa boki przyległe usuniętemu aż do ich przecięcia. W każdym z tak otrzymanych czworoboków prowadzimy proste, łączące środki przekątnych. Dowieść, że pięć prostych tym sposobem otrzymanych przechodzą przez jeden i ten sam punkt.

11. Dowieść, że równanie

$$\varrho = t^{-1}\alpha + u^{-1}\beta + v^{-1}\gamma, \text{ gdzie } t+u+v=o$$

wyraża stożek, mający swój wierzchołek w początku O promieni wodzących i w którym α, β i γ będą tworzącemi. Płaszczyzna przechodząca przez końce A, B i C promieni wodzących α, β, γ przetnie stożek po elipsie opisanej około trójkąta ABC i styczne do tej elipsy w punktach A, B i C będą odpowiednio równoległemi do boków trójkąta opisanego.

12. Dowieść, że proste dzielące boki przeciwległe czworoboku skośnego na części proporcyonalne są tworzącemi paraboloidu hiperbolicznego.