ROZDZIAŁ I.

Dodawanie punktów.—Rachunek barycentryczny.—Dodawanie promieni wodzących.

1. Chcąc punkt w przestrzeni uczynić *wielkością*, musimy wprowadzić pojęcie punktów *wielokrotnych*. W tym celu możemy sobie wyobrazić, że punkty obciążone są ciężarami, których wielkość jest wielokrotnością ciężarów punktów pojedyńczych. Z tego to powodu *Möbius* punkt n krotny nA określa jako n raz cięższy od punktu pojedyńczego A i zajmujący to samo miejsce w przestrzeni. Do tego samego celu można dojść, uważając punkty w przestrzeni jako przedstawiciele odcinków równoległych i równokierunkowych, mających swój początek w tych punktach i których długości są proporcyonalne do wagi punktów.

2. Przez summę $A+B$ dwóch punktów pojedyńczych A i B, *Möbius* rozumie podwójny punkt $2C$, który dzieli odcinek AB na dwie równe części. Mamy więc równanie

$$A+B=2C,$$

albo

$$C=\tfrac{1}{2}(A+B)$$

Z samego określenia summy punktów wynika, że

$$A+B=B+A$$

to jest, że dodawanie punktów podlega *prawu przemiennościowemu* (*Commutative Principle*).

Przez summę

$$mA+nB$$

rozumiemy punkt $(m+n)$ krotny C, który odcinek AB dzieli w stosunku $n: m$; t. j. że $AC: BC=n: m$.

3. Łatwo widzieć, że summa trzech punktów pojedyńczych

$$3D=A+B+C$$

oznacza punkt trójkrotny $3D$, będący środkiem ciężkości trójkąta ABC, którego wierzchołki przypadają w trzech danych punktach.

Jakoż, summa $A+B$ oznacza punkt dwukrotny $2M$ we środku boku AB położony; $2M+C$ zaś oznacza punkt trójkrotny $3D$ na linii CM położony i dzielący ją w stosunku $CD: MD=2: 1$, czyli oznacza środek ciężkości trójkąta.

Dla otrzymania summy $A+B+C$ dodaliśmy do summy $(A+B)$ punkt C, lecz łatwo widzieć, że ten sam wypadek otrzymamy dodając do A summę $(B+C)$; tak że ma miejsce równanie

$$(A+B)+C=A+(B+C),$$

t. j. że przy dodawaniu punktów ma miejsce prawo *łącznościowe* (*Associative Principle*).

Łatwo też widzieć, że summa n punktów pojedyńczych oznacza punkt n-krotny, który przypada we środku ciężkości układu tych punktów.

4. Na zasadzie wyżej podanego określenia, możemy łatwo dowieść, że summa $p_1A_1+p_2A_2+p_3A_3+\ldots\ldots+p_nA_n$ oznacza punkt $(p_1+p_2+p_3+\ldots+p)$ krotny O, który przypada we środku ciężkości układu punktów $p_1A_1, p_2A_2 \ldots\ldots p_nA_n$, tak że

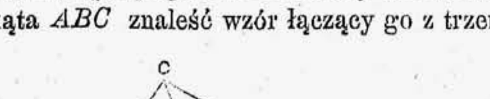
$$p_1A_1+p_2A_2+\ldots\ldots p_nA_n$$
$$=(p_1+p_2\ldots\ldots+p_n)\,O\,\ldots\ldots (1).$$

Gdybyśmy poprowadzili dowolną płaszczyznę i przez dane punkty i przez punkt O proste równoległe pomiędzy sobą, aż do przecięcia się z płaszczyzną w punktach $A'_1, A'_2, A'_3 \ldots\ldots O'$, to według zasad statyki, równanie

$$_1A_1A'_1+p_2A_2A'_2+\ldots+p_nA_nA'_n=$$
$$(p_1+p_2\ldots+p_n)\,OO'\ldots (1^a)$$

służyło by do wyznaczania współrzędnej OO' środka ciężkości układu punktów. *Möbius* przyjąwszy równanie (1) jako skócenie równania (1^a) uważał wyrażenie $p_1A_1+p_2A_2+p_3A_3+\ldots+p_nA$ jako symbol środka ciężkości O i z tego powodu cały rachunek dodawania punktów nazwał *rachunkiem barycentrycznym* *).

5. Chcąc dać czytelnikowi pojęcie na czem polega istota tego rachunku, musimy przedewszystkiem zwrócić uwagę na to, że tak samo jak dla środka ciężkości trójkąta ABC możemy też dla każdego punktu O płaszczyzny trójkąta ABC znaleść wzór łączący go z trzema punktami zasadniczemi A, B, C.



(*Fig. 1*).

Jakoż, dajmy, że prosta CO (*Fig. 1*) dzieli bok AB w stosunku $AC' : BC' = m : l$. Według (§ 2) punkt $(l+m)$ krotny C' będzie przedstawicielem summy $lA+mB$. Przyjmując teraz, że punkt O dzieli prostą CC' w stosunku $C'O$: $CO=n : (l+m)$, znajdziemy, że punkt $(l+m+n)$krotny O jest przedstawicielem summy $lA+mB+nC$, tak że

$$(l+m+n)\,O=lA+mB+nC$$

*) *A. F. Möbius.* Der Barycentrische Calcül, ein neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie. Leipzig 1827 r.

czyli

$$O=\frac{l}{l+m+n}A+\frac{m}{l+m+n}B+\frac{n}{l+m+n}C.$$

Oznaczając $\frac{l}{l+m+n}$, $\frac{m}{l+m+n}$, $\frac{n}{l+m+n}$ przez p, q, r, otrzymamy

$$O=pA+qB+rC\ .\ .\ .\ .\ (1).$$

Łatwo dowieść, że p, q, r, oznaczają stosunki pól trójkątów OBC, OAC i OAB do pola trójkąta ABC.

Otóż *Möbius* stara się wyznaczyć związki zachodzące pomiedzy liczbami p q i r kiedy punkt O ma czynić zadość pewnym warunkom. W tym celu uważa te wielkości jako funkcye zmiennej niezależnej t i dowodzi, że gdy funkcye te są pierwszego stopnia kształtu $a+bt$, punkt O opisuje linię prostą, jeżeli są drugiego stopnia t. j. kształtu $a+bt+ct^2$, punkt O opisuje przecięcie stożkowe i t. d. Tym sposobem postępując, możemy łatwo otrzymać różne twierdzenia o poprzecznych trójkąta, sieciach geometrycznych, a przez wprowadzenie stosunków anharmonicznych dowieść różnych własności przecięć stożkowych.

Jako przykład dowiodę twierdzenia *Jana de Ceva*. Wiemy, że dodawanie punktów podlega prawu łącznościowemu i przemiennościowemu, więc

$$O=pA+qB+rC=(pA+qB)+rC=pA+(qB+rC)=qB+(pA+rC),$$

t. j. że punkt O leży na przecięciu się trzech prostych CC', AA', BB', (*Fig. 1*) z których pierwsza dzieli bok AB w stosunku $\frac{AC'}{C'B}=\frac{q}{p}$, druga dzieli bok BC w stosunku $\frac{BA'}{A'C}=\frac{r}{q}$, trzecia nakoniec dzieli bok AC w stosunku $\frac{CB'}{B'A}=\frac{p}{r}$

Ztąd wypada znane twierdzenie

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=\frac{r}{q}\cdot\frac{p}{r}\cdot\frac{q}{p}=1,\ \text{czyli}$$

$$BA'.\ CB'.\ AC'=A'C.\ B'A.\ C'B.$$

Łatwo też widzieć, że wprowadzając pyramidę $ABCD$ zamiast trójkąta możemy za pomocą wzoru

$$O=pA+qB+rC+sD\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

zastosować rachunek barycentryczny do figur w przestrzeni.

6. Z pierwszego wejrzenia zdawać by się mogło, że rachunek barycentryczny jest rodzajem geometryi analitycznej, opartej na współrzędnych trójkątnych na płaszczyznie, lub pyramidalnych w przestrzeni, lecz w rzeczywistości tak nie jest, *Möbius* bowiem wprowadzając rachunek barycentryczny dał początek nowej nauce, tak nazwanej *algiebrze formalnej*, przedmiotem badań której, mogą być związki pomiędzy przedmiotami bez względu na ich treść. Ramki niniejszej pracy nie pozwalają mi wchodzić w bliższy rozbiór tego przedmiotu i muszę się ograniczyć na wzmiance, że dziedzina badań algiebry formalnej rozciąga się do wszelkiego rodzaju dociekań, czy to moralnych, czy

fizycznych i że ona zawiera w sobie jako szczególny przypadek algiebrę zwyczajną, zajmującą się wielkościami. *George Peacock*, *D. F. Gregory*, *H. Grassmann* i *William Rowan Hamilton* wypracowali podstawy tego nowego rachunku, którego szczególnym przypadkiem stanowią kwaterniony, znajdujące nadzwyczaj szerokie zastosowanie we wszystkich gałęziach matematyki*).

Odejmowanie punktów. – Promienie wodzące.

7. Przez różnicę

$$mA-nB$$

rozumiemy punkt $(m-n)$ krotny C, który odcinek AB dzieli zewnętrznie w stosunkę $AC : BC = n : m$. To określenie widocznie jest wynikiem określenia summy.

Łatwo widzieć, że różnica

$$A-B$$

oznacza punkt leżący w nieskończoności i obciążony wagą o. Z tego to powodu różnica ta właściwie punktu nie oznacza, należy więc nadać jej inne znaczenie, a najprościej będzie, jeżeli przez tę różnicę oznaczemy odcinek BA. Odcinek ten jest tylko zależnym od A i B i zmienia swój znak wraz ze zmianą A na B, co też ma miejsce i z różnicą algiebraiczną $A-B$.

8. Ponieważ w każdym odcinku należy uwzględnić jego długość, kierunek i miejsce w przestrzeni, musimy wyznaczyć, których z tych trzech elementów różnica $A-B$ jest przedstawicielem. W tym celu musimy zbadać znaczenie równości dwóch odcinków AB i CD.

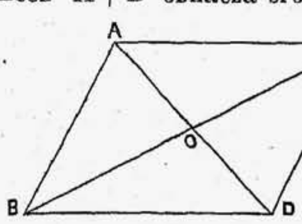
Z równania

$$A-B=C-D \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

wypada

$$A+D=B+C.$$

Lecz $A+D$ oznacza środek O prostej AD (*Fig.* 2), $B+C$ oznacza środek prostej BC, więc równanie (1) oznacza, że przekątne czworokąta $ABCD$ w punkcie przecięcia, dzielą się wzajemnie na części równe, czyli, że czworokąt jest równoległobokiem, t. j. że odcinki BA i DC są równe i równoległe. Przychodzimy tym sposobem do wniosku, że różnica dwóch punktów oznacza odcinek prostej pod względem jego wielkości i kierunku, lecz niezależnie od jego miejsca.



(*Fig.* 2).

Dwa odcinki z tego powodu nazywają się równemi, gdy są równe, równoległe i jednakowo skierowane.

*) Jako dalszy ciąg niniejszej pracy, postaram się wydać zasady algiebry formalnej, opierając się na pracach *Grassmana*, *H. Hankla* i *B. Peirce'a*.

Z określenia różnicy punktów przy uwzględnieniu równania (1) wypada, że wszystkie linie równoległe schodzą się w jednym i tym samym punkcie, nieskończenie odległym.

9. Przyjmując, że prawidła działań nad punktami są zgodne z prawidłami zwyczajnej algiebry, otrzymujemy

$$B+(A-B)=A,$$

t. j. dodając do punktu B, *początku* odcinka BA, różnicę $(A-B)$, czyli odcinek BA, przesuwamy ten punkt o odcinek BA zarówno co do wielkości, jak i co do kierunku i otrzymujemy *koniec* odcinka BA. Widzimy ztąd, że odcinek BA dodany do punktu, odgrywa rolę działacza, przesuwającego ten punkt i z tego to powodu otrzymał nazwę *promienia wodzącego* (*vector*). W następstwie promienie wodzące oznaczać będziemy greckiemi literami, długości zaś ich—łacińskiemi. Tak np. promień wodzący BA oznaczemy literą α, samą zaś długość BA przez a. W teoryi kwaternionów długość promienia wodzącego oznaczać będziemy przez $T\alpha$ i nazywać będziemy *tensorem* (wydłużaczem) promienia wodzącego, jednostkę zaś długości w kierunku α oznaczać będziemy przez $U\alpha$ i nazywać będziemy *wersorem* (zwrotnikiem) promienia wodzącego, tak

$$\alpha=a\,U\alpha=T\alpha.\,U\alpha=U\alpha.\,T\alpha.$$

Do tego samego wypadku dojdziemy, przyjmując, że prawo łącznościowe stosuje się do summy $B+(A-B)$.

Przyjmując bowiem, że

$$B+(A-B)=(B+A)-B,$$

otrzymamy

$$(B+A)-B=2M-B=A \text{ (§§ 2 i 7)},$$

gdzie M oznacza środek odcinka BA.

Łatwo też widzieć, że dodając $(A-B)$ do dowolnego punktu D przesuwamy ten punkt w kierunku BA o długość BA.

Jakoż

$$D+(A-B)=(D+A)-B,$$

lecz $(D+A)=2O$, gdzie O oznacza środek odcinka DA (*Fig.* 2), więc

$$D+(A-B)=2O-B=C.$$

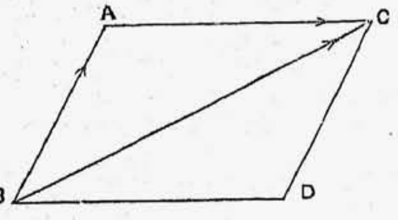
Ponieważ O jest środkiem odcinka DA i $BO=OC$ (§7), więc odcinek DC jest równym i równoległym odcinkowi BA, a zatem punkt D został przesuniętym o BA.

Dodawanie i odejmowanie promieni wodzących.

10. Przyjmując, że prawa zwyczajnej algiebry znajdują zastosowanie do różnic punktów, otrzymujemy

$$(A-B)+(C-A)=C-B,$$

lecz $(A-B)$ oznacza promień wodzący BA (*Fig.* 3), $(C-A)$—promień wodzący AC, $(C-B)$—promień wodzący BC, więc



(*Fig.* 3.)

$$BA+AC=BC, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

t. j. *summa dwóch boków trójkąta równa się trzeciemu bokowi, przebieżnemu w kierunku od początku pierwszego boku do końca drugiego.*

Dodawanie więc promieni wodzących jest identycznem z dodawaniem sił i prędkości.

Z równania

$$BA+AC=BC,$$

otrzymujemy

$$AC=BC-BA,$$

t. j. *różnica dwóch boków trójkąta, wychodzących z jednego punktu równa się trzeciemu bokowi, przebieżnemu od końca odjemnika do końca odjemnej.*

Ponieważ

$$AB+BA=AA=o,$$

więc

$$BA=-AB$$

t. j., że *stawiając przed promieniem znak* (—), *zmieniamy jego kierunek na kierunek wprost przeciwny.*

Ponieważ w trójkącie ABC

$$AB+BC=AC=-CA,$$

więc

$$AB+BC+CA=o.$$

Łatwo też widzieć, że w każdym wielokącie $ABCD \ . \ . \ . \ JKL$,

$$AB+BC+CD+ \ . \ . \ . \ JK+KL+LA=o.$$

Z tego ostatniego równania otrzymujemy

$$AB+BC+CD+ \ . \ . \ . \ +KL=-LA=AL.$$

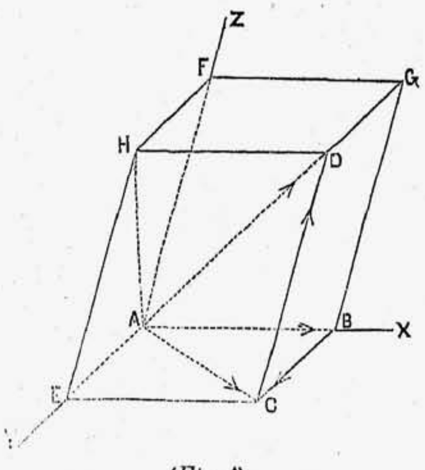
11. Można dowieść. że prawa przemiennościowe i łącznościowe stosują się przy dodawaniu promieni wodzących.

Jakoż z Fig. 3 widzimy, że

$$BA+AC=BC,$$
$$BD+DC=BC,$$

a że $BD=AC$, $DC=BA$, więc

$$AC+BA=BA+AC.$$



(*Fig. 4*).

Z (*Fig. 4*) widzimy, że

$$AB+BC=AC,$$

$$(AB+BC)+CD=AC+CD=AD.$$

Lecz

$$BC+CD=BD,$$

więc

$$AB+(BC+CD)=AB+BD=AD,$$

wypada ztąd równanie

$$(AB+BC)+CD=AB+(BC+CD),$$

wyrażające prawo łącznościowe przy dodawaniu promieni wodzących.

Zastosowanie dodawania i odejmowania promieni wodzących.

12. Jeżeli α, β i γ oznaczają trzy promienie wodzące, wychodzące z jednego punktu i leżące na jednej płaszczyźnie, to można zawsze dobrać takie liczby zwyczajne a, b, c aby było

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=o \quad . \; . \; . \; . \; (1.)$$

Jakoż, kreśląc trójkąt o bokach równoległych do danych promieni wodzących, mających długości a, b, c otrzymamy, że summa promieni wodzących, przedstawiających boki trójkąta czynią właśnie zadość równaniu (1) (§ 10). Wypada ztąd, że każdy promień wodzący ϱ, można zawsze przedstawić w kształcie

$$\varrho=a\alpha+b\beta, \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

gdzie α i β oznaczają promienie wodzące, leżące na jednej płaszczyźnie z promieniem ϱ.

Łatwo widzieć, że ϱ oznacza przekątnią równoległoboku, którego boki są równoległe do promieni α i β.

Otrzymujemy ztąd wniosek niezmierny ważny przy zastosowaniach teoryi dodawania promieni wodzących, a mianowicie, że równanie

$$a\alpha+b\beta=o,$$

pociąga za sobą równania

$$a=o, \; b=o$$

gdyż $a\alpha+b\beta$ oznacza przekątną równoległoboku, znikającą tylko wtedy, gdy i same boki równoległoboku stają się zerami.

Nietrudno też widzieć, że w przypadku, gdy α,β i γ oznaczają trzy promienie wodzące, wychodzące z jednego punktu i nie leżące na jednej płaszczyźnie $a\alpha+b\beta+c\gamma$ oznacza przekątnią równoległościanu, którego krawędzie są równoległe do promieni wodzących α, β, γ.

Równanie więc

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=o$$

w przypadku trzech promieni nie na jednej płaszczyźnie pociąga za sobą trzy równania

$$a=o,\ b=o,\ c=o.$$

13. Opierając się na tem cośmy wyżej powiedzieli, postaramy się dowieść niektórych znanych prawd geometrycznych na zasadzie dodawania i odejmowania promieni wodzących.

Niech O (*Fig.* 2) będzie punktem przecięcia się przekątnych AD i BC równoległoboku.

Wiemy, (§ 10), że

$$BO+OA=BA,$$
$$DO+OC=DC$$

a że

$$BA=DC,$$

więc

$$BO+OA=DO+OC$$

zkąd

$$BO-OC=DO-OA.$$

Ponieważ różnica dwóch promieni wodzących jest promieniem wodzącym (§ 10), więc to ostatnie równanie jest tylko możebnem w dwóch przypadkach:

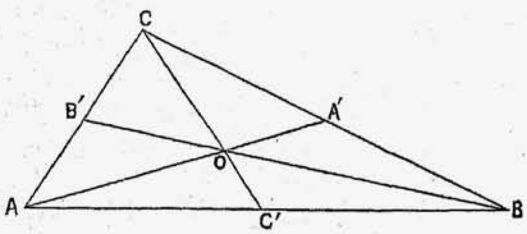
a) Przekątne BC i DA równoległe

b) $BO=OC$, $DO=OA$.

Pierwsze z tych przyduszczeń jest niemożebnem, więc powstaje tylko drugie, które dowodzi naszego twierdzenia.

14. Dowieść, że dwójsieczne boków trójkąta przecinają się w punkcie, który odcina od każdej z nich trzecią jej część.

Niech będzie trójkąt ABC (*Fig.* 5) i AA', BB', CC' dwójsieczne jego boków.



(*Fig.* 5).

Na bokach BC, AC i AB obierzemy jednostki długości, które oznaczymy przez α, β, γ. Oznaczając długości boków BC, AC i AB przez a, b i c, otrzymamy (§ 12) $BC=a\alpha$, $AC=b\beta$, $AB=c\gamma$.

Ponieważ

$$AB+BC=AC,$$

więc

$$c\gamma+a\alpha=b\beta.$$

Dla punktu O, przecięcia się dwóch dwójsiecznych BB' i CC' boków AC i AB otrzymamy dwa następujące równania:

$$AO=AB+BO=c\gamma+BO$$
$$BO=x\,BB'=x\,(-c\gamma+{}^1\!/_2 b\beta),$$

gdzie x oznacza jakiś ułamek rzeczywisty,
więc

$$AO = c\gamma\,(1-x) + {}^1\!/_2\, xb\beta \quad . \; . \; . \; . \; (1).$$

Lecz z drugiej strony

$$AO = AC + CO = AC + y\,CC' = b\beta + y\,(-b\beta + {}^1\!/_2 c\gamma),$$

czyli

$$AO = b\beta\,(1-y) + {}^1\!/_2\, yc\gamma \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Odejmując od siebie równania (1) i (2) otrzymamy

$$c\gamma\,(1 - x - {}^1\!/_2 y) + b\beta\,({}^1\!/_2 x - 1 + y) = o.$$

Lecz to równanie rozpada się na dwa inne:

$$1 - x - {}^1\!/_2 y = o$$
$${}^1\!/_2 x - 1 + y = o,$$

które dają

$$x = y = {}^2\!/_3.$$

Otrzymujemy więc

$$AO = {}^1\!/_3\,(b\beta + c\gamma) \quad . \; . \; . \; (3).$$

Łatwo widzieć, że punkt O leży na prostej AA'. Jakoż, oznaczając przez P dowolny punkt na tej prostej otrzymamy

$$AP = 2k\,\left(\frac{AC + AB}{2}\right) = k\,(b\beta + c\gamma),$$

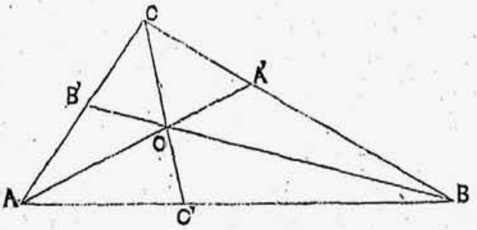
gdzie k oznacza jakiś ułamek (uwzględniając, że AA' jest połową przekątniej równoległoboku, zbudowanego na bokach AC i AB).

Porównywając to równanie z równaniem (3) widzimy, że punkt O przecięcia się dwójsiecznych boków BB' i CC' leży na dwójsiecznej AA' i że

$$AO = {}^1\!/_3\,(b\beta + c\gamma) = {}^2\!/_3\, AA'$$

c. b. d. o.

15. Dwójsieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Zachowując poprzednie oznaczenie boków trójkąta i przyjmując, że punkt O (*Fig. 6*) jest punktem przecięcia się dwójsiecznych AA' i BB' kątów A i B otrzymamy



(*Fig. 6*).

$$AO = x\,(\beta + \gamma),$$

gdyż jak łatwo widzieć, $\beta + \gamma$ jest przekątnią ukośnika, zbudowanego na promieniach wodzących β i γ.

Z tego samego powodu otrzymujemy

$$OB = y(\alpha - \gamma) = y\,\left(\frac{b\beta - c\gamma}{a} - \gamma\right).$$

Lecz

$$AO + OB = AB,$$

więc

$$x(\beta+\gamma)+y\,(\frac{b\beta-c\gamma}{a}-\gamma)=c\gamma,$$

czyli

$$(ax+by)\,\beta+[ax-(a+c)\,y-ac]\,\gamma=o.$$

Z tych równań otrzymamy

$$ax+by=o$$
$$ax-(a+c)\,y=ac.$$

Równania te dają

$$x=\frac{bc}{a+b+c}$$

$$y=-\frac{ac}{a+b+c}.$$

Z figury (6) widzimy, że

$$CO=CA+AO,$$

a że

$$CA=-b\beta,\quad AO=\frac{bc}{a+b+c}\,(\beta+\frac{b\beta-a\alpha}{c}),$$

więc

$$CO=-b\beta+\frac{bc}{a+b+c}(\beta+\frac{b\beta-a\alpha}{c})=-\frac{ab}{a+b+c}\,(\alpha+\beta),$$

które to równanie dowodzi, że punkt O leży na dwójsiecznej CC', kąta C.

Uwaga. Ponieważ

$$AA'=x\,(\beta+\gamma)$$
$$AA'=AB+BA'=AB+yBC=c\gamma+y(b\beta-c\gamma),$$

gdzie y oznacza stosunek liczebny odcinku BA' do BC,
więc

$$x\,(\beta+\gamma)=yb\beta+\gamma\,(c-cy).$$

Otrzymujemy ztąd dwa następujące równania:

$$x=by,\quad x=c-cy,$$

które po rozwiązaniu dają

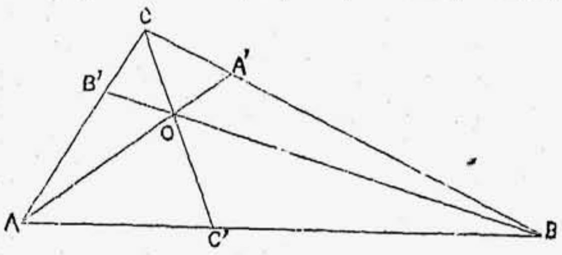
$$y=\frac{c}{b+c}\ \text{ i }\ 1-y=\frac{b}{b+c}.$$

to jest

$$BA'\colon A'C=c\colon b.$$

Równanie to daje nam znane twierdzenie, że dwójsieczna kąta trójkąta dzieli bok przeciwległy na dwa odcinki proporcyonalne do dwóch pozostałych boków

16. Niech O (*Fig.* 7) będzie dowolnym punktem obranym na płaszczyznie trójkąta ABC i A', B', C' punktami, w których proste OA, OB i OC, łączące wierzchołki trójkąta z punktem O przecinają boki tym wierzchołkom przeciwległe.



(*Fig.* 7).

Oznaczając promienie wodzące OA i OB przez α i β, otrzymamy

$OC = m\alpha + n\beta$ (§ 12).

Łatwo też widzieć, że dla boków trójkąta otrzymamy następujące wyrażenia:

$$AB = \beta - \alpha,\ BC = m\alpha + (n-1)\beta,\ CA = (1-m)\alpha - n\beta.$$

Przy tych oznaczeniach otrzymamy

$$OC' = x(m\alpha + n\beta)$$
$$OC' = \alpha + y(\beta - \alpha),$$

gdzie y oznacza stosunek $AC' : AB$.

Z tych dwóch równań otrzymamy

$$\frac{y}{1-y} = \frac{AC'}{C'B} = \frac{n}{m} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

W taki sam sposób otrzymamy

$$OB' = z\beta$$
$$OB' = m\alpha + n\beta + t\,[\alpha(1-m) - n\beta],$$

zkąd

$$\frac{t}{1-t} = \frac{CB'}{B'A} = -m. \quad . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Nie trudno też znaleść, że

$$OA' = u\alpha$$
$$OA' = \beta + v\,[m\alpha + (n-1)\beta],$$

ztąd

$$\frac{v}{1-v} = \frac{BA'}{A'C} = -\frac{1}{n}. \quad . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

Pomnożywszy przez siebie trzy równania (1), (2) i (3), otrzymamy

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{CB'}{BA'} \cdot \frac{BA'}{CA'} = 1,$$

wyrażające znane twierdzenie. (Porówn. § 5).

17. *Znaleść środek ciężkości układu punktów.* Niech będą dwa punkta materyalne A i B, których massy m i m_1; ich środek ciężkości, jak wiadomo, przypada w punkcie C, dzielącym prostą AB na dwa odcinki tak, że $BC : CA = m : m_1$. Niech dalej O będzie początkiem promieni wodzących, chcemy wyznaczyć promień wodzący ϱ środka ciężkości, wiedząc że promienie wodzące OA i OB punktów A i B są α i α_1.

Wiemy, że

$$AB = \alpha_1 - \alpha,$$

a zatem

$$AC = \frac{m_1}{m + m_1}(\alpha_1 - \alpha),$$

ztąd

$$OC = OA + AC = \alpha + \frac{m_1}{m + m_1}(\alpha_1 - \alpha),$$

a więc

$$OC = \varrho = \frac{m\alpha + m_1\alpha_1}{m + m_1}.$$

Wprowadźmy teraz do układu nową massę m_2, znajdującą się na końcu promienia α_2. Wiadomo, że środek ciężkości układu trzech mass przypada we środku ciężkości punktu C i massy m_2; wynika ztąd, że promień wodzący środka ciężkości tych trzech mass dany będzie wyrażeniem:

$$\frac{(m + m_1)\frac{m\alpha + m_1\alpha_1}{m + m_1} + m_2\alpha_2}{(m + m_1) + m_2} = \frac{m\alpha + m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2}{m + m_2 + m_2}$$

Dla dowolnej liczby mass otrzymamy

$$\varrho = \frac{\Sigma m\alpha}{\Sigma m}.$$

Równanie to możemy napisać

$$\Sigma m(\alpha - \varrho) = o.$$

Lecz biorąc pod uwagę jedną z mass np. m_1, widzimy, że $(\alpha_1 - \varrho)$ oznacza promień wodzący massy m odnośnie do środka ciężkości układu, a że m_1 $(\alpha_1 - \varrho)$ oznacza promień wodzący mający ten sam kierunek i początek co pierwszy, lecz m_1 razy od niego większy, więc przychodzimy do twierdzenia: *Summa promieni wodzących mass układu, wychodzących ze środka ciężkości tego układu i powiększonych proporcyonalnie do wielkości tych mass równa się zeru.*

Równanie linii prostej.

18. Jeżeli przez punkt stały O, obrany jako początek promieni wodzących poprowadzimy promień OM, równoległy do danego promienia α, to równanie

$$\varrho = p\alpha$$

oznacza promień wodzący OM, jeżeli długość OM jest p razy większą od długości α. Jeżeli teraz zamiast ilości stałej p podstawimy ilość zmienną x, mogącą przybierać wszelkie możliwe wartości rzetelne, to równanie

$$\varrho = x\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

oznaczyć może promień wodzący każdego punktu prostej równoległej do α i przechodzącej przez początek promieni wodzących, czyli innemi słowami, rów-