$$z\omega=\varphi^{-1}\theta-\alpha S\alpha\theta\pm\frac{V(\varphi\alpha.\theta)}{\sqrt{m}}=\varphi^{-1}\theta S\alpha\varphi\alpha-\alpha S\alpha\theta\pm\frac{V(\varphi\alpha.\theta)}{\sqrt{m}}$$

$$=V(\varphi\alpha V\alpha\varphi^{-1}\theta)\pm\frac{V(\varphi\alpha.\theta)}{\sqrt{m}}.$$

Ten ostatni wzór można jeszcze przedstawić w kształcie

$$z\omega=\varphi^{-1}[V(\alpha V\varphi\alpha.\theta)]\pm\frac{V(\varphi\alpha.\theta)}{\sqrt{m}},$$

jak się o tem łatwo przekonać możemy przekształcając pierwszy wyraz drugiej strony za pomocą wzoru $V\alpha V\beta\gamma=\gamma S\alpha\beta-S\alpha\gamma$.

Podstawiając $\tau=V(\varphi\alpha.\theta)$, otrzymamy wzór

$$z\omega=\varphi^{-1}V\alpha\tau\pm\sqrt{\frac{\tau}{m}},$$

w którym z przyczyny $\theta=V\beta\gamma$, $S\tau\varphi\alpha=o$.

Każdy z podanych wzorów dla $z\omega$ rozwiązuje zadanie o tworzących prostolinijnych powierzchni drugiego rzędu.

118. Dla lepszego wyjaśnienia wzorów i metod w tym rozdziale wyłożonych podamy zadania odnoszące się do powierzchni i linij drugiego rzędu.

Zadanie 1. Na elipsoidzie znaleść taki punkt, ażeby płaszczyzna styczna w tym punkcie do elipsoidy poprowadzona, odcięła od trzech osi równe odcinki (liczone od środka).

Równanie płaszczyzny stycznej w danym punkcie ϱ jest

$$S\omega\varphi\varrho=1.$$

Jeśli więc trzy osie elipsoidy przyjmiemy za kierunki i, j, k, to oznaczając długość odcinka przez p otrzymamy

$$pSi\varphi\varrho=1,$$

albo podstawiając w to równanie współrzędne zwyczajne, znajdziemy (§ 113).

$$p\frac{x}{a^2}=1.$$

W taki sam sposób otrzymamy $\frac{py}{b^2}=1$, $\frac{pz}{c^2}=1$, tak że

$$\frac{x}{a^2}=\frac{y}{b^2}=\frac{z}{c^2}=\frac{1}{p}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

gdyż $x+y+z=p$.

Zadanie 2. Znaleść odległość środka elipsoidy od płaszczyzny stycznej.

W § 106 widzieliśmy, że $T\varphi\varrho$ jest odwrotnością odległości środka elipsoidy od płaszczyzny stycznej w punkcie $\varrho = xi + yj + zk$, oznaczając zatem tę odległość przez d, znajdziemy

$$\frac{1}{d^2} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}.$$

Zadanie 3. Znaleść miejsce geometryczne punktów, mających tę własność, że odległość ich płaszczyzn biegunowych od środka elipsoidy jest stałą.

Oznaczając przez ω promień wodzący któregokolwiek z tych punktów znajdziemy, że równaniem jego płaszczyzny biegunowej będzie (§ 107)

$$S\varrho\varphi\omega = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Ponieważ $\varphi\omega$ jest promieniem wodzącym w kierunku prostopadłej do płaszczyzny biegunowej i $\frac{1}{\varphi\omega}$ czyni zadość równaniu (1), więc $\frac{1}{T\varphi\omega}$ będzie odległością środka elipsoidy od płaszczyzny biegunowej, a zatem

$$T\varphi\omega = C$$

będzie równaniem szukanego miejsca geometrycznego.

Równaniu temu możemy nadać kształt

$$(T\varphi\omega)^2 = -S(\varphi\omega)^2 = S\omega\varphi^2\omega = -C^2$$

który pokazuje, że szukanem miejscem geometrycznem jest elipsoidą współśrodkową z daną i której osie są równokierunkowe z osiami danej elipsoidy. Równaniem tej elipsoidy we współrzędnych zwyczajnych będzie

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = C^2.$$

Zadanie 4. Znaleść miejsce geometryczne punktów styczności płaszczyzn stycznych do elipsoidy, tworzących równe kąty z jedną z osi.

Niech ta oś idzie w kierunku k. Warunek zadania wyraża się równaniem

$$SkU\varphi\varrho = C, \text{ czyli } Sk\varphi\varrho = CT\varphi\varrho,$$

które jest równaniem stożka.

Równanie powyższe we współrzędnych zwyczajnych wyraża się

$$\frac{z^2}{c^4} = C\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right).$$

Przecięcie tego stożka z elipsoidą będzie szukanem miejscem geometrycznem.

Zadanie 5. Znaleść miejsce geometryczne punktów przecięć układów trzech stycznych do elipsoidy, które są do siebie prostopadłemi.

Niech ω będzie jednym ze szukanych punktów i α, β, γ jednostkami promieni wodzących, idących w kierunku trzech stycznych. Oczywiście, że

$\omega+x\alpha$ będzie jedną ze stycznych i wartość x, odpowiadającą punktowi styczności otrzymamy z równania.

$$S(\omega+x\alpha)\varphi(\omega+x\alpha)=1,$$

czyli

$$x^2S\alpha\varphi\alpha+2xS\omega\varphi\alpha+S\omega\varphi\omega-1=0\quad.\ .\ .\ .\ (1)$$

pod warunkiem, że pierwiastki x będą sobie równemi. Otóż warunkiem równości pierwiastków będzie

$$(S\omega\varphi\alpha)^2=S\alpha\varphi\alpha(S\omega\varphi\omega-1).$$

W taki sam sposób otrzymamy podobne równania dla β i γ. Dodawszy do siebie trzy, tak utrzymane równania, znajdziemy

$$(S\alpha\varphi\omega)^2+(S\beta\varphi\omega)^2+(S\gamma\varphi\omega)^2=(S\alpha\varphi\alpha+S\beta\varphi\beta+S\gamma\varphi\gamma)\,(S\omega\varphi\omega-1),$$

t. j.

$$-(\varphi\omega)^2=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)(S\omega\varphi\omega-1),$$

zkąd otrzymamy

$$S\omega\left[\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\varphi+\varphi^2\right]\omega=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\quad.\ .\ .\ .\ (2),$$

równanie elipsoidy współśrodkowej z daną.

Zadanie 6. Dowieść, że jeżeli z punktu stale obranego wewnątrz elipsoidy poprowadzimy trzy cięciwy do siebie prostopadle, to summa odwrotności iloczynów odcinków tych cięciw będzie ilością stałą.

Jakoż, zachowując to samo znakowanie co w zadaniu poprzedniem widzimy, że iloczyn odcinków każdej cięciwy równa się $x_1\alpha.x_2\alpha=-x_1x_2$ $=-\dfrac{S\omega\varphi\omega-1}{S\alpha\varphi\alpha}$, a zatem odwrotność iloczynu $-\dfrac{S\alpha\varphi\alpha}{S\omega\varphi\omega-1}$, a summa tych odwrotności będzie

$$\frac{-\Sigma\alpha\varphi\alpha}{S\omega\varphi\omega-1}=\frac{-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}{S\omega\varphi\omega-1}.$$

Widzimy ztąd, że wypadek otrzymany należy jedynie od ω a nie od szczególnego kierunku α, β, γ. Wyżej podana własność ma miejsce nietylko dla stałego punktu M, lecz dla wszystkich punktów dla których $S\omega\varphi\omega-1$ jest ilością stałą, to jest dla wszystkich punktów, leżących na elipsoidzie podobnej do danej i podobnie względem niej położonej.

Zadanie 7. Z punktu danego na powierzchni elipsoidy prowadzimy trzy promienie wodzące, prostopadłe do siebie aż do przecięcia się z elipsoidą; należy dowieść, że płaszczyzna oznaczona przez trzy końcowe punkta tych promieni wodzących zawsze przechodzi przez jeden i ten sam punkt, bez względu na kierunki trzech promieni. Gdy punkt pierwszy zmienia swoje położenie, wtedy i drugi opisuje jakąś powierzchnię, chodzi o wyznaczenie miejsca geometrycznego drugiego punktu.

Zachowując znakowanie dwóch poprzednich zadań otrzymamy

$$S\omega\varphi\omega=1,\ S(\omega+x\alpha)\varphi(\omega+x\alpha)=1,$$

zkąd

$$x=-\frac{2S\alpha\varphi\omega}{S\alpha\varphi\alpha},$$

Płaszczyzna zatem przejdzie przez punkt

$$\alpha_1=\omega-\alpha\frac{2S\alpha\varphi\omega}{S\alpha\varphi\alpha},$$

ta płaszczyzna przejdzie też przez punkta

$$\beta_1=\omega-\beta\frac{2S\beta\varphi\omega}{S\beta\varphi\beta},\ \gamma_1=\omega-\gamma\frac{2S\gamma\varphi\omega}{S\gamma\varphi\gamma},$$

Lecz wiemy (§ 25 Przyk. 2), że jeżeli cztery punkty θ, α_1, β_1, γ_1 leżą na jednej płaszczyźnie, to

$$\theta=A\alpha_1+B\beta_1+C\gamma_1,$$

z warunkiem $A+B+C=1$.

Otóż czyniąc $A=\frac{-S\alpha\varphi\alpha}{m_2}$, $B=-\frac{S\beta\varphi\beta}{m_2}$, $C=\frac{-S\gamma\varphi\gamma}{m_2}$, gdzie $m_2=-(S\alpha\varphi\alpha+S\beta\varphi\beta+S\gamma\varphi\gamma)$, (§ 87, 3) otrzymamy $A+B+C=1$.

Wypada ztąd, że

$$\theta=\omega\Sigma A-2\Sigma\frac{\alpha AS\alpha\varphi\omega}{S\alpha\varphi\alpha}=\omega-2\left(\frac{-1}{m_2}\right)\Sigma\alpha S\alpha\varphi\omega.$$

Lecz według wzoru (§ 54 1), uwzględniając, że α, β i γ są do siebie prostopadłemi, a zatem $\alpha\beta=\gamma$, $\beta\gamma=\alpha$, $\gamma\alpha=\beta$, otrzymamy

$$\Sigma\alpha S\alpha\varphi\omega=-\varphi\omega$$

a zatem

$$\theta=\omega-\frac{2}{m_2}\varphi\omega.$$

Lecz ponieważ

$$m_2=-(S\alpha\varphi\alpha+S\beta\varphi\beta+S\gamma\varphi\gamma)=-(S\beta\gamma\varphi\alpha+S\gamma\alpha\varphi\beta+S\alpha\beta\varphi\gamma):S\alpha\beta\gamma$$

więc na zasadzie (§ 87) ta wielkość jest niezależną od szczególnych kiepunków promieni α, β i γ, a zatem przy wszystkich możliwych kierunkach, płaszczyzna, o której wyżej mówiliśmy, przechodzi przez jeden i ten sam punkt.

Pozostaje nam teraz wyznaczyć miejsce geometryczne θ. W tym celu obliczamy

$$\omega=-{}^1\!/_2 m_2(\varphi-{}^1\!/_2 m_2)^{-1}\theta$$

a że ω musi czynić zadość równaniu elipsoidy, więc otrzymamy

$$\tfrac{1}{4}m_2^{\,2}S(\varphi-\tfrac{1}{2}m_2)^{-1}\theta.\varphi(\varphi-\tfrac{1}{2}m_2)^{-1}\theta=1,$$

równanie elipsoidy współśrodkowej z daną.

Zadanie 8. Niech A, B i C będą trzema elipsoidami, które po dwie brane są homotetycznemi, A i B są współśrodkowemi, C zaś ma swój środek na powierzchni elipsoidy B. Należy dowieść, że krzywa przecięcia się elipsoid A i C jest płaską i płaszczyzna jej jest równoległą do płaszczyzny stycznej do B w środku elipsoidy C.

Niech równanie elipsoid A i B będą odpowiednio

$$S\varrho\varphi\varrho=a,\ S\varrho\varphi\varrho=b,$$

niech równaniem elipsoidy C będzie

$$S(\varrho-\alpha)\varphi(\varrho-\alpha)=c, \text{ z warunkiem, że } S\alpha\varphi\alpha=b.$$

Odejmując od pierwszego z tych równań trzecie otrzymamy

$$2S\varrho\varphi\alpha=b+a-c,$$

równanie płaszczyzny, prostopadłej do promienia $\varphi\alpha$, który jak wiadomo jest normalną do elipsoidy B w punkcie α.

Zadanie 9. Dwie elipsoidy podobne i podobnie położone przecinamy trzecią zmienną, podobną do dwóch pierwszych i podobnie położoną i taką, że płaszczyzny wspólnego przecięcia się są do siebie prostopadłemi. Wyznaczyć miejsce geometryczne środków elipsoidy zmiennej.

Niech

$$S\varrho\varphi\varrho=1,\ S(\varrho-\alpha)\varphi(\varrho-\alpha)=k$$

będą równaniami dwóch danych elipsoid; niech dalej

$$S(\varrho-\xi)\varphi(\varrho-\xi)=s$$

będzie równaniem elipsoidy zmiennej.

Odejmując te równania od siebie otrzymamy

$$2S\varrho\varphi\xi=S\xi\varphi\xi+1-s$$

$$2S\varrho\varphi(\xi-\alpha)=S\xi\varphi\xi-S\alpha\varphi\alpha-s+k.$$

Pierwsze z tych równań oznacza płaszczyznę normalną do $\varphi\xi$, drugie— płaszczyznę normalną do $\varphi(\xi-\alpha)$, a zatem warunkiem prostopadłości tych dwóch płaszczyzn będzie

$$S\varphi\xi\varphi(\xi-\alpha)=o \text{ lub } S(\xi-\alpha)\varphi^2\xi=o.$$

Otrzymaliśmy tym sposobem równanie szukanego miejsca geometrycznego, które jest elipsoidą i jej równanie we współrzędnych zwyczajnych będzie

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}-\left(\frac{a_1x}{a^4}+\frac{a_2y}{b^4}+\frac{a_3z}{c^4}\right)=o.$$

gdzie a_1, a_2, a_3 są współrzędnemi punktu α.

Zwrócimy tu uwagę że równanie $S\varrho\varphi(\varrho+\alpha)$ oznacza powierzchnię drugiego rzędu o środku jedynym, gdyż równanie to możemy pisać w kształcie

$$S\left(\varrho+\frac{\alpha}{2}\right)\varphi\left(\varrho+\frac{\alpha}{2}\right)=\tfrac{1}{4}S\alpha\varphi\alpha.$$

Zadanie 10. Znaleść miejsce geometryczne wspólnych przecięć płaszczyzn stycznych do końców średnic sprzężonych.

Niech α, β, γ będą temi średnicami. Równaniami płaszczyzn stycznych będą (§ 112).

$$S\omega\psi^2\alpha=-1,\quad S\omega\psi^2\beta=-1,\quad S\omega\psi^2\gamma=-1,$$

i jednocześnie mają miejsca równania (§§ 110 i 113).

Ponieważ $\psi\alpha$, $\psi\beta$, $\psi\gamma$ tworzą układ jednostek promieni wodzących, do siebie prostopadłych, więc na zasadzie równania

$$-\psi\omega S\psi\alpha\psi\beta\psi\gamma=\psi\omega=\psi\alpha+\psi\beta+\psi\gamma,$$

a więc

$$T\psi\omega=\sqrt{3},\text{ czyli } S\omega\psi^2\omega=-3,$$

t. j. że szukanem miejscem jest elipsoidą podobną do danej, podobnie położonej, osie zaś jej zostały powiększone w stosunku $\sqrt{3}:1$

Zadanie 11. Daną jest kula stała, której powierzchnia przechodzi przez środek elipsoidy danej. Kulę tę przecinamy szeregiem kul zmiennych, powierzchnie których również przechodzą przez środek elipsoidy, lecz oprócz tego, środki tych kul znajdują się na tej elipsoidzie. Wyznaczyć powłoczącą płaszczyzn przecięcia się kul zmiennych z kulą stałą.

Niech

$$\varrho^2-2S\alpha\varrho=o$$

będzie równaniem kuli stałej; niech

$$\varrho^2-2S\omega\varrho=o,$$

gdzie, ω jako jeden z punktu elipsoidy czyni zadość równaniu

$$S\omega\varphi\omega=1.$$

Płaszczyzna przecięcia się kuli stałej z kulą zmienną daną będzie równaniem

$$S(\omega-\alpha)\varrho=o.$$

Na zasadzie znanej teoryi powłoczących otrzymamy

$$S\omega'\varphi\omega=o,\ S\omega'\varrho=o,\text{ gdzie } \omega'=d\omega.$$

Ponieważ ω' jest wielkością dowolną, więc aby oba te równania miały jednocześnie miejsce trzeba, ażeby

$$\varphi\omega=x\varrho,$$

gdzie x jest skalarem. Z tego ostatniego równania otrzymamy

$$\omega=x\varphi^{-1}\varrho.$$

Pozostaje nam teraz wyrugować zmienny parametr ω.

W tym celu piszemy

$$S\omega\varphi\omega=x^2S\varrho\varphi^{-1}\varrho=1$$

$$S\omega\varrho=xS\varrho\varphi^{-1}\varrho=S\alpha\varrho.$$

Jeżeli z tych dwóch równań wyrugujemy x, otrzymamy równanie powłoczącej

$$S\varrho\varphi^{-1}\varrho=(S\alpha\varrho)^2,$$

która, jak widzimy, jest stożkiem drugiego rzędu.

Zadanie 12. Znaleść równanie elipsoidy, której trzy połśrednice sprzężone są dane.

Niech α, β, γ będą trzema półśrednicami i $S\varrho\varphi\varrho=1$ równaniem elipsoidy.

Wiadomo, że mają miejsce następujące równania:

$$S\alpha\varphi\alpha=1,\ S\beta\varphi\beta=1,\ S\gamma\varphi\gamma=1;\ S\alpha\varphi\beta=o,\ S\gamma\varphi\alpha=o,\ S\beta\varphi\gamma=o.$$

Z tych równań otrzymujemy

$$x\varphi\alpha=V\beta\gamma,\ \text{czyli}\ x\alpha=\varphi^{-1}V\beta\gamma,$$

zkąd

$$x=xS\alpha\varphi\alpha=S\alpha\varphi\varphi^{-1}V\beta\gamma=S\alpha\beta\gamma.$$

Podobne równania otrzymamy dla innych kombinacyj. Lecz wiemy, że

$$\varrho S\alpha\beta\gamma=\alpha S\beta\gamma\varrho+\beta S\gamma\alpha\varrho+\gamma S\alpha\beta\varrho,$$

więc działając na to równanie symbolem $x\varphi$. i podstawiając wartości dla $x\varphi\alpha$, $x\varphi\beta$, $x\varphi\gamma$ znajdziemy

$$\varphi\varrho(S\alpha\beta\gamma)^2=V\beta\gamma S\beta\gamma\varrho+V\gamma\alpha S\gamma\alpha\varrho+V\alpha\beta S\alpha\beta\varrho;$$

szukane więc równanie możemy przedstawić w kształcie

$$(S\alpha\beta\gamma)^2=(S\alpha\beta\varrho)^2+(S\gamma\alpha\varrho)^2+(S\beta\gamma\varrho)^2.$$

To ostatnie równanie wyraża następującą własność elipsoidy: jeżeli utworzemy trzy czworościany przez ugrupowanie dwóch półśrednic z promieniem wodzącym dowolnego punktu elipsoidy, to summa kwadratów objętości tych czworościanów równać się będzie kwadratowi objętości czworościanu, utworzonego z trzech półśrednic.

119. Prawdy wyłożone w tym rozdziale zupełnie wystarczą do rozwiązywania wszelkich zadań, odnoszących się do teoryi przecięć stożkowych. Dla lepszego jednak wyjaśnienia tych prawd, podamy niektóre szczegółowe badanie, odnoszące się do tych krzywych.

W § 105 widzieliśmy, że równaniem elipsy jest

$$a^2\varrho^2+(S\omega\varrho)^2=a^4(e^2-1);$$

kładąc

$$\varphi\varrho=\frac{a^2\varrho+\omega S\omega\varrho}{a^4(e-1)},$$

otrzymamy równanie elipsy w postaci

$$S\varrho\varphi\varrho=1\ .\ .\ .\ .\ (1),$$

identycznej z kształtem równania elipsoidy.

Równaniem stycznej do elipsy w punkcie ϱ będzie

$$S\omega\varphi\varrho=1\ \text{lub}\ S\varrho\varphi\omega=1\ .\ .\ .\ .\ (2).$$

Jeżeli styczna przechodzi przez punkt α, to będziemy mieli

$$S\alpha\varphi\varrho=1\ \text{lub}\ S\varrho\varphi\alpha=1.$$

To ostatnie równanie wyznacza punkty styczności, a że ono jest równaniem linii prostej, więc ono wyraża cięciwę styczności. Cięciwa ta jest prostopadłą do promienia wodzącego $\varphi\alpha$.

Wprowadzając funkcyę $\psi^2\varrho = -\varphi\varrho$ otrzymamy równanie elipsy w kształcie

$$S\varrho\psi^2\varrho = -1, \text{ lub } S\varrho\psi\psi\varrho = S(\psi\varrho)^2 = -1, \text{ czyli } T\psi\varrho = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Ponieważ to ostatnie równanie jest równaniem koła o promieniu równym jedności, więc za pomocą działania, wyrażonego funkcyą ψ przekształcamy elipsę w koło. (Porównać §§ 112 i 113).

Szukając miejsca geometrycznego środków cięciw równoległych do promienia α otrzymamy (§ 109), że równaniem szukanego miejsca geometrycznego będzie

$$S\omega\varphi\alpha = o,$$

jest to równanie prostej, prostopadłej do $\varphi\alpha$ i przechodzącej przez początek.

Ponieważ $\varphi\alpha$ jest normalną w punkcie $\varrho = \alpha$ elipsy, więc szukane miejsce geometryczne jest równoległem do stycznej w punkcie $\varrho = \alpha$. Jeżeli przez $\varrho = \beta$ oznaczemy punkt, w którym średnica sprzężona z kierunkiem α przecina elipsę, to będziemy mieli

$$S\beta\varphi\alpha = S\alpha\varphi\beta = o$$

t. j. że średnicą sprzężoną z kierukiem β jest α.

Łatwo dowieść, że kierunki *dwóch cięciw dopełniających* są sprzężonemi ze sobą. Jakoż niech β będzie dowolną półśrednicą elipsy i α promieniem wodzącym dowolnego punktu elipsy, wtedy $\lambda = \alpha - \beta$ i $\mu = \alpha + \beta$ będą cięciwami dopełniającemi. Otóż

$$S\lambda\varphi\mu = S(\alpha - \beta)\varphi(\alpha + \beta) = S\alpha\varphi\alpha - S\beta\varphi\beta = o,$$

więc λ i μ są kierunkami sprzężonemi.

Na zasadzie wyżej podanych równań łatwo otrzymać równanie elipsy, odniesionej do średnic sprzężonych. Jakoż, niech α i β będą temi dwiema półśrednicami i $\varrho = u\alpha + v\beta$ promieniem wodzącym dowolnego punktu krzywej; otrzymamy

$$S(u\alpha + v\beta)\varphi(u\alpha + v\beta) = 1,$$

uwzględniając równanie $S\alpha\varphi\beta = o$, otrzymamy

$$u^2 S\alpha\varphi\alpha + v^2 S\beta\varphi\beta = 1, \text{ czyli } u^2 + v^2 = 1.$$

Przez wprowadzenie funkcyi ψ możemy związek pomiędzy średnicami sprzężonemi α i β przedstawić w kształcie

$$S\alpha\psi^2\beta = o, \text{ lub } S\psi\alpha\psi\beta = o,$$

więc $\psi\alpha$ i $\psi\beta$ są dwoma wektorami, do siebie prostopadłemi.

Lecz według wzorów (§ 113, 6)

$$\alpha = \psi^{-1}\psi\alpha = -(aiSi\psi\alpha + bjSj\psi\alpha)$$
$$\beta = \psi^{-1}\psi\beta = -(aiSi\psi\beta + bjSj\psi\beta),$$

a że $\psi\alpha$ i $\psi\beta$ są jednostkami promieni, więc możemy je przedstawić w kształcie

$$\psi\alpha = i\cos\theta + j\sin\theta$$
$$\psi\beta = -i\sin\theta + j\cos\theta$$

i przez to

$$\alpha = ai\cos\theta + bj\sin\theta$$
$$\beta = -ai\sin\theta + bj\cos\theta.$$

Ztąd

$$\alpha^2 + \beta^2 = -(a^2 + b^2)$$
$$V\alpha\beta = -abk; \text{ t. j. } a_1 b_1 \sin\varphi = ab,$$

gdzie a_1 i b_1 oznaczają długości półśrednic sprzężonych, φ zaś kąt pomiędzy niemi. Powyższe dwa równania wyrażają znane twierdzenia *Apolloniusza.*

Zadanie 1. Znaleść iloczyn odległości obu ognisk elipsy od jednej i tej samej stycznej.

Przedewszystkiem łatwo widzieć, że odległością środka elipsy od stycznej w punkcie ϱ będzie $\frac{1}{T\varphi\varrho}$ (§ 106). Oznaczając teraz przez ϱ promień wodzący punktu styczności przez FD i F_1D_1 zaś odległości ognisk od stycznej w punkcie ϱ, otrzymamy $\delta = \omega + z\varphi\varrho$, gdzie δ oznacza promień wodzący punktu D, ω — promień wodzący ogniska F, z nakoniec—jakiś skalar. Z równania stycznej do elipsy mamy

$$S(\omega + z\varphi\varrho)\varphi\varrho = 1, \text{ zkąd } z = \frac{1 - S\omega\varphi\varrho}{(\varphi\varrho)^2},$$

i

$$TFD = T\left(\frac{1 - S\omega\varphi\varrho}{\varphi\varrho}\right).$$

Zamieniając ω na $-\omega$, otrzymamy

$$TF_1D_1 = F\left(\frac{1 + S\omega\varphi\varrho}{\varphi\varrho}\right)$$

$$TF_1D_1 . TF_1D_1 = \frac{1 - (S\omega\varphi\varrho)^2}{(\varphi\varrho)^2}.$$

Podstawiając wartość dla $(\varphi\varrho)^2$ (§113) i uwzględniając, że $\omega = aci$, otrzymamy, że iloczyn ten równa się b^2, t. j. kwadratowi z połowy osi małej.

Zadanie 2. Znaleść miejsce geometryczne spodków prostopadłych, spuszczonych z jednego ogniska na styczne.

Zachowując to samo znakowanie co i w poprzedniem zadaniu otrzymamy

$$\delta = \omega + z\varphi\varrho = \omega + \frac{1 - S\omega\varphi\varrho}{(\varphi\varrho)^2}\varphi\varrho$$

zkąd

$$\delta^2=\omega^2+\frac{2S\omega\varphi\varrho(1-S\omega\varphi\varrho)}{(\varphi\varrho)^2}+\frac{(1-S\omega\varphi\varrho)^2}{(\varphi\varrho)^2}=\omega^2+\frac{1-(S\omega\varphi\varrho)^2}{(\varphi\varrho)^2}.$$

Podstawiając wartości dla ω i $\varphi\varrho$ znajdziemy

$$\delta^2=-\alpha^2.$$

Szukanem zatem miejscem geometrycznem będzie koło, opisane na osi wielkiej, jako na średnicy.

Zadanie 3. Z punktu L poprowadzono dwie styczne do elipsy LA i LB; przez środek poprowadzono dwie półśrednice OA' i OB' odpowiednio równoległe do dwóch stycznych. Dowieść, że cięciwy AB i $A'B'$ są równoległemi.

W tym celu oznaczmy promienie OL, OA, OB, OA', OB' odpowiednio przez λ, α, β, α', β'. Otrzymamy $\alpha'=x(\lambda-\alpha)$, a że punkt A' leży na elipsie, więc uwzględniając, że punkt L leży na stycznej w punkcie A, znajdziemy

$$x^2S(\lambda-\alpha)\varphi(\lambda-\alpha)=x^2(S\lambda\varphi\lambda-1)=1.$$

Kładąc $\beta'=y(\lambda-\beta)$, otrzymamy dla y tę samą wartość co i dla x, więc, $\alpha'-\beta'=-x(\alpha-\beta)$, co dowodzi, że cięciwy $A'B'$ i AB są równoległemi.

Zadanie 4. Dowieść, że jeżeli równoległobok jest wpisanym w elipsę, to boki jego są równoległemi do średnic sprzężonych.

Jeżeli $ABCD$ będzie równoległobokiem wpisanem, to oznaczając promienie wodzące punktów A, B, C i D przez α, β, γ, δ, znajdziemy

$$\delta-\alpha=\gamma-\beta=\lambda$$

i

$$S\delta\varphi\delta=S(\alpha+\lambda)\varphi(\alpha+\lambda)=1+2S\alpha\varphi\lambda+S\lambda\varphi\lambda=1,$$

$$2S\alpha\varphi\lambda+S\lambda\varphi\lambda=0.$$

W taki sam sposób znajdziemy

$$2S\beta\varphi\lambda+S\lambda\varphi\lambda=0,$$

odejmując te dwa równania od siebie, otrzymamy ostatecznie

$$S(\alpha-\beta)\varphi\lambda=S(\alpha-\beta)\varphi(\gamma-\beta)=0,$$

co dowodzi naszego twierdzenia.

120. Określając hiperbolę na zasadzie jej własności odnośnie do ogniska i kierownicy, znajdziemy, że jej równanie będzie identycznem z równaniem elipsy (§ 104,1)

$$\varrho^2\delta^2=e^2(\delta^2-S\delta\varrho)^2$$

tylko, że w tym przypadku $e>1$. Wierzchołki A i A' dane będą równaniem

$$FA=\frac{e}{e+1}FD,\quad FA'=\frac{e}{e-1}FD.$$

Oznaczając przez O środek krzywej znajdziemy

$$FO=\frac{e^2}{e^2-1}FD,\quad AA'=\frac{2e}{e^2-1}FD$$

$$\frac{FO}{AA'}=\frac{e}{2},\quad OF=eOA,\quad T(OF)=ea.$$

Kładąc $OF=\omega$, $OA=\alpha$, $OM=\varrho$, otrzymamy równanie hiperboli, odniesionej do środka jako do początku

$$a^2\varrho^2+(S\omega\varrho)^2=a^4(e^2-1)\;.\;.\;.\;.\;.\;(1).$$

Oznaczając

$$\varphi\varrho=\frac{a^2\varrho+\omega S\omega\varrho}{a^4(e^2-1)},\;.\;.\;.\;.\;(2),$$

znajdziemy równanie hiperboli

$$S\varrho\varphi\varrho=1\;.\;.\;.\;.\;(3).$$

Funkcya φ co do kształtu jest identyczną z funkcyą φ poprzedniego ustępu, a zatem ma te same co i ona własności, lecz ponieważ $e>1$, więc nie możemy oznaczyć $b=a\sqrt{1-e^2}$, lecz $b=a\sqrt{e^2-1}$. Tę zmianę wprowadziwszy otrzymamy

$$\varphi\varrho=-\left(\frac{x}{a^2}i-\frac{y}{b^2}j\right);\quad \varrho=xi+yj$$

i równanie (3) w kształcie zwyczajnych współrzędnych będzie

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Dla funkcyi φ zachodzą następujące związki:

$$\varphi\varrho=-\left(\frac{x}{a^2}i-\frac{y}{b^2}j\right)=\frac{iSi\varrho}{a^2}-\frac{jSj\varrho}{b^2}\;.\;.\;.\;.\;.\;(4)$$

$$\varphi^2\varrho=\frac{x}{a^4}i+\frac{y}{b^4}j=-\left(\frac{iSi\varrho}{a^4}+\frac{jSj\varrho}{b^4}\right).\;.\;.\;.\;.\;(5)$$

$$\varphi^{-1}\varrho=-(xa^2i-yb^2j)=a^2iSi\varrho-b^2jSj\varrho\;.\;.\;.\;.\;.\;(6),$$

ostatni wzór otrzymuje się tak samo jak wzór 6 § 113. Funkcyi ψ, czyniącej zadość równaniu $\psi^2\varrho=-\varphi\varrho$ w tym przypadku otrzymać nie możemy, więc i sprowadzenie równania hiperboli do kształtu (3) poprzedniego ustępu jest niemożliwem.

Równanie stycznej do hiperboli w punkcie ϱ będzie

$$S\omega\varphi\varrho=1,\text{ lub } S\varrho\varphi\omega=1.$$

Jeżeli w tem równaniu ω uważać będziemy jako dane, a ϱ jako zmienną bieżącą, to ono wyraża równanie biegunowej względem ω.

Miejscem geometrycznem środków cięciw równoległych do kierunku β jest prosta, przechodząca przez środek krzywej i mająca taki kierunek α, że

$$S\alpha\varphi\beta = o \;.\;.\;.\;.\;.\; (7),$$

kierunki α i β nazywają się *sprzężonemi*.

Zachodzi jednak ważna różnica pomiędzy elipsą i hiperbolą odnośnie do średnic sprzężonych, pochodząca ztąd, że w tej ostatniej krzywej nie każdy promień wodzący, przez środek poprowadzony przecina hiperbolę Jakoż, z samego kształtu funkcyi φ wypływa, że w elipsie $S\varrho\varphi\varrho > o$ dla każdej wartości ϱ i dla tego możemy zawsze tensor ϱ tak wybrać aby koniec promienia wodzącego znajdował się na elipsie. Dla hiperboli przeciwnie wartość $S\varrho\varphi\varrho$ nie zawsze będzie dodatnią, gdyż do tego potrzebnym jest warunek $\frac{Si\varrho}{a} > \pm \frac{Sj\varrho}{b}$, czyli, co wychodzi na jedno, trzeba, aby kierunek ϱ zawierał się pomiędzy granicami $ai \pm bj$. W hiperboli więc są średnice przecinające krzywą i takie, które jej nie przecinają, czyli są średnice rzeczywiste i urojone.

Oznaczając przez x_1, y_1 i x_2, y_2 współrzędne końców dwóch średnic sprzężonych znajdziemy (z równ. 7) $\frac{x_1 x_2}{a^2} - \frac{y_1 y_2}{b^2} = o$, czyli $\left(\frac{y_1}{b} : \frac{x_1}{a}\right) - \left(\frac{x_2}{a} : \frac{y_2}{b}\right) = o$, z którego to równania wynika, że jeśli jedna ze średnic sprzężonych jest rzeczywistą, to druga jest urojoną i naodwrót. Wypada więc ztąd, że w hiperboli właściwie niema średnic sprzężonych, tak że chcąc zachować analogię z elipsą musimy wprowadzić nową hiperbolę, daną równaniem

$$S\varrho\varphi\varrho = -1 \;.\;.\;.\;.\; (8),$$

której średnicami rzeczywistemi są średnice urojone danej krzywej i naodwrót. Krzywa ta nazywa się *hiperbolą sprzężoną* względem danej.

Równanie

$$S\varrho\varphi\varrho = o \;.\;.\;.\;.\; (9)$$

daje nam układ dwóch prostych, oznaczających kierunki graniczne t. j. układ *dwóch asymptot*.

Niech λ i μ będą dwiema jednostkami długości, idącemi odpowiednio w kierunku dwóch asymptot i połóżmy $\varrho = l\lambda + m\mu$. Równanie (3) przybiera kształt

$$l^2 S\lambda\varphi\lambda + m^2 S\mu\varphi\mu + 2lm S\lambda\varphi\mu = 1,$$

a ponieważ dwa pierwsze wyrazy tego równania znikają z powodu równ. 9, więc otrzymujemy

$$lm = \frac{1}{2S\lambda\varphi\mu} = k^2 \;.\;.\;.\;.\; (10).$$

Dla otrzymania wartości stałej k podstawiamy $\lambda = (ai + bj) : \sqrt{a^2 + b^2}$ $\mu = (ai - bj) : \sqrt{a^2 + b^2}$, przez co znajdziemy $k = \frac{a^2 + b^2}{4}$.

Równaniem stycznej w punkcie ϱ jest, jak wiadomo, $S\omega\varphi\varrho=1$. Dla otrzymania punktów przecięcia jej z układem asymptot (9) należy w równaniu (9) zastąpić ϱ przez $\varrho+x\tau$, gdzie τ oznacza promień wodzący w kierunku stycznej, otrzymamy

$$S(\varrho+x\iota)\varphi(\varrho+x\iota)=o, \text{ czyli } 1+x^2S\iota\varphi\iota=o,$$

gdyż $\varphi\varrho$ jest kierunkiem normalnej.

Ponieważ to ostatnie równanie daje dla x dwie wartości równe co do wielkości lecz o znakach wprost przeciwnych, więc część stycznej zawarta pomiędzy asymptotami ma swój środek w punkcie styczności.

Jeżeli przez σ oznaczemy promień wodzący środka S cięciwy przecinającej krzywą w punktach M i M', a asymptoty w punktach N i N', to oznaczającjeszcze przez α jednostkę promienia wodzącego w kierunku cięciwy znajdziemy $SM=x\alpha$, $SN=y\alpha$ i dla wyrażenia że punkt M jest na krzywej, punkt zaś N na asymptocie, będziemy mieli równania

$$S\sigma\varphi\sigma+x^2S\alpha\varphi\alpha=1$$
$$S\sigma\varphi\sigma+y^2S\alpha\varphi\alpha=o,$$

gdyż $S\sigma\varphi\alpha=o$, albowiem σ leży na średnicy, sprzężonej z α.

Odejmując te dwa równania od siebie znajdziemy

$$(x^2-y^2)S\alpha\varphi\alpha=1.$$

Lecz $(y-x)(y+x)\alpha^2=x^2-y^2$ wyraża iloczyn odcinków $MN.MN'=M'N.'M'N$, t. j. że iloczyn dwóch odcinków cięciwy, utworzonych przez krzywą i dwie jej asymptoty pozostaje stałym, gdy cięciwa ta porusza się rownolegle do siebie.

Jeżeli α i β są dwiema półśrednicami sprzężonemi, pierwsza rzetelna, a druga urojona, to możemy pierwszej nadać kształt $\alpha=au_1i+bu_2j$, drugiej zaś $\beta=av_1i+bv_2j$. Podstawiając te wartości w równania

$$S\alpha\varphi\alpha=1,\ S\beta\varphi\beta=-1,\ S\alpha\varphi\beta=o,$$

otrzymamy

$$u_1{}^2-u_2{}^2=1,\ v_2{}^2-v_1{}^2=1,\ u_1v_1=u_2v_2.$$

Z tych równań otrzymamy znane twierdzenia *Apollonusza* odnośnie do hiperboli

$$\alpha^2-\beta^2=-(a^2-b^2),\ V\alpha\beta=-abk\ .\ .\ .\ .\ .\ (12).$$

Nietrudno też będzie dowieść, że równoległobok zbudowany na dwóch średnicach sprzężonych ma swoje wierzchołki na asymptotach. Jakoż,

$$S(\alpha+\beta)\varphi(\alpha+\beta)=S\alpha\varphi\alpha+S\beta\varphi\beta=1-1=o.$$

Przekątne zatem takiego równoległoboku skierowane są wzdłuż asymptot i cięciwy, łączące końce średnic sprzężonych są równoległemi do asymptot, czego zresztą można dowieść bezpośrednio, uważając, że ma miejsce równanie

$$S(\alpha-\beta)\varphi(\alpha-\beta)=o.$$

W tem miejscu wypada nam nadmienić, że równaniu hiperboli możemy jeszcze nadać kształt

$$\varrho = \alpha t + \frac{\beta}{t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13),$$

gdzie α i β oznaczają jednakowe długości odcinków, obranych na asymptotach (§ 23,3).

Kierunek stycznej do hiperboli w punkcie ϱ danym będzie przez równanie $\varrho = \alpha t - \frac{\beta}{t}$ (§ 73), łatwo widzieć, że kierunek ten odpowiada średnicy sprzężonej z kierunkiem ϱ, gdyż $S(\alpha t + \frac{\beta}{t})\varphi(\alpha t - \frac{\beta}{t}) = o$. Wypada ztąd, że równaniem hiperboli sprzężonej będzie

$$\varrho = \alpha t - \frac{\beta}{t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Zadanie 1. Dowieść, że każda średnica OP kończąca się w jakimś punkcie P krzywej dzieli cięciwy, równoległe do stycznej w punkcie P na dwie równe części.

Jakoż, niech K będzie dowolnym punktem promienia OP i niech $OK = \lambda . OP$; nazwijmy LM cięciwę równoległą do stycznej w punkcie P, przechodzącą przez K. Będziemy mieli

$$\lambda(\alpha t + \frac{\beta}{t}) + x(\alpha t - \frac{\beta}{t}) = OL = \alpha t' + \frac{\beta}{t'},$$

zkąd

$$(\lambda + x)t = t'; \quad \frac{\lambda - x}{t} = \frac{1}{t'}, \text{ a zatem } \lambda^2 - x^2 = 1;$$ otrzymujemy tym sposobem dla każdej wartości λ dwie wartości równe i wprost przeciwne dla x, t. j. $KL = -KM$.

Twierdzenie to jest zresztą oczywistem, gdyż styczna jest równoległą do średnicy sprzężonej z kierunkiem, przechodzącym przez punkt styczności.

Zadanie 2. Dowieść, że jeżeli zbudujemy równoległobok, którego jedną przekątną będzie cięciwa hiperboli, bokami zaś—kierunki asymptot, to druga przekątna przechodzi przez środek krzywej.

Niech $\varrho = \alpha t + \frac{\beta}{t}, \varrho' = \alpha t' + \frac{\beta}{t'}$, będą promieniami wodzącemi końców cięciwy; łatwo widzieć, że drugą przekątną będzie $\delta = (t - t')\alpha - \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t'}\right)\beta$ $= (t - t')(\alpha + \frac{\beta}{tt'})$.

Ponieważ ta przekątna przechodzi przez środek cięciwy, więc twierdzenie nasze będzie dowiedzionem, jeżeli nam się uda znaleść taki mnożnik z, aby

$$\frac{\varrho+\varrho'}{2}+z\delta=\frac{t+t'}{2}\alpha+\frac{t+t'}{2tt'}\beta+z\left(\alpha+\frac{\beta}{tt'}\right)=o,$$

lecz równaniu temu stanie się zadość kładąc $z=-\frac{t+t'}{2}$.

Zadanie 3. Niech TS, $T'S'$ będą dwiema stycznemi do hiperboli, ograniczonemi asymptotami i przecinającemi się w punkcie R. Trzeba dowieść: 1), że TS' i $T'S$ są równoległemi do siebie; 2), że trójkąty TRT' i SRS' są równoważnemi; 3), że promień OR dzieli TS' i $T'S$ na dwie równe części.

1). Równaniem stycznej TS w punkcie M będzie

$$\varrho=\alpha t+\frac{\beta}{t}+x\left(\alpha t-\frac{\beta}{t}\right);$$

kładąc $x=1$, następnie $x=-1$, otrzymamy

$$OT=2t\alpha,\quad OS=\frac{2\beta}{t}.$$

W taki sam sposób znajdziemy

$$OT'=2t'\alpha,\quad OS'=\frac{2\beta}{t'}.$$

Wypada ztąd

$$TS'=\frac{2}{t'}(\beta-tt'\alpha),\quad T'S=\frac{2}{t}(\beta-tt'\alpha).$$

Lecz ponieważ

$$\varrho-\varrho'=\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t'}\right)\left(\beta-tt'\alpha\right),$$

więc TS', $T'S$ są równoległemi do MM'.

2). Widzimy, że $OR=OT+z.TS=OT'+z'T'S'$, albo, po podstawieniu wartości wyżej podanych,

$$2\alpha t+2z\left(\frac{\beta}{t}-\alpha t\right)=2t'\alpha+2z'\left(\frac{\beta}{t'}-\alpha t'\right),$$

zkąd

$$t(1-z)=t'(1-z');\quad \frac{z}{t}=\frac{z'}{t'},$$

które to równania dają

$zt-z't'=t-t'$; $z't-zt'=o$; czyli $(z+z')(t-t')=t-t'$; t. j. $z+z=1$.

Temu ostatniemu równaniu możemy nadać kształt

$$\frac{TR}{TS}+\frac{T'R}{T'S'}=1,$$

z którego, po wykonaniu działań otrzymamy

$$RT.RT' = RS.RS',$$

które dowodzi równoważności trójkątów TRT', SRS'.

3). Z poprzednich równań otrzymujemy $z = \frac{t}{t+t'}$, zkąd

$$OR = 2\alpha t + 2\frac{t}{t+t'}\left(\frac{\beta}{t} - \alpha t\right) = \frac{2}{t+t'}(tt'\alpha + \beta).$$

Lecz

$$OT + OS' = \frac{2}{t'}(tt'\alpha + \beta),\quad OT' + OS = \frac{2}{t}(tt'\alpha + \beta),$$

więc OR rzeczywiście ma ten sam kierunek co prosta, łącząca punkt O ze środkiem TS' lub $T'S$.

Tej ostatniej części twierdzenia można jeszcze dowieść w sposób następujący. Oznaczmy promienie wodzące punktów styczności M i M' przez μ i μ', punktu zaś R przez λ, otrzymamy

$S\lambda\varphi\mu = 1$, $S\lambda\varphi\mu' = 1$; $S\lambda\varphi(\mu - \mu') = o$. Promień zatem wodzący λ jest sprzężony z kierunkiem $\mu - \mu'$, a zatem dzieli na dwie równe części i cięciwy krzywej i cięciwy układu asymptot, a tem samem i proste TS' i $T'S$.

Zadanie 4. (Patrz zadanie 8 str. 77).

121. Przejdźmy teraz do badań nad parabolą. Określając parabolę na zasadzie jej własności odnośnie do ogniska i kierownicy otrzymamy jej równanie, kładąc w równ. (*1* § 104) $e = 1$, przez co równanie to przechodzi w następujące

$$\varrho^2\delta^2 = (\delta^2 - S\delta\varrho) \quad . \ . \ . \ . \ (1),$$

gdzie δ oznacza promień wodzący spodka prostopadłej, spuszczonej z ogniska na kierownicę.

Kładąc

$$\varphi\varrho = \frac{\varrho - \delta^{-1}S\delta\varrho}{\delta^2} \quad . \ . \ . \ . \ (2)$$

znajdziemy, że funkcya φ jest sprzężoną względem siebie samej, ma wszystkie własności wyłożone w § 80 i równanie (*1*) możemy napisać w kształcie

$$S\varrho(\varphi\varrho + 2\delta^{-1}) = 1 \quad . \ . \ . \ . \ (3).$$

Dla otrzymania punktu A wspólnego przecięcia się krzywej z prostą FD, (z osią) podstawiamy w równanie (*1*) $\varrho = x\delta$ i znajdziemy $x = \frac{1}{2}$, t. j., że krzywa przecina prostą w jednym tylko punkcie (w wierzchołku).

Z samego określenia funkcyi φ wynika, że

$$S\delta\varphi\varrho = o \quad . \ . \ . \ . \ (4)$$

t. j., że promień $\varphi\varrho$ jest prostopadłym do FD. Co więcej, ponieważ

$$\varrho - \delta^2\varphi\varrho = \delta^{-1}S\delta\varrho \parallel \delta \quad . \ . \ . \ . \ (5)$$

więc $-\delta^2\varphi\varrho$ jest niczem innem tylko rzędną MP punktu M, którego promień wodzący jest ϱ i $FP = \delta^{-1}S\delta\varrho = \delta S\delta^{-1}\varrho$.

Nie trudno też dowieść wzoru

$$S\varrho\varphi\varrho=\delta^2(\varphi\varrho)^2.$$

Różniczkując równanie (3) otrzymamy

$$Sd\varrho(\varphi\varrho+2\delta^{-1})+S\varrho\varphi d\varrho=o,$$

czyli

$$Sd\varrho(\varphi\varrho+\delta^{-1})=o \;.\;.\;.\;.\; (6).$$

Oznaczając więc promień wodzący dowolnego punktu stycznej przez ω znajdziemy, $\omega-\varrho$ jest promieniem, idącym wzdłuż stycznej, a że, według równ. 6, normalną w punkcie ϱ, jest $\varphi\varrho+\delta^{-1}$, więc

$$S(\omega-\varrho)(\varphi\varrho+\delta^{-1})=o,\text{ czyli } S\omega(\varphi\varrho+\delta^{-1})+S\delta^{-1}\varrho=1 \;.\;.\;.\;.\; (7).$$

Równaniem normalnej w punkcie ϱ będzie

$$\omega=\varrho+y(\varphi\varrho+\delta^{-1}) \;.\;.\;.\;.\; (8).$$

Dla otrzymania punktu przecięcia się T stycznej z osią paraboli podstawimy w równanie (7) $x\delta$ zamiast ω opierając się na rów. 4 otrzymamy

$$x=1-S\delta^{-1}\varrho,\; FT=\delta-\delta S\delta^{-1}\varrho=FD-FP=PD.$$

Z poprzedniego wypada też, że

$FP=TD$ i $AT=PA$, ponieważ $FA=AD$ (z okreś. krzywej).

Co się tyczy długości FT, to otrzymamy ją podnosząc FT do kwadratu

$$FT^2=(\delta-\delta S\delta^{-1}\varrho)^2=\frac{(\delta^2-S\delta\varrho)^2}{\delta^2}=\varrho^2 \text{ (równ. 1)},$$

t. j. $FT=FM$. Oznaczając przez E punkt, w którym prostopadła ME, spuszczona z punktu M przecina kierującą, znajdziemy, że styczna MT jest dwójsieczną kąta EMF i że czworokąt $FMEF$ jest kwadratem ukośnym, tak że przekątna jego EF jest równoległą do normalnej w punkcie $M(MN)$.

Ponieważ normalna jest równoległą do $\varphi\varrho+\delta^{-1}$, a więc i do $-\delta^2\varphi\varrho-\delta$; lecz ponieważ $MP=-\delta^2\varphi\varrho$, a zatem $PN=-\delta=DF$; równanie to dowodzi, że w paraboli podnormalna jest stałą.

Uważając w równaniu σ promień ω jako stały, promień zaś ϱ jako bieżący, znajdziemy, że ono wyraża równanie biegunowej odnośnie do bieguna (ω).

Dla otrzymania miejsca geometrycznego środków cięciw równoległych do kierunku danego α, zastąpimy w równanie (3) ϱ przez $\omega+x\alpha$, przez co znajdziemy

$$S\omega\varphi\alpha+S\delta^{-1}\alpha=o \;.\;.\;.\;.\;.\; (9).$$

Jest to równanie prostej, prostopadłej do $\varphi\alpha$, a zatem równoległej do osi.

Ponieważ równanie (9) możemy pisać w kształcie $S\alpha(\varphi\omega+\delta^{-1})=o$, więc pokazuje się z tego, że kierunek α jest prostopadłym do $\varphi\omega+\delta^{-1}$, t. j. do normalnej w punkcie, w którym średnica przecina krzywą; tym więc sposobem widzimy, że styczna w tym punkcie jest równoległą do kierunku cięciw.

W ustępie 23, (4) podaliśmy kształt wektoryalny równania paraboli

$$\varrho = \alpha t^2 + \beta t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Zadanie 1. Z wierzchołka A paraboli spuszczamy prostopadłą na styczną w punkcie $M(\varrho)$ i przedłużamy ją aż do przecięcia się w punkcie S z równoległą ME do osi. Znaleść miejsce geometryczne punktu S.

Mamy $AS = x(\varphi\varrho + \delta^{-1})$, $MS = y\delta$.

Lecz ponieważ promień wodzący wierzchołka$=\frac{\delta}{2}$, więc promień wodzący σ punktu S będzie

$$\sigma = \frac{\delta}{2} + x(\varphi\varrho + \delta^{-1}) = \varrho + y\delta.$$

Operując na to równanie symbolem $S\varphi\varrho$ i uwzględniając, że $\varphi\varrho$ jest prostopadłym do δ, otrzymamy

$$x(\varphi\varrho)^2 = S\varrho\varphi\varrho = \delta^2(\varphi\varrho)^2, \text{ a ztąd } x = \delta^2.$$

Równaniem szukanego miejsca geometrycznego będzie więc

$$\sigma = \frac{\delta}{2} + \delta^2(\varphi\varrho + \delta^{-1}) = \frac{3}{2}\delta + \delta^2\varphi\varrho,$$

jest to równanie prostej, równoległej do kierownicy paraboli.

Zadanie 2. Styczna w punkcie M paraboli przecina kierownicę w punkcie D. Dowieść, że proste FD i FM są do siebie prostopadłemi.

Równaniem kierownicy będzie $\sigma = \delta + x\varphi\varrho$, gdzie ϱ oznacza promień wodzący punktu styczności; równaniem stycznej jest

$$S\omega(\varphi\varrho + \delta^{-1}) + S\delta^{-1}\varrho = 1.$$

Podstawiając $\omega = \delta + x\varphi\varrho$, otrzymamy $x = -\frac{S\varrho\delta^{-1}}{(\varphi\varrho)^2}$, a tem samem $FD = \delta - \frac{S\varrho\delta^{-1}}{(\varphi\varrho)^2}\varphi\varrho$, z kąd $S(FM.FD) = S\varrho\delta - \frac{S\varrho\delta^{-1}}{(\varphi\varrho)^2}S\varrho\varphi\varrho = o$, gdyż $S\varrho\varphi\varrho = \delta^2(\varphi\varrho)^2$, a to równanie dowodzi naszego twierdzenia.

Zadnie 3. W paraboli poprowadzono szereg cięciw równoległych, znaleść miejsce geometryczne punktu, dzielącego każdą cięciwę na odcinki, których iloczyn jest stałym.

Oznaczając przez α kierunek stały cięciw, przez ω promień wodzący punktu, w którym jedna z cięciw przecina krzywą, przez ϱ promień wodzący punktu, dzielącego cięciwę według danego warunku, znajdziemy

$$\omega = \varrho + x\alpha.$$

Podstawiając tę wartość w równanie paraboli otrzymamy

$$S(\varrho + x\alpha)[\varphi(\varrho + x\alpha) + 2\delta^{-1}] - 1 = o,$$

a po rozwinięciu

$$x^2 S\alpha\varphi\alpha + 2(S\varrho\varphi\alpha + S\alpha\delta^{-1})x + S\varrho\varphi\varrho + 2S\varrho\delta^{-1} - 1 = o.$$

Ponieważ iloczyn odcinków ma być stałym i równym p, więc szukane równanie będzie

$$S\varrho(\varphi\varrho+2\delta^{1})=1+pS\alpha\varphi\alpha,$$

jest to równanie paraboli.

Zadanie 4. Znaleść miejsce geometryczne spodków prostopadłych, spuszczonych z ogniska paraboli na styczne (krzywa spodkowa).

Oznaczając przez ν promień wodzący jednego z punktów N szukanej krzywej, przez μ promień wodzący odpowiedniego punktu M styczności otrzymamy

$$\nu=z_1\alpha+z_2\beta,\ \mu=\alpha t^2+\beta t,$$

gdzie α oznacza jednostkę długości wzdłuż osi paraboli, β zaś długość $\sqrt{2p}$ wzdłuż stycznej w wierzchołku.

Wyrażając, że $\nu-\mu \parallel 2\alpha t+\beta$ i następnie, że $S\nu(\nu-\mu)=o$, otrzymamy

$$\frac{z_1-t^2}{z_2-t}=2t,\ z_1(z_1-t^2)+z_2(z_2-t)2p=o.$$

Po wyrugowaniu z tych równań t i zamianie z_1 na $-z_1$, znajdziemy równanie krzywej spodkowej

$$z_1{}^3=z_2{}^2(p^2-2pz_1),$$

które we współrzędnych zwyczajnych wyraża się w kształcie

$$x^3=y^2\left(\frac{p}{2}-x\right).$$

Jest to równania *cysoidy Dioklesa*, którą wykreślić możemy posługując się kołem o średnicy $\frac{p}{2}$.

Zadanie 5 Dowieść, że koło opisane na cięciwie, przechodzącej przez ognisko paraboli jest stycznem do kierownicy, każde zaś koło, opisane na innej cięciwie nie przecina kierownicy.

Niech M i N będą dwoma punktami na paraboli, tak że ich promienie wodzące są

$$\mu=\alpha t^2+\beta t,\quad \nu=\alpha t_1{}^2+\beta t_1,$$

równaniem cięciwy MN będzie wtedy

$$\sigma=\alpha t_1{}^2+\beta t_1+x[\alpha(t^2-t_1{}^2]+\beta(t-t_1)]$$

i promień wodzący punktu przecięcia się tej cięciwy z osią paraboli będzie $-tt_1\alpha$; jeżeli więc cięciwa MN przechodzi przez ognisko, to będzie $p+2tt_1=o$.

To założywszy, widzimy, że równaniem koła, średnica którego jest MN, będzie

$$S(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)=o,$$

równaniem zaś kierownicy będzie

$$\varrho=-\frac{p}{2}\alpha+z\beta.$$

Jeśli więc ϱ oznacza promień wodzący punktu przecięcia się koła z kierownicą, to muszą mieć miejsce następujące równania:

$$\mu-\varrho=\left(t^2+\frac{p}{2}\right)\alpha+(t-z)\beta,\quad \nu-\varrho=\left(t_1{}^2+\frac{p}{2}\right)\alpha+(t_1-z)\beta.$$

$$\left(t^2+\frac{p}{2}\right)\left(t_1{}^2+\frac{p}{2}\right)+2p(t-z)(t_1-z)=o.$$

To ostatnie równanie można przedstawić w kształcie

$$2pz^2-2p(t+t_1)z+2ptt_1+t^2t_1{}^2+\frac{p}{2}(t^2+t_1{}^2)+\frac{p^2}{4}=o,$$

lub w kształcie

$$2pz^2-2p(t+t_1)z+\frac{p}{2}(t+t_1)^2+\left(tt_1+\frac{p}{2}\right)^2=o.$$

Równanie to wtedy tylko daje dla z wartości rzetelne, gdy $2tt_1+p=o$, t. j. gdy cięciwa MN przechodzi przez ognisko paraboli.

ZADANIE DO ROZDZIAŁU VII*).

1. Znaleść miejsce geometryczne środków cięciw elipsy, przechodzących przez ten sam punkt.

2. Znaleść miejsce geometryczne prostych stałej długości, opierających się na dwóch prostych w przestrzeni.

3. Dowieść, że jeżeli dwie cięciwy elipsy się przecinają, to prostokąty, zbudowane na odcinkach są proporcyonalne do kwadratów półśrednic, równoległych do tych cięciw.

4. Dowieść, że średnice elipsy, idące wzdłuż przekątnych prostokąta, zbudowanego na osiach są równemi i sprzężonemi ze sobą.

5. Dowieść, że wierzchołki równoległoboku, opisanego około elipsy leżą na elipsie, podobnej danej i której pole jest dwa razy większem od pola danej elipsy.

6. Dowieść, że normalna do elipsy w jakimś punkcie jest dwójsieczną kąta, utworzonego przez dwa promienie wodzące, poprowadzone od danego punktu do dwóch ognisk.

7. Znaleść miejsce geometryczne wierzchołka kąta prostego, opisanego około elipsy.

---

*) W tekscie teorya powierzchni wyprzedza teoryę krzywych drugiego stopnia; dla zadań jednak uważałem za stosowne ten porządek zmienić.

8. PQ jest jedną z szeregu cięciw, czyniących kąt stały ze średnicą AB koła; znaleść miejsce geometryczne punktu przecięcia się prostych AP i BQ.

9. Styczną do elipsy w punkcie P przedłużamy aż do przecięcia się w punktach Q i Q' ze stycznemi w wierzhołkach A i A'; znaleść miejsce geometryczne punktu przecięcia się R promieni $F'Q$ i FQ', tudzież punktu przecięcia się S promieni FQ i $F'Q'$ i okazać, że trzy punkty P, R i S leżą na jednej prostej.

10. Jeżeli P jest punktem hiperboli, OP'— półśrednicą sprzężoną z OP, to styczna w P' do hiperboli sprzężonej jest równoległą do OP (Dowieść, odnosząc hiperbolę do asymptot).

11. Dowieść, że odcinek stycznej do hiperboli, zawarty pomiędzy asymptotami ma swój środek w punkcie styczności.

12. Okazać, że każda hiperbola równoboczna, opisana na trójkącie danym, przechodzi przez punkt przecięcia się trzech wysokości trójkąta.

13. Ruchoma prosta LM opiera się na dwóch stałych prostych tworząc trójkąt o stałym polu. Należy wyznaczyć miejsce geometryczne punktu P, dzielącego odcinek LM w stałym stosunku.

14. Okazać, że stosunek wstaw kątów, które średnica hiperboli tworzy z asymptotami i jest równym stosunkowi wstaw kątów, które z temiż asymptotami tworzy średnica, z tamtą sprzężona.

15. Do hiperboli poprowadzono dwie styczne z punktu, leżącego na jednej z gałęzi hiperboli sprzężonej; dowieść że cięciwa styczności jest styczną do drugiej gałęzi hiperboli sprzężonej.

16. Z punktu R, leżącego na asymptocie poprowadzono dwie proste RP i RQ, odpowiednio równoległe do średnic sprzężonych, aż do przecięcia się z krzywą i z jej sprzężoną. Okazać, że punkta P i Q są końcami dwóch średnic sprzężonych.

17. Dowieść, że w paraboli odległość ogniska do stycznej jest średnią propor. pomiędzy jego odległościami od punktu styczności i od wierzchołka.

18. Okrąg koła ma swój środek w wierzchołku A paraboli, średnica zaś tego koła równa się $3AF$, gdzie F oznacza ognisko paraboli; dowieść, że cięciwa przecięcia się koła z parabolą dzieli AF na dwie równe części.

19. Dowieść, że styczna do paraboli przecina kierownicę i rzędną ogniska w punktach jednakowo od ogniska oddalonych.

20. Cięciwa obraca się około punktu danego na osi poraboli; znaleść miejsce geometryczne przecięcia się normalnych do paraboli w punktach końcowych tej cięciwy.

21. Dowieść, że trójkąt, którego wierzchołki są punktami styczności trzech stycznych do paraboli jest równoważnym trójkątowi utworzonemu przez te styczne.

22. F jest ogniskiem paraboli, M— dowolnym punktem krzywej. Dowieść, że koło opisane na FM, jako na średnicy, jest stycznem do stycznej w wierzchołku paraboli.

23. Dowieść, że cięciwa przecięcia się dwóch parabol, mających wspólną kierownicę przecina pod kątem prostym linię prostą, łączącą ich ogniska i dzieli ją na dwie równe części.

24. Wyznaczyć miejsce geometryczne środków cięciw ogniskowych paraboli.

25. Okazać, że odcinek stycznej do paraboli, zawarty pomiędzy dwiema stycznemi, przecinającemi się na kierownicy, widzianym jest z ogniska pod kątem prostym.

26. Dowieść, że summa kwadratów trzech średnic sprzężonych elipsoidy jest ilością stałą.

27. Dowieść, że summa kwadratów rzutów trzech średnic sprzężonych elipsoidy na jakąkolwiek jej oś równa się kwadratowi tej osi.

28. Przez stały punkt prowadzimy cięciwy elipsoidy, w końcach tych cięciw—płaszczyzny styczne do elipsoidy; dowieść, że pary takich płaszczyzn przecinają się według prostych, na jednej płaszczyźnie leżących. Znaleść kierunek i równanie tej płaszczyzny.

29. Znaleść równanie powierzchni, utworzonej ruchem prostej, obracającej się około osi, z którą jest stale złączoną, lecz której nie przecina.

30. Znaleść miejsce geometryczne punktów, dla których summa kwadratów ich odległości od pewnej liczby punktów danych jest stałą.

31. Znaleść równanie powierzchni, utworzonej przez proste, dzielące proporcyonalnie boki przeciwległe czworoboku skośnego.

32. Znaleść miejsce geometryczne punktów, dla których stosunek odległości od dwóch danych prostych, jest ilością stałą.

33. Dowieść, że krawędzie równoległościanu wpisanego w powierzchnię drugiego rzędu są równoległemi do kierunków trzech średnic sprzężonych.

34. Dowieść, że jeżeli na trzech średnicach sprzężonych elipsoidy zbudujemy równoległościan, to summa kwadratów pól ścian tego równoległościanu będzie ilością stałą.

35. Dowieść, że istnieje nieskończona liczba układów osi ukośno-kątnych, do których odniesione równanie powierzchni elipsoidy we współrzędnych zwyczajnych przybiera kształt $x^2+y^2+z^2=e^2$.

36. Znaleść miejsce geometryczne przecięcia się trzech płaszczyzn stycznych w końcach trzech osi sprzężonych powierzchni drugiego rzędu mającej środek.

37. Dowieść, że normalne do powierzchni w punktach, leżących na jednej tworzącej są równoległe do pewnej płaszczyzny.

38. Wyznaczyć na powierzchni $S\varrho\varphi\varrho=1$ miejsce geometryczne punktów, w których tworzące prostolinijne przecinają się pod kątem prostym.

39. Znaleść warunek, przy którym powierzchnia $S\varrho\varphi\varrho=1$ jest obrotową.

40. Znaleść miejsce geometryczne układu przecięć elipsoidy *o* stałej powierzchni.

KONIEC.

SPIS RZECZY.