ROZDZIAŁ II.

Ilorazy i iloczyny promieni wodzących.—Określenie kwaternionu.

26. Iloraz

$$q=\frac{\beta}{\alpha}\quad .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

dwóch promieni wodzących, wychodzących z jednego punktu *Hamilton* nazywa *kwaternionem* (czworanem), przyczem przyjmuje, że iloraz ten jest jednowartościowym.

Z równania

$$q=\frac{\beta}{\alpha}$$

wypada jako określenie mnożenia, t. j. działania odwrotnego dzieleniu

$$\beta=q.\alpha=\frac{\beta}{\alpha}.\alpha\quad .\ .\ .\ .\ (2)$$

Musimy tu wyraźnie nadmienić, że $q.\alpha$ oznacza, iż α mnożemy przez q, zobaczymy bowiem, że w rachunku kwaternionów porządek czynników wpływa na iloczyn.

Z równania (2) wypada, że kwaternion q jest czynnikiem, który działając na promień wodzący α przeistacza go w promień β. Do tego zaś potrzeba: 1-sze powiększyć lub zmniejszyć absolutną długość a promienia α, by ona stała się równą długości b promienia β; 2-gie obrócić α na płaszczyźnie promieni $\alpha\beta$ o taki kąt, aby promień α przybrał kierunek promienia β.

Dwa kwaterniony

$$q=\frac{\beta}{\alpha}\quad \text{i}\quad q_1=\frac{\beta_1}{\alpha_1}.$$

nazywamy równemi tylko wtedy, gdy one czynią zadość następującym warunkom:

1-sze. Jeżeli stosunek długości b i a promieni β i α równa się stosunkowi długości b_1 i a_1 promieni β_1 i α_1, t. j. gdy

$$\frac{b}{a}=\frac{b_1}{a_1}$$

2-gie. Jeżeli płaszczyzna promieni $\beta\alpha$ jest równoległą do płaszczyzny promieni $\beta_1\alpha_1$.

3-cie. Jeśli kąt pomiędzy promieniami β i α równa się kątowi pomiędzy β_1 i α_1.

4-te. Jeżeli kierunek obrotu od α do β jest taki sam co i kierunek obrotu od α_1 do β_1.

Przyjmujmy, że za kierunek dodatni obrotu uważać będziemy ten, który dla obserwatora, znajdującego się w początku promieni wodzących i patrzącego na płaszczyznę $\alpha\beta$ odbywa się od lewej do prawej t. j. w kierunku skazówki zegarowej.

To założywszy widzimy, że iloraz q jest zależnym od czterech następujących wielkości.

1) Od stosunku liczebnego $b : a$

2) Od wielkości kąta $\alpha\beta$

3) i 4) Od wielkości, określających położenie układu płaszczyzn równoległych.

Lecz łatwo widzieć, że tych wielkości jest dwie. Jakoż, wystawiwszy w początku promieni prostopadłą do tego układu płaszczyzn równoległych widzimy, że prostopadła ta jest zależną od trzech kątów, które ona tworzy z układem trzech osi i które połączone są ze sobą jednem równaniem, a zatem prostopadła ta określa się za pomocą dwóch wielkości niezależnych.

Ztąd to pochodzi nazwa kwaternionu.

27. Kwaternion zatem zastosowany jako czynnik do promienia wodzącego α wydłuża go lub skraca i jednocześnie obraca go o pewien kąt. Z tego to powodu możemy kwaternion uważać jako iloczyn dwóch czynników, jednego, który wydłuża lub skraca promień wodzący, a ten nazywa się *tensorem* (*wydłużaczem*), i drugiego, który ten promień obraca o pewien kąt i ten otrzymał nazwę *wersora* (*zwrotnika*).

Oznaczając tensor przez Tq, wersor zaś przez Uq możemy kwaternion q napisać w kształcie

$$Tq = Tq\,Uq\; . \; . \; . \; . \; . \;(1).$$

Ponieważ porządek czynności obrotu i wydłużenia oczywiście nie wpływa na wypadek działania, które wyobraża kwaternion q, więc

$$q = Tq.\,Uq = Uq.\,Tq\; . \; . \; . \; . \; . \;(2).$$

Jeśli przez α' i β' oznaczemy jednostki długości, odcięte na kierunkach promieni α i β, a prztz a i b absolutne długości promieni wodzących, to

$$q = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{b\beta'}{a\alpha'} = \frac{b}{a}\cdot\frac{\beta'}{\alpha'}.$$

Stosunek $\frac{b}{a}$ oznacza wielkości zmiany długości promienia α, $\frac{\beta'}{\alpha'}$ zaś— wielkość obrotu, będzie zatem

$$\left.\begin{aligned} \frac{b}{a} &= Tq \\ \frac{\beta'}{\alpha'} &= Uq \end{aligned}\right\} \quad (3).$$

Uwaga. Oznaczając przez γ promień wodzący, leżący na płaszczyźnie kwaternionu $\frac{\beta}{\alpha}$, możemy zawsze znaleść taki promień δ, aby $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\delta}{\gamma}$. Ztąd wypada, że

$$q.\gamma=\frac{\beta}{\alpha}.\gamma=\frac{\delta}{\gamma}.\gamma=\delta.$$

t. j., że q zastosowany jako czynnik obraca i zmienia długość nietylko promienia α, lecz każdego promienia, na płaszczyźnie kwaternionu będącego. (§ 27).

Działanie nad kwaternionami.

28. Przy pewnych przypuszczeniach, o których zaraz mówić będziemy, łatwo dowieść, że wszystkie działania algiebraniczne nad kwaternionami wogólności mówiąc, zawsze dają jako rezultat kwaterniony.

29. *Dodawanie i odejmowanie.* Niech będą dwa kwaterniony

$$q_1=\frac{\beta}{\alpha} \text{ i } q_2=\frac{\delta}{\gamma},$$

Z określenia równości kwaternionów (§ 26) wynika, że te dwa kwaterniony możemy zawsze tak przekształcić, aby one miały ten sam mianownik. Jakoż na wspólnem przecięciu się dwóch płaszczyzn danych kwaternionów możemy zawsze wybrać taki promień wodzący μ i wyznaczyć odpowiednie dwa promienie wodzące β_1 i δ_1, z których pierwszy leży na płaszczyźnie kwaternionu q_1, drugi na płaszczyźnie q_2, aby

$$q_1=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta_1}{\mu}, \quad q_2=\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\delta_1}{\mu}$$

Otrzymamy wtedy

$$q_1+q_2=\frac{\beta_1}{\mu}+\frac{\delta_1}{\mu}.$$

Przyjmując, że w tym przypadku ma miejsce prawo rozdzielnościowe dla ułamków zwyczajnych o jednakowych mianownikach, wyrażone równaniem

$$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c},$$

otrzymamy

$$q_1+q_2=\frac{\beta_1+\delta_1}{\mu}.$$

Ponieważ $\beta_1+\delta_1$ jest promieniem wodzącym, więc $\frac{\beta_1+\delta_1}{\mu}$ jest kwaternionem Q, a zatem

$$q_1+q_2=Q.$$

Uwaga. Przypuszczenie co do zastosowalności prawa rozdzielnościowego $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ znajduje potwierdzenie w tem, że stosując działanie wyrażone znakami $\frac{\beta_1+\delta_1}{\mu}$ i $\frac{\beta_1}{\mu}+\frac{\delta_1}{\mu}$ do promienia wodzącego μ (wspólnego przecięcia płaszczyzn $\frac{\beta}{\alpha}$ i $\frac{\delta}{\gamma}$) otrzymujemy ten sam rezultat

Wniosek. Ponieważ

$$\frac{\beta_1+\delta_1}{\mu}=\frac{\delta_1+\beta_1}{\mu},$$

więc

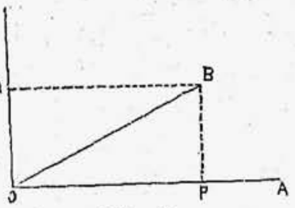
$$q_1+q_2=q_2+q_1,$$

t. j. summa kwaternionów jest przemiennościową.

30. Na zasadzie tego cośmy wyżej powiedzieli łatwo dowieść, że każdy kwaternion można rozłożyć na summę ilości liczebnej i kwaternionu o kącie prostym. Jakoż, niech będzie kwaternion

$$q=\frac{OB}{OA}=\frac{\beta}{\alpha}.$$

Oznaczając przez α' jednostkę długości w kierunku promienia wodzącego $OA=\alpha$ (*Fig. 11*), β' jednostkę długości w kierunku $OB=\beta$, długość α przez a, długość β przez b, kąt zaś pomiędzy α i β przez φ, otrzymamy



(*Fig. 11*).

$$OB=OP+OQ=b\cos\varphi\alpha'+b\sin\varphi\delta',$$

gdzie δ' oznacza jednostkę długości w kierunku promienia OQ prostopadłego do α.

Z powyższego równania otrzymamy

$$q=\frac{OB}{OA}=\frac{b}{a}\cos\varphi+\frac{b}{a}\sin\varphi.\frac{\delta'}{\alpha'}=\frac{b}{a}(\cos\varphi+\sin\varphi\frac{\delta'}{\alpha'}).$$

Ztąd widzimy, że kwaternion $q=\frac{OB}{OA}$ rzeczywiście składa się z części liczebnej $\frac{b}{a}\cos\varphi$ i z kwaternionu $\frac{b}{a}\sin\varphi\frac{\delta'}{\alpha'}$ o kącie prostym.

Wniosek. Jeżeli promienie wodzące β i α są do siebie prostopadłemi, to $\varphi=\frac{\pi}{2}$ i część liczebna znika, jeżeli zaś promienie wodzące są równoległemi, to $\varphi=o$ lub π i kwaternion przechodzi w liczbę zwyczajną.

31. *Mnożenie i dzielenie kwaternionów.* Po długich poszukiwaniach, *Hamilton* przyszedł do przekonania, że dla kwaternionów musi mieć miejsce równanie

$$\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

równanie zaś

$$\frac{\alpha}{\gamma}.\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta}{\gamma},$$

prawdziwe dla liczb zwyczajnych nie może mieć miejsca dla kwaternionów. *Kelland* podał następujące, łatwe do spamiętania prawidło:

Równe wartości licznika i mianownika dwóch kwaternionów, będących kolejnemi czynnikami iloczynu, wtedy tylko wzajemnie się znoszą, jeżeli one mogą być wykreślonemi kreską idącą w kierunku pochyłości pisma zwyczajnego.

Przypuszczenie, że

$$\frac{\beta}{\alpha}.\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\gamma}, \beta$$

nic innego nie oznacza tylko, że iloczyn $\frac{\beta}{\alpha}.\frac{\alpha}{\gamma}.\gamma$ podlega prawu łącznościowemu, wyrażonemu równaniem

$$a(bc)=(ab)c.$$

Jakoż, przyjmując to ostatnie prawo możemy napisać

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\right).\gamma=\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\gamma}.\gamma\right)=\frac{\beta}{\alpha}.\alpha=\beta,$$

a że

$$\frac{\beta}{\gamma}.\gamma=\beta,$$

więc wypadki otrzymane przez mnożenie promienia γ raz przez $\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}$, drugi raz przez $\frac{\beta}{\gamma}$ są identycznemi, czyli, że

$$\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\gamma}.$$

Na zasadzie tego przypuszczenia łatwo widzieć, że iloczyn dwóch kwaternionów jest kwaternionem.

Jakoż, kładąc

$$q_1=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta_1}{\gamma}$$

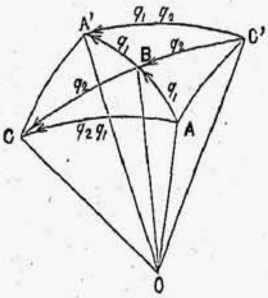
$$q_2=\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\gamma_1},$$

gdzie γ oznacza promień wodzący, leżący na wspólnem przecięciu płaszczyzn kwaternionów q_1 i q_2, otrzymamy

$$q_1q_2=\frac{\beta_1}{\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\gamma_1}=\frac{\beta_1}{\gamma_1}.$$

32. *Iloczyn dwóch kwaternionów nie jest przemiennościowym.* Dla okazania tego twierdzenia, niech OA, OB, OC (*Fig. 12*) będą trzema promieniami wodzącemi, mającemi jednostki długości i uczyńmy

$$OA=\alpha', \ OB=\beta', \ OC=\gamma$$



(*Fig.* 2).

$$q_1=\frac{\beta'}{\alpha'}=\frac{OB}{OA'},\quad q_2=\frac{OC}{OB}=\frac{\gamma'}{\beta'}.$$

Przy takiem założeniu będzie

$$q_2.q_1=\frac{OC}{OB}\cdot\frac{OB}{OA}=\frac{OC}{OA}=\frac{\gamma'}{\alpha'}.$$

Na płaszczyznach OAB i OBC poprowadźmy odpowiednio promienie wodzące OA' i OC'' tak, aby kąt BOA'=kąt. AOB, kąt $C''OB$=kąt. BOC i aby długości tych promienieni wodzących równały się jednostkom. Otrzymamy wtedy

$$q_1=\frac{OA'}{OB'},\quad q_2=\frac{OB}{OC''},$$

$$q_1.q_2=\frac{OA'}{OB}\cdot\frac{OB}{OC''}=\frac{OA'}{OC''}.$$

Kwaterniony $\frac{OC}{OA}$ i $\frac{OA'}{OC''}$ mają wprawdzie te same tensory i kąty, lecz płaszczyzny ich będą różnemi, jeśli tylko kwaterniony q_1 i q_2 mają różne płaszczyzny, a zatem iloczyny q_1q_2 i q_2q_1 będą różnemi (§ 26). W przypadku, gdy kwaterniony q_1 i q_2 są prostokątnemi, lecz leżą w różnych płaszczyznach wtedy promienie wodzące OC, OA, OC'' i OA' leżą wprawdzie na jednej płaszczyźnie, lecz łatwo widzieć, że kąty AOC i $C''OA'$ kwaterniónów iloczynów są różnokierunkowemi, a zatem nie są równemi. Równość kwaternionów q_1q_2 i q_2q_1 wtedy tylko będzie miała miejsce, gdy kwaterniony q_1 i q_2 będą na jednej płaszczyźnie.

Uwaga. Kwaterniony wyżej uważane były tylko wersorami, lecz łatwo dowieść, że twierdzenie o nieprzemienności iloczynu jest prawdziwem dla dowolnych kwaternionów.

Jakoż, oznaczając przez $q^{(1)}$ i $q^{(2)}$ dwa dowolne kwaterniony, mamy

$$q^{(1)}.q^{(2)}=Tq^{(1)}Uq^{(1)}.Tq^{(2)}Uq^{(2)}=Tq^{(1)}Tq^{(2)}.Uq^{(1)}.Uq^{(2)} \quad (\S\ 27).$$

$$q^{(2)}.q^{(1)}=Tq^{(2)}Uq^{(2)}.Tq^{(1)}Uq^{(1)}=Tq^{(2)}Tq^{(1)}.Uq^{(2)}.Uq^{(1)},$$

a że

$$Tq^{(1)}Tq^{(2)}=Tq^{(2)}Tq^{(1)}$$

więc nie ma miejsca równość

$$q^{(1)}.q^{(2)}=q^{(2)}.q^{(1)}.$$

33. *Kwaternionem odwrotnym* względem kwaternionu q nazywamy nowy kwaternion q^{-1}, lub $\frac{1}{q}$, określony równaniem

$$q.\frac{1}{q}=1,\ \text{lub}\ q.q^{-1}=1\ .\ \ .\ \ .\ (1).$$

Jeśli zatem będzie

$$q = \frac{\beta}{\alpha} \text{ i } \beta = q.\alpha,$$

to musi być

$$\frac{1}{q} = q^{-1} = \frac{\alpha}{\beta},$$

gdyż

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\beta} = 1,$$

Przychodzimy ztąd do wniosku, że tensor odwrotności kwaternionu równa się odwrotności tensoru danego kwaternionu, wersor zaś odwrotności kwaternionu różni się od wersoru danego kwaternionu tem, że przy równości kątów, kierunki tychże są wprost sobie przeciwnemi, gdyż pierwszy zmienia α na β, drugi zaś β na α.

Łatwo też widzieć, że

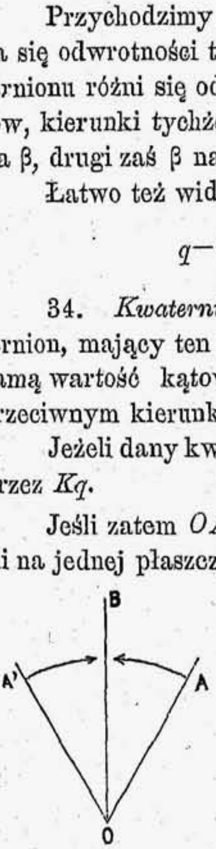
$$q^{-1}.q = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

34. *Kwaternionem sprzężonym* z danem kwaternionem nazywamy kwaternion, mający ten sam tensor co i dany kwaternion, tę samą płaszczyznę i tę samą wartość kątową, a różni się tylko kierunkiem kąta, który jest wprost przeciwnym kierunkowi kąta danego kwaternionu.

Jeżeli dany kwaternion oznaczymy przez q, to sprzężony z nim oznaczamy przez Kq.

Jeśli zatem OA, OB i OA' (*Fig. 12*) są promieniami wodzącemi, leżącemi na jednej płaszczyźnie i jeśli pod względem *liczebnym* będzie

$$OA = OA', \text{ kąt } AOB = \text{kąt. } A'OB$$



(*Fig. 12*).

to będzie

$$\frac{OB}{OA} = q, \; \frac{OB}{OA'} = Kq.$$

Na zasadzie paragrafu poprzedniego będzie

$$UKq = Uq^{-1} \quad . \; . \; . \; . \; (1).$$

Ponieważ wogólności wersor kwaternionu równa się ilorazowi z kwaternionu przez jego tensor, więc

$$Uq^{-1} = q^{-1} : Tq^{-1} = q^{-1}Tq,$$

a że z samego określenia

$$TKq = Tq,$$

więc

$$Kq = TKq\,UKq = (Tq)^2 q^{-1}$$

$$qKq = (Tq)^2 qq^{-1} = (Tq)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Łatwo też widzieć, że i

$$Kq.q=qKq=(Tq)^2 \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

Ten sam wypadek można też było otrzymać uważając, że tensory Kq i q są sobie równe i że działania Uq i UKq wzajemnie się znoszą, tak że działanie wyrażone przez $q.Kq$ lub $Kq.q$ sprowadza się do mnożenia przez $(Tq)^2$. Przychodzimy tym sposobem do twierdzenia:

Iloczyn z kwaternionu przez kwaternion sprzężony równa się kwadratowi tensoru.

35. Jeżeli przez OA, OB, OC rozumieć będziemy promienie wodzące, mające jednostki długości, to

$$\frac{OC}{OA}=\frac{OC}{OB}\cdot\frac{OB}{OA}=q.q'$$

$$\frac{OA}{OC}=\frac{OA}{OB}\cdot\frac{OB}{OC}.$$

Lecz na zasadzie (1, § 34)

$$\frac{OA}{OC}=K\left(\frac{OC}{OA}\right),\ \frac{OA}{OB}=K\left(\frac{OB}{OA}\right),\ \frac{OB}{OC}=K\left(\frac{OC}{OB}\right),$$

możemy więc drugie z dwóch poprzednich równań napisać w kształcie

$$K\left(\frac{OC}{OA}\right)=K\left(\frac{OB}{OA}\right).\ K\left(\frac{OC}{OB}\right)$$

czyli

$$K(qq')=Kq'.Kq \; . \; . \; . \; . \; (1),$$

Przychodzymy tym sposobem do ważnego twierdzenia.

Kwaternion sprzężony iloczynu dwóch kwaternionów równa się iloczynowi kwaternionów sprzężonych czynników, wziętych w odwrotnym porządku.

36. *Mnożenie kwaternionów jest rozdzielnościowem.*

Wiemy że

$$\frac{OC}{OB}\cdot\frac{OB}{OA}=\frac{OC}{OA}.$$

Rozkładając promień wodzący OC na dwa inne $OD+DE$, będziemy mieli

$$\left(\frac{OD+DE}{OB}\right)\cdot\frac{OB}{OA}=\frac{OD+DE}{OA}.$$

Lecz na zasadzie (§ 29) równanie powyższe możemy napisać w kształcie

$$\left(\frac{OD}{OB}+\frac{DE}{OB}\right)\cdot\frac{OB}{OA}=\frac{OD}{OA}+\frac{DE}{OA},$$

a że

$$\frac{OD}{OA}=\frac{OD}{OB}\cdot\frac{OB}{OA},\ \frac{DE}{OA}=\frac{DE}{OB}\cdot\frac{OB}{OA},$$

więc

$$\left(\frac{OD}{OB}+\frac{DE}{OB}\right)\frac{OB}{OA}=\frac{OD}{OB}\cdot\frac{OB}{OA}+\frac{DE}{OB}\cdot\frac{OB}{OA}.$$

Oznaczając $\frac{OD}{OB}$ przez p, $\frac{DE}{OB}$ przez q i $\frac{OB}{OA}$ przez r, otrzymamy

$$(p+q)\,r=pr+qr \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

t. j. mnożenie kwaternionów jest rozdzielnościowem odnośnie do dodawania o ile ono się tyczy mnożnika.

Stosując teraz do równania (1) twierdzenie § 35, otrzymamy

$$K\,[(p+q)r]=Kr.K(p+q)$$

Lecz ponieważ, jak łatwo widzieć,

$$K\,(q_1+q_2)=Kq_1+Kq_2$$

więc

$$Kpr+Kqr=Kr.\;K(p+q)=Kr.\;(Kp+Kq).$$

a na zasadzie § 35

$$Kr.\;(Kp+Kq)=Kr.\;Kp+Kr.\;Kq.$$

Ponieważ zaś Kp, Kq, Kr oznaczają dowolne kwaterniony, więc oznaczając je przez p_1, q_1, r_1 otrzymamy

$$r_1(p_1+q_1)=r_1p_1+r_1q_1 \quad . \; . \; . \; . \quad (2),$$

t. j. mnożenie kwaternionów jest rozdzielnościowem, odnośnie do dodawania, o ile ono się tyczy mnożnej.

Przychodzimy więc do wniosku, że mnożenie kwaternionów jest wogólności rozdzielnościowem t. j.

$$(p+q)\,(r+s)=pr+ps+qr+qs \quad . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Uwaga. W następstwie opierając się na prawie rozdzielnościowem i na tak zwanych kwaternionach zasadniczych dowiedziemy też, że dla mnożenia kwaternionów ma miejsce prawo łącznościowe, wyrażające się równaniem:

$$(ab).c=a.(bc)=abc.$$

37. *Dzielenie* wógólności możemy określić jako działanie odwrotne mnożeniu i to w dwojaki sposób, uważając dzielną już to jako iloczyn z ilorazu przez dzielnik, już też jako iloczyn z dzielnika przez iloraz. To ostatnie określenie przyjmiemy dla dzielenia kwaternionów, tak że

dzielna=iloraz×dzielnik.

Łatwo dowieść, że iloraz dwóch kwaternionów jest kwaternionem.

Jakoż niech będzie

$$q_1=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta_1}{\mu} \text{ i } q_2=\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\delta_1}{\mu},$$

gdzie μ oznacza promień wodzący, leżący na wspólnem przecięciu się płaszczyzn kwaternonów q_1 i q_2.

Przez dzielenie otrzymamy

$$q_1 : q_2 = \frac{\beta_1}{\mu} : \frac{\delta_1}{\mu},$$

Przyjmując, że dla ilorazu dwóch ułamków o jednakowym mianianowniku ma miejsce prawidło zwyczajnej algiebry, otrzymamy

$$q_1 : q_2 = \frac{\beta_1}{\delta_1}$$

c. b. d. o.

Kwaterniony Zasadnicze.

38. Pomiędzy kwaternionami na szczególną zasługują uwagę kwaterniony, których tensor równa się jedności, a kąt jest prostym. Kwaterniony takie nazywają się *zasadniczemi*, czyli *elementarnemi*, a to dla tego, że w następstwie okaże się, że każdy kwaternion daje się wyrazić przez summę trzech kwaternionów elementarnych.

Nie trudno dowieść, że wyrażeniem algiebraicznem takiego kwaternionu jest jeden z pierwiastków równania

$$X^2 + 1 = 0.$$

Jakoż, jeśli q oznacza kwaternion elementarny i α jakiś promień wodzący na płaszczyźnie tego kwaternionu, to $q\alpha$ oznacza promień wodzący β, leżący na tej saméj płaszczyźnie, mający tę samę długość co α i będący prostopadłym do kierunku α; tak samo $q\beta$ oznacza promień wodzący γ tej samej co α długości i prostopadły do β.

Ponieważ zaś oba obroty odbywają się na płaszczyźnie kwaternionu q, więc γ musi musi leżeć na przedłużeniu promienia α t. j. musi być

$$\gamma = -\alpha.$$

Będziemy zatem mieli

$$\gamma = q\beta = qq\alpha = q^2\alpha = (-1)\alpha.$$

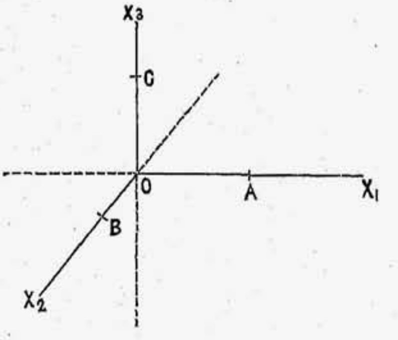
Widzimy ztąd, że $q^2 = -1$, czyli że q jest pierwiastkiem równania

$$X^2 + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Kwaternion zatem elementarny, jest pod pewnym względem równym jednostce $\sqrt{-1}$ zwyczajnych liczb urojonych, gdyż i ta jest pierwiastkiem równania (*1*) i również oznacza obrót o kąt prosty. Nie oznaczamy jednak kwaternionu elementarnego przez $\sqrt{-1}$, dla tego, że znak ten nie pokazuje, na jakiej płaszczyźnie odbywa się obrot, a z powyższego równania widzimy, że kwadrat kwaternionu elementarnego zawsze się równa -1, bez względu na płaszczyznę tego kwaternionu. Z tego to powodu *Hamilton* powiada, że równanie (*1*) ma nieskończenie wiele pierwiastków, które on nazywa *geometrycznemi* i które on oznacza przez I. Pierwiastek zatem równania (*1*) jest symbolem działania, które dwa razy zrzędu zastosowane do promienia wodzącego zmienia jego kierunek na kierunek wprost przeciwny, nie zmieniając jednak jego długości.

39. Zobaczymy później, że wszystkie pierwiastki równania *(1)* § 38 t. j. kwaterniony elementarne dają się wyrazić linijnie za pomocą trzech z nich, których płaszczyzny są do siebie prostopadłe i które oznaczymy przez i, j, k.

Dla wyprowadzenia zasadniczych własności kwaternionów i, j, k, obierzmy trzy osie OX_1. OX_2, OX_3 (*Fig. 13*) do siebie prostopadłe i takie aby obroty od OX_2 do OX_3, od OX_3 do OX_1, od OX_1 do OX_2 były dodatniemi odnośnie do osi OX_1, OX_2, OX_3. Na tych osiach odkładamy jednostki długości OA, OB, OC, w kierunkach zaś odjemnych tych osi również odkładadamy jedności długości OA_1, OB_1, OC_1.



(*Fig. 13*).

Z określenia kwaternionów zasadniczych otrzymamy

$$i=\frac{OC}{OB},\ j=\frac{OA}{OC},\ k=\frac{OB}{OA}\ \ldots\ldots \quad (a).$$

Przy tych samych oznaczeniach będzie

$$ij=\frac{OC}{OB}\cdot\frac{OA}{OC}=\frac{OB_1}{OC}\cdot\frac{OC}{OA_1}=\frac{OB_1}{OA_1}=k\ \ldots\ldots (b)$$

$$jk=\frac{OA}{OC}\cdot\frac{OB}{OA}=\frac{OC_1}{OA}\cdot\frac{OA}{OB_1}=\frac{OC_1}{OB_1}=i\ \ldots\ldots (c)$$

$$ki=\frac{OB}{OA}\cdot\frac{OC}{OB}=\frac{OA_1}{OB}\cdot\frac{OB}{OC_1}=\frac{OA_1}{OC_1}=j\ \ldots\ldots (d)$$

Z drugiej strony

$$ji=\frac{OA}{OC}\cdot\frac{OC}{OB}=\frac{OA}{OB}=\frac{1}{k}=\frac{k}{k^2}=-k\ \ldots\ldots\ldots (e)$$

$$jk=\frac{OB}{OA}\cdot\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OC}=\qquad -i\ \ldots\ldots\ldots (f)$$

$$ik=\frac{OC}{OB}\cdot\frac{OB}{OA}=\frac{OC}{OA}=\qquad -j\ \ldots\ldots\ldots (g)$$

Oprócz tego, ponieważ

$$ij=k,$$

więc

$$ijk=k.k=k^2=-1\ \ldots\ldots\ldots (h)$$

Tym sposobem otrzymujemy szereg następujących równań

$$\left.\begin{array}{c} i^2=j^2=k^2=-1 \\ ij=k,\ jk=i,\ ki=j \\ ji=-k,\ kj=-i,\ ik=-j \\ ij=-1. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

Łatwo też widzieć, że iloczyn ilukolwiek kwaternionów elementarnych zawsze się sprowadza do jednego z nich. Tak np.

$$jkiij=iiij=-ij=-k.$$

Teorya wskazówek (Indices).

40. *Osią* kwaternionu $\frac{\beta}{\alpha}$ nazywamy linię prostą, prostopadłą do jego płaszczyzny i tak prowadzoną, ażeby obserwator umieszczony wzdłuż tej osi widział obrót dzielnika α ku dzielnej β, odbywający się w kierunku od lewej ręki ku prawej. Oś tę należy sobie wystawić poprowadzoną w początku promieni wodzących α i β. Należy tu dodać, że kąt obrotu musi być mniejszym od dwóch kątów prostych.

Jeżeli na osi kwaternionu odłożymy długość równą długości tensora kwaternionu, to promień wodzący tym sposobem otrzymany nazywa się *wskazówką* (index) kwaternionu.

Jeżeli dany jest kwaternion, to mamy też jego wskazówkę, lecz gdy znamy wskazówkę kwaternionu, to samego kwaternionu jeszcze przez to nie znamy. Wskazówka bowiem daje wprawdze płaszczyznę kwaternionu, wielkość tensora i kierunek obrotu, lecz absolutnej wielkości kąta obrotu nie daje. Dla usunięcia tej nieoznaczoności, *Hamilton* przyjmuje, że wskazówka ma należeć do kwaternionu o kącie prostym.

Przy takiem założeniu wskazówka kwaternionu w zupełności określa kwaternion. Taka właśnie wskazówka oznacza się przez Iq, jeżeli należy do kwaternionu prostokątnego q. Z tego cośmy wyżej powiedzieli wynika, że

$$TIq=Tq \quad \ldots (1).$$

41. Dla wskazówek kwaternionów prostokątnych mają miejsce następujące twierdzenia:

I. Równym kwaternionom odpowiadają równe wskazówki i odwrotnie, równym promieniom wodzącym, uważanym jako wskazówki kwaternionów prostokątnych odpowiadają równe kwaterniony. Twierdzenie to wypływa z samego określenia wskazówek.

II. Summa wskazówek dwóch kwaternionów prostokątnych równa się wskazówce ich summy

$$Iq_1+Iq_2=I(q_1+q_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Jakoż dajmy, że kwaterniony prostokątne dane są równaniami

$$q_1=\frac{\beta}{\alpha}, \quad q_2=\frac{\delta}{\gamma}.$$

Jeżeli na wspólnem przecięciu się płaszczyzn kwaternionów q_1 i q_2 weźniemy jednostkę długości μ i obrerzemy sobie takie promienie wodzące β_1 i δ_1, z których pierwszy leży na płaszczyźnie q_1, drugi na płaszczyźnie q_2, aby było

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta_1}{\mu}, \quad \frac{\delta}{\gamma}=\frac{\delta_1}{\mu}$$

$$TIq_1=T\beta_1, \quad TIq_2=T\delta_1.$$

Dla otrzymania summy q_1+q_2 musimy wyznaczyć summę geometryczną $\beta_1+\delta_1$, gdyż

$$q_1+q_2=\frac{\beta_1+\delta_1}{\mu}.$$

Ponieważ Iq_1, Iq_2, β_1 i δ_1 jako prostopadłe do μ leżą na jednej płaszczyźnie, więc kąt, który tworzą ze sobą Iq_1 i Iq_2 równa się kątowi promieni wodzących β_1 i δ_1 i $T(\beta_1+\delta_1)=T(Iq_1+Iq_2)$. Oprócz tego, łatwo widzieć, że promień wodzący (Iq_1+Iq_2) jest prostopadłym do promienia $(\beta_1+\delta_1)$. Wypada ztąd, że

$$Iq_1+Iq_2=I(q_1+q_2)$$

W taki sam sposób można dowieść, że

$$Iq_1-Iq_2=I(q_1-q_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

III. Zachowując oznaczenie wyżej podane, łatwo widzieć, że

$$\frac{q_1}{q_2}=\frac{\frac{\beta_1}{\mu}}{\frac{\delta_1}{\mu}}=\frac{\beta_1}{\delta_1}=\frac{Iq_1}{Iq_2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

t. j., że iloraz dwóch kwaternionów elementarnych równa się ilorazowi ich wskazówek.

IV. Pozostaje nam teraz wykazać związek, zachodzący pomiędzy iloczynem dwóch kwaternionów prostokątnych i ich wskazówkami.

Do tego celu musimy przedewszystkiem określić co rozumieć należy przez iloczyn dwóch promieni wodzących. Otóż *Hamilton* iloczyn taki określa równaniem

$$Iq_1 Iq_2=q_1 q_2, \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

t. j. że dla otrzymania iloczynu dwóch promieni wodzących, należy pomnożyć przez siebie kwaterniony prostokątne, których dane promienie są wskazówkami.

42. Ponieważ kwaterniony prostokątne są w zupełności określone przez swoje wskazówki i ponieważ mają miejsca równania

$$Iq_1+Iq_2=I(q_1+q_2)$$
$$Iq_1.Iq_2=q_1q_2$$
$$Iq_1:Iq_2=q_1:q_2,$$

więc kwaterniony prostokątne mogą być we wszystkich rachunkach zastąpione przez ich wskazówki.

To uczyniwszy otrzymujemy, że kwaterniony elementarne (§ 39)

$$i=\frac{OC}{OB},\ j=\frac{OA}{OC},\ k=\frac{OB}{OA}$$

mogą być zastąpione przez ich wskazówki, t. j. przez promienie wodzące o jednostkach długości, idące odpowiednio w kierunkach osi OX_1, OX_2, OX_3, (*Fig. 13*).

Ponieważ dalej (§ 39)

$$ij=k,\ jk=i,\ ki=j,$$

więc zarówno iloczyn jak i iloraz dwóch promieni wodzących, do siebie prostopadłych jest promieniem wodzącym prostopadłym do ich płaszczyzny.

Wypada ztąd, że jeżeli promień wodzący β pomnożymy przez promień wodzący α, do niego prostopadły i mający jednostkę długości, to promień β zostanie przez to obrócony o kąt prosty na płaszczyźnie prostopadłej do mnożnika. Jeżeli ten promień β, w nowem jego położeniu pomnożymy przez α, to β znów się obróci o kąt prosty i przez to zamieni się w $-\beta$, t. j.

$$\alpha\alpha\beta=\alpha^2\beta=-\beta,$$

co pokazuje, że kwadrat promienia wodzącego, mającego jednostkę długości równa się -1, wypadek zupełnie zgodny z tym cośmy powiedzieli w § 38.

Dla otrzymania kwadratu dowolnego promienia wodzącego γ, piszemy

$$\gamma=T\gamma.U\gamma,$$

ztąd

$$\gamma^2=(T\gamma)^2(U\gamma)^2=-(T\gamma)^2.$$

W taki sam sposób otrzymujemy iloczyn dwóch dowolnych promieni wodzących do siebie prostopadłych

Jakoż

$$\gamma.\delta=T\gamma U\gamma.T\delta U\delta=T\gamma T\delta U\gamma.U\delta=T\gamma T\delta.\eta,$$

gdzie η oznacza promień wodzący, mający jednostkę długości, prostopadły do płaszczyzny $(\gamma\delta)$ i tak poprowadzony, ażeby obrót względem niego od γ do δ odbywał się w kierunku od lewej ku prawej.

Uwaga. Oznaczając przez c_1, c_2, c_3 dostawy kątów, które wskazówka kwaternionu elementarnego q tworzy z trzema osiami prostokątnemi otrzymamy

$$q=c_1i+c_2j+c_3k,$$

czyli, że $c_1 i + c_2 j + c_3 k$ jest ogólnym kształtem pierwiastku równania

$$X^2+1=o.$$

Przedstawienie kwaternionu w postaci summy.

43. Widzieliśmy (§ 30), że

$$q=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{T\beta}{T\alpha}\left(cos\varphi+\frac{\delta_1}{\alpha_1}\,sin\varphi\right),$$

ponieważ zaś według § 42 $\frac{\delta_1}{\alpha_1}$ oznacza promień wodzący prostopadły do płaszczyzny $(\alpha_1\delta_1)$, mający jednostkę długości i tak poprowadzony, aby obrót od α_1 do δ_1 czyli od α do β miał miejsce w kierunku dodatnim, więc oznaczając ten promień wodzący przez η otrzymamy

$$q=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{T\beta}{T\alpha}(cos\varphi+\eta sin\varphi)=Tq(cos\varphi+\eta sin\varphi)\ .\ .\ .\ .\ (1).$$

Ztąd wynika, że mnożnik

$$cos\varphi+\eta sin\varphi$$

jest wersorem, obracającym dowolny promień wodzący o kąt φ około osi, poprzedzanej w kierunku η.

Wielkość

$$Tq cos\varphi$$

Hamilton nazywa *skalarem* kwaternionu q i oznacza przez Sq, wielkość zaś

$$Tq sin\varphi\eta$$

nazywa *wektorem* kwaternionu i oznacza przez Vq. Przez takie oznaczenie kwaternion q przybiera postać

$$q=Sq+Vq\ .\ .\ .\ .\ (2).$$

Z określenia kwaternionu sprzężonego Kq (§ 34) wypada, że

$$Kq=Sq-Vq$$

Uwaga 1. Wektor Vq możemy napisać w następującym kształcie

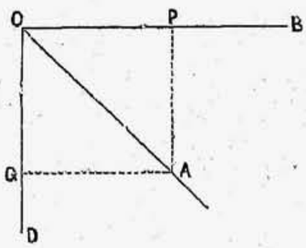
$$Vq=TVq\,UVq,$$

gdzie $TVq=Tq sin\varphi$, $UVq=\eta$.

Uwaga 2. Ponieważ skalar kwaternionu elementarnego η równa się zeru, więc $K\eta=-\eta$, a że każdy promień wodzący α może być uważanym jako kwaternion elementarny, więc

$$K\alpha=-\alpha$$

44. W taki sam sposób można też rozłożyć i iloczyn dwóch promieni wodzących α i β.



(*Fig.* 4).

Jakoż niech będzie $OA=\alpha$, $OB=\beta$ i kąt $AOB=\varphi$ (*Fig.* 14). Wystawmy na płaszczyźnie AOB prostopadłą OD do OB w taki sposób, aby obrót kąta prostego DOB odbył się w tym samym kierunku co i kąta φ. Oznaczmy dalej jednostki długostki długości w kierunkach OA, OB i OD odpowiednio przez α', β' i δ'.

Ponieważ

$$OA=OP+PA,$$

czyli

$$\alpha=T\alpha\cos\varphi.\beta'+T\alpha\sin\varphi.\delta',$$

więc

$$\alpha\beta=T\alpha T\beta\cos\varphi\,\beta'^2+T\alpha T\beta\sin\varphi\delta'\beta',$$

Lecz, $\beta'^2=-1$. (§ 42), $\delta'\beta'=\eta$, gdzie η oznacza jednostkę promienia wodzącego, prostopadłego do płaszczyzny δ' β' i tak poprowadzonego, aby obrót od δ' do β' odbywał się w kierunku dodatnim. Wypada ztąd, że

$$\alpha\beta=T\alpha T\beta(-\cos\varphi+\eta\sin\varphi)\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

Z tego wzoru otrzymujemy

$$\left.\begin{array}{l} S\alpha\beta=-T\alpha T\beta\cos\varphi \\ V\alpha\beta=T\alpha T\beta\sin\varphi.\eta \end{array}\right\}\quad(2).$$

Ponieważ

$$TV\alpha\beta=T\alpha T\beta\sin\varphi\;.\;.\;.\;.\;(3)$$

więc $TV\alpha\beta$ wyraża podwójne pole trójkąta, zbudowanego na promieniach wodzących α i β.

Łatwo widzieć, że

$$\beta\alpha=T\alpha T\beta(-\cos\varphi-\sin\varphi.\eta.)=S\alpha\beta-V\alpha\beta\;.\;.\;.\;.\;(4).$$

45, Z tego cośmy wyłożyli w dwóch poprzednich paragrafach wynikają następujące wzory:

$$S\alpha\beta=S\beta\alpha\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

$$V\alpha\beta=-V\beta\alpha\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

$$\alpha\beta+\beta\alpha=2S\alpha\beta\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(3)$$

$$\alpha\beta-\beta\alpha=2V\alpha\beta\;.\;.\;.\;.\;.\;(4)$$

$S\alpha\beta=o$, jeśli kąt pomiędzy α i β jest prostym (5)

$\alpha\beta=K\beta\alpha$, $\beta\alpha=K\alpha\beta$ . . (6) (§§ 34, 35)

$$K\alpha\beta\gamma\;.\;.\;.\;\lambda=(-1)^n\lambda\;.\;.\;.\;\beta\alpha\;.\;(7)$$

$$(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2+2S\alpha\beta+\beta^2\;(8)$$

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-2S\alpha\beta+\beta^2\;(9)$$

$$\alpha^2\beta^2=\alpha\alpha\beta\beta=\alpha\beta\beta\alpha,$$

gdyż $\beta\beta$ jest skalarem. Wypada ztąd, że

$$\alpha^2\beta^2=\alpha\beta.\beta\alpha=(S\alpha\beta+V\alpha\beta)(S\alpha\beta-V\alpha\beta)=(S\alpha\beta)^2-(V\alpha\beta)^2$$

46. Jeżeli na płaszczyźnie mamy trzy promienie wodzące, α, β, γ, to oznaczając przez φ kąt $(\alpha\beta)$, przez ψ—kąt $(\beta\gamma)$, przez η zaś jednostkę długości promienia wodzącego, prostopadłego do tej płaszczyzny i odpowiednio poprowadzonego znajdziemy, że

$$\cos\varphi+\eta\sin\varphi$$

jest wersorem, który zastosowany jako czynnik do dowolnego promienia wodzącego, leżącego na tej samej płaszczyźnie obraca go o kąt φ. Tak samo

$$\cos\psi+\beta\sin\psi$$

obraca taki promień o kąt ψ, więc

$$(\cos\varphi+\eta\sin\varphi)\,(\cos\psi+\eta\sin\psi)=\cos(\varphi+\psi)+\eta\sin(\varphi+\psi)\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

obraca o kąt $(\varphi+\psi)$; wypadek ten jest zgodnym z wypadkiem

$$\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\gamma}{\alpha}.$$

Widzimy ztąd, że kwaterniony o jednej i tej samej płaszczyźnie, albo o płaszczyznach równoległych podlegają tym samym prawom mnożenia co i liczby urojone zwyczajne, równanie bowiem (*1*) jest niczem innem tylko wzorem *Moivre'a*, gdyż z niego dla n całkowitego otrzymamy

$$(\cos\varphi+\eta\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+\eta\sin n\varphi\;.\;.\;.\;.\;(2).$$

47. Wiadomo, że

$$e^\theta=1+\frac{\theta}{1}+\frac{\theta^2}{1.2}+\frac{\theta^3}{1.2.3}+\;.\;.\;.\;.$$

$$\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{1.2}+\frac{\theta^4}{1.2.3.4}-\;.\;.\;.\;.$$

$$\sin\theta=\frac{\theta}{1}-\frac{\theta^3}{1.2.3}+\frac{\theta^5}{1.2.3.4.5}-\;.\;.\;.\;.$$

Podstawiając w pierwsze z tych równań $\varphi\eta$ zamiast θ, gdzie $\eta^2=-1$, otrzymamy

$$e^{\eta\varphi}=\cos\varphi+\eta\sin\varphi\;.\;.\;.\;.\;(1).$$

Przyjmując kąt prosty za jedność, otrzymamy

$$e^\eta=\mu\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

$$\eta^\varphi=\cos\varphi+\eta\sin\varphi\;\;.\;.\;.\;.\;(3).$$

Wersor zatem możemy przedstawić w postaci potęgi promienia wodzącego, co jest zgodnem z tem cośmy wyżej powiedzieli. Jakoż mnożąc promień wodzący przez η, η^2, η^3 . . . obracamy go o *1*, *2*, *3* . . . kątów prostych, wypada ztąd przez analogię, że mnożąc go przez η^φ obracamy go o kąt φ, gdzie kąt φ wyrażonym jest w częściach kąta prostego, t. j. $\varphi=\frac{2\theta}{\pi}$ (gdzie θ wyraża ten sam kąt φ wyrażony w częściach promienia).

Na zasadzie wyżej powiedzianego możemy każdy kwaternion przedstawić w postaci potęgi promienia wodzącego.

Jakoż, jeżeli

$$q = Tq(\cos\varphi + \eta\sin\varphi) = Tq.\eta^{\varphi},$$

to kładąc $\sqrt[\varphi]{Tq} = a$, gdzie a jest skalarem i oznaczając $a\eta$ przez α, otrzymamy

$$q = \alpha^{\varphi} \quad . \; . \; . \; . \; (4).$$

Forma normalna kwaternionów.—Algiebra kwaternionów.

48. Wiemy, że

$$\frac{\beta}{\alpha} = q = Tq(\cos\varphi + \eta\sin\varphi) = Sq + Vq \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

gdzie Vq oznacza promień wodzący długości $Tq\sin\varphi$ w kierunku prostopadłym do płaszczyzny kwaternionu. Prowadząc przez początek promieni wodzących układ osi prostolinijnych i oznaczając prze x, y, z współrzędne końca promienia Vq i oznaczając jeszcze Sq przez w, otrzymamy

$$q = w + xi + yj + zk \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

Ten ostatni wzór nazywa się *formą normalną kwaternionu.*

Z tego wynika, że

$$\left.\begin{array}{l} Sq = Tq\cos\varphi = w \\ Vq = Tq\sin\varphi.\eta = xi + yj + zk \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; (3).$$

Podnosząc obie strony tych równań do kwadratu i odejmując od siebie otrzymamy

$$(Sq)^2 - (Vq)^2 = (Tq)^2 = w^2 + x^2 + y^2 + z^2, \quad . \; . \; . \; . \; (4)$$

ztąd

$$Tq = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}, \quad . \; . \; . \; . \; (5)$$

a że

$$q = Tq.Uq,$$

więc

$$Uq = \frac{w + xi + yj + zk}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}} \quad . \; . \; . \; . \; (6).$$

49. Przekonawszy się, że normalny kształt kwaternionów jest

$$q = w + xi + yj + zk$$

możemy kwaterniony uważać jako liczby złożone wyższego gatunku, w skład których wchodzą trzy jednostki urojone i, j, k czyniące zadość równaniom (*1*) § 39 i od jednostki liczebnej *1*. Jednostki urojone podlegają prawu łącznościowemu, wyrażonemu równaniem:

$$ijk = (ij).k = i(jk),$$

nie podlegają prawu przemiennościowemu

$$ij = ji,$$