

stronach elementu płaskiego są równe i mają kierunki przeciwne (art. 176), przeto widzimy, że siła, odpowiednia stronie zewnętrznej ściany abc , jest wypadkową sił, działających na strony zewnętrzne jej rzutów prostokątnych, schodzących się w punkcie m . Ten związek widocznie utrzymałby się, w razie gdybyśmy rozważali rzuty ukośne ściany abc . Przyjmując następnie, że wymiary czworoscianu dążą nieograniczenie do zera, wniesiemy, że ściany przechodząc będą przez ten sam punkt m , i otrzymamy następujące twierdzenie: *siła wewnętrzna w punkcie względem danego elementu płaskiego jest wypadkową sił wewnętrznych, odpowiednich rzutom tego elementu na trzy płaszczyzny, przez tenże punkt przechodzące* (tw. Cauchy'ego). To twierdzenie stosuje się także do ciał sprężystych, w których zachodzi ruch wewnętrzny; albowiem siły stracone, wprowadzone przez zasadę d'Alembert'a, są nieskończenie małe rzędu trzeciego, pominięte więc być mogą w obec sił wewnętrznych.

182. NATEŻENIA GŁÓWNE. Rozważajmy element płaski $d\omega$, zawierający punkt m ; a, b, c niech oznaczają dostawy kierunkowe normalnej do tego elementu; α, β, γ dostawy kierunkowe nateżenia p tego elementu w punkcie m . Wystawiając w m układ prostokątny osi, rzucmy $d\omega$ na jego płaszczyzny, to $ad\omega, bd\omega, cd\omega$ będą odpowiednio rzutami w kierunkach osi. Z twierdzenia Cauchy'ego wynika, że $\alpha p \cdot d\omega = \alpha p_{11} \cdot d\omega + b p_{21} \cdot d\omega + c p_{31} \cdot d\omega$, albo, po skróceniu przez $d\omega$,

$$(1) \quad \alpha p = \alpha p_{11} + b p_{21} + c p_{31}, \text{ i podobnie } \beta p = \alpha p_{12} + b p_{22} + c p_{32}, \\ \gamma p = \alpha p_{13} + b p_{23} + c p_{33},$$

gdzie p_{ik} oznaczają składowe nateżeń rzutów elementu, wzięte w kierunkach osi, jak w art. 181-ym. Oznaczmy przez p_1, p_2, p_3 nateżenia, odpowiednie tym rzutom, a przez $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, gdzie $i=1, 2, 3$, ich dostawy kierunków; otrzymamy

$$(2) \quad p_{11} = \alpha_1 p_1, p_{12} = \beta_1 p_1, p_{13} = \gamma_1 p_1; p_{21} = \alpha_2 p_2, p_{22} = \beta_2 p_2, \\ p_{23} = \gamma_2 p_2; p_{31} = \alpha_3 p_3, p_{32} = \beta_3 p_3, p_{33} = \gamma_3 p_3.$$

Podstawmy te wartości w równania (1) i obliczmy sumę kwadratów odpowiednich stron tych równań, otrzymamy

$$p^2 = p_1^2 \alpha^2 + p_2^2 \beta^2 + p_3^2 \gamma^2 + 2(\alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3) p_2 p_3 \cdot bc + 2(\alpha_3 \alpha_1 + \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1) p_3 p_1 \cdot ca + 2(\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2) p_1 p_2 \cdot ab.$$

Jeżeli przyjmiemy dla krótkości

$$(3) \quad \begin{cases} A = (\alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3) p_2 p_3 = p_2 p_3 \cos(p_2, p_3), B = p_3 p_1 \cos(p_3, p_1). \\ C = p_1 p_2 \cos(p_1, p_2), \end{cases} \text{ to mieć będziemy}$$

$$(4) \quad p^2 = p_1^2 \alpha^2 + p_2^2 \beta^2 + p_3^2 \gamma^2 + 2 A \cdot bc + 2 B \cdot ca + 2 C \cdot ab.$$

Z tego wzoru okazuje się, że dość znać wielkości i kierunki nateżeń trzech elementów płaskich, przecinających się w danym punkcie pod kątami prostymi, aby obliczyć wielkość nateżenia dowolnego elementu, przez tenże punkt przechodzącego. Odetnijmy na kierunku nateżenia p od punktu m

w obie strony długość, przedstawiającą p , i niech x, y, z oznaczają spólrzędne punktu końcowego jednego z tych odcinków, wzięte względem osi ukośnych, mających kierunki natężeń p_1, p_2, p_3 ; wówczas $\alpha p = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$, a ponieważ według (1) i (2) $\alpha p = \alpha_1 a p_1 + \alpha_2 b p_2 + \alpha_3 c p_3$, przeto $x = a p_1, y = b p_2, z = c p_3$. Wstawwszy te wartości w równanie $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, otrzymamy

$$(5) \quad \frac{x^2}{p_1^2} + \frac{y^2}{p_2^2} + \frac{z^2}{p_3^2} = 1$$

jako równanie miejsca geometrycznego punktów (x, y, z) . To równanie przedstawia elipsoidę, której środkiem jest punkt m , a dla której kierunki natężeń p_1, p_2, p_3 przedstawiają kierunki trzech średnic sprzężonych. Nazywamy tę powierzchnią elipsoidą natężeń w punkcie rozważanym. Długości jej średnic są proporcjonalne względem natężeń w kierunkach tych średnic.

Osi główne téj elipsoidy przedstawiają kierunki trzech natężeń, do których odpowiednie elementy są prostopadłe. A zatym *przez każdy punkt ciała sprężystego można poprowadzić trzy płaszczyzny, do siebie prostopadłe, które doznają tylko natężeń normalnych*. Natężenia, zachodzące w kierunkach osi elipsoidy natężeń, zwiemy natężeniami głównymi w punkcie rozważanym. Jedno z tych natężeń jest bezwzględnie największe, jedno zaś najmniejsze ze wszystkich natężeń w tym punkcie. Obierzmy kierunki natężeń głównych za kierunki osi spólrzędnych i niech p_1, p_2, p_3 oznaczają te natężenia; wówczas $p_{11} = p_1, p_{22} = p_2, p_{33} = p_3, p_{12} = 0, p_{23} = 0, p_{31} = 0$; otrzymamy więc według (1)

$$(6) \quad \begin{aligned} \alpha p &= a p_1, \beta p = b p_2, \gamma p = c p_3, \\ p &= \pm \sqrt{a^2 p_1^2 + b^2 p_2^2 + c^2 p_3^2}, \\ \alpha &= \frac{p_1}{p} a, \beta = \frac{p_2}{p} b, \gamma = \frac{p_3}{p} c. \end{aligned}$$

Znając natężenia główne co do wielkości i kierunku, możemy według tych równań dla każdego elementu płaskiego o danym kierunku (a, b, c) podać wielkość i kierunek odpowiedniego natężenia. Mając dany kierunek natężenia, możemy łatwo znaleźć kierunek elementu, któremu to natężenie odpowiada. Jakoż gdy dane są α, β, γ , to według (6) równanie płaszczyzny elementu (a, b, c) będzie

$$(7) \quad \frac{\alpha x}{p_1} + \frac{\beta y}{p_2} + \frac{\gamma z}{p_3} = 0.$$

Weźmy powierzchnią rzędu 2-go

$$(8) \quad \frac{x^2}{p_1} + \frac{y^2}{p_2} + \frac{z^2}{p_3} = \pm 1,$$

której środkiem jest punkt m ; z porównania wzorów (7) i (8) widzimy, że płaszczyzna szukanego elementu jest sprzężona z kierunkiem danego na-

teżenia względem powyższej powierzchni. Powyższą powierzchnią nazywamy powierzchnią kierującą. Mając tę powierzchnią, tudzież elipsoidę nateżeń, możemy następującym sposobem wyznaczyć związek między elementem a jego nateżeniem: *znalazłszy średnicę, sprzężoną z płaszczyzną elementu względem powierzchni kierującej, mieć będziemy kierunek nateżenia; długość odpowiedniej średnicy elipsoidy nateżeń wyznacza wielkość nateżenia.*

Jeżeli nateżenia główne mają ten sam znak, to powierzchnia kierująca jest elipsoidą; jeżeli te nateżenia mają znaki różne, to ta powierzchnia składa się z dwu hiperbolojd sprzężonych, jedno — i dwupowłokowej. W pierwszym przypadku niema w punkcie rozważanym żadnego elementu płaskiego, którego nateżenie miałoby kierunek, przypadający na jego płaszczyźnie, z czego wynika, że każdy element doznaje pewnego nateżenia normalnego. W drugim przypadku elementy, leżące na płaszczyznach stycznych do stożka asymptotycznego, doznają nateżeń w kierunkach prostych ich styczności, a zatym doznają nateżeń na swoich płaszczyznach, wskutek czego nie doznają nateżeń normalnych.

Jeżeli nateżenia główne są sobie równe, natenczas otrzymamy kulę zamiast elipsoidy nateżeń, a wtedy każdy element, przesunięty przez środek kuli, doznawać będzie tylko nateżenia normalnego, a te nateżenia są równe we wszystkich kierunkach. I nawzajem: *jeżeli elementy, przez tenże sam punkt przechodzące, doznają tylko nateżeń normalnych, natenczas te nateżenia są równe we wszystkich kierunkach.*

Poprowadźmy przez punkt m element $d\omega'$ na płaszczyźnie (a', b', c') , którego nateżenie p' niech ma kierunek $(\alpha', \beta', \gamma')$. Obliczywszy według (6) rzuty $\alpha'p', \beta'p', \gamma'p'$ nateżenia p' , rzucmy nateżenie p elementu $d\omega$ na normalną do elementu $d\omega'$, a nateżenie p' na normalną do elementu $d\omega$; natenczas $p(\alpha a' + \beta b' + \gamma c') = p'(\alpha' a + \beta' b + \gamma' c)$, z czego wynika twierdzenie ogólne: *jeżeli dwa elementy płaskie przechodzą przez ten sam punkt, to rzut nateżenia pierwszego elementu na normalną do drugiego elementu jest równy rzutowi nateżenia drugiego elementu na normalną do pierwszego elementu.* Tego twierdzenia szczególnym przypadkiem jest podane wyżej twierdzenie, z którego wynikało, że $p_{ik} = p_{ki}$.

183. RÓWNIANIA RÓWNOWAGI I RÓWNIANIA RUCHU ELEMENTU. Weźmy znowu pod uwagę nieskończenie mały element równoległościenny wewnątrz ciała sprężystego. Na jednostkę jego objętości przypadają w punkcie m siły zewnętrzne X, Y, Z , które zmniejszają się w ogólności od punktu do punktu, a na cały element działają siły zewnętrzne tego samego rzędu nieskończenie małe, co jego objętość. Nateżenia w punkcie m są wielkościami skończonymi, a jeżeli przechodzimy z tego punktu do innego punktu, nieskończenie bliskiego, to nateżenia zmieniają się o wielkości tego samego rzędu, co odległość tych punktów, przez co jest zapewniona ciągłość w rozmieszczeniu nateżeń wewnątrz ciała. Do ścian elementu są przyłożone siły wewnętrzne nieskończenie małe tego samego rzędu, co powierzchnie tych ścian. Jeżeli z jednej ściany przejdziemy do nieskończenie bliskiej ściany równoległej, to

siła wewnętrzna zmienia się o wielkość nieskończenie małą tego samego rzędu, co objętość elementu. Z tego okazuje się, że siły zewnętrzne elementu są nieskończenie małe tego samego rzędu, co różniczki sił wewnętrznych, że zatem przy rozważaniu równowagi lub ruchu elementu nie można sił zewnętrznych porównywać z siłami wewnętrznymi, lecz tylko z różniczkami sił wewnętrznych. Równania zatem równowagi i równania ruchu elementu będą wyrażały związki między siłami zewnętrznymi elementu a różniczkami sił wewnętrznych, czyli między siłami zewnętrznymi dla jednostki objętości a pochodnymi sił wewnętrznych dla jednostki powierzchni.

Rozważajmy siły w kierunku osi x i wyrażmy warunek, żeby ich suma była równa zeru, przyjmując, że w ciele nie zachodzi ruch wewnętrzny. Na ścianę $m b c g$ (fig. 65.) działa siła $-p_{11} dy dz$, a na ścianę przeciwną siła $(p_{11} + \frac{\partial p_{11}}{\partial x} dx) dy dz$, suma tych sił wynosi $\frac{\partial p_{11}}{\partial x} dx dy dz$, jest więc wielkością rzędu trzeciego, jak zapowiedzieliśmy wyżej. Podobnie otrzymamy $\frac{\partial p_{21}}{\partial y} dx dy dz$ i $\frac{\partial p_{31}}{\partial z} dx dy dz$ jako sumy sił, działających na ściany, prostopadłe do osi y i do osi z . Ponieważ $X dx dy dz$ jest siłą zewnętrzną, przeto szukany warunek jest

$$X dx dy dz + \frac{\partial p_{11}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial p_{21}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial p_{31}}{\partial z} dx dy dz = 0.$$

Dzieląc przez objętość elementu i postępując podobnie z siłami równoległymi do osi y i do osi z , otrzymamy następujące trzy równania równowagi elementu, mające kształt zapowiedziany,

$$(1) \quad \begin{cases} X + \frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{21}}{\partial y} + \frac{\partial p_{31}}{\partial z} = 0, \\ Y + \frac{\partial p_{12}}{\partial x} + \frac{\partial p_{22}}{\partial y} + \frac{\partial p_{32}}{\partial z} = 0, \\ Z + \frac{\partial p_{13}}{\partial x} + \frac{\partial p_{23}}{\partial y} + \frac{\partial p_{33}}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Warunki równowagi momentów sił podaliśmy w art. 181-ym, a mianowicie:

$$(2) \quad p_{12} = p_{21}, \quad p_{23} = p_{32}, \quad p_{31} = p_{13}.$$

Niech na powierzchnię ciała działają także pewne siły wiadome. Poprowadźmy przez punkt (x, y, z) na powierzchni płaszczyznę styczną i obierzmy na niej element, zawierający ten punkt; p niech oznacza natężenie w tym elemencie, mające kierunek (α, β, γ) ; a, b, c niech określają kierunek normalnej zewnętrznej do tego elementu. Powyższe wielkości są wiadome. Poprowadząc przez ten punkt trzy elementy płaskie, równoległe do płaszczyzn współrzędnych, otrzymamy według (1) art. 182-go następujące równania:

$$(3) \quad \begin{aligned} \alpha p &= a p_{11} + b p_{21} + c p_{31}, & \beta p &= a p_{12} + b p_{22} + c p_{32}, & \gamma p &= a p_{13} + \\ & & & & & + b p_{23} + c p_{33}, \end{aligned}$$

które wyrażają tak zwane warunki krańcowe t. j. zachodzące w każdym punkcie na powierzchni ciała.

Z zasady d'Alembert'a łatwo otrzymać równania ruchu wewnętrznego ciała sprężystego, t. j. takiego ruchu, podczas którego każdy punkt porusza się bardzo mało z tego położenia, jakie on zajmuje w stanie naturalnym ciała. Przesunięcia u, v, w punktu są w tym przypadku funkcjami czasu i współrzędnych miejsca, około którego ruch punktu zachodzi; pochodne tych przesunięć względem czasu przedstawiają przeto prędkości i przyspieszenia punktu. Jeżeli σ oznacza gęstość ciała w punkcie (x, y, z) , to $\left(X - \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) dx dy dz$, $\left(Y - \sigma \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) dx dy dz$, $\left(Z - \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) dx dy dz$ przedstawiają siły stracone; wstawiwszy te siły, wzięte dla jednostki objętości, zamiast X, Y, Z w równaniach (1), otrzymamy równania następujące ruchu wewnętrznego:

$$(4) \quad \begin{cases} \sigma \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X + \frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{21}}{\partial y} + \frac{\partial p_{31}}{\partial z}, \\ \sigma \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = Y + \frac{\partial p_{12}}{\partial x} + \frac{\partial p_{22}}{\partial y} + \frac{\partial p_{32}}{\partial z}, \\ \sigma \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Z + \frac{\partial p_{13}}{\partial x} + \frac{\partial p_{23}}{\partial y} + \frac{\partial p_{33}}{\partial z}. \end{cases}$$

Na powierzchni zachodzą zawsze równania (3), nie uwzględniamy w nich bowiem nieskończenie małych sił rzędu trzeciego, a zatem i sił straconych.

184. ZWIĄZKI MIĘDZY ODKSZTAŁCENIAMI A NATĘŻENIAMI. Podane równania, zachodzące w każdym elemencie ciała sprężystego, nie są dostateczne do zbadania stanu, jaki siły przyłożone w tym elemencie wywołują. Jakoż, dziewięć natężeń w punkcie m redukuje się, jak wiadomo, do sześciu, a równania (1) artykułu poprzedzającego są trzema związkami między tymi sześcioma natężeniami, które nie wystarczają do ich wyznaczenia. Równania (5) są także tylko trzema związkami między trzema przesunięciami i sześcioma natężeniami, nie pozwalają zatem zbadać ruchu elementu ciała sprężystego. Że powyższe równania nie mogą wystarczyć dla mechaniki ciał sprężystych, okazuje się wprost z tego, że przy ich wyprowadzeniu nie uwzględniono tej okoliczności, iż ciało odkształcone nie doszło do granicy sprężystości doskonałej, którato okoliczność musi się oczywiście wyrazić przez pewne związki między natężeniami a odkształceniami, cechujące właśnie odkształcenia sprężyste. Te związki będą stanowiły nową zasadę dla dochodzenia skutków działania sił na ciała sprężyste, która łącznie z poznanymi dotąd zasadami pozwoli rozwiązać zagadnienia dynamiki ciał sprężystych.

Taką zasadę, pozwalającą rozwiązać zadania dynamiki ciał sprężystych, podał R. Hooke dla najprostszego przypadku prętów, wyciąganych w kierunku swęj osi. Wyraził ją w słowach: *ut tensio sic vis*, to znaczy, że, gdy ciało nie dochodzi do granicy sprężystości, wydłużenie pręta jest proporcjonalne względem siły wydłużającej, a zatem względem natężenia w kierunku téj siły.

W celu uogólnienia tej zasady, rozważajmy element równoległościenny ciała sprężystego, do którego ścian są przyłożone siły normalne i siły styczne. Każde wydłużenie i każde posunięcie się będzie wogólności skutkiem działania wszystkich sił, a jeżeli przyjmiemy prawo niezależności skutków, według którego każda siła wywołuje odpowiednie odkształcenie, niezależnie od działania innych sił, to każde wydłużenie i każde posunięcie się będzie sumą odkształceń tego samego rodzaju, wywołanych przez siły oddzielnie przyłożone. Wiążąc to prawo, zwane także prawem superpozycji (dołączenia do siebie) skutków, z zasadą Hook'a, prowadzącą do związku liniowego między jednym wydłużeniem i jednym natężeniem, dochodzimy do następującej zasady ogólnej: *aż do granicy sprężystości związki między odkształceniami i natężeniami wyrażają się przez funkcje liniowe.*

Wyrażeniem analitycznym tej zasady jest następujący układ równań:

$$(1) \quad \begin{cases} p_{11} = a_1 \lambda_1 + b_1 \lambda_2 + c_1 \lambda_3 + d_1 \varphi_1 + e_1 \varphi_2 + f_1 \varphi_3, \\ p_{22} = a_2 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 + c_2 \lambda_3 + d_2 \varphi_1 + e_2 \varphi_2 + f_2 \varphi_3, \\ p_{33} = a_3 \lambda_1 + b_3 \lambda_2 + c_3 \lambda_3 + d_3 \varphi_1 + e_3 \varphi_2 + f_3 \varphi_3, \\ p_{12} = a_4 \lambda_1 + b_4 \lambda_2 + c_4 \lambda_3 + d_4 \varphi_1 + e_4 \varphi_2 + f_4 \varphi_3, \\ p_{23} = a_5 \lambda_1 + b_5 \lambda_2 + c_5 \lambda_3 + d_5 \varphi_1 + e_5 \varphi_2 + f_5 \varphi_3, \\ p_{31} = a_6 \lambda_1 + b_6 \lambda_2 + c_6 \lambda_3 + d_6 \varphi_1 + e_6 \varphi_2 + f_6 \varphi_3, \end{cases}$$

w których współczynniki a, b, c, d, e, f zależą od natury fizycznej ciała sprężystego i sposobem doświadczalnym mają być wyznaczone. Zachowywanie się więc ciała sprężystego względem sił odkształcających wyrażamy ogólnie przez trzydzieści sześć współczynników, każdemu ciału właściwych.

Mając teraz p_{ik} wyrażone przez λ_i i φ_i , wyrażmy następnie λ_i i φ_i według art. 177-go przez pochodne trzech przesunięć u, v, w , i wstawmy te wartości w równania równowagi lub w równania ruchu; otrzymamy trzy równania różniczkowe między trzema przesunięciami, siłami, współrzędnymi i czasem, z których będziemy mogli obliczyć te trzy przesunięcia. Z tych przesunięć obliczymy następnie natężenia.

185. SPÓŁCZYNNIKI SPRĘŻYSTOŚCI. Zanim podamy równania różniczkowe między przesunięciami, siłami, współrzędnymi i czasem, określające równowagę lub ruch wewnętrzny ciała sprężystego, wyprowadzimy pewne własności współczynników równań (1) art. 184-go, które wynikają z rozważania pracy przygotowanej sił wewnętrznych.

Udzielmy ciału sprężystemu ruchu przygotowanego, i niech skutek tego ruchu współrzędne punktu $x + u, y + v, z + w$ przyrosną odpowiednio o $\delta u, \delta v, \delta w$. Ponieważ zaszło odkształcenie każdego elementu ciała, przeto siły zewnętrzne i siły wewnętrzne wytworzyły pracę przygotowaną. Suma prac siły $-p_{11} \cdot dy dz$ i siły $\left(p_{11} + \frac{\partial p_{11}}{\partial x} dx\right) dy dz$ wynosi $\delta u \cdot \frac{\partial p_{11}}{\partial x} dx dy dz$; siły $-p_{21} \cdot dz dx$ i $\left(p_{21} + \frac{\partial p_{21}}{\partial y} dy\right) dz dx$ zaś $\delta u \cdot \frac{\partial p_{21}}{\partial y} dx dy dz$; a siły $-p_{31} \cdot dx dy$

i $\left(p_{31} + \frac{\partial p_{31}}{\partial z} dz\right) dx dy$ wynosi $\delta u \cdot \frac{\partial p_{31}}{\partial z} dx dy dz$. Z innych sił wewnętrznych nie wynika praca ze względu na drogę δu , gdyż są prostopadłe do osi z . Suma więc prac sił wewnętrznych ze względu na drogę przygotowaną δu będzie dla elementu ciała $\delta u \left(\frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{21}}{\partial y} + \frac{\partial p_{31}}{\partial z}\right) dx dy dz$; podobne otrzymamy wyrażenia prac ze względu na drogi przygotowane δv i δw . Praca sił zewnętrznych elementu wynosi $(X \cdot \delta u + Y \cdot \delta v + Z \cdot \delta w) dx dy dz$. Dodając prace wszystkich sił elementu i biorąc całkę tej sumy dla całego ciała, otrzymamy następujące wyrażenie pracy przygotowanej $\delta \Pi$ wszystkich sił

$$(1) \quad \delta \Pi = \iiint \left\{ \delta u \left(\frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{21}}{\partial y} + \frac{\partial p_{31}}{\partial z} \right) + \delta v \left(\frac{\partial p_{12}}{\partial x} + \frac{\partial p_{22}}{\partial y} + \frac{\partial p_{32}}{\partial z} \right) + \right. \\ \left. + \delta w \left(\frac{\partial p_{13}}{\partial x} + \frac{\partial p_{23}}{\partial y} + \frac{\partial p_{33}}{\partial z} \right) \right\} dx dy dz + \\ + \iiint (X \cdot \delta u + Y \cdot \delta v + Z \cdot \delta w) dx dy dz,$$

co możemy krócej napisać

$$(2) \quad \delta \Pi = \delta U + \delta W,$$

oznaczając przez δU pracę sił wewnętrznych, a przez δW pracę sił zewnętrznych.

Każdy wyraz w δU możemy raz całkować częściowo. Całkując tym sposobem pierwszy wyraz względem x i zważając, że $\frac{\partial \delta u}{\partial x} = \delta \frac{\partial u}{\partial x}$, otrzymamy

$$\iiint \delta u \cdot \frac{\partial p_{11}}{\partial x} dx dy dz = \iint [p_{11} \cdot \delta u] dy dz - \\ - \iint \int p_{11} \cdot \delta \frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz.$$

Całkę podwójną po prawej stronie tego równania obliczymy (art. 122), rzucając powierzchnię ciała na płaszczyznę yz , obierając wewnątrz tego rzutu punkt (y, z) za wierzchołek prostokąta elementarnego o bokach dy i dz , prowadząc przez ten punkt prostą, równoległą do osi x , dla każdego punktu, w którym ta równoległa przecina powierzchnię ciała, obliczając iloczyn $p_{11} \delta u$, następnie zaś biorąc różnicę $[p_{11} \delta u]$ tych iloczynów dla każdej pary następujących po sobie punktów, i na koniec obliczając sumę $[p_{11} \delta u] dy dz$ dla całego pola rzutu ciała na płaszczyznę yz . Całkowanie potrójne po prawej stronie ostatniego równania rozciąga się na całą objętość ciała. Obierzmy na po-

wierzchni ciała element $d\omega$ i poprowadźmy w nim normalną zewnętrzną do téj powierzchni, i niech a, b, c oznaczają dostawy kierunkowe téj normalnej. Postępując podobnie, jak w art. 122-gim przy obliczaniu wzorów Gauss'a, otrzymamy

$$\iint [p_{11} \delta u] dy dz = \int a p_{11} \delta u d\omega.$$

Stosując to przekształcenie do wszystkich całek w δU , otrzymamy

$$\begin{aligned} \delta U = & \int \left\{ \delta u (ap_{11} + bp_{21} + cp_{31}) + \delta v (ap_{12} + bp_{22} + cp_{32}) + \right. \\ & + \delta w (ap_{13} + bp_{23} + cp_{33}) \left. \right\} d\omega - \iiint \left\{ p_{11} \delta \frac{\partial u}{\partial x} + p_{22} \delta \frac{\partial v}{\partial y} + \right. \\ & + p_{33} \delta \frac{\partial w}{\partial z} + p_{23} \delta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + p_{31} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \\ & \left. + p_{12} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} dx dy dz, \end{aligned}$$

czyli ze względu na równania (2) i (3) art. 177-go,

$$\begin{aligned} (3) \quad \delta U = & \int \left\{ \delta u (ap_{11} + bp_{21} + cp_{31}) + \delta v (ap_{12} + bp_{22} + cp_{32}) + \right. \\ & + \delta w (ap_{13} + bp_{23} + cp_{33}) \left. \right\} d\omega - \iiint (p_{11} \delta \lambda_1 + p_{22} \delta \lambda_2 + p_{33} \delta \lambda_3 + p_{23} \delta \varphi_1 + \\ & + p_{31} \delta \varphi_2 + p_{12} \delta \varphi_3) dx dy dz. \end{aligned}$$

Całka podwójna rozciąga się na powierzchnią ciała, a zatem odpowiednie natężenia mają być w niej brane ze względu na siły wiadome, przyłożone do powierzchni ciała; całka potrójna stosuje się do całej objętości ciała. Z równań (3) art. 183-go wynika, że całka podwójna w (3) wyraża pracę układu sił, przyłożonych do powierzchni ciała, że zatem całka potrójna w (3) wyraża pracę układu sił międzycząsteczkowych, pojawiających się wskutek odkształcenia. O układzie takich sił, które są funkcjami doskonałymi odległości dwu cząsteczek (art. 176), wiadomo z art. 82-go, że on posiada potencjał; powyższa zatem całka potrójna równa się wariacji potencjału sił międzycząsteczkowych. Jeżeli więc całka potrójna $\iiint F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) dx dy dz$

przedstawia ten potencjał, to z równania (3) wynika, że $p_{11} = \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}$, $p_{22} = -\frac{\partial F}{\partial \lambda_2}$, $p_{33} = \frac{\partial F}{\partial \lambda_3}$, $p_{23} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_1}$, $p_{31} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_2}$, $p_{12} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_3}$. Ponieważ natężenia p_{ik} są funkcjami jednorodnymi i liniowymi wielkości λ_i, φ_i , przeto F jest funkcją jednorodną stopnia 2-go tych wielkości. Potencjał układu sił międzycząsteczkowych wyraża się przez funkcją jednorodną stopnia 2-go wydłużenia i posunięcia, a natężenia są pochodnymi cząstkowymi téj funkcyi.

Funkcja F zawiera sześć kwadratów argumentów λ_i, φ_i , tudzież piętnaście iloczynów tychże argumentów po dwa, razem tedy dwadzieścia jeden wyrazów o tyluż współczynnikach. Ponieważ téżsame współczynniki wchodzą w równania (1) art. 184-go, przeto widzimy, że zachowywanie się ciała sprężystego względem sił odkształcających daje się określić wogólności przez 21 współczynników, że zatył między 36 współczynnikami a, b, c, d, e, f art. 184-go zachodzi w ogólności 15 związków, niezależnych od natury ciała. Te związki są, jak wiadomo:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_i \partial \lambda_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_k \partial \lambda_i}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_i \partial \varphi_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi_k \partial \lambda_i}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi_i \partial \varphi_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi_k \partial \varphi_i}.$$

186. CIAŁA RÓWNOKIERUNKOWE. Podana ilość współczynników zmniejsza się znacznie dla ciał, których cząsteczki są ułożone symetrycznie względem pewnych płaszczyzn lub prostych. Aby to okazać, zmieńmy na chwilę znakowanie, kładąc zamiast $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ odpowiednio $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6$; funkcję F możemy napisać w kształcie

$$(1) \quad F = \Sigma (a_{ii} \xi_i^2 + 2 a_{ik} \xi_i \xi_k); \quad i, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Przypuśćmy, że w elemencie ciała, zawierającym punkt m , ułożone są cząsteczki symetrycznie względem płaszczyzny yz , przez ten punkt przechodzącej. Wtedy nie zmieniają się związki między p i λ , jeżeli osi x nadamy kierunek przeciwny, nie zmieniając osi y i z ; a zatył funkcja F pozostanie także niezmienną. Ponieważ x i u wskutek téj zmiany znaki swe zmienia, przeto φ_2 i φ_3 również zmieniają znaki, a reszta argumentów zostanie ta sama. Żeby zatył funkcja F nie zmieniła się, muszą być równe zeru te współczynniki a_{ik} , dla których wskaźnik $i \geq 5$ lub 6, zaś wskaźnik $k = 5$ lub 6, a więc $a_{15} = 0, a_{25} = 0, a_{35} = 0, a_{45} = 0, a_{16} = 0, a_{26} = 0, a_{36} = 0, a_{46} = 0$. Pozostaje więc w téj funkcji tylko 13 współczynników. Jeżeli zachodzi nadto symetria względem płaszczyzny zx , to będzie jeszcze $a_{14} = 0, a_{24} = 0, a_{34} = 0, a_{56} = 0$, a F posiadać będzie tylko 9 współczynników; wstawiając przeto ponownie λ i φ , mieć będziemy

$$(2) \quad F = a_{11} \lambda_1^2 + a_{22} \lambda_2^2 + a_{33} \lambda_3^2 + a_{44} \varphi_1^2 + a_{55} \varphi_2^2 + a_{66} \varphi_3^2 + 2 a_{12} \lambda_1 \lambda_2 + \\ + 2 a_{23} \lambda_2 \lambda_3 + 2 a_{31} \lambda_3 \lambda_1.$$

Z tego wyrażenia widzimy, że układ cząsteczek jest symetryczny względem płaszczyzny xy .

Z równania (2) otrzymamy dla takiego układu cząsteczek

$$(3) \quad p_{11} = 2(a_{11} \lambda_1 + a_{12} \lambda_2 + a_{13} \lambda_3), \quad p_{22} = 2(a_{12} \lambda_1 + a_{22} \lambda_2 + a_{23} \lambda_3), \\ p_{33} = 2(a_{13} \lambda_1 + a_{23} \lambda_2 + a_{33} \lambda_3), \quad p_{23} = a_{44} \varphi_1, \quad p_{31} = a_{55} \varphi_2, \quad p_{12} = a_{66} \varphi_3.$$

Przypuśćmy nadto, że zachodzi symetria w układzie cząsteczek względem osi x . Wtedy nie zmieni się funkcja F , jeżeli obrócimy osi y i z około osi x i wstawimy w (2) nowe argumenty, tym sposobem otrzymane. Gdy obrócimy osi y i z o bardzo mały kąt ϵ , to dostawy ich nowych kierunków y' i z' będą odpowiednio $(0, 1, \epsilon)$ i $(0, -\epsilon, 1)$, jeżeli pominiemy ϵ^2 i potęgi wyższe.

Oznaczając krótką u góry odpowiednie tym kierunkom argumenty λ i φ , otrzymamy z równań (4) i (5) art. 178-go,

$$\lambda_1' = \lambda_1, \lambda_2' = \lambda_2 + \varepsilon \varphi_1, \lambda_3' = \lambda_3 - \varepsilon \varphi_1, \varphi_1' = \varphi_1 + 2\varepsilon(\lambda_3 - \lambda_2), \varphi_2' = \varphi_2 - \varepsilon \varphi_3, \\ \varphi_3' = \varphi_3 + \varepsilon \varphi_2.$$

Z tych równań wynika

$$\lambda_1 = \lambda_1', \lambda_2 = \lambda_2' - \varepsilon \varphi_1', \lambda_3 = \lambda_3' + \varepsilon \varphi_1', \varphi_1 = \varphi_1' + 2\varepsilon(\lambda_2' - \lambda_3'), \varphi_2 = \varphi_2' + \varepsilon \varphi_3', \\ \varphi_3 = \varphi_3' - \varepsilon \varphi_2'.$$

Wstawiając te wartości w (2), mieć będziemy

$$F = a_{11} \lambda_1'^2 + a_{22} \lambda_2'^2 + a_{33} \lambda_3'^2 + a_{44} \varphi_1'^2 + a_{55} \varphi_2'^2 + a_{66} \varphi_3'^2 + 2a_{12} \lambda_1' \lambda_2' + \\ + 2a_{23} \lambda_2' \lambda_3' + 2a_{31} \lambda_3' \lambda_1' - 2\varepsilon(a_{12} - a_{13}) \lambda_1' \varphi_1' - 2\varepsilon(a_{22} - 2a_{44} - a_{23}) \lambda_2' \varphi_1' + \\ + 2\varepsilon(a_{33} - 2a_{44} - a_{23}) \lambda_3' \varphi_1' + 2\varepsilon(a_{55} - a_{66}) \varphi_2' \varphi_3'.$$

Ponieważ funkcja F nie zmieni się, przeto współczynniki ostatnich czterech wyrazów są równe zeru, więc

$$a_{22} = a_{33} = a_{23} + 2a_{44}, \quad a_{55} = a_{66}, \quad a_{12} = a_{13}, \quad \text{a zatem}$$

$$(4) \quad F = a_{11} \lambda_1^2 + (a_{23} + 2a_{44})(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) + a_{44} \varphi_1^2 + a_{55}(\varphi_2^2 + \varphi_3^2) + \\ + 2a_{12} \lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3) + 2a_{23} \lambda_2 \lambda_3.$$

Prostą $m x$ nazywamy w tym przypadku osią sprężystości ciała. Żeby jeszcze oś y była osią sprężystości ciała, potrzeba, aby $a_{11} = a_{23} + 2a_{44} = = a_{12} + 2a_{55}$, $a_{44} = a_{55}$, $a_{12} = a_{23}$; będzie więc

$$(5) \quad F = a_{11}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) + a_{44}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2) + \\ + 2(a_{11} - 2a_{44})(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1),$$

czyli

$$(6) \quad F = a_{11}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 + a_{44}[\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 - 4(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1)].$$

Niech pierwotne osi x, y, z mają kierunki wydłużeń głównych, i wystawmy w m trzy dowolne osi prostokątne x'', y'', z'' , których dostawy kierunkowe niech będą odpowiednio $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2, 3$. Jeżeli $\lambda_1'', \lambda_2'', \lambda_3'', \varphi_1'', \varphi_2'', \varphi_3''$ odnoszą się do tych osi, to będzie według (4) i (5) art. 178-go,

$$\lambda_1'' = a_1^2 \lambda_1 + b_1^2 \lambda_2 + c_1^2 \lambda_3, \lambda_2'' = a_2^2 \lambda_1 + b_2^2 \lambda_2 + c_2^2 \lambda_3, \lambda_3'' = a_3^2 \lambda_1 + \\ + b_3^2 \lambda_2 + c_3^2 \lambda_3, \varphi_1'' = 2(a_1 a_2 \lambda_1 + b_1 b_2 \lambda_2 + c_1 c_2 \lambda_3), \varphi_2'' = 2(a_2 a_3 \lambda_1 + \\ + b_2 b_3 \lambda_2 + c_2 c_3 \lambda_3), \varphi_3'' = 2(a_3 a_1 \lambda_1 + b_3 b_1 \lambda_2 + c_3 c_1 \lambda_3).$$

Otrzymamy zatem, uwzględniając wiadome związki między dostawami kierunkowymi osi x'', y'', z'' ,

$$\lambda_1'' + \lambda_2'' + \lambda_3'' = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ \varphi_1''^2 + \varphi_2''^2 + \varphi_3''^2 - 4(\lambda_1'' \lambda_2'' + \lambda_2'' \lambda_3'' + \lambda_3'' \lambda_1'') = -4(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1),$$

z czego się okazuje, że funkcja F , określona przez równanie (6), pozostaje tą samą dla każdego układu prostokątnych osi współrzędnych. Jeżeli ta własność zachodzi w każdym punkcie ciała, natenczas ciało posiada tę samą sprężystość we wszystkich kierunkach około każdego punktu. Takie ciało nazy-

wamy według Cauchy'ego równokierunkowym (isotrop) i o sprężystości stałej. Do określenia związków między natężeniami a odkształceniami ciała równokierunkowego o sprężystości stałej potrzeba i wystarcza znać dwa współczynniki, któreśmy oznaczyli przez a_{11} i a_{44} . Funkcja (5) lub (6), pozwalająca obliczyć potencjał sił wewnętrznych takiego ciała, nie zależy od kierunków osi współrzędnych.

Biorąc pochodne cząstkowe funkcji F względem jej argumentów, otrzymamy dla ciał równokierunkowych o sprężystości stałej

$$(7) \quad \begin{cases} p_{11} = 2[a_{11}\lambda_1 + (a_{11} - 2a_{44})(\lambda_2 + \lambda_3)], & p_{23} = 2a_{44}\varphi_1, \\ p_{22} = 2[a_{11}\lambda_2 + (a_{11} - 2a_{44})(\lambda_3 + \lambda_1)], & p_{31} = 2a_{44}\varphi_2, \\ p_{33} = 2[a_{11}\lambda_3 + (a_{11} - 2a_{44})(\lambda_1 + \lambda_2)], & p_{12} = 2a_{44}\varphi_3. \end{cases}$$

Rozwiążmy pierwsze trzy równania względem $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; otrzymamy

$$(8) \quad \lambda_1 = \frac{1}{a_{44}(3a_{11} - 4a_{44})} \left[\frac{a_{11} - a_{44}}{2} p_{11} - \frac{a_{11} - 2a_{44}}{4} (p_{22} + p_{33}) \right],$$

a przez przestawienie kołowe wskaźników obliczymy λ_2 i λ_3 . Wprowadźmy

$$(9) \quad \frac{a_{11} - a_{44}}{2a_{44}(3a_{11} - 4a_{44})} = \frac{1}{E}, \quad \frac{a_{11} - 2a_{44}}{4a_{44}(3a_{11} - 4a_{44})} = \frac{\mu}{E},$$

gdzie E i μ oznaczają dwa nowe współczynniki; wówczas będzie

$$(10) \quad a_{11} = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{1-\mu}{1-2\mu}, \quad a_{44} = \frac{E}{4(1+\mu)},$$

a wstawiwszy te wartości w (7) i (8), mieć będziemy

$$(11) \quad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{E} [p_{11} - \mu(p_{22} + p_{33})], & \varphi_1 = \frac{2(1+\mu)}{E} p_{23}, \\ \lambda_2 = \frac{1}{E} [p_{22} - \mu(p_{33} + p_{11})], & \varphi_2 = \frac{2(1+\mu)}{E} p_{31}, \\ \lambda_3 = \frac{1}{E} [p_{33} - \mu(p_{11} + p_{22})], & \varphi_3 = \frac{2(1+\mu)}{E} p_{12}; \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} p_{11} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\lambda_1 + \mu(\lambda_2 + \lambda_3)], & p_{23} = \frac{E}{2(1+\mu)} \varphi_1, \\ p_{22} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\lambda_2 + \mu(\lambda_3 + \lambda_1)], & p_{31} = \frac{E}{2(1+\mu)} \varphi_2, \\ p_{33} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\lambda_3 + \mu(\lambda_1 + \lambda_2)], & p_{12} = \frac{E}{2(1+\mu)} \varphi_3; \end{cases}$$

$$(13) \quad F = \frac{E}{2(1+\mu)} \left\{ \frac{1-\mu}{1-2\mu} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} [\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 - 4(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)] \right\}.$$

Równania (11), (12) i (13) dają związki między p , λ i φ dla ciał równokierunkowych o sprężystości stałej, wyrażone przez dwa współczynniki E i μ . Ponieważ dla $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ jest także $p_{23} = 0$, $p_{31} = 0$, $p_{12} = 0$,

przeto w ciele równokierunkowym o sprężystości stałej kierunki wydłużeń głównych są zarazem kierunkami nateżeń głównych. Osi elipsojdy odkształcenia i osi elipsojdy nateżenia mają więc téżsame kierunki.

187. RÓWNANIA RUCHU I RÓWNANIA RÓWNOWAGI CIAŁ RÓWNOKIERUNKOWYCH. Wyrażmy w równaniach (12) wydłużenia i posunięcia się przez pochodne cząstkowe przesunięć u, v, w względem x, y, z (art. 177), wstawmy tak przekształcone wartości nateżeń w równaniach (4) art. 183-go, i przyjmijmy, jak poprzednio, $\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$, gdzie Δ oznacza stosunek zmiany objętości elementu do jego objętości pierwotnej; otrzymamy po uproszczeniach następujące równania ruchu wewnętrznego ciał równokierunkowych o sprężystości stałej:

$$(1) \quad \begin{cases} \sigma \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X + \frac{E}{2(1+\mu)} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\mu} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial x} \right\}, \\ \sigma \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = Y + \frac{E}{2(1+\mu)} \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\mu} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial y} \right\}, \\ \sigma \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Z + \frac{E}{2(1+\mu)} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\mu} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial z} \right\}. \end{cases}$$

Jeżeli utworzymy równania, czyniąc równymi zeru lewe strony powyższych równań, to mieć będziemy równania równowagi elementu takiego ciała. Warunki krańcowe, oile one zależą od wiadomych sił zewnętrznych na powierzchni ciała, są, jak wiadomo:

$$(2) \quad ap = ap_{11} + bp_{21} + cp_{31}, \quad \beta p = ap_{12} + bp_{22} + cp_{32}, \quad \gamma p = ap_{13} + bp_{23} + cp_{33},$$

gdzie litery mają znaczenie takie, jak w art. 183-im.

Rozwiązanie zagadnienia o równowadze lub o ruchu ciała sprężystego, które posiada wymiary skończone, polega na całkowaniu powyższych równań. Chociaż nie znamy obecnie metody ogólnej do wyznaczenia rozwiązań ogólnych tych równań, możemy przecież z samego kształtu tych równań podać pewne własności ogólne ich rozwiązań, które stosują się do ruchów wewnętrznych przy działaniu sił, niezależnych od czasu.

Założmy, że siły X, Y, Z są tylko funkcjami spółrzędnych x, y, z punktu uważanego, i wyznaczmy takie trzy funkcyjje u', v', w' tych spółrzędnych, żeby dla każdego punktu

$$(3) \quad 0 = X + \frac{E}{2(1+\mu)} \left\{ \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\mu} \cdot \frac{\partial \Delta'}{\partial x} \right\}$$

i podobne istniały związki dla v' i w' , w którychto trzech związkach, $\Delta' = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z}$. Wielkości u', v', w' będą wtedy oznaczały przesunięcia, jakich punkt x, y, z doznaje, jeżeli po przyłożeniu danych sił ciało sprężyste przychodzi do równowagi, licząc te przesunięcia od stanu naturalnego ciała. Żeby te przesunięcia były dokładnie oznaczone, poddajemy je nadto warunkom krań-

cowym (2), oznaczając odpowiednie natężenia przez p_{ik}' . Niech teraz w ciele sprężystym przy działaniu tychże samych sił zachodzi ruch wewnętrzny, i nadajmy przesunięciom u, v, w , liczonym znowu od stanu naturalnego, następujące wartości:

$$(4) \quad u = u' + u'', \quad v = v' + v'', \quad w = w' + w'';$$

z równań (1) i (3), tudzież z warunków krańcowych (2) okazuje się, że

$$(5) \quad \sigma \cdot \frac{\partial^2 u''}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\mu)} \left\{ \frac{\partial^2 u''}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u''}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u''}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\mu} \cdot \frac{\partial \Delta''}{\partial x} \right\}$$

i że podobne zachodzą związki dla v'' i w'' , gdzie $\Delta'' = \frac{\partial u''}{\partial x} + \frac{\partial v''}{\partial y} + \frac{\partial w''}{\partial z}$. Odpowiednie warunki krańcowe będą

$$(6) \quad ap_{11}'' + bp_{21}'' + cp_{31}'' = 0, \quad ap_{12}'' + bp_{22}'' + cp_{32}'' = 0, \quad ap_{13}'' + bp_{23}'' + cp_{33}'' = 0,$$

$$(7) \quad p_{ik} = p_{ik}' + p_{ik}''.$$

Wielkości u'', v'', w'' oznaczają przesunięcia punktu x, y, z z położenia równowagi, a ponieważ do ich wyznaczenia, jak widać z (5) i (6), prowadzą równania (1) i (2), gdy w nich przyjmiemy $X=0, Y=0, Z=0, p=0$, przeto mamy następujące twierdzenie, stosujące się przedewszystkiem do drgania ciała sprężystego: *drganie ciała sprężystego około położenia równowagi, odpowiedniego siłom przyłożonym, odbywa się tak, jak drganie tego ciała około położenia naturalnego, jeżeli żadna siła nie działa na to ciało.* To więc ważne twierdzenie pozwala zagadnienie o drganiu ciała sprężystego podzielić na dwie części: szukamy naprzód położenia równowagi każdego punktu przy danych siłach, skąd otrzymamy u', v', w', p_{ik}' , a następnie wyznaczamy drganie bez spółdziału sił, z czego wynika u'', v'', w'', p_{ik}'' . Dodawszy odpowiednio do siebie te wielkości według (4) i (7), otrzymamy niewiadome u, v, w i p . —

Rozwiązania ogólne równań równowagi, które otrzymujemy z równań (1), przyrównyując do zera ich lewe strony, mają także pewien kształt właściwy, cechujący tę równowagę. Gdy bowiem założymy, że u_1, v_1, w_1 są rozwiązaniami szczególnymi tych równań, to łatwo już będziemy mogli okazać, że ich rozwiązania ogólne wyrażają się przez następujące funkcje:

$$(8) \quad u = u_1 + c_2 z - c_3 y + C_1, \quad v = v_1 + c_3 x - c_1 z + C_2, \quad w = w_1 + c_1 y - c_2 x + C_3,$$

w których C_i i c_i oznaczają wielkości stałe. Jakoż, widzimy, że drugie pochodne cząstkowe funkcji u, v, w względem spółrzędnych mają te same wartości, co odpowiednie pochodne funkcji u_1, v_1, w_1 względem tych spółrzędnych; tudzież, że

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}.$$

Funkcje u, v, w są więc rozwiązaniami równań równowagi, a ponieważ mają odpowiednią ilość stałych dowolnych, przeto są rozwiązaniami ogólnymi tych równań.

Ponieważ u, v, w są bardzo małe dla każdego punktu ciała, przeto stałe C_i i c_i posiadają bardzo małe wartości. Z tego okazuje się (art. 24), że wyrażenia $c_2z - c_3y + C_1, c_3x - c_1z + C_2, c_1y - c_2x + C_3$ przedstawiają odpowiednie drogi, któreby punkt (x, y, z) ciała sprężystego opisywał w kierunkach osi współrzędnych, gdybyśmy to ciało uczynili sztywnym i udzielili mu w kierunkach osi współrzędnych odpowiednio bardzo małych ruchów postępowych C_1, C_2, C_3 i obrócili to ciało około tychże osi odpowiednio o bardzo małe kąty c_1, c_2, c_3 . Z tego wynika, że przesunięcia u, v, w dają się z równań równowagi tylko tak obliczyć, że ciało sprężyste może się jeszcze w przestrzeni poruszać przy sztywnym połączeniu jego punktów. Jeżeli przeto położenie równowagi takiego ciała ma być w zupełności wiadome, to musimy znać jeszcze 6 warunków, pozwalających obliczyć 6 stałych C_i, c_i . *Zagadnienia o równowadze ciał sprężystych dają się w zupełności rozwiązać, jeżeli oprócz warunków, właściwych każdemu takiemu zagadnieniu, znamy jeszcze sześć warunków, określających położenie takich ciał, uważanych za sztywne.*

Powiedzieliśmy, że nie znamy metody ogólnej całkowania równań równowagi lub równań ruchu ciał sprężystych. Nie pozostaje więc nic innego, jak w każdym zagadnieniu przyjmować wartości pewnych niewiadomych, bądźto natężeń bądź też przesunięć, polegając przytym na doświadczeniu, wstawiać następnie te wartości w odpowiednie równania i obliczać resztę niewiadomych. O ile takie postępowanie daje wypadki, zgodne z doświadczeniem, to okażemy w następujących zagadnieniach.

188. WYCIĄGANIE GRANIASTOSŁUPA LUB WALCA. Niech będzie dany graniastosłup lub walec, którego podstawą jest jakakolwiek linia krzywa. Przyjmijmy, że jedna podstawa A walca jest utwierdzona, a na drugą podstawę równoległą B działają w kierunku tworzących walca siły rozciągające, jednostajnie na nią rozdzielone, przyczym na jednostkę pola tej podstawy przypada siła p . Niech zresztą żadne inne siły nie działają ani na powierzchnię ani na masę walca; pomijamy więc działanie siły ciężkości. Prosta, łącząca środki masy obudwu podstaw, którą nazwiemy osią walca, niech będzie osią x ; środek masy podstawy A niech będzie początkiem x -ów, a kierunek od A ku środkowi masy podstawy B niech będzie kierunkiem dodatnich x -ów; osi y -ów i z -ów przyjmujemy prostopadle do osi x . Ponieważ siły zewnętrzne mają być z sobą w równowadze, przeto utwierdzenie podstawy A należy zastąpić siłą, przyłożoną do jej środka masy i mającą kierunek ujemnych x -ów, która na jednostkę pola A ma natężenie p . Jeżeli po odkształceniu zachodzić będzie równowaga każdego elementu walca, to otrzymamy równania

$$(1) \quad \frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{21}}{\partial y} + \frac{\partial p_{31}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p_{12}}{\partial x} + \frac{\partial p_{22}}{\partial y} + \frac{\partial p_{32}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p_{13}}{\partial x} + \frac{\partial p_{23}}{\partial y} + \frac{\partial p_{33}}{\partial z} = 0,$$

ponieważ $X = 0, Y = 0, Z = 0$. Warunki krańcowe są (art. 183):

- a) dla podstawy A, czyli dla $x = 0$,
- 2) $a = -1, b = 0, c = 0; \alpha = -1, \beta = 0, \gamma = 0$, natężenie $= p$;

- b) dla podstawy B, czyli dla $x = L$, gdzie L jest długością walca,
 (3) $a = 1, b = 0, c = 0; \alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0$, natężenie $= p$;
 c) dla każdego punktu na powierzchni bocznej walca mamy $a = 0, p = 0$.
 Równaniom (1), tudzież warunkom krańcowym czynią zadość następujące funkcje:

$$(4) \quad p_{11} = p, p_{22} = 0, p_{33} = 0, p_{23} = 0, p_{31} = 0, p_{12} = 0.$$

Wstawiwszy te wartości w równania (11) art. 186-go, mieć będziemy

$$(5) \quad \lambda_1 = \frac{p}{E}, \lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{\mu}{E}p, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \varphi_3 = 0.$$

Okazuje się więc, że walec wydłuża się w kierunku siły, a skraca czyli zwęża się w każdym kierunku, prostopadłym do siły. Ponieważ λ_1 jest stałe, przeto wydłużenie walca jest jednostajne, to znaczy, że każda n -ta część jego długości wydłuża się o n -tą część całego wydłużenia. Gdy przez l oznaczymy całkowite wydłużenie, otrzymamy

$$(6) \quad \lambda_1 = \frac{l}{L} = \frac{p}{E},$$

a jeżeli P oznacza siłę wyciągającą, F pole podstawy, to z założenia mamy $P = pF$, a zatem

$$(7) \quad \frac{l}{L} = \frac{P}{F E}, \text{ skąd wynika } l = \frac{P \cdot L}{F \cdot E}.$$

Ten wzór wyraża zasadę Hook'a w najprostszym przypadku wyciągania prętów, i zgadza się w zupełności z wynikami doświadczenia. Według niego całkowite wydłużenie jest proporcjonalne względem siły i długości, a odwrotnie proporcjonalne względem pola przekroju pręta, nadto zależy wydłużenie od materiału pręta, co wyrażamy przez współczynnik E . Znaczenie tego współczynnika okazuje się z równania (6), mamy bowiem $E = \frac{p}{\lambda_1}$, ten więc współczynnik wyraża stosunek natężenia, czyli siły na jednostkę przekroju, do wydłużenia jednostki długości. Przyjmijmy $p = 1$, to będzie $E = \frac{1}{\lambda_1}$, a zatem ten współczynnik równa się także odwrotności wydłużenia, jakiego doznaje jednostka długości pręta, jeżeli na jednostkę przekroju działa siła wyciągająca równa jednostce. Tak określony współczynnik E nazywamy współczynnikiem czyli modulem sprężystości (w ściślejszym znaczeniu) materiału równokierunkowego, z którego pręt sporządzono. Liczebna wartość tego współczynnika zależy od miary siły i miary długości; przyjmując kilogram za jednostkę siły, centymetr za jednostkę długości, mamy np. dla żelaza kutego $E = 2,000,000$, to znaczy, że pręt żelazny o przekroju jednego centymetra kwadratowego, wyciągany siłą jednego kilograma, wydłuża się o $\frac{1}{2000000}$ część swjej długości.

Z równań (5) wynika $\lambda_2 = \lambda_3 = -\mu\lambda_1$; współczynnik μ oznacza więc stosunek zwężenia (kontrakcji) pręta w kierunku, prostopadłym do siły, do wydłużenia w kierunku siły. Nazywamy go z tego powodu współczynnikiem zwężenia (kontrakcji) materiału pręta. Uważajmy w przecie sześciąt o krawędzi równej jednostce, którego ściany są równoległe do płaszczyzn współrzędnych; objętość jego zmienia się według równania (4) art. 177-go o

$$(8) \quad \Delta = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = (1 - 2\mu)\lambda_1 = (1 - 2\mu)\frac{p}{E}.$$

Doświadczenia okazują, że objętość pręta zwiększa się przez wyciąganie, że przeto $\Delta > 0$, z czego wynika, że $\mu < \frac{1}{2}$.

Mamy jeszcze z równań (5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{p}{E}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\mu}{E}p, \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Rozwiązaniami ogólnymi tych równań są następujące funkcje:

$$\begin{aligned} u &= \frac{p}{E}x + c_2z - c_3y + C_1, \\ v &= -\frac{\mu p}{E}y + c_3x - c_1z + C_2, \\ w &= -\frac{\mu p}{E}z + c_1y - c_2x + C_3, \end{aligned}$$

w których c_i , C_i oznaczają stałe. Wartości tych stałych wynikają z warunków utwierdzenia pręta, gdy pręt uważamy za ciało sztywne. Utwierdzamy naprzód punkt A; mamy więc warunki $u=0$, $v=0$, $w=0$, dla $x=0$, $y=0$, $z=0$, a zatem $C_1=0$, $C_2=0$, $C_3=0$. Następnie mamy znieść obrót około każdej prostej, przez punkt A przechodzącej, który daje się rozłożyć na obrót około prostej, leżącej na płaszczyźnie yz , i na obrót około osi x . Wskutek pierwszego obrotu opisuje punkt o współrzędnych $(0, dy, dz)$ w kierunku osi x drogę $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 dz$, gdzie wskaźnik 0 oznacza wartości pochodnych w punkcie $x=0$, $y=0$; żeby przeto ten obrót był niemożliwym, potrzeba aby $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = 0$, $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 = 0$, skąd wynika $c_3=0$, $c_2=0$. Wskutek drugiego obrotu posuwa się punkt $(0, 0, dz)$, obrany na osi z , o długość $\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 dz$ w kierunku osi y ; żeby znieść ten ruch, potrzeba więc, aby $\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 = 0$, a zatem $c_1=0$. Mamy więc

$$(9) \quad u = \frac{p}{E}x, \quad v = -\frac{\mu p}{E}y, \quad w = -\frac{\mu p}{E}z,$$

jako przesunięcia dowolnego punktu (x, y, z) pręta wyciąganego. Że te przesunięcia byłyby niemożliwe przy sztywności pręta, okazuje się z porównania powyższych wzorów z równaniami (1) art 24-go.

Niech pręt będzie wyciągany w kierunku pionowym i uwzględnijmy siłę ciężkości. Oznaczmy przez σ gęstość pręta, mamy $X = \sigma g$, $Y = 0$, $Z = 0$, a więc zamiast pierwszego równania (1) następujące równanie równowagi:

$\frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{21}}{\partial y} + \frac{\partial p_{31}}{\partial z} + \sigma g = 0$; dwa inne równania zostają niezmiennymi, jak również warunki na powierzchni. Będzie więc $p_{11} = C - \sigma g x$, a ponieważ dla $x = L$, $p_{11} = p$, przeto $C = p + \sigma g L$, wskutek czego

$$(10) \quad p_{11} = p + \sigma g (L - x), \quad p_{22} = 0, \quad p_{33} = 0, \quad p_{23} = 0, \quad p_{31} = 0, \quad p_{12} = 0.$$

Natężenie jest funkcją liniową x , a dla $x = 0$, czyli dla podstawy utwierdzonej, będzie największe $p_{11} = p + \sigma g L$. Cały przyrost natężenia od podstawy swobodnej B do utwierdzonej A równa się ciężarowi słupa, wyciętego z pręta, którego podstawa jest równa jednostce. Wydłużenie w kierunku osi x przestaje być stałym. Mamy prócz tego

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E} [p + \sigma g (L - x)], \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\mu}{E} [p + \sigma g (L - x)], \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{aligned}$$

skąd wynika przy uwzględnieniu warunków utwierdzenia:

$$(11) \quad \begin{aligned} u &= \frac{1}{E} \left[(p + \sigma g L) x - \frac{\sigma g x^2}{2} - \frac{\mu \sigma g}{2} (y^2 + z^2) \right], \\ v &= -\frac{\mu}{E} [p y + \sigma g (L - x) y], \quad w = -\frac{\mu}{E} [p z + \sigma g (L - x) z]. \end{aligned}$$

Jeżeli pręt jest ściskany w kierunku osi, to należy w powyższych wzorach brać $-p$ zamiast p .

189. SKRĘCENIE WALCA. Niech środki masy wszystkich przekrojów walca znajdują się na jego osi (art. 188) i nazwijmy te punkty, w których prosta, równoległa do osi walca, przecina dwa przekroje, prostopadłe do osi punktami odpowiednimi tychże przekrojów. Jeżeli przesunięcia punktów odpowiednich dwu przekrojów, rozważane na płaszczyznach tych przekrojów w kierunku prostopadłym do osi walca, różnią się od siebie tylko obrotem około tej osi, a kąt tego obrotu jest ten sam dla punktów tego samego przekroju, wtedy odkształcenie walca nazywamy skręceniem. Przesunięcia dwu punktów odpowiednich w kierunku osi walca mogą być przytym nierówne między sobą, a przekroje płaskie walca mogą się skrzywiać.

Obierzmy znowu oś walca za oś x , środek masy A przekroju utwierdzonego za początek, osi y i z na tym przekroju. Rozważajmy dwa przekroje w odległościach x i $x + dx$ od A, i niech ten drugi przekrój obraca się względem 1-go o nieskończenie mały kąt θdx około osi x w kierunku od y ku z ; wtedy punkt (y, z) na przekroju $x + dx$ przesunie się w kierunkach osi y i z