

obrotem wypadkowym obrotu na początku tego elementu czasu i nieskończenie małego obrotu, który siły odśrodkowe wywołują. Ponieważ oś tego ostatniego obrotu jest prostopadła do  $G$ , przeto rzut prędkości  $\omega$  na kierunek tego momentu jest stały. Jeżeli ciało ma się ciągle obracać około tej samej osi, to  $\Gamma = 0$ , a zatem, gdy  $A$ ,  $B$  i  $C$  są nierówne, dwie prędkości z pomiędzy trzech  $p$ ,  $q$  i  $r$  są równe zeru, więc ową oś obrotu jest jedna z osi bezwładności.

**153. POŁODYJA I HERPOŁODYJA.** Elipsojda bezwładności, kręcąc się około środka, jest styczna do płaszczyzny niezmiennej w coraz innym punkcie swjej powierzchni, a więc i w coraz innym punkcie owej płaszczyzny. Punkt  $s$ , w którym owa elipsojda jest styczna do płaszczyzny niezmiennej, nazywamy biegunem chwilowym obrotu; owóż należy rozważyć dwie linie krzywe, z których pierwsza jest miejscem geometrycznym tego bieguna na elipsojdzie, druga zaś jego miejscem geometrycznym na płaszczyźnie niezmiennej. Według Poinso't nazywamy pierwszą krzywą polodyją, drugą zaś herpolodyją ruchu rozważanego. Oznaczmy pierwszą przez  $(s)$ , drugą przez  $(\sigma)$ . Polodyja jest linią skośną, herpolodyja płaską i mają spólny punkt  $s$ . Stożek o wierzchołku  $O$  a kierownicy  $(\sigma)$ , przedstawia stożek centralny w przestrzeni, a stożek o tymże wierzchołku a kierownicy  $(s)$ , jest stożkiem centralnym w kręcącym się ciele (art. 48).

Przyjmijmy  $A = 1 : a^2$ ,  $B = 1 : b^2$ ,  $C = 1 : c^2$ ; wtedy  $a$ ,  $b$ ,  $c$  oznaczają połowy osi głównych elipsojdy bezwładności; więc  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  jest równaniem tej elipsojdy. Aby otrzymać równania polodyi, prowadźmy do tej elipsojdy płaszczyzny styczne w stałej odległości  $h$  od środka i szukajmy miejsca geometrycznego punktu styczności  $(x_1, y_1, z_1)$  na elipsojdzie. Ponieważ  $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1$  jest równaniem płaszczyzny stycznej, przeto polodyja jest określona przez następujące dwa równania

$$(1) \quad h^2 \left( \frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4} \right) = 1, \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1.$$

Rugując stąd kolejno  $x_1^2$ ,  $y_1^2$  i  $z_1^2$  otrzymamy równania rzutów polodyi na płaszczyzny główne elipsojdy

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{a^2 - b^2}{b^4} y_1^2 + \frac{a^2 - c^2}{c^4} z_1^2 = \frac{a^2 - h^2}{h^2}, \\ \frac{b^2 - c^2}{c^4} z_1^2 + \frac{b^2 - a^2}{a^4} x_1^2 = \frac{b^2 - h^2}{h^2}, \\ \frac{c^2 - a^2}{a^4} x_1^2 + \frac{c^2 - b^2}{b^4} y_1^2 = \frac{c^2 - h^2}{h^2}. \end{cases}$$

Niech  $A > B > C$ ; wtedy  $a < b < c$ , oś  $x$  będzie przeto najkrótszą, oś  $z$  najdłuższą osią elipsojdy. Żeby płaszczyzna była styczna do elipsojdy, potrzeba, aby  $a < h < c$ . Przy badaniu kształtu polodyi należy rozróżnić 3 przypadki, według tego, czy  $h > b$ ,  $h = b$ ,  $h < b$ .

Z równań (2) okazuje się, że rzut polodyi na płaszczyznę  $yz$  jest elipsą, której osi mają kierunki odpowiednich osi bezwładności; stosunek wzajemny tychże osi zależy tylko od momentów bezwładności ciała. Równanie trzecie okazuje, że rzut polodyi na płaszczyznę  $xy$  jest także elipsą. Z równania drugiego wynika, że przy  $h > b$  rzut polodyi na płaszczyznę  $zx$  jest hiperbolą, której oś sprzężona ma kierunek osi  $x$ ; przy  $h < b$  ten rzut jest hiperbolą, której oś sprzężona ma kierunek osi  $z$ ; na koniec przy  $h = b$  otrzymamy jako rzut dwie proste, przecinające się w punkcie  $O$  i położone symetrycznie względem osi  $x$ . W tym przypadku składa się polodyja z dwu elips, które otrzymamy także, przecinając elipsojdę dwiema płaszczyznami, poprowadzonymi przez oś średnią  $y$ , i położonymi symetrycznie względem płaszczyzn głównych. Dla tych płaszczyzn przecinających jest  $z : x = \pm \frac{c^2}{a^2} \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - b^2}}$ ; obie elipsy przecinają się w punktach końcowych osi średniej elipsojdy,  $b$  jest połową ich wspólnej osi mniejszej, a  $\sqrt{a^2 + c^2 - \frac{a^2 c^2}{b^2}}$  jest połową ich osi większej. W przypadkach, gdy  $h = a$  lub  $h = c$ , redukuje się polodyja do jednego punktu, mianowicie do odpowiedniego wierzchołka elipsojdy. Polodyja jest zawsze zamknięta, jako miejsce geometryczne punktów styczności płaszczyzn, stycznych do elipsojdy w stałej odległości  $h$  od środka téj elipsojdy.

Kładąc

$$(3) \quad \alpha^2 = b^2 + c^2 - \frac{b^2 c^2}{h^2}, \beta^2 = c^2 + a^2 - \frac{c^2 a^2}{h^2}, \gamma^2 = a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{h^2},$$

$$\kappa^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$

mieć będziemy według (2)

$$(4) \quad x_1^2 = \frac{a^4}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} (\kappa^2 - \alpha^2), y_1^2 = \frac{b^4}{(c^2 - b^2)(a^2 - b^2)} (\kappa^2 - \beta^2),$$

$$z_1^2 = \frac{c^4}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} (\kappa^2 - \gamma^2).$$

Z równań (3) okazuje się, że  $\beta^2 > \alpha^2$ ,  $\beta^2 > \gamma^2$ , zaś  $\gamma^2$  większe, równe lub mniejsze od  $\alpha^2$  według tego, czy  $h$  jest większe, równe lub mniejsze od  $b$ . Przy  $\kappa = \beta$  ze związków (4) otrzymamy  $x_1 > 0$ ,  $y_1 = 0$ ,  $z_1 > 0$ ; zaś przy  $\kappa > \beta$  wypada  $y_1$  urojone, skąd wynika, że  $\beta$  jest najdłuższym promieniem wodzącym (ze środka  $O$ ) polodyi i że ta linija ma wierzchołek na płaszczyźnie  $xz$ . Aby wyznaczyć wierzchołek, odpowiadający najkrótszemu promieniowi wodzącemu, przyjmijmy naprzód  $h > b$ , wstawmy w (4)  $\kappa = \gamma$ , a otrzymamy  $x_1 > 0$ ,  $y_1 > 0$ ,  $z_1 = 0$ ; więc  $\gamma$  jest w tym przypadku najkrótszym promieniem wodzącym, a wierzchołek odpowiedni znajduje się na płaszczyźnie  $xy$ . Gdy  $h < b$ , weźmy  $\kappa = \alpha$ ; wtedy ze związków (4) wynika  $x_1 = 0$ ,  $y_1 > 0$ ,  $z_1 > 0$ , więc  $\alpha$  jest promieniem najkrótszym, a wierzchołek znajduje się na płaszczyźnie  $yz$ . Gdy  $h = b$ , będzie  $\alpha^2 = \gamma^2 = b^2$ , a  $\kappa = b$  jest promieniem najkrótszym; wierzchołki znajdują się na płaszczyznach głównych elipsojdy.

Możemy sobie także zdać sprawę z kształtu herpolodyi. Obierzmy w tym celu spodek P (fig. 58) prostopadłej  $h$  na płaszczyźnie niezmiennej za początek współrzędnych biegunowych  $\rho$  i  $\varphi$  herpolodyi. Ponieważ  $\rho^2 = x^2 - h^2$ , przeto wierzchołkom polodyi odpowiadają także wierzchołki herpolodyi.

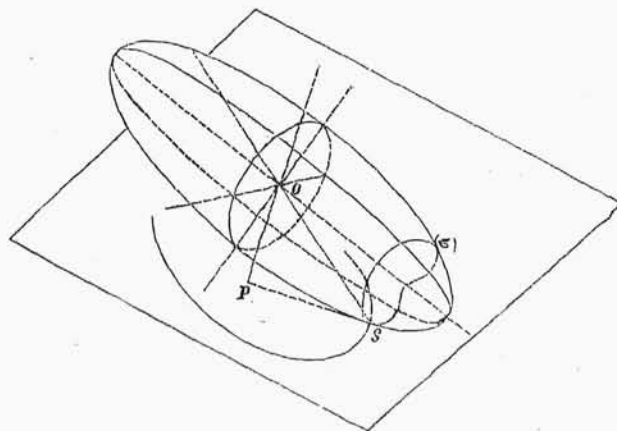


Fig. 58.

Otrzymamy maximum  $\rho = \sqrt{\beta^2 - h^2}$ , a dla  $h > b$ , minimum  $\rho = \sqrt{\gamma^2 - h^2}$ , zaś dla  $h < b$ , minimum  $\rho = \sqrt{\alpha^2 - h^2}$ . Jeżeli więc z punktu P na płaszczyźnie niezmiennej zakreśliśmy dwa koła, jedno promieniem maximum  $\rho$ , drugie promieniem minimum  $\rho$ , herpolodyja znajdować się będzie między okręgami tych obu kół, będąc styczną naprzemian to do jednego, to do drugiego koła. Łuk między dwoma wierzchołkami herpolodyi jest równy łukowi między dwoma odpowiednimi wierzchołkami polodyi jest więc równy połowie długości tej linii. Jeżeli kąt o wierzchołku P, którego ramiona przechodzą, przez wierzchołki wewnętrzne lub przez zewnętrzne herpolodyi, mieści się całkowitą ilość razy w  $360^\circ$ , natenczas herpolodyja jest linią zamkniętą, a ciało powraca do swego pierwotnego położenia po  $2n$  obrotach. W każdym innym przypadku wije się herpolodyja bez końca między owymi dwoma kołami współśrodkowymi, a ciało zajmuje coraz inne położenie.

Poinsot, a za nim inni pisarze sądzili, że herpolodyja jest linią falową, która ku punktowi P jest zwrócona naprzemian to stroną wklęsłą, to wypukłą. W czasie najnowszy okazano jednak, że tak nie jest, że herpolodyja nie ma punktu przegięcia, lecz zwrócona jest ku punktowi P stroną wklęsłą (ob. literaturę przy końcu rozdz. XV).

**154.** W przypadku, gdy  $h = b$ , można przedstawić równanie herpolodyi zapomocą funkcij prostych. Z art. 153-go wiemy, że w tym przypadku polodyja składa się z dwu elips o osi większej  $2\beta$  i osi mniejszej  $2b$ ; wyznaczmy herpolodyję, odpowiednią jednej z tych dwu elips. W tym celu elipsę

(fig. 59), toczącą się na płaszczyźnie niezmiennej, rozważajmy w tym położeniu, kiedy ona jest do owej płaszczyzny styczna w wierzchołku S, ograniczającą oś większą  $2\beta$ ; poprowadźmy przez P i S oś biegunową, od której liczymy

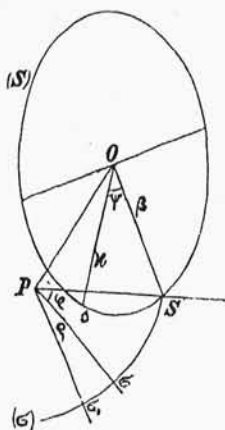


Fig. 59.

kąt  $\varphi$ . Jeżeli wskutek toczenia się elipsy (s) punkt s przybędzie do  $\sigma$ , to łuk  $Ss =$  łukowi  $S\sigma$ . Przyjmijmy  $\kappa = Os$ ,  $\rho = P\sigma$ , kąt  $SOs = \psi$ , kąt  $SP\sigma = \varphi$ ; wtedy  $\rho^2 = \kappa^2 - b^2 = \kappa^2 - \beta^2$ . Niech  $\psi$  przyrośnie o  $d\psi$ ; wtedy punkt  $s_1$  znajdzie się w  $\sigma_1$ , a  $ss_1 = \sigma\sigma_1 = ds$ . Dla linii (s) mamy  $ds^2 = \kappa^2 d\psi^2 + d\kappa^2$ , zaś dla ( $\sigma$ ) mamy  $ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2$ ; więc  $\rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2 = \kappa^2 d\psi^2 + d\kappa^2$ , czyli  $\rho^2 \left(\frac{d\varphi}{d\kappa}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{d\kappa}\right)^2 = \kappa^2 \left(\frac{d\psi}{d\kappa}\right)^2 + 1$ . Wstawiając wartości  $\rho$  i  $d\rho$ , mieć będziemy

$$(1) \quad (\kappa^2 - b^2) \left(\frac{d\varphi}{d\kappa}\right)^2 + \frac{\kappa^2}{\kappa^2 - b^2} = \kappa^2 \left(\frac{d\psi}{d\kappa}\right)^2 + 1.$$

Równanie elipsy (s) jest

$$(2) \quad b^2 \beta^2 = \kappa^2 (b^2 \cos^2 \psi + \beta^2 \sin^2 \psi),$$

skąd

$$(3) \quad \frac{d\psi}{d\kappa} = - \frac{b\beta}{\kappa \sqrt{(\kappa^2 - b^2)(\beta^2 - \kappa^2)}};$$

więc według (1)

$$(4) \quad (\kappa^2 - b^2) \left(\frac{d\varphi}{d\kappa}\right)^2 + \frac{\kappa^2}{\kappa^2 - b^2} = \frac{b^2 \beta^2}{(\kappa^2 - b^2)(\beta^2 - \kappa^2)} + 1.$$

Gdy wstawimy  $\frac{d\varphi}{d\kappa} = \frac{d\varphi}{d\rho} \cdot \frac{d\rho}{d\kappa}$  i wprowadzimy  $\rho$ , otrzymamy

$$(5) \quad \frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{b}{\rho \sqrt{\beta^2 - b^2 - \rho^2}}.$$

Niech  $\varepsilon^2 = \beta^2 - b^2$ , gdzie  $\varepsilon$  jest mimośrodem elipsy ( $s$ ); wtedy

$$(6) \quad d\varphi = \frac{b \cdot d\rho}{\rho \sqrt{\varepsilon^2 - \rho^2}}.$$

Wstawmy  $\zeta^2 = \varepsilon^2 - \rho^2$  i całkujemy; mieć będziemy  $\varphi = C + \frac{b}{2\varepsilon} \lg \frac{\varepsilon - \zeta}{\varepsilon + \zeta}$ , a ponieważ dla  $\varphi = 0$  jest  $\varkappa = \beta$ ,  $\rho = \varepsilon$ ,  $\zeta = 0$ , więc  $C = 0$ . Wprowadzając ponownie  $\rho$  i rozwiązując równanie względem  $\rho$ , otrzymamy

$$(7) \quad \rho = \frac{2\varepsilon}{\frac{\varepsilon\varphi}{e b} + e - \frac{\varepsilon\varphi}{b}}$$

jako równanie herpolodyi, gdy  $h = b$ . Stąd wynika, że herpolodyja jest symetryczna względem PS, a PS =  $\varepsilon$  jest jej największym promieniem wodzącym. Punkt  $\sigma$  zbliża się nieustannie do P ponieważ zaś dla  $\varphi = \pm \infty$  jest  $\rho = 0$ , przeto P jest punktem asymptotycznym herpolodyi. Dla  $\varphi = \pi$  otrzymamy punkt po przeciwniej stronie punktu S. Herpolodyja jest linią spiralną o nieskończenie wielu zwojach, a chociaż punkt  $\sigma$  obraca się nieskończenie wiele razy około P, to jednak długość spiralnej jest skończona i równa połowie okręgu elipsy ( $s$ ). Oś chwilowa zajmuje coraz inne położenie w ciele i w przestrzeni, nie wracając do tego samego położenia. —

Aby kręcenie się ciała około punktu zbadać pod względem czasu, rozwiążmy  $p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2$ ,  $A p^2 + B q^2 + C r^2 = 2T$ ,  $A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = G^2$  względem  $p^2$ ,  $q^2$  i  $r^2$ ; otrzymamy

$$p^2 = \frac{BC}{(A-B)(A-C)} \left[ \omega^2 - \frac{2T(C+B) - G^2}{BC} \right];$$

podobne wyrażenia mieć będziemy dla  $q^2$  i  $r^2$ . Z równań (4) art. 153-go wynika

$$2T\alpha^2 = \frac{2T(B+C) - G^2}{BC}, \quad 2T\beta^2 = \frac{2T(C+A) - G^2}{CA}, \\ 2T\gamma^2 = \frac{2T(A+B) - G^2}{AB},$$

skąd, gdy przyjmiemy

$$\omega_1^2 = 2T\alpha^2, \quad \omega_2^2 = 2T\beta^2, \quad \omega_3^2 = 2T\gamma^2,$$

wyprowadzimy

$$(8) \quad p^2 = \frac{BC}{(A-B)(A-C)} (\omega^2 - \omega_1^2), \quad q^2 = \frac{CA}{(B-C)(A-B)} (\omega^2 - \omega_2^2), \\ r^2 = \frac{AB}{(A-C)(B-C)} (\omega^2 - \omega_3^2).$$

Ponieważ  $\beta$  jest największą wartością promienia wodzącego polodyi, a  $\omega^2 = 2T\alpha^2$ , przeto  $\omega_2$  oznacza maximum prędkości kątowej  $\omega$ . Według tego, czy  $h \geq b$ , t. j. czy  $2TB \geq G^2$ , odpowiednio  $\gamma$  lub  $\alpha$  przedstawia promień najmniej-

szy  $\kappa$ , a zatem odpowiednio  $\omega_3$  lub  $\omega_1$  jest minimum prędkości  $\omega$ . Gdy  $h=b$ , a więc gdy  $2TB=G^2$ , jest  $\alpha=\gamma=b$ , a przeto  $\omega_1=\omega_3=\sqrt{2T:B}$  jest minimum prędkości  $\omega$ .

Różniczkując pierwsze równanie (8) względem  $t$  i wstawiając  $dp:dt$  z równań Euler'a, mieć będziemy

$$\omega \frac{d\omega}{dt} = \frac{(A-B)(A-C)(B-C)}{ABC} \cdot pqr,$$

albo, gdy z (8) obliczymy  $pqr$ ,

$$(9) \quad \omega \frac{d\omega}{dt} = \sqrt{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega_2^2 - \omega^2)(\omega^2 - \omega_3^2)}.$$

Z tego równania możemy wyrazić  $t$  przez  $\omega$  zapomocą całki eliptycznej, a  $\omega$  przez  $t$  zapomocą funkcji eliptycznej.

Wielkości  $\omega$ ,  $p$ ,  $q$  i  $r$  możemy wyrazić przez  $t$  za pośrednictwem pewnej zmiennej, stosownie obranej. W tym celu wyrugujemy  $r^2$  z równań  $Ap^2 + \text{etc.} = 2T$  i  $A^2p^2 + \text{etc.} = G^2$  i przyjmijmy

$$(10) \quad p_0^2 = \frac{G^2 - 2TC}{A(A-C)}, \quad q_0^2 = \frac{G^2 - 2TC}{B(B-C)};$$

otrzymamy

$$(11) \quad \frac{p^2}{p_0^2} + \frac{q^2}{q_0^2} = 1.$$

Ponieważ  $\omega$  jest proporcjonalne względem  $\kappa$ , przeto punkt o współrzędnych  $p$ ,  $q$  i  $r$  względem osi bezwładności opisuje linią krzywą, podobną do polodyi, a równanie (11) przedstawia rzut tej linii na płaszczyznę, przechodzącą przez te dwie osi główne, względem których  $A$  i  $B$  są momentami bezwładności ciała. Płaszczyznę taką oznaczать będziemy symbolem  $(AB)$ . Ponieważ  $h < c$ , a więc  $G^2 > 2TC$ , przeto ta linia jest elipsą, której osi znajdują się na osiach  $A$  i  $B$ . Oznaczmy podobnie, jak w art. 91-ym na fig. 37-ój, przez  $u$  anomaliją średnią punktu, opisującego tę elipsę; wtedy

$$(12) \quad p = p_0 \cos u, \quad q = q_0 \sin u,$$

przyczym  $u$  liczymy od tego wierzchołka elipsy, dla którego  $p = p_0$ ,  $q = 0$ . Stąd otrzymamy według (8)

$$\omega^2 - \omega_1^2 = \frac{A-B}{ABC} (G^2 - 2TC) \cos^2 u,$$

$$\omega^2 - \omega_2^2 = -\frac{A-B}{ABC} (G^2 - 2TC) \sin^2 u.$$

A ponieważ

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = \frac{(A-B)(G^2 - 2TC)}{ABC},$$

przeto

$$(13) \quad \omega^2 = \omega_2^2 - (\omega_2^2 - \omega_1^2) \sin^2 u.$$

Wstawmy tę wartość w ostatnie równanie (8) i przyjmijmy

$$(14) \quad r_0^2 = \frac{AB(\omega_2^2 - \omega_3^2)}{(C-A)(C-B)} = \frac{G^2 - 2TA}{C(C-A)}, \quad \lambda^2 = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 - \omega_3^2} = \frac{A-B}{C-B} \cdot \frac{G^2 - 2TC}{G^2 - 2TA};$$

otrzymamy

$$(15) \quad r = r_0 \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u},$$

przyczym  $r = r_0$  dla  $u = 0$ . Równania (12), (13) i (15) pozwalają  $p, q, r$  i  $\omega$  wyrazić przez  $u$ . Aby  $u$  wyrazić przez  $t$ , podstawmy  $\omega^2 - \omega_1^2, \omega_2^2 - \omega^2, \omega^2 - \omega_3^2$  w (9); otrzymamy

$$\omega \cdot \frac{d\omega}{dt} = (\omega_2^2 - \omega_1^2) \sqrt{\omega_2^2 - \omega_3^2} \cdot \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u} \cdot \sin u \cos u.$$

Różniczkując zaś obie strony równania (13) względem  $t$ , z porównania otrzymanego stąd wyrażenia z powyższym będziemy mieli

$$(16) \quad \frac{du}{dt} = - \sqrt{\omega_2^2 - \omega_3^2} \cdot \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u},$$

$$\text{czyli } dt = - \frac{du}{\sqrt{\omega_2^2 - \omega_3^2} \cdot \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}}.$$

Znak — wskazuje, że punkt  $(p, q)$  opisuje elipsę (11) od osi mniejszej na B ku osi większej na A. Całkując względem  $u$  w krańcach  $\frac{\pi}{2}$  i 0, otrzymamy czas, potrzebny do opisania ćwiartki elipsy, a zatem czas do opisania łuku polody między dwoma wierzchołkami.

Spółrzędne bieguna chwilowego są  $p: \sqrt{2T}, q: \sqrt{2T}, r: \sqrt{2T}$ , a spółrzędne bieguna sąsiedniego  $s_1$  są  $(p+dp): \sqrt{2T}, (q+dq): \sqrt{2T}, (r+dr): \sqrt{2T}$ . Oznaczmy przez  $\rho$  promień wodzący Ps herpolodyi, a przez  $d\varphi$  kąt  $sPs_1$ ; wówczas pole  $sPs_1 = \frac{\rho^2}{2} d\varphi$  jest rzutem pola  $sOs_1$  na płaszczyznę niezmienną.

Rzucając przeto pole  $sOs_1$  na płaszczyzny (BC), (CA) i (AB), mnożąc rzuty odpowiednio przez dostawy kierunkowe osi niezmiennych i dodając iloczyny, mieć będziemy

$$2TG\rho^2 d\varphi = Ap(qdr - r dq) + Bq(r dp - p dr) + Cr(p dq - q dp),$$

czyli, uwzględnivszy równania Euler'a,

$$(17) \quad 2TGABC\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = BC(B-C)^2 q^2 r^2 + CA(C-A)^2 r^2 p^2 +$$

$$+ AB(A-B)^2 p^2 q^2.$$

Z równania (13) wynika  $\kappa^2 = \beta^2 - (\beta^2 - \alpha^2) \sin^2 u$ , a ponieważ  $\rho^2 = \kappa^2 - h^2$ , przeto  $\rho^2 = \beta^2 - h^2 - (\beta^2 - \alpha^2) \sin^2 u$ . Gdy zamiast  $\alpha^2, \beta^2$  i  $h^2$  wstawimy wartości poprzednio podane, otrzymamy

$$2TG^2ABC\rho^2 = (G^2 - 2TC) [B(2TA - G^2) - G^2(A-B) \sin^2 u],$$



a jeżeli tu przyjmiemy

$$(18) \quad \rho_0^2 = -\frac{(G^2 - 2TC)(G^2 - 2TA)}{2TG^2AC}, \quad \mu^2 = -\frac{G^2(A-B)}{B(G^2 - 2TA)},$$

mieć będziemy

$$(19) \quad \rho^2 = \rho_0^2 (1 - \mu^2 \sin^2 u).$$

Jeżeli tę wartość, tudzież  $p^2$ ,  $q^2$  i  $r^2$  z (12) i (15) wstawimy w (17), przyjmiemy

$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{du} \cdot \frac{du}{dt}$ , następnie  $\frac{du}{dt}$  wstawimy z równania (16), to mieć będziemy

$$(20) \quad \frac{d\varphi}{du} = \frac{G \cdot \sqrt{ABC}}{\sqrt{(C-B)(G^2 - 2TA)}} \cdot \frac{(G^2 - 2TA) \cos^2 u + (G^2 - 2TB) \sin^2 u}{[G^2(A-B) \cos^2 u - A(G^2 - 2TB)] \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}}.$$

Stąd możemy  $\varphi$  wyrazić przez  $u$ . Równanie (19) i całka równania (20) wyrażają współrzędne biegunowe herpoloidy przez argument  $u$ .

W przypadku, gdy  $h=b$ , a więc gdy  $G^2 = 2TB$ , będzie  $\omega_1 = \omega_3$ ,  $\lambda = 1$ , skąd

$$(21) \quad d\varphi = \sqrt{\frac{AC}{(A-B)(B-C)}} \cdot \frac{du}{\cos u},$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{AC}{(A-B)(B-C)}} \cdot \lg \frac{1 + \sin u}{1 - \sin u},$$

a następnie

$$(22) \quad \frac{du}{dt} = -\sqrt{2T} \cdot \sqrt{\frac{(A-B)(B-C)}{ABC}} \cos u, \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\sqrt{\frac{2T}{B}}.$$

Wynika stąd, że płaszczyzna, przechodząca przez oś niezmienną i oś chwilową, obraca się jednostajnie około osi niezmiennej.

Aby określić położenie kręcącego się ciała, naprzód z warunków zadania obliczymy dostawy kierunkowe  $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3$  osi bezwładności A, B, C względem osi współrzędnych  $x, y, z$ , poprowadzonych przez środek kręcenia się. Wiadomo z geometrii, że powyższe dostawy mogą być wyrażone przez funkcję trygonometryczną trzech kątów następujących: kąta  $\chi$ , który ślad płaszczyzny (AB) na płaszczyźnie  $xy$  tworzy z osią  $x$ , kąta  $\phi$ , który tenże ślad tworzy z osią A, i kąta  $\theta$ , który płaszczyzna (AB) tworzy z płaszczyzną  $xy$ , lub który oś C tworzy z osią niezmienną. Według wiadomych wzorów Euler'a jest

$$(23) \quad \begin{cases} a_1 = \cos \chi \cos \phi - \sin \chi \sin \phi \cos \theta; & a_2 = -\cos \chi \sin \phi - \sin \chi \cos \phi \cos \theta, \\ b_1 = \sin \chi \cos \phi - \cos \chi \sin \phi \cos \theta; & b_2 = -\sin \chi \sin \phi + \cos \chi \cos \phi \cos \theta, \\ c_1 = \sin \phi \sin \theta; & c_2 = \cos \phi \sin \theta, \\ & a_3 = \sin \chi \sin \theta, \quad b_3 = -\cos \chi \sin \theta, \quad c_3 = \cos \theta. \end{cases}$$

Ponieważ  $Ap:G, Bq:G, Cr:G$  oznaczają dostawy kierunkowe osi niezmiennej względem osi A, B i C, przeto

$$(24) \quad Ap = G \cdot \sin \phi \sin \theta, \quad Bq = G \cos \phi \sin \theta, \quad Cr = G \cos \theta,$$



a stąd

$$(25) \quad \tan \phi = \frac{Ap}{Bq} = \frac{Ap_0}{Bq_0} \cot \theta, \quad \cos \theta = \frac{Cr}{G}, \quad \sin \theta = \frac{Ap}{G \sin \phi} = \frac{Bq}{G \cos \phi}.$$

Mamy więc  $\phi$  i  $\theta$  wyrażone przez  $u$ . Z równań (9) art. 150-go wynika

$$(26) \quad p \cdot \sin \phi + q \cos \phi = \frac{d\chi}{dt} \sin \theta;$$

jest więc, według (25),

$$(27) \quad \frac{d\chi}{dt} = G \cdot \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2} = G \cdot \frac{2T - Cr^2}{G^2 - C^2r^2},$$

a jeżeli wprowadzimy  $\frac{d\chi}{dt} = \frac{d\chi}{du} \cdot \frac{du}{dt}$  i z poprzednich wzorów wynikające wyrażenia dla  $p$ ,  $q$  i  $\frac{du}{dt}$ , to będzie ostatecznie

$$(28) \quad \frac{d\chi}{du} = - \frac{Ap_0^2 \cos^2 u + Bq_0^2 \sin^2 u}{A^2 p_0^2 \cos^2 u + B^2 q_0^2 \sin^2 u} \cdot \frac{G}{\sqrt{\omega_2^2 - \omega_3^2} \cdot \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}},$$

skąd możemy kąt  $\chi$  obliczyć jako funkcję zmienną  $u$ . Znając kąty  $\chi$ ,  $\phi$  i  $\theta$ , wyznaczmy położenie ciała w każdej chwili zapomocą równań (23).

**155. PRECESYJA I NUTACYJA.** Podana teoryja pozwala rozwiązać zadanie o kręceniu się ciała około punktu, na które żadne siły nie działają. Niektóre przypadki szczególne mogą być jednak rozwiązane w odmienny sposób, który wynika z poczynionych założeń, wskutek czego opisanie ruchu zyskuje na jasności.

Zastanowimy się nad przypadkiem, gdy ciało, którego elipsoida centralna jest powierzchnią obrotową, kręci się około środka masy. Ponieważ przy opisywaniu ruchu ciała wystarcza rozważać tylko jego elipsoidę bezwładności, przeto oś obrotu tej elipsoidy nazwiemy krótko osią geometryczną ciała, a płaszczyznę, prostopadłą do osi i przechodzącą przez środek masy, nazwiemy równikiem tego ciała. Obie nazwy mają znaczenie geometryczne, jeżeli

ciało jest obrotowe, bo wtedy elipsoida centralna jest także powierzchnią obrotową. Gdy  $C$  oznacza moment bezwładności względem osi geometrycznej, to  $A = B$ , a według tego czy  $C \geq A$ , elipsoida bezwładności będzie spłaszczone (sferoidą) lub wydłużone.

Położenie ciała będzie w każdej chwili wiadome, jeżeli znamy położenie osi geometrycznej w przestrzeni, tudzież położenie ciała względem tej osi. W celu wyznaczenia tych położeń mogą posłużyć trzy kąty, które następującym sposobem określimy.

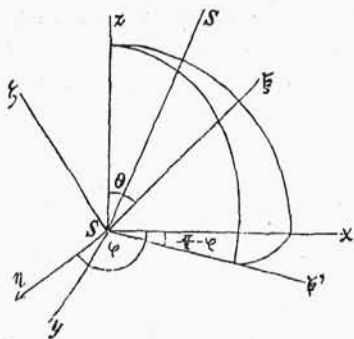


Fig 60.

Wystawmy w środku masy ciała trzy osi prostokątnego układu współrzędnych  $Sx$ ,  $Sy$ ,  $Sz$ , nieruchome w przestrzeni, a prosta  $S\xi$  niech oznacza

chwilowe położenie osi geometrycznej. Przesuńmy płaszczyznę przez  $Sz$  i  $S\xi$ , i niech  $S\xi'$  będzie śladem tej płaszczyzny na  $Sxy$ ; wówczas kąt  $\theta = zS\xi$  tudzież kąt  $xS\xi'$  określają położenie osi geometrycznej w przestrzeni. Równik przetnie płaszczyznę  $Sxy$  podług prostej  $S\eta$ , którą nazywamy linią węzłów równika, a jeżeli przyjmiemy kąt  $\varphi = xS\eta$ , to kąt  $xS\xi'$  będzie równy  $\varphi - \frac{\pi}{2}$ , ponieważ  $S\xi'$  jest prostopadłe do  $S\eta$ ; kąty

$\theta$  i  $\varphi$  określają zatem położenie osi geometrycznej w przestrzeni. Aby określić położenie ciała względem osi  $S\xi$ , obierzmy w przestrzeni (np. na osi  $x$ ) dowolnie punkt stały, i poprowadźmy płaszczyznę przez ten punkt i oś  $S\xi$ ; dość znać kąt  $\alpha$ , który południk dowolnego punktu elipsoidy tworzy z tą płaszczyzną, aby mieć oznaczone położenie tej elipsoidy względem osi  $S\xi$ . Po upływie elementu czasu  $dt$  kąty  $\varphi$ ,  $\theta$  i  $\alpha$  przybiorą odpowiednio wartości  $\varphi + d\varphi$ ,  $\theta + d\theta$ ,  $\alpha + d\alpha$ , a przejście ciała w sąsiednie położenie możemy uważać za wynik następujących trzech ruchów. Obróćmy oś geometryczną około linii węzłów  $S\eta$  o kąt  $d\theta$ , a płaszczyznę  $zS\xi$ , poprowadzoną przez  $Sz$  i  $S\xi$ , obróćmy około osi  $z$  o kąt  $d\varphi$ ; wskutek tych obrotów ruchów przyjmie oś geometryczna nieskończenie bliskie położenie w przestrzeni; obróćmy na koniec ciało o kąt  $d\alpha$  około nowego położenia jego osi geometrycznej; przywiedziemy w ten sposób ciało do tego położenia, które ono zajmuje po upływie czasu  $dt$ .

Ruch osi geometrycznej, wskutek którego zmienia się kąt  $\theta$ , utworzony przez nią ze stałą osią  $z$ , nazywamy nutacją czyli kołysaniem się tej osi względem tej prostej; ruch zaś płaszczyzny  $zS\xi$ , wskutek którego zmienia się kąt  $\varphi$ , który linia węzłów tworzy ze stałą osią  $x$ , zowiemy precesją osi geometrycznej ciała. Obie nazwy wzięte są z astronomii, w której występują przy opisywaniu ruchu ziemi. Ruch obrotowy ciała około osi geometrycznej nazywamy obrotem własnym tego ciała. Miarami nutacyi, precesyi i obrotu własnego są odpowiednio prędkości kątowe  $\Theta$ ,  $\Phi$ ,  $\Omega$ , określone przez równania

$$(1) \quad \Theta = \frac{d\theta}{dt}, \quad \Phi = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \Omega = \frac{d\alpha}{dt},$$

które dla krótkości wysłowienia nazywamy także odpowiednio nutacją, precesją i obrotem własnym.

Poprowadźmy trzecią oś  $S\xi$ , prostopadłą do  $S\xi$  i  $S\eta$ , leżącą zatem na równiku; powstaje prostokątny układ współrzędnych  $S\xi\eta\zeta$ , do którego punkty ciała odnosić możemy. Atoli ten układ jest ruchomy w ciele i w przestrzeni; linią węzłów jest bowiem coraz inna prosta równika, a oś  $S\xi$  zajmuje w ciele coraz inne położenie, tylko oś geometryczna nie zmienia swego położenia w ciele. Osi  $S\xi$ ,  $S\eta$  i  $S\zeta$  poruszają się wskutek nutacyi i precesyi, nie biorą jednak udziału w obrocie własnym ciała.

Niech  $Ss$  będzie osią chwilową obrotu ciała, którą dokładnie odróżnić trzeba od jego osi geometrycznej. Obrót chwilowy  $\omega$  możemy rozłożyć na obroty około  $S\xi$ ,  $S\eta$  i  $S\zeta$ . Rozkładając precesję  $\Phi$  na obroty  $\Phi \cos \theta$ , około

$S\xi$  i  $\Phi \sin \theta$  około  $S\zeta$ , otrzymamy  $\Omega + \Phi \cos \theta$ ,  $\Theta$  i  $\Phi \sin \theta$  jako odpowiednie składowe obrotu chwilowego  $\omega$  około osi  $S\xi$ ,  $S\eta$  i  $S\zeta$ , będących w każdej chwili osiami bezwładności ciała pomimo zmiany położenia, jakie one w nim zajmują.

**156.** W celu wyprowadzenia równań ruchu, skorzystajmy z twierdzenia, podanego w art. 142-im, tudzież ze sposobu, podanego w art. 150-ym. Iloczynny  $C(\Omega + \Phi \cos \theta)$ ,  $A\Theta$ ,  $A\Phi \sin \theta$  przedstawiają w układzie współrzędnych  $S\xi\eta\zeta$  odpowiednie współrzędne końcowego punktu odcinka, który wyobraża moment wypadkowy ilości ruchu ciała względem punktu  $S$ . Pochodne zatem tych wielkości względem czasu są prędkościami względnymi tego punktu w kierunkach powyższych osi. Ponieważ owe osi nie biorą udziału w obrocie własnym ciała, przeto  $\Phi \cos \theta$ ,  $\Theta$  i  $\Phi \sin \theta$  są odpowiednio składowymi prędkościami kątowąj ruchu unoszenia; według równań (3) art. 150-go otrzymamy odpowiednie rzuty prędkości unoszenia tego punktu, mianowicie: 0,  $(C - A)\Phi^2 \sin \theta \cos \theta + C\Phi\Omega \sin \theta$ ,  $(A - C)\Phi\Theta \cos \theta - C\Theta\Omega$ . Oznaczając przez  $L$ ,  $M$ ,  $N$  sumy momentów sił przyłożonych (ciągłych) względem  $S\xi$ ,  $S\eta$  i  $S\zeta$ , otrzymamy według art. 142-go żądane równania ruchu,

$$(2) \quad \begin{cases} C \frac{d}{dt} (\Omega + \Phi \cos \theta) = L \\ A \frac{d\Theta}{dt} + (C - A)\Phi^2 \sin \theta \cos \theta + C\Phi\Omega \sin \theta = M \\ A \frac{d\Phi}{dt} \sin \theta + (2A - C)\Phi\Theta \cos \theta - C\Theta\Omega = N, \end{cases}$$

które w tej postaci podał E. Bour.

Jeżeli do ciała, będącego w spoczynku, przykładamy parę popędową, i moment tej pary obieramy za oś  $z$ , to oznaczywszy przez  $L_0$ ,  $M_0$ ,  $N_0$  składowe momentu pary popędowej względem początkowego położenia układu osi  $S\xi\eta\zeta$  (dla  $t = 0$ ), mamy  $M_0 = 0$ , ponieważ  $S\eta$  jest prostopadła do  $Sz$ . W chwili więc rozpoczęcia ruchu będzie

$$(3) \quad C(\Omega + \Phi \cos \theta) = L_0, \quad A\Theta = 0, \quad A\Phi \sin \theta = N_0,$$

a stąd  $\Theta = 0$ . Gdy teraz ciało, przez parę popędową w ruch wprowadzone, będzie samemu sobie zostawione, a więc  $L = 0$ ,  $M = 0$ ,  $N = 0$ , to łatwo rozpoznać dalszy przebieg jego ruchu. Obrawszy oś niezmienną za oś  $z$ , poprowadźmy w odległości  $h = \sqrt{2T} : G$  od  $S$  płaszczyznę niezmienną, równoległą do  $Sxy$ ; elipsojda obrotowa jest styczna ciągle do tej płaszczyzny, a promień, łączący punkt styczności ze środkiem, jest osią chwilową. Oś geometryczna, oś niezmienna i oś chwilowa znajdują się ciągle na płaszczyźnie południka, poprowadzonej przez oś niezmienną, z czego wynika, że promień elipsojdy, przedstawiający prędkość kątową obrotu chwilowego, ma długość stałą, a zatem ta prędkość  $\omega$  jest stała. Polodyja jest przeto równoleżnikiem elipsojdy, a herpolodyja jest kołem na płaszczyźnie niezmienną. Stożek centralny w ciele jest obrotowy, a oś geometryczna jest jego osią; stożek centralny w prze-

strzeni jest także obrotowy, a jego osią jest oś niezmienna. Jeżeli elipsojda jest wydłużona, to obadwa stożki są do siebie styczne zewnętrznie, w przypadku zaś sferoidy wewnętrznie, a stożek centralny w ciele jest szerszy i obejmuje stożek centralny w przestrzeni. Z tego wynika, że oś geometryczna opisuje w przestrzeni stożek obrotowy około osi niezmienną, że przeto ciągle  $\Theta = 0$ . Mamy więc  $\Omega + \Phi \cos \theta = \text{stała}$ , tudzież  $\Phi \sin \theta = \text{stała}$ , a ponieważ kąt  $\theta$  jest stały, przeto będzie  $\Omega = \text{stała}$  i  $\Phi = \text{stała}$ . Widzimy zatem, że ciało obraca się jednostajnie około swej osi geometrycznej, że precesja względem osi niezmienną jest również jednostajna, i że nutacyi względem osi niezmienną nie ma wcale.

Zachodzi pytanie: czy taki ruch ciała obrotowego, dla którego ciągle

$$(4) \quad \Theta = 0, \quad \frac{d\Omega}{dt} = 0, \quad \frac{d\Phi}{dt} = 0,$$

tylko wtedy zajść może, kiedy na ciało, przez parę chwilową w ruch wprowadzone, żadne siły nie działają, czy też ten ruch może także zachodzić przy działaniu sił ciągłych, odpowiednio dobranych. Równania (2) pozwalają rozwiązać to zagadnienie. Z nich według (4) otrzymamy  $L = 0$ ,  $N = 0$ ,  $M = [\Phi(C - A) \cos \theta + C\Omega] \Phi \sin \theta$ , z czego wynika, że ów ruch zajdzie, jeżeli na ciało działa para sił, której płaszczyzna jest ciągle prostopadła do linii węzłów równika, a której moment posiada stałą wartość  $M$ . Wtedy oś geometryczna porusza się bez kołysania się, prędkość kątowa precesyi jest stała, a obrót własny ciała jest jednostajny.

Przyjmijmy, że kąt  $\theta$  jest ostry, i że elipsojda bezwładności jest sferoidą; wtedy  $C - A > 0$ , a znak i wielkość pary  $M$  zależą będzie od prędkości  $\Omega$  i  $\Phi$ . Odetnijmy na osi  $z$  stałą prędkość  $\Phi$ , na osi geometrycznej prędkość  $\Omega$ ; przekątna równoległoboku tych prędkości daje oś chwilową i prędkość  $\omega$ . Prowadząc płaszczyznę południka przez oś  $z$ , następnie w punkcie, w którym oś chwilowa przecina ten południk, prowadząc styczną do południka, i wystawiając w  $S$  prostopadłą do tej stycznej, otrzymamy tym samym kierunek momentu  $G$  ilości ruchu; ten kierunek jest zmienny, atoli wielkość  $G$  jest stała. Gdy  $\beta$  jest kątem, który  $G$  tworzy z osią  $z$ , a  $\gamma$  kątem między osią  $z$  a osią chwilową, to z równoległoboku prędkości  $\omega$ ,  $\Omega$  i  $\Phi$  wynika

$$(5) \quad \frac{\Phi}{\omega} = \frac{\sin(\theta - \gamma)}{\sin \theta}, \quad \frac{\Omega}{\omega} = \frac{\sin \gamma}{\sin \theta}.$$

Ułoczyny  $G \cdot \cos(\theta - \beta)$  i  $G \sin(\theta - \beta)$  przedstawiają odpowiednio rzuty momentu  $G$  na  $S\xi$  i  $S\zeta$ , mamy przeto

$$G \cos(\theta - \beta) = C(\Omega + \Phi \cos \theta), \quad G \sin(\theta - \beta) = A \Phi \sin \theta,$$

a stąd

$$(6) \quad \begin{cases} G \cos \beta = C(\Omega + \Phi \cos \theta) \cos \theta + A \Phi^2 \sin^2 \theta \\ G \sin \beta = C(\Omega + \Phi \cos \theta) \sin \theta - A \Phi \cos \theta \sin \theta; \end{cases}$$

a ponieważ, jak wyżej okazano,  $M = [\Phi(C - A) \cos \theta + C\Omega] \Phi \sin \theta$ , przeto

$$(7) \quad M = G \Phi \sin \beta,$$

co przedstawia nowe, a proste wyrażenie momentu  $M$ , sprawiającego ruch żądany. Wstawivszy wartość na  $\Phi$  z (5), otrzymamy także

$$(8) \quad M = G \omega \frac{\sin \beta \sin (\theta - \gamma)}{\sin \theta}.$$

Uważajmy te kierunki osi  $Sz$  i  $Sz'$ , które tworzą z sobą kąt ostry  $\theta$ , za kierunki dodatnie; długości, przedstawiające  $\Phi$  i  $\Omega$ , należy odcinać na tych kierunkach lub na ich przedłużeniach, według tego, czy te prędkości są dodatnie, czy też ujemne. Dla ziemi mamy  $\Omega > 0$ ,  $\Phi < 0$ , a jeżeli w pierwszym przybliżeniu pominiemy małą nutację osi ziemi względem prostopadłej do płaszczyzny ekliptyki, to z obserwacji astronomicznych, z których wypada, że  $\Omega$  i  $\Phi$  mają wartości stałe, wynika, że ziemia doznaje ciągle działania sił zewnętrznych, redukujących się w środku jej masy do pary sił, której płaszczyzna jest prostopadła do linii węzłów równika. Te siły wynikają z przyciągania słońca i księżyca.

**157. RUCH POSUWISTY.** Ponieważ przy tym ruchu zachodzi swoboda rzędu 3-go (art. 51), przeto określamy go przez trzy równania, które z zasady d'Alembert'a bezpośrednio otrzymać możemy. Obierzmy osi  $Ox$  i  $Oy$  równoległe do płaszczyzny kierującej, i oznaczmy przez  $X$ ,  $Y$ ,  $N$  współrzędne układu sił przyłożonych względem tych osi, przyczym  $X$  i  $Y$  oznaczają sumy rzutów sił na osi  $x$  i  $y$ , a  $N$  oznacza moment układu tych sił względem prostopadłej  $Oz$  do płaszczyzny kierującej, wystawionej w punkcie  $O$ . Z zasady d'Alembert'a wynikają następujące 3 równania tego ruchu.

$$(1) \quad m \cdot \frac{d^2 \xi}{dt^2} = X, \quad m \cdot \frac{d^2 \eta}{dt^2} = Y,$$

$$(2) \quad \sum m_i \left( x_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - y_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) = N,$$

w których  $\xi$ ,  $\eta$  oznaczają współrzędne środka masy, a  $m$  oznacza masę ciała. Zamiast prostej  $Oz$  możemy inną prostą  $pz$ , wyprowadzoną prostopadłe do płaszczyzny  $Oxy$  z punktu  $p(x_0, y_0)$ , obrać za oś momentów, a wtedy otrzymamy zamiast (2) następujące równanie

$$(3) \quad \sum m_i \left[ (x_i - x_0) \frac{d^2 y_i}{dt^2} - (y_i - y_0) \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right] = N_0, \text{ w którym}$$

$$(4) \quad N_0 = \sum [(x_i - x_0) Y_i - (y_i - y_0) X_i]$$

przedstawia moment układu sił przyłożonych względem prostej  $pz$ . Punktem  $p$  może być którykolwiek punkt ciała, poruszający się razem z nim. Równanie (3) możemy także napisać w postaci

$$(5) \quad \sum m_i \left( x_i \frac{d^2 y}{dt^2} - y_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) - x_0 \sum m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} + y_0 \sum m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = N_0.$$

Oznaczmy przez  $\Lambda$ ,  $M$ ,  $Z$  współrzędne ruchu chwilowego względem osi  $x$ ,  $y$  i  $z$ ; wtedy  $\Lambda$  i  $M$  oznaczają odpowiednio prędkości ruchów postępowych w kierunku



kach osi  $x$  i  $y$ , a  $Z$  oznacza prędkość kątową obrotu około osi  $Oz$ . Składowymi prędkości  $x_i'$ ,  $y_i'$  punktu  $x_i$ ,  $y_i$  będą wtedy

$$x_i' = \Lambda - Z y_i, \quad y_i' = M + Z x_i, \quad \text{a stąd:}$$

$$\begin{aligned} \Sigma m_i (x_i y_i' - y_i x_i') &= -\Lambda \Sigma m_i y_i + M \Sigma m_i x_i + Z \Sigma m_i (x_i^2 + y_i^2) = \\ &= m (-\Lambda \eta + M \xi) + Z [I + m (\xi^2 + \eta^2)], \end{aligned}$$

gdzie  $I$  oznacza moment bezwładności ciała względem prostej, prostopadłej do płaszczyzny  $Oxy$ , i przechodzącej przez środek masy. Ponieważ dla środka masy  $(\xi, \eta)$  mamy  $\xi' = \Lambda - Z \eta$ ,  $\eta' = M + Z \xi$ , przeto  $-\Lambda \eta + M \xi = \xi \eta' - \eta \xi' - Z (\xi^2 + \eta^2)$ , a zatem

$$(6) \quad \Sigma m_i (x_i y_i' - y_i x_i') = m (\xi \eta' - \eta \xi') + Z I = m (\xi \eta' - \eta \xi') + I \frac{d\varphi}{dt},$$

jeżeli  $d\varphi$  oznacza nieskończenie mały kąt obrotu chwilowego. Różniczkując ostatnie równanie względem  $t$ , otrzymamy

$$(7) \quad \Sigma m_i \left( x_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - y_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) = m \left( \xi \frac{d^2 \eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2 \xi}{dt^2} \right) + I \frac{d^2 \varphi}{dt^2},$$

a podstawiając tę wartość w (5) i wstawiając nadto  $\Sigma m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = m \frac{d^2 \xi}{dt^2}$ ,

$\Sigma m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = m \frac{d^2 \eta}{dt^2}$ , otrzymamy następujące równanie momentów:

$$(8) \quad m \left[ (\xi - x_0) \frac{d^2 \eta}{dt^2} - (\eta - y_0) \frac{d^2 \xi}{dt^2} \right] + I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = N_0,$$

które łącznie z równaniami (1) określa ruch posuwisty. Biorąc momenty względem prostopadłej do płaszczyzny  $xy$ , wyprowadzonej z punktu  $O$ , należy w (8) podstawić  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ , skąd

$$(9) \quad m \left( \xi \frac{d^2 \eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2 \xi}{dt^2} \right) + I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = N;$$

a biorąc moment względem prostopadłej, przechodzącej przez środek masy, należy podstawić  $x_0 = \xi$ ,  $y_0 = \eta$ , skąd

$$(10) \quad I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = N_s,$$

gdzie  $N_s$  oznacza moment układu sił przyłożonych względem tej prostopadłej. Z równań (1) i (10) otrzymujemy najprostszym sposobem współrzędne ruchu chwilowego. Z całek pierwszych i drugich równań (1) otrzymujemy  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\xi$  i  $\eta$  jako funkcję czasu i tych wielkości, które wyrażają warunki początkowe. Z równań  $\xi' = \Lambda - Z \eta$ ,  $\eta' = M + Z \xi$  otrzymamy  $\Lambda = \xi' + Z \eta$ ,  $M = \eta' - Z \xi$ , a stąd możemy współrzędne ruchu postępowego wyrazić przez  $Z$ .

Kładąc  $Z = \frac{d\varphi}{dt}$ , możemy równanie (10) napisać także  $I \frac{dZ}{dt} = N_s$ , a z całki tego równania otrzymamy współrzędną  $Z$  w funkcji czasu, pozwalającą w końcu obliczyć  $\Lambda$  i  $M$ . Oś obrotu chwilowego wyznaczają równania

$$(11) \quad \Lambda - Z y = 0, \quad M + Z x = 0.$$

Między  $3n$  współrzędnymi  $n$  punktów masyjnych zachodzi  $3n - 3$  związków, z których  $3n - 6$  określają sztywność ciała, a 3 związki wyrażają, że trzy punkty poruszają się równolegle do danej płaszczyzny. Jeżeli więc związków nie zachodzi, wtedy ruch posuwisty jest swobodny, a powyższe równania pozwalają wyrazić 3 niewiadome przez współrzędne ruchu. W przypadku, gdy ilość związków jest większa, niż  $3n - 3$ , ruch posuwisty nie jest swobodny, a wtedy zasada ruchu środka masy nie może być bezpośrednio zastosowana. Ten przypadek zachodzi wtedy, kiedy dany jest tor jednego punktu, lub kiedy wiadome są tory dwu punktów, lub też kiedy dana jest linia krzywa, do której pewna prosta na ciele ma być wciąż styczną i t. p. W tych przypadkach możemy ruch uważać za swobodny, jeżeli tylko uwzględnimy reakcje, pochodzące z danych warunków. Niech  $L_k = 0$  wyraża dany warunek; wtedy równania ruchu punktu  $x_i, y_i$  będą

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + \lambda_k \frac{\partial L_k}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i + \lambda_k \frac{\partial L_k}{\partial y_i}.$$

a stąd

$$(12) \quad m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = X + \sum \lambda_k \frac{\partial L_k}{\partial x_i}, \quad m \frac{d^2 \eta}{dt^2} = Y + \sum \lambda_k \frac{\partial L_k}{\partial y_i}.$$

Te równania określają ruch środka masy. Podobnie należy w równaniu momentów uwzględnić momenty reakcji, aby rozwiązać zadanie o ruchu obrotowym, którego układ dokonywa w każdej chwili. Stosowny wybór kierunków osi współrzędnych, tudzież punktu  $x_0, y_0$ , pozwala w wielu przypadkach uprościć rachunek.

**158. RUCH UKŁADU SWOBODNEGO.** Układ sztywny jest swobodny, jeżeli oprócz związków, określających jego sztywność, żadne inne związki między współrzędnymi punktów nie zachodzą. Do określenia ruchu potrzeba i wystarcza znać 6 współrzędnych tego ruchu. Z zasady d'Alembert'a wynika następujących 6 równań, które pozwalają wyznaczyć te współrzędne:

$$(1) \quad M \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \sum X_i, \quad M \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \sum Y_i, \quad M \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \sum Z_i,$$

$$(2) \quad \sum m_i \left( y_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - z_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) = \sum L_i, \quad \sum m_i \left( z_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - x_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) = \sum M_i, \\ \sum m_i \left( x_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - y_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) = \sum N_i.$$

Wystawmy w środku masy ( $\xi, \eta, \zeta$ ) układ osi, równoległych do osi układu  $Oxyz$  i posuwających się równolegle w przestrzeni. Jeżeli  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  oznaczają współrzędne punktu  $(x_i, y_i, z_i)$  względem tych osi, natenczas  $x_i = \xi + \xi_i, y_i = \eta + \eta_i, z_i = \zeta + \zeta_i$ . Biorąc momenty  $L_{is}, M_{is}, N_{is}$  sił przyłożonych względem tych osi, otrzymamy według (2)

$$\sum m_i \left[ (y_i - \eta) \frac{d^2 z_i}{dt^2} - (z_i - \zeta) \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right] = \sum L_{is},$$



i podobne dwa inne równania. Podstawiając wyrażenia współrzędnych i uwzględniając, że  $\Sigma m_i \xi_i = 0$ ,  $\Sigma m_i \eta_i = 0$ , mieć będziemy dla osi  $\xi$

$$(3) \quad \Sigma m_i \left( \eta_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} - \xi_i \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} \right) = \frac{d}{dt} \Sigma m_i (\eta_i \xi_i' - \xi_i \eta_i') = \Sigma L_{is},$$

i podobnie dla osi  $\eta$  i  $\zeta$ . Ponieważ te równania mają ten sam kształt, co równania ruchu układu, kręcącego się około punktu stałego, (art. 150), przeto mamy ważne twierdzenie: *układ sztywny i swobodny kręci się podczas ruchu około środka masy, jako około punktu stałego w przestrzeni.*

Łącząc to twierdzenie z zasadą ruchu środka masy, widzimy, że kinetyka układów sztywnych i swobodnych sprowadza się do jednoczesnego rozważania dwu ruchów, mianowicie ruchu postępowego środka masy i kręcenia się około tego środka, a obadwa ruchy możemy zbadać na podstawie takich sposobów postępowania, jakie w swoim miejscu podane zostały. Rzecz o ruchu środka masy należy do kinetyki punktu, a kręcenie się około środka masy możemy zbadać na podstawie równań Euler'a, pomijając kształt i rozkład masy układu, i zastępując ten układ przez elipsoidę centralną.

Gdy na ciało fizyczne, przez siły popędowe w ruch wprowadzone, żadne siły ciągle nie działają, wystawmy w środku masy oś niezmienną, poprowadźmy w wiadomej odległości płaszczyznę niezmienną i rozważajmy ruch elipsoidy centralnej, toczącej się na tej płaszczyźnie, podczas gdy środek tej elipsoidy posuwa się po linii prostej. Proste, około których ciało obraca się, utworzą stożek, którego wierzchołek porusza się po linii prostej; drugi stożek, którego podstawą jest herpolodyja, posiada ruch postępowy środka masy, a pierwszy stożek toczy się na nim bez ślizgania. Tym sposobem otrzymujemy wiadomy z kinematyki obraz ruchu, którego współrzędne zależą od sił popędowych i od warunków początkowych.

Redukując siły przyłożone do środka masy ciała, otrzymamy siłę i parę wypadkową, które oddzielnie sprawiają obadwa ruchy, z których składa się ruch ciała. Siła wypadkowa sprawia ruch postępowy środka masy, w którym przedstawiamy sobie skupioną całą masę ciała, a para wypadkowa nadaje ciału obrót około pewnej prostej, przez ten środek przechodzącej. Jeżeli moment pary wypadkowej sił popędowych, wprowadzających ciało w ruch, tudzież moment pary sił ciągłych, podczas ruchu działających, jest równy zeru, wtedy prędkości kątowe  $p$ ,  $q$ ,  $r$  będą ciągle równe zeru, a ruch ciała będzie postępowy. *Ruch ciała sztywnego i swobodnego jest postępowy, jeżeli siły przyłożone, zredukowane do środka masy, stanowią w każdej chwili układ sił 1-go rodzaju.* Dzielać tę siłę wypadkową przez masę ciała, otrzymamy przyspieszenie jego ruchu postępowego.

## Ć W I C Z E N I A.

(1). Wyprowadzić równania Euler'a z ogólnych równań Lagrange'a, wynikających z zasady Hamilton'a.

(2). Na elipsojdę, której środek jest ustalony, działa para sił na płaszczyźnie, której dostawy kierunkowe względem osi głównych są  $l, m, n$ : okazać, że dostawy kierunkowe osi obrotu są odpowiednio proporcjonalne względem  $\frac{l}{b^2+c^2}$ ,  $\frac{m}{c^2+a^2}$ ,  $\frac{n}{a^2+b^2}$ , gdzie  $a, b, c$  oznaczają połowy osi głównych elipsojdy.

(3). Okazać, że płaszczyzna niezmienna w każdym punkcie prostej, którą opisuje środek masy układu słonecznego, jest równoległa do płaszczyzny niezmiennej, odpowiadającej środkowi masy.

(4). Okazać, że jeżeli płaszczyzny niezmiennie w punktach pewnej prostej są równoległe, natenczas ta prosta jest równoległa do toru środka masy.

(5). Odetnijmy od środka kręcenia się na osiach bezwładności długości, odwrotnie proporcjonalne względem ramion bezwładności względem tych osi; natenczas suma kwadratów prędkości punktów końcowych tych odcinków jest stała, jeżeli na ciało nie działają żadne siły podczas ruchu.

(6). Okazać, że gdy kręcąc się około środka elipsojdy bezwładności przeciwnamy ciągle płaszczyznę średnicową, równoległą do płaszczyzny niezmiennej, to otrzymywać będziemy podczas ruchu pole przekroju stałej wielkości.

(7). Okazać, że krzywizna elipsojdy bezwładności jest stała w każdym punkcie polodyi.

(8). Długość normalnej do elipsojdy w punktach polodyi, liczona od téj powierzchni do którejkolwiek płaszczyzny głównej, jest stała. Ślady normalnych na płaszczyźnie głównej tworzą krzywą, podobną do krzywej ogniskowej elipsojdy na téj płaszczyźnie.

(9). Odetnijmy od środka kręcenia się na osiach bezwładności długości, proporcjonalne względem ramion bezwładności; suma rzutów pól, przez te promienie opisywanych, na płaszczyznę niezmienną, zmienia się proporcjonalnie względem czasu.