

ROZDZIAŁ VIII.

ZAGADNIENIA Z KINETYKI PUNKTU.

89. SPADEK PIONOWY PRZY OPORZE POWIETRZA. Punkt m , będący uprzednio w spoczynku, spada pionowo na ziemię i doznaje oporu powietrza, proporcjonalnego względem kwadratu prędkości; mamy wyznaczyć jego ruch. Obierzmy położenie początkowe punktu za początek osi x , mającej kierunek pionowy ku ziemi, i oznaczmy przez v prędkość punktu; wówczas opór powietrza możemy wyrazić zapomocą wzoru $-\frac{mgv^2}{k^2}$, w którym k jest pewnym współczynnikiem, zależnym od gęstości powietrza. Równanie różniczkowe ruchu jest (art. 75)

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = mg \left(1 - \frac{v^2}{k^2} \right).$$

A ponieważ $v = \frac{dx}{dt}$, przeto otrzymamy, po skróceniu przez m ,

$$(1) \quad \frac{dv}{dt} = g \left(1 - \frac{v^2}{k^2} \right),$$

z czego wynika

$$(2) \quad t = \frac{k^2}{g} \int \frac{dv}{v^2 - k^2} = \log \left(\frac{k+v}{k-v} \right)^{\frac{k}{2g}},$$

bez stałej, gdyż $t=0$ dla $v=0$. Z ostatniego równania mamy

$$(3) \quad v = k \cdot \frac{e^{\frac{2gt}{k}} - 1}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}, \quad \text{a stąd}$$

$$x = k \int \frac{e^{\frac{2gt}{k}} - 1}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1} dt + a = \frac{k^2}{g} \log \left(e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}} \right) + a;$$

ponieważ zaś $x=0$ dla $t=0$, przeto $a = -\frac{k^2}{g} \log 2$; a więc

$$(4) \quad x = \frac{k^2}{g} \log \frac{e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}}{2},$$

co przedstawia równanie ruchu w postaci skończonej. Rozwiązując to równanie względem t , otrzymamy

$$(5) \quad t = \frac{x}{k} + \frac{k}{g} \log \left(1 + \sqrt{1 - e^{-\frac{2gx}{k^2}}} \right).$$

Wstawmy $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{v \cdot dv}{dx}$ w równanie (1); otrzymawszy równanie

$$dx = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{v \cdot dv}{k^2 - v^2},$$

całkujemy je, przyjmując, że $x=0$ dla $v=0$; mieć będziemy

$$(6) \quad x = \log \left(\frac{k^2}{k^2 - v^2} \right)^{\frac{k^2}{2g}}, \quad \text{skąd } v = k \left(1 - e^{-\frac{2gx}{k^2}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Z równania (3) okazuje się, że zawsze $v < k$. Ponieważ zaś prawa strona tego równania przybiera wartość k dla $t = \infty$, przeto prędkość v przy nieograniczeniu rosnącym t zdąża do granicy k . Z równania (1) zaś widoczna, że przyspieszenie punktu jest ciągle dodatnie, a jego wielkość maleje nieustannie tak, iż to przyspieszenie staje się równym zero dla $t = \infty$. Azatym spadek punktu zdąża w granicy, przy $t = \infty$, do ruchu jednostajnego. Gdybyśmy po prawej stronie wzoru (5) zamiast x wstawili pierwotną wysokość punktu ponad ziemią, to otrzymalibyśmy czas, po którego upływie punkt spadnie na ziemię. Biorąc $k = \infty$, mielibyśmy spadek punktu w próżni.

90. RZUT UKOŚNY. Pocisk, który uważamy za punkt, wyrzucamy w próżni z prędkością c , której kierunek tworzy z poziomem kąt α , zwany elewa-

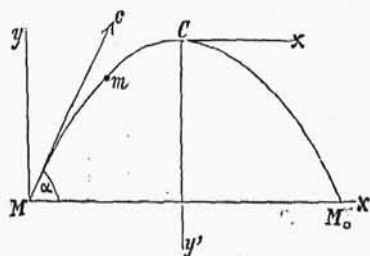


Fig. 36.

cyjną rzutu; mamy wyznaczyć ruch pocisku. Przesuńmy pionową płaszczyznę xy (fig. 36) przez położenie początkowe M pocisku, a osią y niech będzie linia pionowa w tym punkcie, od niego w górę. Ponieważ na punkt działa tylko w kierunku osi y siła ciężkości $-mg$, przeto równania ruchu będą

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Całkując je, otrzymamy

$$\frac{dx}{dt} = c_1, \quad \frac{dy}{dt} = c_2 - gt, \quad \frac{dz}{dt} = c_3;$$

ponieważ zaś dla $t=0$ (w M) rzuty prędkości są odpowiednio $c \cdot \cos \alpha$, $c \cdot \sin \alpha$, 0, przeto $c_1 = c \cos \alpha$, $c_2 = c \sin \alpha$, $c_3 = 0$, a więc

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = c \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dt} = c \sin \alpha - gt, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Całkując powtórnie, otrzymamy

$$x = C_1 + ct \cos \alpha, \quad y = C_2 + ct \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}, \quad z = C_3,$$

a ponieważ dla $t=0$ mamy $x=0$, $y=0$, $z=0$, więc $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ i

$$(2) \quad x = ct \cos \alpha, \quad y = ct \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}, \quad z = 0.$$

Z ostatniego równania widzimy, że pocisk porusza się na płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez prędkość początkową; wystarczy zatem pierwsze dwa równania ruchu. Równania (2) okazują, że ruch poziomy punktu jest jednostajny z prędkością $c \cos \alpha$, a ruch pionowy jest jednostajnie opóźniony z prędkością początkową $c \sin \alpha$. Rugując t z wyrażen na x i y , otrzymamy równanie toru

$$(3) \quad y = x \tan \alpha - \frac{g}{2c^2 \cos^2 \alpha} x^2,$$

z którego wynika, że pocisk opisuje parabolę, której oś jest pionowa. Spółrzędne X i Y wierzchołka C tej paraboli są

$$(4) \quad X = \frac{c^2}{2g} \sin 2\alpha, \quad Y = \frac{c^2}{2g} \sin^2 \alpha.$$

Obierzmy C za początek nowych osi współrzędnych x' i y' , równoległych do poprzednich, z osią y' pionowo na dół; wtedy równanie paraboli będzie

$$(5) \quad y' = \frac{g}{2c^2 \cos^2 \alpha} x'^2.$$

Wielkość Y nazywamy wysokością rzutu; ona przedstawia największą wysokość, do jakiej pocisk się wznosi. Kierownica paraboli znajduje się nad poziomem w wysokości $\frac{c^2}{2g}$, a więc w wysokości odpowiadającej prędkości rzutu i niezależnej od elewacji. Spółrzędne ξ , η ogniska paraboli są

$$(6) \quad \xi = X = \frac{c^2}{2g} \sin 2\alpha, \quad \eta = \frac{c^2}{2g} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = -\frac{c^2}{2g} \cos 2\alpha.$$

Parabola przecina poziom w dwu punktach, M i M_0 , a pocisk padnie na ziemię w punkcie M_0 . Długość $X_1 = MM_0$ nazywamy doniosłością rzutu;

kładąc w (3) $y=0$, otrzymamy $X_1 = \frac{c^2}{g} \sin 2\alpha$, z czego wynika, że doniosłość rzutu jest największa dla $\alpha = 45^\circ$ i wynosi wtedy $\frac{c^2}{g}$.

Poprowadźmy przez M linię prostą, która tworzy z poziomem kąt β . Kładąc $y = x \cdot \tan \beta$, otrzymamy czas t_β , po którego upływie pocisk znajduje się na tej prostej, $t_\beta = \frac{2c}{g} (\sin \alpha - \cos \alpha \cdot \tan \beta)$, w punkcie o współrzędnych

$$(7) \quad x_\beta = \frac{2c^2}{g} \sin(\alpha - \beta) \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}, \quad y_\beta = \frac{2c^2}{g} \sin(\alpha - \beta) \cdot \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos^2 \beta};$$

doniosłość zaś rzutu na tej prostej będzie

$$(8) \quad \delta_\beta = \sqrt{x_\beta^2 + y_\beta^2} = \frac{2c^2}{g} \sin(\alpha - \beta) \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \beta}.$$

Żeby δ_β było największe, musi być $\frac{d\delta_\beta}{d\alpha} = 0$, co odpowiada elewacji $\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right)$, z czego wynika, że kierunek rzutu jest dwusieczną kąta, który dana prosta tworzy z pionem.

Jeżeli x i y są współrzędnymi danego punktu, to, kładąc $y = x \cdot \tan \beta$ i wstawiając tę wartość w (3), otrzymamy równanie

$$\cos \alpha \cdot \sin(\alpha - \beta) = \frac{gx}{2c^2} \cos \beta,$$

które pozwala obliczyć elewację α , aby przy prędkości c pocisk trafił w punkt (x, y) . To równanie daje dwie wartości α' i α'' na elewację, dla których $\cos \alpha' \sin(\alpha' - \beta) = \cos \alpha'' \sin(\alpha'' - \beta)$, a więc $\alpha'' - \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha'$, czyli

$$(9) \quad \begin{aligned} \alpha'' + \alpha' &= \frac{\pi}{2} + \beta = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right), \text{ więc} \\ \alpha'' - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right) - \alpha'. \end{aligned}$$

Z równań (1) i (2), lub także z zasady energii otrzymujemy wyrażenie kwadratu prędkości v w dowolnym punkcie, $v^2 = c^2 - 2gy$, a z tego wzoru wynika, że prędkość pocisku zależy tylko od prędkości początkowej i od jego wysokości nad poziomem.

Ponieważ równanie paraboli zawiera przy danym c parametr α , przeto można wyznaczyć obwiednię parabol rzutu dla rozmaitych elewacji, miejsce geometryczne wierzchołków, tudzież ognisk tych parabol i t. p. Te zagadnienia pozostawiamy czytelnikowi.

91. RUCH CENTRALNY. Najważniejszym ruchem tego rodzaju jest ruch centralny, gdy ma zastosowanie prawo Newton'a, t. j. gdy siła (przyciąganie), sprawiająca przyspieszenie punktu, jest odwrotnie proporcjonalna względem kwadratu długości promienia wodzącego. Wiadomo (art. 16), że przyspieszenie ruchu centralnego planet około słońca jest odwrotnie proporcjonalne względem kwadratu odległości od środka słońca, z czego wnosimy, że siła centralna słońca działa według tegoż samego prawa. Z prawa zatem Newton'a można otrzymać prawa Kepler'a.

Obierzmy środek ruchu jako początek układu współrzędnych, a osi Ox i Oy na płaszczyźnie ruchu i niech $\frac{mk^2}{r^2}$ wyraża przyciąganie, którego punkt (x, y) o masie m doznaje od początku osi, będącego w odległości r . Wówczas równania ruchu tego punktu będą

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k^2x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k^2y}{r^3}.$$

Zasada zachowania pól i zasada energii prowadzą do dwu pierwszych całek tych równań. Kładąc $x = r \cdot \cos \varphi$, $y = r \cdot \sin \varphi$, gdzie φ jest kątem, liczącym od dowolnie obranej osi biegunowej Ox , mamy na mocy pierwszej zasady

$$(2) \quad x \cdot \frac{dy}{dt} - y \cdot \frac{dx}{dt} = r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = 2a,$$

gdzie a oznacza stałą prędkość wycinkową. Mamy tutaj

$$X \cdot dx + Y \cdot dy = d\left(\frac{mk^2}{r}\right),$$

a zatem potencjał $U = \frac{mk^2}{r}$, skąd otrzymamy

$$(3) \quad v^2 - v_0^2 = 2k^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right),$$

wyrażenie prędkości v , gdy dla $r = r_0$ mamy prędkość v_0 . Powierzchniami potencyjalnymi są kule, opisane ze środka ruchu, a koła spółśrodkowe, zakreślone z tego środka na płaszczyźnie ruchu, przedstawiają na tej płaszczyźnie linie potencyjne. Prędkość więc otrzymuje też samą wartość, ilekroć punkt znajduje się w tej samej odległości od środka. Niech $b = v_0^2 - \frac{2k^2}{r_0}$; wtedy

$$(4) \quad v^2 = \frac{2k^2}{r} + b,$$

a ponieważ według art. 10-go

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\right] \cdot \frac{4a^2}{r^4},$$

przeto otrzymujemy następujące równanie różniczkowe toru punktu

$$(5) \quad \left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\right] \frac{4a^2}{r^4} = \frac{2k^2}{r} + b, \quad \text{skąd}$$

$$d\varphi = 2a \cdot \frac{dr}{r^2 \sqrt{-\frac{4a^2}{r^2} + \frac{2k^2}{r} + b}}.$$

Kładąc

$$\Phi = \frac{\frac{2a}{r} - \frac{k^2}{2a}}{\sqrt{b + \left(\frac{k^2}{2a}\right)^2}}$$

i całkując równanie poprzednie, otrzymamy

$$(6) \quad \varphi - \varphi_1 = \arccos \Phi,$$

gdzie φ_1 jest stałą całkowania. Ponieważ Φ rośnie z ubywającym r , i dla pewnej wartości $r = r_1$ przybiera największą wartość równą jedności, przeto φ_1 oznacza tę wartość kąta φ , która odpowiada najmniejszemu $r = r_1$. Obiekrążając oś biegunową w kierunku najmniejszego promienia wodzącego r_1 i licząc od tej osi kąt φ , otrzymamy $\varphi_1 = 0$, a zatem:

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{2a}{r} - \frac{k^2}{2a}}{\sqrt{b + \left(\frac{k^2}{2a}\right)^2}},$$

czyli

$$(7) \quad r = \frac{\frac{4a^2}{k^2}}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2a}{k^2}\right)^2 \cdot b \cos \varphi}}.$$

Z tego równania okazuje się, że punkt opisuje krzywą stopnia 2-go, której ogniskiem jest środek ruchu. Parametr p i mimośród e tej krzywej są:

$$(8) \quad p = \frac{4a^2}{k^2}, \quad e = \sqrt{1 + \left(\frac{2a}{k^2}\right)^2 b}.$$

W art. 17-ym inaczej dowiedziono tego twierdzenia i podano kryterya rozpoznania natury tej krzywej. Jeżeli punkt opisuje elipsę, której oś główna jest $2A$, to $p = A(1 - e^2)$, a więc

$$(9) \quad 2a = k \sqrt{A(1 - e^2)}, \quad b = -\frac{k^2}{A}, \quad v^2 = \frac{2k^2}{r} - \frac{k^2}{A}.$$

Dla ruchu centralnego mamy (art. 15) $v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{4a^2}{r^2}$; będzie więc

$$(10) \quad \begin{aligned} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{4a^2}{r^2} &= \frac{2k^2}{r} + b, \\ \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 &= -\frac{4a^2}{r^2} + \frac{2k^2}{r} + b. \end{aligned}$$

Różniczkując to równanie względem t , otrzymamy

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^2} + \frac{4a^2}{r^3}, \quad \frac{k^2}{r^2} = \frac{4a^2}{r^3} - \frac{d^2r}{dt^2};$$

z pierwszego przeto równania (1) mamy

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r} \left(\frac{4a^2}{r^3} - \frac{d^2r}{dt^2} \right),$$

czyli

$$r \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} - x \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{x}{r} \cdot \frac{4a^2}{r^2}, \quad \frac{d}{dt} \left(r \cdot \frac{dx}{dt} - x \cdot \frac{dr}{dt} \right) + \frac{x}{r} \cdot \frac{4a^2}{r^2} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \left[r^2 \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{x}{r} \right) \right] + \frac{x}{r} \cdot \frac{4a^2}{r^2} = 0, \quad \frac{r^2}{2a} \cdot \frac{d}{dt} \cdot \left[\frac{r^2}{2a} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{x}{r} \right) \right] + \frac{x}{r} = 0,$$

albo nakoniec

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{x}{r} \right) + \frac{x}{r} = 0, & \text{a podobnie} \\ \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{y}{r} \right) + \frac{y}{r} = 0. \end{cases}$$

Możemy więc równania pierwotne (1) zastąpić dwoma równaniami różniczkowymi liniowymi. Całkując te równania, mieć będziemy

$$x = r(a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi), \quad y = r(a_2 \cos \varphi + b_2 \sin \varphi),$$

a z tych równań można także otrzymać tor punktu.

Z równania (10) wynika

$$(12) \quad dt = \sqrt{\frac{dr}{-\frac{4a^2}{r^2} + \frac{2k^2}{r} + b}};$$

jeżeli tu zamiast a i b wstawimy ich wartości (9), stosujące się do ruchu po elipsie, to otrzymamy równanie

$$(13) \quad dt = \frac{\sqrt{A}}{k} \cdot \frac{r \cdot dr}{\sqrt{A^2 e^2 - (A - r)^2}},$$

z którego przez całkowanie możemy obliczyć czas w funkcji promienia wodzącego. W rachunkach jednak astronomicznych nie używa się tego wzoru, lecz wprowadza się, dla uproszczenia rachunku, inną zmienną. Niech O (fig. 37) przedstawia środek słońca, P punkt przysłoneczny (perihelium), P' punkt odsloneczny (aphelium); wtedy kąt φ o wierzchołku w O , liczony od osi OP , nazywamy anomaliją prawdziwą. Na osi PP' , jako na średnicy, zakreśliwszy koło, z jej środka wyprowadźmy do niej prostopadłą mN ; ona przecina koło w punkcie m' . Kąt $u = \angle PM'm'$ nazywamy anomaliją excentryczną, albo anomaliją średnią, i tego kąta, jako zmiennój, używamy w rachubach astronomicznych. Z figury otrzymamy

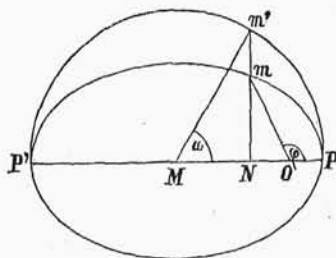


Fig. 37.

$$ON = MN - MO, \quad \text{czyli } r \cdot \cos \varphi = A \cos u - Ae = A(\cos u - e);$$

ponieważ zaś równanie elipsy jest

$$(14) \quad r(1 + e \cos \varphi) = A(1 - e^2),$$

przeto, po wstawieniu powyższej wartości,

$$(15) \quad r = A(1 - e \cdot \cos u).$$

Wskutek tego, według (13),

$$dt = \frac{A\sqrt{A}}{k} (1 - e \cos u) \cdot du.$$

Kładąc jeszcze $n = \frac{k}{A\sqrt{A}}$ i całkując, mieć będziemy $nt = u - e \sin u + C_1$.

Lecz dla $u = 0$, $t = 0$, przeto $C_1 = 0$, a zatem

$$(16) \quad nt = u - e \sin u.$$

To równanie wyraża czas przez anomaliją średnią. Z tego wyrażenia okazuje się, że czas jest funkcją peryjodyczną anomalii, i że $T = \frac{2\pi}{n}$ jest wyrażeniem czasu całkowitego obiegu planety około słońca. Po wstawieniu tu wartości n , mamy

$$(17) \quad T^2 = \frac{4\pi^2 A^3}{k^2},$$

a stąd

$$(18) \quad k^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{A^3}{T^2}.$$

Biorąc centymetr za jednostkę długości, a sekundę za jednostkę czasu, mamy dla ziemi $A = 1487 \cdot 10^{10}$; $T = 31558118$, a zatem $A^3 : T^2 = 33015 \times 10^{20}$, skąd mamy następującą wartość współczynnika przyciągania:

$$(19) \quad k^2 = 13034 \times 10^{22}.$$

Wiadomo, że masa słońca, wyrażona w gramach, wynosi $199 \cdot 10^{31}$; dzieląc k^2 przez ostatnią liczbę, otrzymamy

$$(20) \quad C = \frac{13034 \cdot 10^{22}}{199 \cdot 10^{31}} = \frac{1}{1,523 \cdot 10^7} \text{ dyny},$$

jako wielkość siły, jaką, według prawa Newton'a, masa jednego grama przyciąga masę jednego grama w odległości jednego centymetra.

92. WAHADŁO PROSTE (MATEMATYCZNE). Tak nazywamy przyrząd idealny: prosta sztywna jest w jednym końcu utwierdzona, a na jej końcu drugim znajduje się punkt masy, poruszający się na płaszczyźnie pionowej pod działaniem siły ciężkości. Wskutek tego połączenia punkt opisuje koło. Pomijając masę próstę i opór powietrza, wyznaczmy ruch wahadła. Przez punkt zawieszenia C (fig. 38) poprowadźmy oś pionową y -ów, a przez punkt najniższy A koła poziomą oś x -ów. Jeżeli r jest długością próstę,

zwaną długością wahadła, to mamy warunek ruchu, niezależnie od siły zachodzący, $x^2 + y^2 - 2ry = 0$, który wyraża sztywność prostej. Na mocy twierdzenia Galileusza, wyrażającego w tym zagadnieniu zasadę energii (art. 84), prędkość v wahadła w dowolnym punkcie m otrzymamy z równania

$$(1) \quad v^2 = v_0^2 + 2g(h - y),$$

gdzie v_0 oznacza prędkość w dowolnym punkcie M , dla którego $y = h$. Z tego wzoru wynika, że podczas spadku od M ku A prędkość wzrasta i że wahadło posiada w punkcie najniższym A , dla którego $y = 0$, największą prędkość $V^2 = v_0^2 + 2gh$. Odtąd podnosi się wahadło i jego prędkość maleje, a w punkcie m' , leżącym z punktem m na tym samym poziomie, przybiera tą prędkość znowu wartość v . Prędkość będzie równa zero w tym punkcie, dla którego

$v_0^2 + 2g(h - y) = 0$, a więc gdy $y = h + \frac{v_0^2}{2g}$. Jeżeli zatem wahadło wzniesie się ponad M o wysokość, odpowiednią prędkości v_0 w tym punkcie, natenczas prędkość będzie równa zero. Ponieważ $y < 2r$, przeto ten przypadek nastąpi dla $\frac{v_0^2}{2g} + h < 2r$, albo, gdy wprowadzimy oznaczenie $H = \frac{v_0^2}{2g} + h$, dla $H < 2r$. Jeżeli $H < 2r$, natenczas wahadło wzniesie się do pewnego punktu N , dla którego $y = H$, a odtąd zacznie znowu spadać ku A , podniesie się znowu do punktu N' w tym samym poziomie, co punkt N , spadnie do A i t. d. bez końca. Taki ruch nazywamy wahaniami, czyli oscylacją; wahanie się jest ruchem okresowym, a czas, potrzebny do opisanego łuku NAN' , zowiemy trwaniem wahaniecia.

Jeżeli $H = 2r$, to punkt m przychodzi do spoczynku u szczytu koła; a jeżeli $H > 2r$, to punkt nie przyjdzie do spoczynku, lecz będzie opisywał koło nieustannie w tym samym kierunku. W tych obudwu wypadkach niema więc właściwego wahaniecia się. — Zastanowimy się nad oscylacją wahadła, przyjmując $H < 2r$.

Według (1)

$$(2) \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v_0^2 + 2g(h - y).$$

To równanie, wyrażające zasadę energii dla ruchu punktu po jakiegokolwiek krzywej przy wyłącznym działaniu siły ciężkości, pozwala wyznaczyć czas, jeżeli uwzględnimy równanie danego toru. Kładąc $ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right] \cdot dy^2$ i wyrażając $dx : dy$ z równania koła, otrzymamy dla wahadła

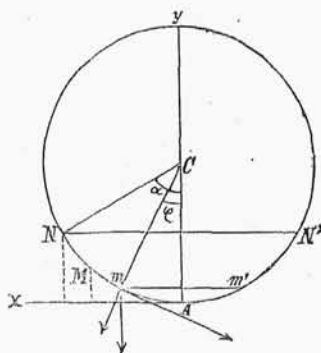


Fig. 38.

$$(3) \quad dt = \pm \sqrt{\frac{r}{2}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{y} \sqrt{1 - \frac{y}{2r}} \sqrt{v_0^2 + 2g(h-y)}}.$$

Ponieważ zawsze $dt > 0$, przeto należy po prawej stronie brać znak $+$, jeżeli wahadło się podnosi ($dy > 0$), zaś znak $-$, jeżeli spada ($dy < 0$). Kładąc wartość za H i uważając ruch od N ku A , otrzymamy

$$dt = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{Hy-y^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{y}{2r}}},$$

a jeżeli t oznacza czas, potrzebny na spadek od N do A , to

$$(4) \quad \begin{aligned} t &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{g}} \int_H^0 \frac{dy}{\sqrt{Hy-y^2} \sqrt{1 - \frac{y}{2r}}} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^H \frac{dy}{\sqrt{Hy-y^2} \sqrt{1 - \frac{y}{2r}}}. \end{aligned}$$

Biorąc w (3) znak $+$ i całkując od 0 do H , otrzymamy ten sam czas, potrzebny do opisanie łuku AN' , z czego się okazuje, że trwanie jednej oscylacji wynosi

$$(5) \quad T = 2t = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^H \frac{dy}{\sqrt{Hy-y^2} \cdot \left(1 - \frac{y}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}}}.$$

Ponieważ $y < 2r$, przeto możemy $\left(1 - \frac{y}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}}$ rozwinąć na szereg podług potęg argumentu y , tak iż

$$(6) \quad T = \sqrt{\frac{r}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_n}{(2r)^n} \int_0^H \frac{y^n \cdot dy}{\sqrt{Hy-y^2}},$$

gdzie

$$\left(-\frac{1}{2}\right)_n = (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}.$$

Wiadomo z rachunku całkowego, że

$$\begin{aligned} \int_0^H \frac{y^n \cdot dy}{\sqrt{Hy-y^2}} &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} H^n \int_0^H \frac{dy}{\sqrt{Hy-y^2}} = \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} H^n \pi; \end{aligned}$$

mamy zatem

$$(7) \quad T = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{H}{2r} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \left(\frac{H}{2r}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \cdot \left(\frac{H}{2r}\right)^3 + \dots + \right. \\ \left. + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)2n}\right)^2 \cdot \left(\frac{H}{2r}\right)^n + \dots \right\}.$$

Kąt $\varphi = ACm$, który wahadło w danym położeniu tworzy z pionem, zowiemy odchyleniem wahadła, a największą wartość tego kąta, $\alpha = ACN$, nazywamy obszernością wahania. Ponieważ $H = 2r \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, przeto

$$(8) \quad T = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots + \right. \\ \left. + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}\right)^2 \cdot \sin^{2n} \frac{\alpha}{2} + \dots \right\},$$

a to równanie pozwala trwanie wahnięcia obliczyć w funkcji jego obszerności.

Jeżeli obszerność wahania jest dostatecznie mała, nie przekraczająca 3° , to możemy przyjąć

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 = \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\alpha^2}{24}\right).$$

Wstawmy tę wartość w (8) i rozwińmy szereg, to otrzymamy z wystarczającym przybliżeniem

$$(9) \quad T = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \left\{ 1 + \frac{1}{16} \alpha^2 + \frac{11}{3072} \alpha^4 + \dots \right\}.$$

Dla $\alpha < 1^\circ$ wystarczy dwa pierwsze wyrazy, a wtedy będzie

$$T = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right).$$

Dla nieskończenie małych obszerności będzie w granicy $\alpha = 0$, co daje czas wahnięcia

$$(10) \quad T_0 = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Z tego wzoru okazuje się, że w wahadle *nieskończenie małe wahnięcia są niezależne od obszerności*, czyli są równoczesne (twierdzenie Galileusza). Trwanie wahnięcia zależy od długości wahadła i od przyspieszenia spadku, a zatem od miejsca na powierzchni ziemi, w którym je obserwujemy. Z równań (9) i (10) mamy

$$\frac{T_0}{T} = \frac{1}{1 + \frac{1}{16} \alpha^2 + \frac{11}{3072} \alpha^4 + \dots} = 1 - \frac{1}{16} \alpha^2 + \frac{1}{3072} \alpha^4 - \dots,$$

a stąd

$$(10') \quad T_0 = T \left(1 - \frac{\alpha^2}{16} + \frac{\alpha^4}{3072} - \dots \right).$$

Obserwacje pozwalają wyznaczyć czas T dla dostatecznie małych wahań; nie można z nich jednak bezpośrednio otrzymać czasu T_0 dla wahań nieskończenie małych. Wzór (10') pozwala z obserwowanego czasu T obliczyć T_0 .

Możemy zagadnienie o wahadle rozwiązać także zapomocą rozkładu siły na siłę styczną i na siłę normalną (art. 87). Rozkładając siłę ciężkości mg na siłę styczną P_1 i na siłę normalną P_2 , otrzymamy

$$P_1 = mg \cdot \sin \varphi; \quad P_2 = mg \cdot \cos \varphi;$$

będzie przeto

$$(11) \quad \frac{dv}{dt} = g \cdot \sin \varphi.$$

Podczas spadania wahała od N ku A mamy $v = -r \cdot \frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{dv}{dt} = -r \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}$; powyższe zatem równanie prowadzi do równania

$$(12) \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{r} \cdot \sin \varphi = 0,$$

jako równania ruchu wahała. Jeżeli wahadło podnosi się od A ku N' , natenczas siła $mg \cdot \sin \varphi$ działa w kierunku przeciwnym prędkości v ; otrzymamy zatem $\frac{dv}{dt} = -g \sin \varphi$; ponieważ jednak dla tego ruchu mamy $v = r \cdot \frac{d\varphi}{dt}$, przeto równanie (12) pozostaje niezmiennym. Mnożąc to równanie przez $2 \cdot \frac{d\varphi}{dt}$ i całkując, otrzymamy całkę pierwszą

$$\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{2g}{r} \cos \varphi + c,$$

a ponieważ $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ dla $\varphi = \alpha$, przeto $c = -\frac{2g}{r} \cos \alpha$, więc

$$(13) \quad \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{2g}{r} (\cos \varphi - \cos \alpha),$$

co wyraża zasadę energii. Z tego równania wynika

$$(14) \quad dt = \pm \sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}},$$

co pozwala czas wyrazić przez całkę eliptyczną.

Dla bardzo małej obszerności wahania możemy położyć łuk φ zamiast $\sin \varphi$ i otrzymamy z dostatecznym przybliżeniem

$$(15) \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g\varphi}{r} = 0,$$

jako równanie ruchu wahadła. Ponieważ dla $t=0$, mamy $\varphi = \alpha$, $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, przeto z ostatniego równania

$$(16) \quad \varphi = \alpha \cdot \cos t \sqrt{\frac{g}{r}}, \quad t = \sqrt{\frac{r}{g}} \arccos \frac{\varphi}{\alpha}.$$

Dla $\varphi = 0$ otrzymamy $t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r}{g}}$, a stąd $T_0 = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$, jak wyżej.

Styczna do koła, poprowadzona w punkcie m , tworzy z poziomem kąt φ , a z równania (11) widoczna, że przyspieszenie ruchu wahadła w kierunku téj stycznej wynosi $g \cdot \sin \varphi$. *Jeżeli punkt materyjalny spada po prostéj pochyłej, to jego ruch jest jednostajnie przyspieszony, a przyspieszenie tego ruchu jest równe rzutowi przyspieszenia pionowego g na tę prostą.*

Wahadło, czyniące w próżni nieskończenie małe wahnięcia, z których każde trwa jedną sekundę, nazywamy wahadłem sekundowym. Kładąc w równaniu (10) $T_0 = 1$, $r = l$, otrzymamy

$$(17) \quad l = \frac{g}{\pi^2}$$

jako długość wahadła sekundowego w tym miejscu na powierzchni morza, w którym g jest przyspieszeniem spadku. *Przyspieszenie spadku jest proporcjonalne względem długości wahadła sekundowego*; możemy więc zapomocą wahadła wyznaczyć w każdym miejscu na ziemi przyspieszenie spadku. Wahadło sekundowe jest najkrótsze na równiku, najdłuższe zaś na biegunach ziemi, a jeżeli l_0 oznacza długość wahadła sekundowego na równiku, to pod szerokością geograficzną λ otrzymamy odpowiednią długość l wahadła sekundowego ze wzoru (art. 63)

$$(18) \quad l = l_0 + \frac{\omega^2 R}{\pi^2} \sin^2 \lambda,$$

z którego, po wstawieniu wartości z art. 63-go, mamy w metrach

$$(19) \quad l = 0,99182 + 0,00344 \sin^2 \lambda.$$

Niech wahadło waha się w środku, którego opór jest proporcjonalny względem n -tęj potęgi prędkości. Oznaczając opór przez $\lambda n v^n$, otrzymamy równanie ruchu,

$$\frac{dv}{dt} = g \cdot \sin \varphi - \lambda v^n,$$

czyli, po podstawieniu wartości,

$$(20) \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + (-1)^{n+1} r^{n-1} \cdot \lambda^n \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^n + \frac{g}{r} \sin \varphi = 0.$$

Dla małych wahań w powietrzu możemy przyjąć $n = 1$, a wtedy

$$(21) \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \lambda \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{r} \sin \varphi = 0,$$

lub, pisząc łuk zamiast jego wstawy,

$$(22) \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \lambda \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{r} \varphi = 0.$$

Całka ogólna tego równania jest

$$(23) \quad \varphi = e^{-\frac{\lambda t}{2}} \left(C_1 e^{\frac{\sqrt{\lambda^2 - \frac{4g}{r}} t}{2}} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{\lambda^2 - \frac{4g}{r}} t}{2}} \right),$$

gdzie stałe C_1 i C_2 wyrażamy z warunku, że dla pierwszego wahnięcia ma być przy $t=0$ tak $\varphi = \varphi_1$ jak i $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, gdzie φ_1 jest obszernością tego wahnięcia. Według wartości wyrażenia pod znakiem pierwiastka kwadratowego w równaniu (23), należy rozróżnić trzy przypadki.

a) Gdy $\lambda^2 - \frac{4g}{r} = 0$, $\lambda = 2 \sqrt{\frac{g}{r}}$, wtedy $\varphi = C e^{-t \sqrt{\frac{g}{r}}}$, $C = \varphi_1$,
a więc

$$(24) \quad \varphi = \varphi_1 e^{-t \sqrt{\frac{g}{r}}}.$$

Aby wahadło doszło do położenia pionowego, potrzeba, iżby $\varphi = 0$, a wtedy $t = \infty$. Przy takim zatym oporze nie dojdzie wahadło do położenia pionowego, ruch przeto jego nie będzie wahadłowy.

b) Gdy $\lambda^2 - \frac{4g}{r} > 0$, czyli $\lambda > 2 \sqrt{\frac{g}{r}}$, to kładąc $\mu^2 = \lambda^2 - \frac{4g}{r}$ i wyznaczając C_1 i C_2 , otrzymamy

$$(25) \quad \varphi = \frac{\varphi_1}{2\mu} \left[(\lambda + \mu) e^{-\frac{\lambda - \mu}{2} t} - (\lambda - \mu) e^{-\frac{\lambda + \mu}{2} t} \right].$$

Ponieważ zawsze $t > 0$, przeto $\varphi = 0$ dla

$$e^{-\frac{\lambda - \mu}{2} t} = 0 \quad \text{ i } \quad e^{-\frac{\lambda + \mu}{2} t} = 0,$$

a ponieważ $\lambda - \mu > 0$, przeto znowu $t = \infty$. Nie otrzymamy zatym także właściwego ruchu wahadłowego.

c) Gdy $\lambda^2 - \frac{4g}{r} < 0$, czyli $\lambda < 2 \sqrt{\frac{g}{r}}$, a zatym pierwiastki w (23) są urojone. Kładąc $\sigma = \sqrt{\frac{4g}{r} - \lambda^2}$, otrzymamy

$$(26) \quad \varphi = \varphi_1 e^{-\frac{\lambda t}{2}} \left(\cos \frac{\sigma t}{2} + \frac{\lambda}{\sigma} \sin \frac{\sigma t}{2} \right),$$

co przedstawia funkcję peryjodyczną czasu, okazującą, że ruch wahadłowy zachodzi. Mamy tu

$$(27) \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{2g\varphi_1}{r\sigma} e^{-\frac{\lambda t}{2}} \cdot \sin \frac{\sigma t}{2}.$$

Jeżeli $\sin \frac{\sigma t}{2} = 0$, to otrzymamy $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, co nastąpi dla $\frac{\sigma t}{2} = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi$; trwanie zatem jednego wahnięcia wynosi

$$T = \frac{2\pi}{\sigma} = 2\pi \left(\frac{4g}{r} - \lambda^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = 2\pi \sqrt{\frac{r}{4g} \left(1 - \frac{\lambda^2 r}{4g} \right)^{-\frac{1}{2}}},$$

$$T = \pi \sqrt{\frac{r}{g} \left(1 - \frac{\lambda^2 r}{4g} \right)^{-\frac{1}{2}}}.$$

Jeżeli rozwinieśmy dwumian i zatrzymamy tylko wyraz tego rzędu co λ^2 , to mieć będziemy

$$(28) \quad T = \pi \sqrt{\frac{r}{g} \left(1 + \frac{\lambda^2 r}{8g} \right)}.$$

A więc nieskończenie małe wahnięcia trwają przy tym oporze nieco dłużej, niż w próżni, i są także równoczesne. Po n oscylacjach upłynie czas $t = \frac{2\pi n}{\sigma}$; podstawiając tę wartość w (26), otrzymamy

$$(29) \quad \varphi_n = \pm \varphi_1 e^{-\frac{\pi \lambda n}{\sigma}},$$

jako wielkość kąta, który wahadło po n wahnięciach tworzy z pionem. Z tego widzimy, że obszerności wahań tworzą malejący postęp geometryczny.

93. WAHADŁO SFERYCZNE. Udzielmy punktowi m prędkości początkowej v_0 , której kierunek nie przypada na płaszczyźnie pionowej mCA ; natenczas torem tego punktu będzie krzywa skośna, leżąca na powierzchni kuli o promieniu r , której środkiem jest punkt zawieszenia C . Takie wahadło nazywamy wahadłem sferycznym.

Zastosujemy ogólne równania różniczkowe Lagrange'a (art. 78), aby zbadać ruch takiego wahadła. Obierzmy punkt zawieszenia C jako początek osi, pion CA , z góry na dół, jako oś z -ów, a płaszczyznę xCy poziomo; miejsce punktu określimy przez kąty: φ , który wahadło tworzy z pionem, i θ , który płaszczyzna mCz tworzy z płaszczyzną xCz . Wtedy otrzymamy

$$x = r \cos \theta \sin \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \varphi,$$

a równania ruchu będą

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta'} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} (T + U), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} (T + U).$$

Ponieważ

$$T = \frac{m}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2) = \frac{mr^2}{2} (\varphi'^2 + \theta'^2 \sin^2 \varphi), \quad U = mgz = mgr \cos \varphi,$$

$$T + U = m \left[\frac{r^2}{2} (\varphi'^2 + \theta'^2 \sin^2 \varphi) + gr \cos \varphi \right],$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (T + U) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} (T + U) = mr \cdot (r \cdot \theta'^2 \cos \varphi - g) \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = mr^2 \theta' \cdot \sin^2 \varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = mr^2 \varphi',$$

przeto otrzymamy równania ruchu

$$(1) \quad r^2(\theta'' \sin^2 \varphi + 2\varphi'\theta' \sin \varphi \cos \varphi) = 0, \quad r^2\varphi'' - r(r\theta'^2 \cos \varphi - g) \sin \varphi = 0.$$

Całka pierwszego równania,

$$(2) \quad r^2\theta' \cdot \sin^2 \varphi = r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} \sin^2 \varphi = c,$$

gdzie c jest wielkością stałą, wyraża zasadę pól ze względu na płaszczyznę xOy , a z téj całki wynika, że ruch rzutu poziomego wahadła jest ruchem centralnym względem punktu C . Podstawiając θ' z (2) w drugim równaniu (1), otrzymamy

$$r^2 \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{c^2}{r^2} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} - gr \cdot \sin \varphi,$$

a mnożąc to równanie przez $2 \cdot \frac{d\varphi}{dt}$ i całkując je, mieć będziemy

$$(3) \quad r^2 \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2h - \frac{c^2}{r^2 \sin^2 \varphi} + 2gr \cos \varphi,$$

gdzie $2h$ oznacza stałą. Rugując c z (2) i (3), otrzymamy równanie

$$(4) \quad v^2 = r^2 \left[\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \sin^2 \varphi \right] = 2(gr \cos \varphi + h),$$

które wyraża zasadę energii. Niech dla $t=0$ będzie $\theta=0$, $\varphi=\varphi_0$, $\varphi'=\varphi'_0$, $\theta'=\theta'_0$; wówczas

$$(5) \quad c = r^2\theta'_0 \sin^2 \varphi_0, \quad 2h = r^2(\varphi'^2_0 + \theta'^2_0 \sin^2 \varphi_0) - 2gr \cos \varphi_0 = v^2_0 r^2 - 2gr \cos \varphi_0.$$

Kładąc

$$(6) \quad R = 2r^2(gr \cos \varphi + h) \sin^2 \varphi - c^2,$$

z równań (2) i (3) otrzymamy

$$(7) \quad dt = \pm \frac{r^2 \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{R}}, \quad d\theta = \pm \frac{c \cdot d\varphi}{\sin \varphi \sqrt{R}}.$$

Pierwsze z tych równań pozwala obliczyć czas w funkcji kąta φ , a drugie jest równaniem różniczkowym toru wahadła. Czas t i kąt θ dają się wyrazić przez całki eliptyczne. Nie obliczając tych całek, możemy z powyższych równań poznać główne własności ruchu wahadła.

W tym celu zważmy, że $z = r \cos \varphi$ może przybierać tylko takie wartości, które znajdują się między $-r$ i $+r$; tudzież, że tylko takie wartości kąta φ uwzględnić należy, dla których wielomian $R \geq 0$. Wstawiając w R wartość $z = r \cos \varphi$, otrzymamy

$$(8) \quad R = 2(r^2 - z^2)(gz + h) - c^2,$$

a z powyższych uwag wynika, że należy przedewszystkiem zbadać pierwiastki

równania $R=0$ w granicach $z=-r$ i $z=+r$. Kładąc kolejno za z wartości następujące:

$$z = -\infty, \quad -r, \quad z_0 = r \cos \varphi_0, \quad +r, \quad \text{otrzymamy odpowiednio} \\ R = +\infty, \quad -c^2, \quad r^2 \varphi_0'^2 \cdot \sin^2 \varphi_0, \quad -c^2,$$

z czego się okazuje, że wszystkie trzy pierwiastki równania $R=0$ są rzeczywiste i znajdują się między krańcami: $-\infty$ i $-r$, $-r$ i z_0 , z_0 i $+r$. Pierwszy pierwiastek, jako ujemny i liczebnie większy od r , nie ma dla nas znaczenia; trzeci pierwiastek, który przez α oznaczmy, jest zawsze dodatny i mniejszy od r , drugi pierwiastek β będzie dodatny lub ujemny według tego, czy $R \leq 0$ dla $z=0$, a zatem, według tego, czy $2r^2h - c^2 \leq 0$. Jeżeli $2r^2h - c^2 < 0$, to $0 < \beta < \alpha$, wielomian zatem R przybiera wartości dodatne dla $\beta < z < \alpha$, a R będzie równe zeru dla $z=\beta$ i dla $z=\alpha$. Ponieważ $z > 0$ oznacza, że wahadło znajduje się na dolnej półkuli, przeto widzimy, że w przypadku, gdy $2r^2h - c^2 < 0$, wahadło pozostawać będzie na dolnej półkuli, a tor jego będzie zawarty między tymi dwoma równoleżnikami, w których płaszczyzny $z=\beta$ i $z=\alpha$ przecinają tę półkulę. W przypadku, gdy $2r^2h - c^2 > 0$, będzie $R > 0$ dla z między krańcami $-\beta$ i α ; wahadło może się przeto wznieść do górnej półkuli, a jego tor sferyczny będzie się znajdował między dwoma równoleżnikami, z których jeden znajduje się na górnej, a drugi na dolnej półkuli.

Może zajść przypadek, że $\alpha=\beta$; wtedy $z=\alpha$ jest pierwiastkiem podwójnym, a $R=0$ jest jedynym rozwiązaniem, które odpowiada ruchowi wahadła między danymi krańcami. Wahadło będzie wtedy opisywało koło na dolnej półkuli, którego promień zależy od prędkości początkowej. Ponieważ w tym przypadku będzie $\varphi'=0$, przeto także jest $\varphi_0'=0$; należy zatem wahadłu dać prędkość początkową poziomą. Mamy wtedy $v_0^2 = r^2 \theta_0'^2 \sin^2 \varphi_0$, a z (2) widzimy, że $\theta' = \theta_0'$; ruch więc wahadła będzie jednostajny. Takie wahadło nazywamy wahadłem stożkowym w ścisłym znaczeniu.

W tym przypadku będzie dla $z=\alpha$, $R=0$ i $\frac{dR}{dz}=0$; różniczkując przeto równanie (8) względem z , otrzymamy

$$3gz^2 - 2hz - gr^2 = 0, \quad \text{czyli} \quad 3g \cos^2 \varphi_0 + \frac{2h}{r} \cos \varphi_0 - g = 0,$$

a podstawiając $2h = r^2 \theta_0'^2 \sin^2 \varphi_0 - 2gr \cos \varphi_0$, mieć będziemy

$$g \cos^2 \varphi_0 = g - \frac{v_0^2}{r} \cdot \sin^2 \varphi_0 \cos \varphi_0,$$

skąd

$$(9) \quad v_0^2 = \frac{gr \cdot \sin^2 \varphi_0}{\cos \varphi_0},$$

jako drugi warunek dla wahadła stożkowego. Rozłożmy ciężar mg wahadła na składowe, jedną w kierunku promienia r i drugą w kierunku prostopadłym do r ; ta ostatnia składowa będzie $mg \sin \varphi_0$. Siła odśrodkowa wahadła, opi-

sującego koło o promieniu $r \sin \varphi_0$, wynosi $mv_0^2 : r \sin \varphi_0$; rozłóżmy ją na dwie siły, jedną w kierunku promienia r , drugą prostopadłą do r ; ta druga składowa będzie $mv_0^2 \cos \varphi_0 : r \sin \varphi_0$. Ponieważ, według (9), mamy

$$mg \sin \varphi_0 = \frac{mv_0^2 \cos \varphi_0}{r \sin \varphi_0},$$

przeto otrzymujemy twierdzenie: *wahadło sferyczne opisuje koło, jeżeli jego prędkość początkowa jest pozioma i jeżeli składowe siły odśrodkowej i ciężaru wahadła, prostopadłe do pręta, na którym wahadło zawieszono, są sobie równe.*

Z prędkości v_0 otrzymamy czas wahnięcia $T = 2\pi \sqrt{\frac{r \cos \varphi_0}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{z_0}{g}}$, z czego wynika, że wahadło stożkowe obraca się raz około pionu w tymże samym czasie, w którymby wahadło proste o długości z_0 wykonało wahnięcie podwójne.

Jeżeli kąt φ jest dostatecznie mały, to, kładąc $\sin \varphi = \varphi$, $\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$, otrzymamy z równania (7)

$$(10) \quad dt = \pm \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \sqrt{\frac{\varphi \cdot d\varphi}{-\varphi^4 + 2\left(1 + \frac{h}{gr}\right)\varphi^2 - \frac{c^2}{gr^3}}}.$$

Obliczmy pierwiastki równania $-\varphi^4 + 2\left(1 + \frac{h}{gr}\right)\varphi^2 - \frac{c^2}{gr^3} = 0$ i liczymy t od chwili, kiedy φ przybiera wartość jednego z tych pierwiastków. Niech φ_0^2 będzie jednym z pierwiastków tego równania; drugi pierwiastek oznaczmy przez φ_1^2 . Wtedy będzie

$$(11) \quad -\varphi^4 + 2\left(1 + \frac{h}{gr}\right)\varphi^2 - \frac{c^2}{gr^3} = -(\varphi^2 - \varphi_0^2)(\varphi^2 - \varphi_1^2) = \\ = \left(\frac{\varphi_0^2 - \varphi_1^2}{2}\right)^2 - \left(\varphi^2 - \frac{\varphi_0^2 + \varphi_1^2}{2}\right)^2,$$

a więc

$$dt = \pm \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \sqrt{\frac{\varphi \cdot d\varphi}{\left(\frac{\varphi_0^2 - \varphi_1^2}{2}\right)^2 - \left(\varphi^2 - \frac{\varphi_0^2 + \varphi_1^2}{2}\right)^2}}.$$

Całkując to wyrażenie z uwzględnieniem warunku początkowego, otrzymamy

$$t = \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{g}} \arccos \frac{2\varphi^2 - (\varphi_0^2 + \varphi_1^2)}{\varphi_0^2 - \varphi_1^2},$$

a stąd

$$(12) \quad \varphi^2 = \varphi_0^2 \cos^2 t \sqrt{\frac{g}{r}} + \varphi_1^2 \sin^2 t \sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Z tego równania okazuje się, że kąt φ jest funkcją peryjodyczną czasu, i że

jego wielkość pozostaje ciągle zawarta między φ_0 i φ_1 . Między tymi krańcami odbywa się każde wahanie się w czasie $\tau = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r}{g}}$.

Z równania (2) mamy, kładąc $\sin \varphi = \varphi$,

$$(13) \quad d\theta = \frac{c \cdot dt}{r^2 \varphi^2} = \frac{c}{r^2} \cdot \frac{dt}{\varphi_0^2 \cos^2 t \sqrt{\frac{g}{r} + \varphi_1^2 \sin^2 t} \sqrt{\frac{g}{r}}}.$$

Stąd otrzymamy, przyjmując, że $\theta = 0$ dla $t = 0$,

$$\theta = \frac{c}{r^2 \varphi_0 \varphi_1} \sqrt{\frac{r}{g}} \arctg \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_0} \operatorname{tg} t \sqrt{\frac{g}{r}} \right).$$

Ponieważ zaś z równania (11) wynika $\varphi_0 \varphi_1 = \frac{c}{r \sqrt{gr}}$, przeto

$$(14) \quad \theta = \arctg \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_0} \operatorname{tg} t \sqrt{\frac{g}{r}} \right),$$

a z tego równania możemy kąt θ obliczyć w funkcji czasu. Widzimy więc, że kąt θ rośnie nieustannie z czasem i że płaszczyzna wahań, poprowadzona przez wahadło i pion CA, obraca się w czasie τ o kąt prosty około pionu, że przeto całkowity obrót tej płaszczyzny zachodzi w czasie $2\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$. Czytelnik łatwo sprawdzi, że rzut poziomy wahadła na płaszczyznę xy opisuje elipsę $\frac{x^2}{r^2 \varphi_0^2} + \frac{y^2}{r^2 \varphi_1^2} = 1$, której środkiem jest punkt zawieszenia.

94. TAUTOCHRONY. Tor punktu nazywamy tautochroną, jeżeli punkt, poruszający się po tym torze przy działaniu wiadomej siły, przybywa do pewnego danego na tym torze punktu O w tymże samym czasie, niezależnie od tego, z którego punktu tego toru ruch się rozpoczyna. Niech M (fig. 39) będzie dowolnym położeniem początkowym punktu, w którym prędkość jest równa zeru, O zaś niech będzie stałym położeniem, do którego punkt zdąża, nadto m niech oznacza dowolne miejsce podczas ruchu; prócz tego przez σ oznaczmy łuk OM, przez s dowolny łuk Om, obadwa łuki licząc od punktu stałego O. Jeżeli P_t oznacza składową styczną siły przyłożonej w punkcie m , wziętą dodatnie w kierunku ruchu, to zasada pracy daje prędkość w punkcie m , gdy, dla uproszczenia, masę punktu przyjmujemy jako równą jedności. Mamy bowiem

$$(1) \quad \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = -2 \int_{\sigma}^s P_t \cdot ds = 2 \int_s^{\sigma} P_t \cdot ds,$$

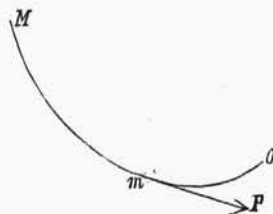


Fig. 39.