

ROZDZIAŁ XIII.

KINETYKA UKŁADÓW MATERYJALNYCH.

137. ZASADA D'ALEMBERT'A. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE RUCHU. Jeżeli siły, do układu materjalnego przyłożone, nie czynią zadość warunkom równowagi, natenczas prędkość każdego punktu dozna wogólności pewnego przyspieszenia, a układ będzie się poruszał pod wpływem tych sił. Zadanie kinetyki polega na wyznaczeniu ruchu każdego punktu układu, jeżeli są wiadome siły przyłożone, tudzież związki między punktami układu i inne warunki tego ruchu.

Niech do punktu (x_i, y_i, z_i) , którego masa jest m_i , będzie przyłożona siła P_i . Ponieważ ten punkt nie jest swobodny, przeto jego przyspieszenie γ_i nie będzie miało wogólności kierunku siły przyłożonej, a punkt będzie się tak poruszał, jak gdyby był swobodny, i jak gdyby siła $Q_i = m_i \gamma_i$ była do niego przyłożona w kierunku przyspieszenia. Rozłożmy siłę P_i na dwie składowe, z których jedną niech będzie Q_i ; druga składowa Q_i' będzie dokładnie oznaczona. Uczyniwszy to samo z każdą siłą przyłożoną, otrzymamy układ sił Q_i' , które na ruchy punktów układu materjalnego nie wywierają żadnego wpływu, albowiem każdy punkt porusza się tak, jak gdyby tylko siła Q_i była do niego przyłożona. Z tego wynika, że, gdybyśmy tylko same siły Q_i' przyłożyli do punktów układu, to te siły byłyby w równowadze. Ponieważ siłę Q_i' możemy widocznie uważać za wypadkową sił P_i i $-Q_i$, a Q_i przedstawia tę siłę, któraby do punktu swobodnego m_i przyłożona być miała, aby mu udzielić przyspieszenia γ_i , przeto możemy wypowiedzieć następujące twierdzenie: *jeżeli siły, przyłożone do układu materjalnego, nie są w równowadze, natenczas zachodzi równowaga między siłami przyłożonymi, a siłami co do wielkości równymi a co do kierunku przeciwnymi tym siłom, któreby oddzielnym punktom układu, za swobodne uważanym, udzieliły tych przyspieszeń, które istotnie zachodzą.*

To twierdzenie wyraża tak zwaną zasadę d'Alembert'a, mającą miejsce dla jakiegokolwiek układu punktów materjalnych. Siły Q_i' nazywamy

siłami straconymi (art. 75.); możemy więc zasadę d'Alembert'a tak wysłowić: *jeżeli siły, przyłożone do układu materijalnego, nie są w równowadze, natenczas siły stracone równoważą się.*

Łącząc zasadę d'Alembert'a z zasadą prac przygotowanych, możemy utworzyć równania różniczkowe ruchu każdego punktu układu. Niech układ składa się z n punktów, których położenie określamy przez $3n$ współrzędnych prostokątnych względem osi nieruchomych x, y, z . Między tymi współrzędnymi niech zachodzi $3n - s$ związków

$$(1) \quad L_1 = 0, L_2 = 0, \dots, L_k = 0, \dots, L_{3n-s} = 0,$$

określających ustrój układu, tudzież inne warunki ruchu. Jeżeli X_i, Y_i, Z_i oznaczają odpowiednio składowe siły P_i w kierunkach osi współrzędnych, to $-m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}, -m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}, -m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2}$ przedstawiają odpowiednio rzuty siły $-Q_i$; mamy przeto według powyższej zasady następujący związek między tymi siłami a przesunięciami przygotowanymi ich punktów przyłożenia:

$$(2) \quad \Sigma \left\{ \left(X_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) \delta y_i + \left(Y_i - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) \delta y_i + \left(Z_i - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) \delta z_i \right\} = 0,$$

gdzie znak sumy rozciąga się na wszystkie punkty układu. Gdyby do pewnych punktów nie było sił przyłożonych, wtedy należałoby przyjąć odpowiednio $X_i = 0, Y_i = 0, Z_i = 0$. W przypadku, gdy punkty układu stanowią ciało fizyczne, należy sumowanie zastąpić przez całkowanie. Równanie (2) możemy także tak napisać:

$$(3) \quad \Sigma m_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_i + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \delta y_i + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \delta z_i \right) = \Sigma \left(X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i \right),$$

przyczem suma po stronie lewej obejmuje wszystkie punkty układu, a suma po prawej wszystkie siły przyłożone.

Aby z podanej zasady otrzymać równania ruchu każdego punktu układu, należy przesunięcia przygotowane wyznaczyć stosownie do warunków (1). Używając w tym celu metody współczynników nieoznaczonych, dodajmy do lewej strony równania (2) iloczyny $\lambda_k \delta L_k$, w których λ_k , ($k = 1, 2, \dots, 3n-s$), są współczynnikami nieoznaczonymi; będziemy mieli

$$(4) \quad \Sigma \left\{ \left(X_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) \delta x_i + \left(Y_i - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) \delta y_i + \left(Z_i - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) \delta z_i \right\} + \Sigma \lambda_k \delta L_k = 0.$$

A ponieważ

$$\delta L_k = \Sigma \left(\frac{\partial L_k}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial L_k}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial L_k}{\partial z_i} \delta z_i \right),$$

przeto wstawivszy te wyrażenia w (4) i uporządkowawszy według $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$, mieć będziemy

$$(5) \quad \Sigma \left\{ \left(X_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial x_i} + \dots + \lambda_{3n-s} \frac{\partial L_{3n-s}}{\partial x_i} \right) \delta x_i + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(Y_i - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial y_i} + \dots + \lambda_{3n-s} \frac{\partial L_{3n-s}}{\partial y_i} \right) \delta y_i + \\
& + \left(Z_i - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial z_i} + \dots + \lambda_{3n-s} \frac{\partial L_{3n-s}}{\partial z_i} \right) \delta z_i \Big\} = 0.
\end{aligned}$$

To równanie zachodzi dla wszelkich przesunięć przygotowanych, które z powodu wprowadzenia współczynników λ_k uważać należy za wzajemnie niezależne, a przeto współczynnik każdego przesunięcia jest równy zeru; stąd wynikają następujące równania

$$(6) \quad \begin{cases} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial x_i} + \dots = X_i + \sum \lambda_k \frac{\partial L_k}{\partial x_i}, \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial y_i} + \dots = Y_i + \sum \lambda_k \frac{\partial L_k}{\partial y_i}, \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i + \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial z_i} + \dots = Z_i + \sum \lambda_k \frac{\partial L_k}{\partial z_i}. \end{cases}$$

Tym sposobem otrzymujemy 3 n równań różniczkowych, określających ruch n punktów układu. Z $3n-s$ równań (6) należy wyrugować współczynniki λ_k i wstawić ich wartości w pozostałe s równań; natenczas te równania razem z $3n-s$ równaniami warunkowymi (1) posłużą do zbadania ruchu układu. Równania (6) stanowią układ równań różniczkowych ruchu Lagrange'a; one wyrażają, że każdy punkt porusza się tak, jak gdyby był swobodny, lecz oprócz siły P_i przyłożono do niego jeszcze siły, zastępujące dane połączenia.

Zasada d'Alembert'a stosuje się także do sił popędowych, których miarą jest ilość ruchu punktu. Napisawszy równanie (2) w postaci

$$(7) \quad \Sigma \left\{ \left[X_i - m_i \frac{d}{dt} \left(\frac{dx_i}{dt} \right) \right] \delta x_i + \left[Y_i - m_i \frac{d}{dt} \left(\frac{dy_i}{dt} \right) \right] \delta y_i + \right. \\
\left. + \left[Z_i - m_i \frac{d}{dt} \left(\frac{dz_i}{dt} \right) \right] \delta z_i \right\} = 0,$$

pomnożmy je przez dt , i całkujemy następnie między krańcami 0 i t , gdzie t oznacza trwanie działania sił popędowych. Ponieważ przyjmujemy, że podczas tego działania punkty nie poruszyły się z miejsc swoich (art. 69), przeto w całkowaniu należy δx_i , δy_i , δz_i uważać za wielkości stałe; kładąc przeto

$$\int_0^t X_i dt = \bar{X}_i, \quad \int_0^t Y_i dt = \bar{Y}_i, \quad \int_0^t Z_i dt = \bar{Z}_i,$$

otrzymamy następujące równanie:

$$(8) \quad \Sigma \left\{ \left[\bar{X}_i - m_i \left(\frac{dx_i}{dt} \right)_0^t \right] \delta x_i + \left[\bar{Y}_i - m_i \left(\frac{dy_i}{dt} \right)_0^t \right] \delta y_i + \right. \\
\left. + \left[\bar{Z}_i - m_i \left(\frac{dz_i}{dt} \right)_0^t \right] \delta z_i \right\} = 0,$$

wyrażające zasadę d'Alembert'a dla sił chwilowych, których miarą są odpowiednie popędy $\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i$. Wyraz $\left(\frac{dx_i}{dt}\right)_0^t$ oznacza zmianę prędkości punktu m_i w kierunku osi x w skutek przyłożenia sił chwilowych; podobne znaczenie mają dwa inne wyrazy względem osi y i osi z . Z równaniem (8) należy postąpić tak, jak dla sił ciągle działających, a wtedy można otrzymać równania ruchu każdego punktu, określające jego prędkość w skutek działania sił chwilowych. Gdyby na układ działały jednocześnie siły ciągle działające i siły chwilowe, wtedy wielkości, zależące w całości równania (7) od sił ciągłych, byłyby nieskończenie małe w porównaniu z tymi wielkościami, które zależą od sił chwilowych, z czego wynika ważne twierdzenie, że *siły ciągle działające mogą być pominięte przy jednoczesnym działaniu sił chwilowych*.

Prawa strona równania (3) przedstawia pracę przygotowaną układu sił przyłożonych. Ponieważ dwa układy sił są równoważne, jeżeli przy tych samych warunkach dają tę samą pracę przygotowaną, przeto z zasady d'Alembert'a okazuje się, że *dwa równoważne układy sił, przyłożonych do tego samego układu punktów materjalnych, sprawią ten sam ruch*. Nauka zatem o przekształceniach układów sił, rozpatrywana dotąd ze względów statycznych, stosuje się do wszelkich zagadnień kinetyki.

138. ZASADA HAMILTON'A. DRUGI UKŁAD RÓWNAŃ LAGRANGE'A. Sumę jednoczesnych energii kinetycznych wszystkich punktów poruszającego się układu materjalnego nazywamy energią kinetyczną układu materjalnego. Jeżeli więc x'_i, y'_i, z'_i są odpowiednimi składowymi prędkościami punktu (x_i, y_i, z_i) układu, a m_i jest masą tego punktu, to energia kinetyczna T układu wyraża się wzorem

$$(1) \quad T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i}{2} (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2).$$

Niech będą dane dwa położenia układu materjalnego, odpowiednie czasowi t_1 i czasowi t_2 , i niech U oznacza potencjał sił przyłożonych, wtedy podobnie, jak dla jednego punktu (art. 77), równanie

$$(2) \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} (T + U) dt = 0$$

wyraża zasadę Hamilton'a dla układu punktów materjalnych. Moglibyśmy okazać prawdziwość tej zasady podobnym sposobem, jak dla jednego punktu; wystarczy jednak dowieść, że z tej zasady wynikają równania ruchu. Wstawiając wyrażenie dla T , otrzymamy

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta T \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum m_i (x'_i \delta x'_i + y'_i \delta y'_i + z'_i \delta z'_i) dt;$$

całkując częściowo, mieć będziemy

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T \cdot dt = \left|_{t_1}^{t_2} \sum m_i (x_i' \delta x_i + y_i' \delta y_i + z_i' \delta z_i) - \right. \\ \left. - \int_{t_1}^{t_2} \sum m_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_i + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \delta y_i + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \delta z_i \right) dt. \right.$$

Ponieważ położenia punktów dla $t=t_1$ i dla $t=t_2$ są wiadome, przeto δx_i , δy_i , δz_i są równe zeru dla każdej z tych dwu wartości t , będzie zatem

$$(3) \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} T \cdot dt = - \int_{t_1}^{t_2} \sum m_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_i + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \delta y_i + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \delta z_i \right) dt.$$

Z równania (2) wynika

$$(4) \quad \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum m_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_i + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \delta y_i + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \delta z_i \right) - \delta U \right] dt = 0,$$

z czego wypada, że

$$(5) \quad \sum m_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_i + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \delta y_i + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \delta z_i \right) - \delta U = 0.$$

To równanie wyraża właśnie zasadę d'Alembert'a w przypadku istnienia potencjału sił przyłożonych, z której, jak wiadomo (art. 137), wynikają równania ruchu.

Miedzy $3n$ współrzędnymi n punktów układu materalnego zachodzą pewne związki. Niech takich związków będzie $3n-s$; możemy z nich $3n-s$ współrzędnych wyrazić przez s współrzędnych, lub także przez s odpowiednio obranych argumentów q_1, q_2, \dots, q_s , które są od siebie niezależne i służą do określenia ruchu danego układu. Te argumenty możemy zawsze tak obrać, żeby one wszystkie równania warunkowe przywoływały do tożsamości. Przyjmijmy, że $T + U = R$, wyrażmy T przez argumenty q_i i ich pochodne q_i' , a U przez q_i ; otrzymamy

$$(6) \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} R \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta R \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial R}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \right. \\ \left. + \frac{\partial R}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial R}{\partial q_1'} \delta q_1' + \dots + \frac{\partial R}{\partial q_s'} \delta q_s' \right) dt.$$

Całkując częściowo, mieć będziemy

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial R}{\partial q_i'} \delta q_i' dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial R}{\partial q_i'} \delta d q_i = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial R}{\partial q_i'} d \delta q_i = \left|_{t_1}^{t_2} \frac{\partial R}{\partial q_i'} \delta q_i - \right. \\ \left. - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial q_i'} \right) \delta q_i \cdot dt. \right.$$

Wstawmy te wyrażenia w (6), i zważmy, że $\delta q_i = 0$ dla $t = t_1$ i dla $t = t_2$, to z równania (2) wyniknie

$$(7) \quad \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial R}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial R}{\partial q_s} \delta q_s - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1} \right) \delta q_1 - \dots - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_s} \right) \delta q_s \right] dt = 0.$$

Ponieważ δq_i są dowolne, przeto współczynnik każdej wariacji należy przyrównać do zera, aby otrzymać s równań ruchu. Czyniąc to i zważając, że U nie zależy od q_i' , że przeto $\frac{\partial R}{\partial q_i'} = \frac{\partial T}{\partial q_i'}$, otrzymamy następujący układ równań:

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial q_1}; \dots; \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = \frac{\partial U}{\partial q_s},$$

który zwiemy drugim układem równań Lagrange'a. Podobnie, jak dla jednego punktu, przedstawia ten układ równania ruchu przy pomocy s argumentów q_i .

Jeżeli potencjał nie zachodzi, to równania ruchu będą:

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1; \dots; \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s,$$

w których

$$(10) \quad Q_i = \sum_{k=1}^{k=n} \left(X_k \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + Y_k \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + Z_k \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right),$$

a zasada Hamilton'a wyrazi się równaniem

$$(11) \quad \int_{t_1}^{t_2} (\delta T + U^{(1)}) dt = 0,$$

w którym $U^{(1)} = \sum_{i=1}^{i=s} Q_i \delta q_i$ przedstawia pracę przygotowaną układu sił przyłożonych.

139. KANONICZNE RÓWNIANIA RUCHU HAMILTON'A. Wyrażmy, jak poprzednio, współrzędne prostokątne wszystkich n punktów układu materjalnego przez takie s niezależnych argumentów $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_s$, iżby wskutek tego równania warunkowe stały się tożsamościami. Jeżeli przyjmiemy $U^{(1)} = \sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i)$, to możemy równanie (3) art. 137-go tak napisać:

$$(1) \quad \sum m_i \left(\frac{dx_i'}{dt} \delta x_i + \frac{dy_i'}{dt} \delta y_i + \frac{dz_i'}{dt} \delta z_i \right) = U^{(1)}$$

Gdy nadamy układowi przesunięcie przygotowane, to energija kinetyczna T przybierze wartość $T + \delta T$, a równanie (1) art. 138-go pozwala dwojakim sposobem wyrazić δT , mianowicie:

$$(2) \quad \delta T = \sum m_i \left(x_i' \delta \frac{dx_i}{dt} + y_i' \delta \frac{dy_i}{dt} + z_i' \delta \frac{dz_i}{dt} \right), \text{ lub } 2 \delta T = \delta \sum m_i \left(x_i' \frac{dx_i}{dt} + y_i' \frac{dy_i}{dt} + z_i' \frac{dz_i}{dt} \right).$$

Mnożąc równanie (1) przez -1 i dodając do niego δT , otrzymamy

$$\delta \sum m_i \left(x_i' \frac{dx_i}{dt} + y_i' \frac{dy_i}{dt} + z_i' \frac{dz_i}{dt} \right) - \sum m_i \left(x_i' \frac{\delta dx_i}{dt} + y_i' \frac{\delta dy_i}{dt} + z_i' \frac{\delta dz_i}{dt} \right) - \\ - \sum m_i \left(\frac{dx_i'}{dt} \delta x_i + \frac{dy_i'}{dt} \delta y_i + \frac{dz_i'}{dt} \delta z_i \right) = \delta T - U^{(1)},$$

a ponieważ $\frac{\delta dx_i}{dt} = \frac{d\delta x_i}{dt}$ i podobnie dla y_i i z_i , przeto możemy ostatnie równanie także tak napisać:

$$(3) \quad \delta \sum m_i \left(x_i' \frac{dx_i}{dt} + y_i' \frac{dy_i}{dt} + z_i' \frac{dz_i}{dt} \right) - \frac{d}{dt} \sum m_i (x_i' \delta x_i + y_i' \delta y_i + z_i' \delta z_i) = \delta T - U^{(1)}.$$

Oznaczmy współrzędne $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n$ jedną literą ξ ze wskaźnikami $1, 2, \dots, (3n-1), 3n$; a ilości ruchu punktów w kierunkach osi, a więc ilości ruchu $m_1 x_1', m_1 y_1', m_1 z_1', \dots, m_n x_n', m_n y_n', m_n z_n'$ oznaczmy odpowiednio literą η ze wskaźnikami $1, 2, \dots, (3n-1), 3n$, wówczas równanie (3) przybierze postać

$$(4) \quad \delta \left(\eta_1 \frac{d\xi_1}{dt} + \eta_2 \frac{d\xi_2}{dt} + \dots + \eta_{3n} \frac{d\xi_{3n}}{dt} \right) - \\ - \frac{d}{dt} (\eta_1 \delta \xi_1 + \dots + \eta_{3n} \delta \xi_{3n}) = \delta T - U^{(1)}.$$

Wyraźmy teraz zmienne x_i, y_i, z_i , a zatym $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{3n}$ przez s argumentów q_1, \dots, q_s to będzie

$$\delta x_k = \frac{\partial x_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial x_k}{\partial q_s} \delta q_s,$$

i podobnie $\delta y_k, \delta z_k$. Podstawiając te wyrażenia w $U^{(1)}$, otrzymamy

$$(5) \quad U^{(1)} = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s = \sum_{i=1}^{i=s} Q_i \delta q_i,$$

gdzie

$$(6) \quad Q_i = \sum_{k=1}^{k=3n} \left(X_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + Y_k \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + Z_k \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right).$$

Możemy zawsze wyznaczyć s takich nowych argumentów p_1, \dots, p_s , żeby dla każdego przesunięcia przygotowanego

$$(7) \quad p_1 \delta q_1 + \dots + p_s \delta q_s = \eta_1 \delta \xi_1 + \dots + \eta_{3n} \delta \xi_{3n}.$$

Jakoż, wyraziwszy wszystkie ξ przez q , otrzymamy

$$\delta \xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial \xi_i}{\partial q_s} \delta q_s,$$

a kładąc $i=1, 2, \dots, 3n$, mnożąc każde $\delta \xi_i$ przez η_i , dodając i porządkując po prawej stronie według δq_i , mieć będziemy

$$(8) \quad \eta_1 \delta \xi_1 + \dots + \eta_{3n} \delta \xi_{3n} = \sum_{i=1}^{i=s} \left(\eta_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + \eta_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \dots + \eta_{3n} \frac{\partial \xi_{3n}}{\partial q_i} \right) \delta q_i.$$

Z porównania tego wzoru ze wzorem (7) wynikają następujące równania, zważywszy, że wariacje δq_i są od siebie niezależne,

$$p_i = \eta_1 \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + \eta_2 \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \dots + \eta_{3n} \cdot \frac{\partial \xi_{3n}}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

albo, pisząc zamiast ξ i η , to co przez nie oznaczyliśmy,

$$(9) \quad p_i = \sum_{k=1}^{k=n} m_k \left(x_k' \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + y_k' \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + z_k' \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right).$$

Ponieważ $x_k' = \frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial x_k}{\partial q_1} q_1' + \dots + \frac{\partial x_k}{\partial q_s} q_s'$, przeto

$$\frac{\partial x_k}{\partial q_i} = \frac{\partial x_k'}{\partial q_i'}, \quad \frac{\partial y_k}{\partial q_i} = \frac{\partial y_k'}{\partial q_i'}, \quad \frac{\partial z_k}{\partial q_i} = \frac{\partial z_k'}{\partial q_i'},$$

a więc po wstawieniu tych wartości w (9) otrzymamy

$$(10) \quad p_i = \sum_{k=1}^{k=n} m_k \left(x_k' \frac{\partial x_k'}{\partial q_i'} + y_k' \frac{\partial y_k'}{\partial q_i'} + z_k' \frac{\partial z_k'}{\partial q_i'} \right).$$

Wyraziwszy x, y, z przez q , różniczkujemy T względem q_i' ; otrzymamy

$$(11) \quad \frac{\partial T}{\partial q_i'} = \sum_{k=1}^{k=n} m_k \left(x_k' \frac{\partial x_k'}{\partial q_i'} + y_k' \frac{\partial y_k'}{\partial q_i'} + z_k' \frac{\partial z_k'}{\partial q_i'} \right);$$

porównyując przeto równania (10) i (11), mamy ostatecznie

$$(12) \quad p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'}, \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Argumenty zatem p_1, \dots, p_s są pochodnymi cząstkowymi energii kinetycznej względem pochodnych argumentów q_1, \dots, q_s . Podstawiając w T wyrażenia pochodnych x_i', y_i', z_i' , jako jednorodnych funkcji liniowych pochodnych q_1', \dots, q_s' , otrzymamy w tym przypadku, gdy równania warunkowe nie zawierają czasu wyraźnie, następujące wyrażenie:

$$(13) \quad T = \sum (T_{ii} q_i'^2 + 2 \sum T_{ik} \cdot q_i' q_k'),$$

energija więc jest funkcją stopnia 2-go i jednorodną pochodnych q_1', \dots, q_s' , której współczynniki T_{ii}, T_{ik} są funkcjami argumentów q_1, \dots, q_s . Biorąc pochodne cząstkowe (13) względem każdej z s pochodnych q_i' , otrzymamy s takich równań, jak następujące

$$(14) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial q_i'} = T_{i1} q_1' + T_{i2} q_2' + \dots + T_{ii} q_i' + \dots + T_{is} q_s' = \frac{p_i}{2},$$

z których wynikają wprost argumenty p_i , i które nadto pozwalają pochodne q_1', \dots, q_s' , wyrazić liniowo przez te argumenty. Ponieważ

$$2T = \frac{\partial T}{\partial q_1'} q_1' + \dots + \frac{\partial T}{\partial q_s'} q_s',$$

przeto otrzymamy energiją wyrażoną przez p_i i q_i'

$$(15) \quad 2T = p_1 q_1' + p_2 q_2' + \dots + p_s q_s',$$

a wstawiając otrzymane z (14) wyrażenia q_i' , możemy T przedstawić jako funkcją $2s$ argumentów $q_1, \dots, q_s; p_1, \dots, p_s$.

Załóżmy, że równania warunkowe $L_k = 0$ nie zawierają czasu wyraźnie, wtedy możemy w równaniu (7) zamiast waryjacji argumentów podstawić ich przyrostki w elemencie czasu dt , a wtedy

$$(16) \quad p_1 \frac{dq_1}{dt} + \dots + p_s \frac{dq_s}{dt} = \eta_1 \frac{d\xi_1}{dt} + \dots + \eta_{3n} \frac{d\xi_{3n}}{dt}.$$

Wstawiając tę wartość w (4), otrzymamy na mocy równania (7)

$$\delta \left(p_1 \frac{dq_1}{dt} + \dots + p_s \frac{dq_s}{dt} \right) - \frac{d}{dt} (p_1 \delta q_1 + \dots + p_s \delta q_s) = \delta T - U^{(1)},$$

czyli, rozwijając i kładąc wartość za $U^{(1)}$ według (5)

$$(17) \quad \delta T = \frac{dq_1}{dt} \delta p_1 + \dots + \frac{dq_s}{dt} \delta p_s - \frac{dp_1}{dt} \delta q_1 - \dots - \frac{dp_s}{dt} \delta q_s + Q_1 \delta q_1 + \dots + Q_s \delta q_s.$$

Rozwińmy δT , wyraziwszy poprzednio T przez p_i i q_i , to będzie

$$(18) \quad \delta T = \frac{\partial T}{\partial p_1} \delta p_1 + \dots + \frac{\partial T}{\partial p_s} \delta p_s + \frac{\partial T}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial T}{\partial q_s} \delta q_s.$$

Porównanie obudwu wyrażeń δT (17) i (18), prowadzi z powodu niezależnych od siebie wartości δp_i i δq_i do następujących równań:

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_1} & ; & \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_2} & ; & \dots & ; & \frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_s} \\ \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_1} + Q_1 & ; & \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_2} + Q_2 & ; & \dots & ; & \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_s} + Q_s. \end{cases}$$

Ten układ równań różniczkowych ruchu nazywamy układem kanonicznym czyli układem równań Hamilton'a.

Jeżeli siły, do układu przyłożone, mają potencjał U , wtedy

$$(20) \quad X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Wyraziwszy współrzędne punktów przez argumenty q_i , otrzymamy pracę przygotowaną układu sił

$$(21) \quad U^{(1)} = \delta U = \frac{\partial U}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial U}{\partial q_s} \delta q_s,$$

będzie więc

$$(22) \quad Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Niech potencjał będzie tylko funkcją współrzędnych, zawierającą czas wyraźnie, lub będącą niezależną od czasu, natenczas U nie zawiera argumentów q_i , nie będzie przeto funkcją argumentów p_i . Kładąc więc

$$(23) \quad H = T - U,$$

otrzymamy $\frac{\partial T}{\partial p_1} = \frac{\partial H}{\partial p_1}$. Podstawiając te wartości w równaniu (19), otrzymujemy w tym przypadku następujący układ kanoniczny:

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}; \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}; \dots; \frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s} \\ \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}; \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}; \dots; \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s}, \end{cases}$$

a zamiast równania (17) mieć będziemy

$$(25) \quad \delta H = \frac{dq_1}{dt} \delta p_1 + \dots + \frac{dq_s}{dt} \delta p_s - \frac{dp_1}{dt} \delta q_1 - \dots - \frac{dp_s}{dt} \delta q_s.$$

To równanie zawiera w sobie cały układ kanoniczny w przypadku istnienia potencjału; jeżeli zaś potencjał nie zachodzi, wtedy układ kanoniczny jest zawarty w równaniu (17). Równania (17) i (25) są więc równoważne z równaniem, wyrażającym zasadę d'Alembert'a we współrzędnych prostokątnych, jeżeli warunki nie zależą wyraźnie od czasu.

140. ZASADA RUCHU ŚRODKA MASY. Otrzymawszy równania ruchu układu według jednej z podanych metod, należy te równania scałkować z uwzględnieniem warunków początkowych, aby wyznaczyć w każdej chwili miejsce i prędkość każdego punktu tego układu. Ogólną kwestyją całkowania równań ruchu, oile ona wchodzi w zakres tego dzieła, zajmujemy się w rozdziale XVI, który stanowić będzie zarazem dopełnienie kinetyki punktu. Tu podamy tylko główne twierdzenia o ruchu, które możemy otrzymać podobnym sposobem, jak w rozdziale VII dla jednego punktu, bądź wskutek szczególnych założeń co do przesunięć przygotowanych, bądź też wskutek pewnych połączeń równań ruchu, przyczym będziemy wyłącznie używali współrzędnych prostokątnych. Nazywamy te twierdzenia, lubo niezupełnie właściwie, zasadami ruchu.

Założmy, że między punktami układu nie ma żadnych połączeń, tudzież, że żadne równania warunkowe nie zachodzą, lub też, że warunki $L_k = 0$ są wyrażone przez same różnice między równoległymi współrzędnymi punktów układu. W pierwszym przypadku przesunięcia przygotowane każdego punktu są całkiem dowolne, a punkty stanowią układ tylko w skutek tego, że przyjmujemy między nimi działania wzajemne. W drugim przypadku łatwo okazać, że równaniom warunkowym stanie się zadość, jeżeli przesunięć którekolwiek punktu udzielimy wszystkim punktom układu. Jakoż, skoro

$$(1) \quad L_k \equiv F_k(x_1 - x_i, y_1 - y_i, z_1 - z_i; \dots; x_n - x_i, \dots) = 0$$

jest równaniem warunkowym, to biorąc

$$(2) \quad \delta x_1 = \delta x_2 = \dots = \delta x_i = \dots = \delta x_n = \delta x,$$

i podobnie dla y i z , nie zmieniamy wartości różnic między współrzędnymi; a więc warunkowi $L_k = 0$ stanie się zadość, jakiegokolwiek δx , δy , δz obierzemy. Widzimy więc, że przy takim założeniu układ może wykonać dowolny ruch po-

stępowy, jak gdyby był sztywny i swobodny. Dla układu sztywnego zachodzą, jak wiadomo, następujące równania warunkowe: $(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 - r_{ik}^2 = 0$, w których r_{ik} jest stałe; jeżeli przeto taki układ jest swobodny, wtedy równania warunkowe należą do rodzaju równań założonych (1).

Dla układu swobodnego wszelkie przesunięcia są dowolne; z równania d'Alembert'a

$$\Sigma \left[\left(X_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) \delta x_i + \left(Y_i - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) \delta y_i + \left(Z_i - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) \delta z_i \right] = 0$$

wynika przeto, że współczynnik każdego przesunięcia osobna jest równy zeru. Otrzymamy zatem dla każdej wartości wskaźnika od $i=1$ do $i=n$

$$(3) \quad X_i = m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}, \quad Y_i = m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}, \quad Z_i = m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2},$$

a zatem także, biorąc sumę tych wyrażań, odpowiadających różnym wartościom wskaźnika i ,

$$(4) \quad \Sigma X_i = \Sigma m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}, \quad \Sigma Y_i = \Sigma m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}, \quad \Sigma Z_i = \Sigma m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2}.$$

Jeżeli równania warunkowe mają postać (1) to biorąc przesunięcia według (2), wyrazimy zasadę d'Alembert'a przez równanie następujące:

$$(5) \quad \delta x \Sigma \left(X_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) + \delta y \Sigma \left(Y_i - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) + \delta z \Sigma \left(Z_i - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) = 0,$$

w którym $\delta x, \delta y, \delta z$ oznaczają przesunięcia, których punkty układu doznają wspólnie w kierunkach osi. Ponieważ te przesunięcia są dowolne, przeto należy współczynnik każdego z nich przyrównać do zera, skąd wynikają równania (4), jakkolwiek równania (3) w tym przypadku nie zachodzą. Obadwa więc założenia prowadzą do tych samych równań (4), bez względu na naturę sił przyłożonych.

Niech ξ, η, ζ oznaczają współrzędne środka masy układu, którego masa $M = \Sigma m_i$. Współrzędne środka masy są wyrażone w każdej chwili przez równania

$$M\xi = \Sigma m_i x_i, \quad M\eta = \Sigma m_i y_i, \quad M\zeta = \Sigma m_i z_i,$$

z których przez dwukrotne różniczkowanie względem czasu otrzymamy

$$(6) \quad M \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \Sigma m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}, \quad M \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \Sigma m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}, \quad M \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \Sigma m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2}.$$

Podstawiawszy te wartości w równaniach (4), mieć będziemy

$$(7) \quad \Sigma X_i = M \cdot \frac{d^2 \xi}{dt^2}, \quad \Sigma Y_i = M \frac{d^2 \eta}{dt^2}, \quad \Sigma Z_i = M \frac{d^2 \zeta}{dt^2}.$$

Te równania określają ruch punktu swobodnego o masie M , który w każdej chwili zajmuje miejsce środka masy układu w przestrzeni, a do którego przyłożono wszystkie siły, na punkty układu działające, w takich samych kierun-

kach, jakie te siły w każdej chwili posiadają. Powyższe zatem równania wyrażają następujące ważne twierdzenie: *jeżeli punkty stanowią układ swobodny, lub między nimi zachodzą takie połączenia, że w skutek tych połączeń każdy dowolny ruch postępowy układu jest możebny, natenczas środek masy układu porusza się tak, jak punkt swobodny, którego masa równa się masie układu, a do którego przesunięto równolegle wszystkie siły, przyłożone do punktów układu.* To twierdzenie wyraża tak zwaną zasadę ruchu środka masy. Ta zasada stosuje się do każdego układu sztywnego i swobodnego bez względu na siły przyłożone. Z tej zasady okazuje się przedewszystkiem znaczenie kinetyczne środka masy, a nadto upatrywać w niej należy właściwe źródło pojęcia punktu o masie skończonej, które jest podstawą dynamiki punktu materjalnego (art. 68). Ta zasada pozwala wyznaczyć bezpośrednio trzy współrzędne ruchu układu (art. 42), mianowicie prędkości ruchów postępowych w kierunkach trzech osi współrzędnych; ona więc rozwiązuje wszelkie pytania, zależne wyłącznie od ruchu postępowego, który układ w każdej chwili odbywa.

Siły, do punktów układu materjalnego przyłożone, dzielimy na siły wewnętrzne i na siły zewnętrzne. Siłę, przedstawiającą działanie punktu, do układu należącego, na drugi punkt, należący również do układu, nazywamy siłą wewnętrzną; siłę zaś, przedstawiającą działanie punktu, nienależącego do układu, na punkt, który jest częścią układu, zowiemy siłą zewnętrzną. Z trzeciego prawa dynamiki (art. 66) wynika, że siły wewnętrzne pojawiają się zawsze po dwie, równe i o kierunkach przeciwnych, a obie są przyłożone do punktów układu; z sił zaś zewnętrznych tylko jedna jest przyłożona do punktu układu, a druga nie należy do sił, działających na układ.

Stosując te określenia sił do ruchu środka masy, widzimy, że *środek masy układu porusza się pod wyłącznym działaniem sił zewnętrznych*, jeżeli tylko zasada ruchu tego środka zachodzi. Przykładając bowiem według tej zasady siłę wewnętrzną P do środka masy, wypadłoby także przyłożyć siłę $-P$; a ponieważ obie siły znoszą się, przeto one nie wpływają wcale na ruch środka masy. Jeżeli więc podczas ruchu układu pojawią się nagle jakiekolwiek siły wewnętrzne w układzie, zmieniające ruchy oddzielnych punktów, to środek masy nie zmienia ruchu swego, czyli ruch tego środka „zachowuje się”, to znaczy odbywa się dalej tak, jakgdyby tych sił wcale nie było. W tym znaczeniu rozumiemy zasadę zachowania ruchu środka masy, wyrażającą niezależność ruchu tego punktu od sił wewnętrznych, pojawiających się podczas ruchu układu.

Jeżeli do układu są przyłożone takie siły zewnętrzne, iż one zniósłby się, gdyby je przeniesiono do jednego punktu, natenczas środek masy układu jest bądź w spoczynku, bądź porusza się jednostajnie po linii prostej. W tym wypadku bowiem będzie $\Sigma X_i = 0$, $\Sigma Y_i = 0$, $\Sigma Z_i = 0$; równania (7) wskazują zatem na spoczynek lub na ruch jednostajny i prostoliniowy punktu (ξ, η, ζ) , a to stosownie do warunków początkowych. Środek więc masy porusza się jednostajnie, jeżeli nie ma żadnych sił zewnętrznych. Jeżeli układ sił przy-

łożonych jest równoważny z parą sił, wtedy środek masy porusza się także jednostajnie po linii prostej.

141. ZASADA PÓŁ. Niech ustrój układu będzie taki, że warunki $L_k=0$ pozwalają, aby zachodził dowolny obrót chwilowy układu około każdej osi układu współrzędnych. Ten przypadek zajdzie np. wtenczas, gdy punkty układu są swobodne i bez żadnych połączeń, lub także, gdy układ jest sztywny i swobodny. Jeżeli więc $\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta$ oznaczają odpowiednio odchylenia nieskończenie małych obrotów przygotowanych około osi współrzędnych, to równaniu d'Alembert'a stanie się zadość, jeżeli przyjmiemy (art. 104)

$$(1) \quad \delta x_i = z_i \delta \eta - y_i \delta \zeta, \quad \delta y_i = x_i \delta \zeta - z_i \delta \xi, \quad \delta z_i = y_i \delta \xi - x_i \delta \eta.$$

Zasada d'Alembert'a prowadzi wtedy do następującego równania:

$$\delta \xi \Sigma \left\{ (Z_i y_i - Y_i z_i) - m_i \left(y_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - z_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) \right\} + \delta \eta \Sigma \left\{ (X_i z_i - Z_i x_i) - m_i \left(z_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - x_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) \right\} + \delta \zeta \Sigma \left\{ (Y_i x_i - X_i y_i) - m_i \left(x_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - y_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) \right\} = 0;$$

a ponieważ odchylenia są dowolne, przeto należy współczynnik każdego z tych odchyżeń przyrównać do zera; otrzymamy następujące równania:

$$(2) \quad \begin{cases} \Sigma m_i \left(y_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - z_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) = \Sigma (Z_i y_i - Y_i z_i), \\ \Sigma m_i \left(z_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - x_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) = \Sigma (X_i z_i - Z_i x_i), \\ \Sigma m_i \left(x_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - y_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) = \Sigma (Y_i x_i - X_i y_i). \end{cases}$$

Przypuśćmy, że siły przyłożone zadość czynią ciągle warunkowi

$$(3) \quad \Sigma (Z_i y_i - Y_i z_i) = 0,$$

że zatem suma momentów tych sił względem osi x , gdy ich punkty przyłożenia uważać będziemy za sztywnie z sobą połączone, jest równa zeru. Wtedy 1-sze równanie (2) daje się całkować; wynika z niego

$$(4) \quad \Sigma m_i \left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right) = C_1,$$

gdzie C_1 jest stałą dowolną. Aby rozpoznać, kiedy zachodzi warunek (3), zredukujmy siły do początku osi O ; otrzymamy wogólności siłę wypadkową i parę wypadkową. Moment siły wypadkowej względem osi x jest równy zeru. A ponieważ suma momentów obu sił, stanowiących parę wypadkową, względem osi x , równa się rzutowi momentu tej pary na tę oś, przeto warunek (3) zachodzić będzie, jeżeli moment pary wypadkowej jest w każdej chwili prostopadły do tej osi. Jeżeli siły stanowią układ sił 1-go rodzaju, wtedy warunek (3) wymaga, żeby ich wypadkowa przecinała oś x . W przypadku, gdy te siły stanowią układ 2-go rodzaju, moment pary wypadkowej jest prostopadły do tej osi. Warunek (3) zawsze zachodzi, jeżeli na