



## ROZDZIAŁ II.

### RUCH POSTĘPOWY I RUCH OBROTOWY UKŁADÓW NIEZMIENNYCH.

**20. OKRĘŚLENIE RUCHU W OGÓLNOŚCI.** Uważajmy układ niezmienny za zbiór punktów; wtedy rozpoznanie jego ruchu polegać będzie na zbadaniu ruchu każdego punktu z osobna. Takie określenie zbadania czyni rozwiązanie jego pozornie niemożliwym; żąda bowiem dochodzenia ruchu nieskończonego wielu punktów. Atoli z warunku niezmienności układu wynikają pewne związki między ruchami oddzielnych jego punktów, które pozwalają badanie ruchu układu sprowadzić do jednoczesnego rozważania ruchów skończonej ilości punktów tego układu.

W określeniu ruchu należy mieć wzgląd na przestrzeń i na czas. Nie zwracając narazie w określeniu ruchu uwagi na czas, nazwiemy ruch «dokładnie» określonym ze względu na przestrzeń, jeżeli tor każdego punktu układu jest oznaczony co do kształtu i położenia. Owóż można łatwo okazać, że *ruch układu niezmiennego jest dokładnie określony ze względu na przestrzeń, jeżeli znamy tor trzech punktów układu, nie leżących na jednej prostej.* Przyjmujemy przytym, że wiadome jest położenie początkowe układu. Jakoż, niech  $m_1$ ,  $m_2$  i  $m_3$  będą takimi trzema punktami, a  $m$  niech będzie dowolnym punktem układu, którego odległości od nich są odpowiednio  $r_1$ ,  $r_2$  i  $r_3$ . Mając jednocześnie miejsca tych trzech punktów, zakreślmy z  $m_1$ , jako środka, kulę promieniem  $r_1$ ; na niej oczywiście punkt  $m$  się znajduje. Druga kula, zakreślona ze środka  $m_2$  promieniem  $r_2$ , przetnie pierwszą podług koła, na którym punkt  $m$  leżeć będzie. Jako zaś przecięcie się tego koła z kulą, zakreśloną ze środka  $m_3$  promieniem  $r_3$ , otrzymamy na nim dwa punkty, które znajdują się od punktów  $m_1$ ,  $m_2$  i  $m_3$  w danych odległościach. Obadwa te punkty leżą symetrycznie względem płaszczyzny  $m_1 m_2 m_3$ . Czyniąc to samo z każdym punktem, otrzymamy dwa możliwe położenia układu, symetryczne względem powyższej płaszczyzny. Ponieważ zaś wiadome jest położenie początkowe

układu, przeto możemy, na mocy zasady ciągłości ruchu, wyznaczyć z owych dwu to położenie, które układ jedynie zająć może. Z tego wynika prawdziwość powyższego twierdzenia. Gdyby punkty  $m_1$ ,  $m_2$  i  $m_3$  leżały na jednej prostej, to każdy punkt na kole, podług którego przecinają się dwie pierwsze kule, znajdowałby się w téj saméj od  $m_3$  odległości, a przeto położenie punktu  $m$ , a tym samym i całego układu, byłoby nieoznaczone.

Trzy punkty, nie leżące na jednej prostej, których ruchy służą do geometrycznego określenia ruchu układu, można uważać za wyznaczające ruch, a ich tory nazwiemy kierownicami ruchu tego układu. Jeżeli trzy te punkty są w spoczynku, to cały układ w spoczynku pozostaje.

Niech z układem będą stale połączone trzy prostokątne osi współrzędnych  $A\xi$ ,  $A\eta$ , i  $A\zeta$ , o początku w dowolnym punkcie  $A$  tego układu, a poruszające się wraz z układem; współrzędne  $\xi$ ,  $\eta$  i  $\zeta$  punktu  $m$  względem tych osi są wiadome. Niech nadto osi  $Ox$ ,  $Oy$  i  $Oz$  stanowią drugi układ prostokątny o początku w pewnym punkcie  $O$ , a nieruchomy w przestrzeni; położenie poruszającego się układu będzie wiadome, gdy oznaczymy położenie osi  $A\xi$ ,  $A\eta$  i  $A\zeta$  względem osi  $Ox$ ,  $Oy$  i  $Oz$ . Każdy więc punkt poruszającego się układu posiada dwojakiego rodzaju współrzędne, mianowicie współrzędne stałe  $\xi$ ,  $\eta$  i  $\zeta$  względem osi  $A\xi$ ,  $A\eta$  i  $A\zeta$ , określające jego miejsce w układzie, i współrzędne zmienne  $x$ ,  $y$  i  $z$  względem osi  $Ox$ ,  $Oy$  i  $Oz$ , określające jego miejsce w przestrzeni. Ponieważ trzy współrzędne  $x_i$ ,  $y_i$  i  $z_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) określają miejsce każdego punktu  $m_i$ , wyznaczającego ruch, a niezmiennosc układu wymaga, żeby było stale

$$(1) \quad (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 - r_{ik}^2 = 0,$$

gdzie  $r_{ik}$  jest odległością punktu  $m_i$  od  $m_k$  ( $k = 1, 2, 3$ , lecz różne od  $i$ ), przeto 9 współrzędnych tych trzech punktów zadość czynią 3 związkom między nimi, czyli 3-m dla nich warunkom (1); pozostaje zatem 6 współrzędnych dowolnych. Obrawszy przeto jeszcze 6 warunków dla tych 9-ciu współrzędnych, możemy wyznaczyć wartość każdej z nich, a zatem określić dokładnie położenie układu. Z takich warunków wyniknie, wogóle mówiąc, kilka wartości na każdą współrzedną, a zatem kilka różnych położení układu, z których każde odpowiada danym warunkom. Ponieważ inne położenia układu są wykluczone, przeto okazuje się, że sześć warunków wzajemnie niezależnych określa położenie układu niezmiennego w przestrzeni.

Ruch układu będzie zupełnie określony ze względu na przestrzeń i ze względu na czas, jeżeli możemy w każdej chwili podać miejsce każdego punktu ruchu wyznaczającego w przestrzeni. W tym celu potrzeba mieć wyrażenia sześciu współrzędnych tych punktów w funkcjach czasu, lub określić ruch układu przez takie sześć warunków, zawierających także czas, żeby z nich można było wyznaczyć owe sześć współrzędnych jako funkcje czasu.

**21. RODZAJE RUCHÓW.** Różne rodzaje ruchów układu niezmiennego różnią się od siebie warunkami, które przyjmujemy dla ich określenia.

a). Trójkąt punktów wyznaczających ruch porusza się tak, że każdy jego bok jest wciąż do siebie równoległy. Wtedy wszystkie punkty układu opisują jednocześnie równe i równoległe drogi, ich zatem toru są linijami przystającymi, ich prędkości i ich przyspieszenia są sobie równe w każdej chwili. Taki ruch układu niezmiennego nazwalimy *ruchem postępowym*. Ruch postępowy może być prostoliniowy lub krzywoliniowy. Do jego określenia wystarcza znajomość ruchu któregośkolwiek punktu układu, a przeto teoria tego ruchu jest zawarta w nauce o ruchu punktu.

b). Dwa punkty wyznaczające ruch pozostają ciągle w spoczynku; wtedy prosta, łącząca te dwa punkty, jest nieruchoma, a każdy punkt układu, nie leżący na tej prostej, opisuje koło, którego środek leży na tej prostej, w płaszczyźnie prostopadłej do tejże prostej. Taki ruch układu zwiemy *ruchem obrotowym*, albo *obrotem*, a nieruchomą prostą osią obrotu.

Ruch postępowy i ruch obrotowy są jedynymi ruchami układów niezmiennych, które są dostatecznie określone przez ruch jednego punktu takiego układu.

c). Jeden punkt wyznaczający ruch jest nieruchomy; wtedy każdy punkt układu porusza się po kuli, której środkiem jest punkt nieruchomy. Kierownice dwu pozostałych punktów wyznaczających ruch są krzywymi kulistymi, a także każdy punkt układu opisuje krzywą kulistą. Taki ruch zwiemy *kręceniem się układu około punktu stałego*. Punkt stały jest środkiem kręcenia się. Określamy kręcenie się przez dwie kierownice kuliste.

d). Środek kręcenia się przypada w pewnym kierunku nieskończenie daleko; wtedy pozostałe dwie kierownice stają się krzywymi płaskimi, których płaszczyzny będą prostopadłe do owego kierunku, a toż samo zajdzie dla toru każdego punktu układu. Wszystkie punkty układu będą się więc posuwały równoległe do pewnej płaszczyzny. Taki ruch układu zwiemy *ruchem posuwistym*, albo *ruchem równoległym do płaszczyzny*, a płaszczyznę, do której układ posuwa się równoległe, *płaszczyzną kierującą* tego ruchu. Ruch posuwisty jest określony przez dwie płaskie kierownice. Możemy go uważać jako złożony z ruchów w dwu kierunkach; prędkość bowiem i przyspieszenie każdego punktu daje się rozłożyć na składowe w dwu kierunkach, równoległych do płaszczyzny kierującej.

**22. PRĘDKOŚĆ KĄTOWA I PRZYSPIESZENIE KĄTOWE OBROTU.** Zajmiemy się przedewszystkim ruchem obrotowym. Przesuńmy przez oś obrotu dowolną płaszczyznę stałą, i niech  $\varphi$  będzie kątem, który ta płaszczyzna tworzy z płaszczyzną, przesuniętą przez dowolny punkt  $m$  obracającego się układu i przez oś obrotu. Jeżeli w położeniu początkowym, przy którym  $t=0$ , kąt  $\varphi$  ma wartość  $\Phi$ , a po upływie czasu  $t$  przybierze wartość  $\varphi = \Phi + \theta$ , to punkt  $m$  obrócił się około osi o kąt  $\theta$ . Z warunku niezmienności układu wynika, że cały układ obrócił się w tym czasie o kąt  $\theta$ . Ten kąt nazywamy *odchyleniem obrotu*. Jeżeli  $r$  jest odległością punktu od osi, to  $r\theta$  jest drogą jego w czasie  $t$ , a zatem  $r \cdot \frac{d\theta}{dt} = r \cdot \frac{d\varphi}{dt}$  jest prędkością tego punktu. Dla każde-

go punktu w odległości jednostki od osi prędkość wynosi  $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$ . Prędkość punktu obracającego się układu, obranego w odległości jednostki od osi, nazywamy prędkością kątową obrotu tego układu. Prędkość kątowa jest pochodną odchylenia względem czasu. Kładąc

$$(1) \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = \omega,$$

wyrazimy prędkość  $v$  dowolnego punktu w odległości  $r$  od osi zapomocą wzoru  $v = r \cdot \omega$ . Z tego widzimy, że ruch obrotowy jest określony ze względu na prędkość przez prędkość kątową; mając prędkość  $v$  dowolnego punktu, możemy obliczyć prędkość kątową  $\omega$  tego obrotu ze wzoru  $\omega = \frac{v}{r}$ . Jeżeli prędkość

kątowa jest stała, to obrót jest jednostajny; w każdym innym przypadku obrót jest niejednostajny. Prędkość kątową obliczymy, mając wyrażenie kąta  $\varphi$  w funkcji czasu,  $\varphi = F(t)$ ; będzie bowiem  $\omega = F'(t)$ . Równanie obrotu jednostajnego jest  $\varphi = \Phi + \omega t$ , gdzie  $\omega$  jest wielkością stałą. A jeżeli odchylenie liczymy od położenia początkowego punktu, to  $\Phi = 0$ , a więc równanie tego ruchu będzie  $\varphi = \omega t$ .

Jeżeli  $\gamma_t$  i  $\gamma_n$  oznaczają przyspieszenie styczne i przyspieszenie normalne dowolnego punktu  $m$ , to

$$(2) \quad \gamma_t = r \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = r \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = r \cdot \frac{d\omega}{dt}, \quad \gamma_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2.$$

Pochodna prędkości kątowej względem czasu nazywa się przyspieszeniem kątowym obrotu układu. Możemy je określić także jako drugą pochodną odchylenia względem czasu, czyli jako przyspieszenie styczne punktu w odległości jednostki od osi. Mając przyspieszenie kątowe, obliczymy przyspieszenie styczne każdego punktu zapomocą pierwszego ze wzorów (2); przyspieszenie normalne każdego punktu ma kierunek ku osi obrotu i jest proporcjonalne względem kwadratu prędkości kątowej.

Prędkość kątowa ruchu obrotowego daje się geometrycznie przedstawić, a to przedstawienie uskuteczniamy następującym sposobem. Na osi obrotu obieramy punkt dowolny, i z tego punktu, jako początkowego, odcinamy na osi długość, proporcjonalną względem prędkości kątowej, w takim kierunku, iżbyśmy, patrząc z punktu końcowego tego odcinka osi na płaszczyznę, przesuniętą przez jego punkt początkowy prostopadłe do osi, widzieli na tej płaszczyźnie obrót około danej osi w kierunku obiegu wskazówek na zegarze. Kierunek odcinka, przedstawiającego prędkość kątową, można uwidocznić strzałką, zwróconą ku jego punktowi końcowemu. Taki odcinek prostoliniowy daje dokładne pojęcie o ruchu obrotowym, albowiem jego położenie określa położenie osi obrotu, jego długość przedstawia wielkość prędkości kątowej, a jego kierunek pozwala rozpoznać kierunek obrotu. Jeżeli według podanego prawidła wypadnie prędkość kątową odciąć na osi w tym kierunku, który uważamy

za dodatny kierunek téj osi, to taką prędkość kątową będziemy również przyjmowali jako dodatną; w przeciwnym zaś razie jako ujemną. Obrót układu niezmiennego około danéj osi  $O$  z prędkością kątową  $\omega$  będziemy nazywali krótko «obrotem  $\omega$  około osi  $O$ ».

**23. SKŁAD OBROTÓW OKOŁO PRZECINAJĄCYCH SIĘ OSI.** Układ niezmienny może być częścią składową dwu lub więcej układów, z których każdy obraca się około pewnej osi; wtedy układ bierze udział jednocześnie w kilku obrotach i zachodzi pytanie: jakim będzie skutek tego ruchu układu? Zagadnienia tego rodzaju prowadzą do tak zwanego składu obrotów. Rozwiążemy to zagadnienie z wyraźnym zastrzeżeniem, że będziemy składali obroty nieskończenie małe, czyli chwilowe, t. j. takie obroty, które rozważamy w nieskończenie małych przedziałach czasu.

Niech będą dane (fig. 12) dwa nieskończenie małe obroty jednoczesne około osi  $O_1$  i  $O_2$ , przecinających się w punkcie  $o$ , a odcinki  $\omega_1 = o\alpha_1$

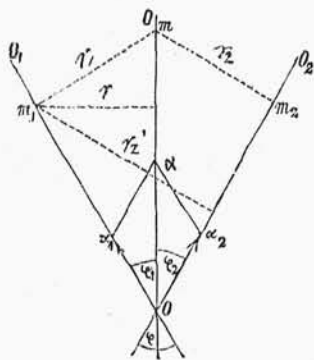


Fig. 12.

i  $\omega_2 = o\alpha_2$  niech przedstawiają ich prędkości kątowe (art. 22); układ niezmienny bierze udział w obu obrotach, a mamy wyznaczyć jego ruch nieskończenie mały. Z kierunków obu obrotów okazuje się, że każdy punkt  $m$ , znajdujący się między ramionami kąta  $\alpha_1 o \alpha_2$ , porusza się chwilowo wskutek tych obrotów w dwu kierunkach wprost przeciwnych i prostopadłych do płaszczyzny tego kąta. Oznaczmy odpowiednio przez  $r_1$  i  $r_2$  odległości punktu  $m$  od danych osi, prędkości tego punktu wskutek danych obrotów będą odpowiednio  $\omega_1 r_1$  i  $\omega_2 r_2$ . Je-

żeli przeto obierzemy ten punkt wewnątrz kąta  $\alpha_1 o \alpha_2$  tak, żeby  $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$ , to prędkości, jakich punkt nabędzie wskutek obu obrotów, zniósą się i punkt pozostanie w spoczynku. Niech dane prędkości kątowe, odcięte na osiach, czynią kąt  $\varphi$ , i niech prosta  $om$  czyni z prędkością  $\omega_1$  kąt  $\varphi_1$ , a z prędkością  $\omega_2$  kąt  $\varphi_2$ ; wówczas  $r_1 : r_2 = \sin \varphi_1 : \sin \varphi_2$ . Żeby zatem równanie  $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$  zachodziło dla punktu  $m$ , należy ten punkt tak obrócić, iżby  $\omega_1 : \omega_2 = \sin \varphi_2 : \sin \varphi_1$ . Temu ostatniemu warunkowi czyni zadość każdy punkt na przekątnej  $oa$  równoległoboku  $o\alpha_1\alpha_2$ , wystawionego na danych prędkościach kątowych, z czego wynika, że ta przekątna pozostanie chwilowo w spoczynku wskutek obu danych obrotów. Ponieważ żadna inna prosta układu nie ma téj własności, przeto okazuje się, że szukany ruch układu będzie obrotem chwilowym około powyższej przekątnej. Dla krótkości oznaczmy tę przekątną przez  $O$ .

Aby wyznaczyć prędkość kątową  $\omega$  tego obrotu, obierzmy na osi  $O_1$  punkt dowolny  $m_1$  i oznaczmy przez  $r$  jego odległość od osi  $O$ , a przez  $r'_2$  jego odległość od osi  $O_2$ . Ponieważ ten punkt ma wskutek obrotu  $\omega$  około  $O$  nabyć téj saméj prędkości, co wskutek obrotu  $\omega_2$  około  $O_2$ , przeto  $r\omega = r'_2\omega_2$ ;

a gdy  $r = om_1 \cdot \sin \varphi_1$ ,  $r'_2 = om_1 \cdot \sin \varphi$ , zatem

$$\frac{\omega}{\omega_2} = \frac{r'_2}{r} = \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_1}.$$

Gdybyśmy na osi  $O_2$  obrali punkt dowolny  $m_2$ , otrzymalibyśmy podobnie

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_2}.$$

A zatem

$$\frac{\omega}{\sin \varphi} = \frac{\omega_1}{\sin \varphi_2} = \frac{\omega_2}{\sin \varphi_1}.$$

Z równości tych stosunków wynika, że przekątna  $oa$  równoległoboku  $oa_1a_2$  przedstawia geometrycznie szukaną prędkość kątową  $\omega$ .

Obrót  $\omega$  około osi  $O$ , wynikający z obudwu danych obrotów, nazywamy obrotem wypadkowym tych obrotów, które są jego obrotami składowymi. O obrocie wypadkowym mówimy, że jest równoważny obudwu obrotom składowym; to znaczy, że wskutek tego obrotu każdy punkt układu niezmiennego nabywa téj samej prędkości, co wskutek obudwu obrotów składowych. Możemy zatem powiedzieć, że *dwa obroty chwilowe około przecinających się osi są równoważne jednemu obrotowi chwilowemu, którego prędkość kątową przedstawia geometrycznie przekątna równoległoboku, wystawionego na prędkościach kątowych obudwu obrotów.*

Skład takich dwu obrotów dokonywa się więc według téj samej metody, co skład prędkości, temu samemu punktowi jednocześnie udzielonych. Stosując zatem powyższe postępowanie do ilukolwiek obrotów, otrzymujemy twierdzenie ogólne: *ilekolwiek obrotów chwilowych układu niezmiennego około osi, przecinających się w jednym punkcie, możemy zastąpić jednym obrotem chwilowym, którego prędkość kątowa jest przedstawiona przez ostatni bok wieloboku, wystawionego na prędkościach kątowych tych obrotów.* Z tego twierdzenia wynika, że wypadkową obrotów chwilowych około spólnej osi jest obrót około téj samej osi, którego prędkość kątowa jest sumą algebriczną prędkości składowych. Jeżeli wielobok prędkości kątowych jest zamknięty, natenczas prędkość kątowa obrotu wypadkowego będzie równa zeru, a zatem układ pozostanie w spoczynku wskutek danych obrotów. Mówimy wtedy, że dane obroty nawzajem się znoszą. — Nadto z powyższego twierdzenia wynika, że obrót chwilowy około pewnej osi może być rozłożony na obroty około innych osi, przecinających ją w tym samym punkcie. Metoda rozkładania pozostaje taka sama, jaką stosowaliśmy do rozkładania prędkości ruchów postępowych.

Niech będzie dany obrót z prędkością  $\omega$  około osi  $O$ ; przesuając przez dowolny punkt  $A$  na téj osi trzy proste  $Ax$ ,  $Ay$ ,  $Az$ , nie leżące na jednej płaszczyźnie, możemy ten obrót rozłożyć na trzy obroty, z odpowiednimi prędkościami kątowymi  $\Xi$ ,  $H$  i  $Z$ , około tych trzech prostych. Niech osi spólrzędnych stanowią układ prostokątny i niech  $a$ ,  $b$  i  $c$  oznaczają dostawy kierunkowe prędkości kątowej  $\omega$ , odciętej na osi  $O$ ; wówczas

$$(1) \quad \Xi = a\omega, \quad H = b\omega, \quad Z = c\omega.$$



Jeżeli danych jest  $n$  obrotów  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots, \omega_n$  około osi  $O_1, O_2, \dots, O_i, \dots, O_n$ , przecinających się w punkcie  $A$ , których dostawy kierunkowe są  $a_i, b_i$  i  $c_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), to możemy rozłożyć każdy obrót  $\omega_i$  na trzy obroty:  $\Xi_i = a_i \omega_i$ ,  $H_i = b_i \omega_i$ ,  $Z_i = c_i \omega_i$  około osi współrzędnych. Wypadkowa obrotów  $\Xi_i$  będzie obrotem  $\Xi = \Sigma \Xi_i$  około osi  $x$ , a podobnie otrzymamy obroty  $H = \Sigma H_i$ ,  $Z = \Sigma Z_i$  około osi  $y$  i  $z$ . Sumy  $\Xi, H$  i  $Z$  są składowymi prędkości kątowych  $\omega$  obrotu wypadkowego; a więc otrzymamy

$$(2) \quad \omega = \sqrt{\Xi^2 + H^2 + Z^2},$$

a dostawy kierunkowe tej prędkości, odciętej na osi obrotu wypadkowego, są

$$(3) \quad a = \frac{\Xi}{\omega}, \quad b = \frac{H}{\omega}, \quad c = \frac{Z}{\omega}.$$

Dane obroty znosić się będą, jeżeli  $\omega = 0$ , z czego wynika, że równania

$$(4) \quad \Sigma \Xi_i = 0, \quad \Sigma H_i = 0, \quad \Sigma Z_i = 0$$

wyrażają warunki konieczne i wystarczające, aby się dane obroty znosiły.

**24.** Rozkład obrotu na trzy obroty około osi współrzędnych pozwala obliczyć prędkość każdego punktu układu niezmiennego, który obraca się chwilowo około danej osi. W tym celu obierzmy tak osi współrzędnych, żeby obrót dodatny około osi  $x$ -ów o ćwiartkę koła przywiódł dodatnią oś  $y$ -ów ku dodatniej osi  $z$ -ów, żeby obrót dodatny około osi  $y$ -ów o ćwiartkę koła przywiódł dodatnią oś  $z$  ku dodatniej  $x$  i żeby na koniec obrót dodatny około osi  $z$ -ów o ćwiartkę koła przywiódł dodatnią oś  $x$  ku dodatniej  $y$ . Rozłóżmy nieskończenie mały obrót o kąt  $d\varphi = \omega \cdot dt$  około osi  $O$  na trzy obroty nieskończenie małe z odchyleniami:  $d\varphi_1 = \Xi \cdot dt$ ,  $d\varphi_2 = H \cdot dt$ ,  $d\varphi_3 = Z \cdot dt$  około osi  $Ax, Ay, Az$ . Wskutek obrotu  $d\varphi$  przesunie się punkt  $m$  o współrzędnych  $x, y, z$ , nie leżący na osi  $O$ , o długości  $dx, dy, dz$  w kierunkach osi współrzędnych; te trzy przesunięcia należy obliczyć. Rzućmy punkt  $m$  na płaszczyznę  $Ayz$ ; rzut  $m_1$  (fig. 13) opisze skutkiem obrotu  $d\varphi_1$  taką samą drogę, jak punkt  $m$ . Jeżeli  $\rho_1$  jest odległością punktu  $m_1$  od osi  $x$ -ów, a  $\alpha_1$  oznacza kąt, który  $\rho_1$  czyni z osią współrzędnych  $Ay$ , to w sąsiednim położeniu  $m'_1 (y'_1, z'_1)$  po obrocie  $d\varphi_1$  będzie

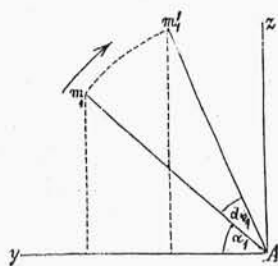


Fig. 13.

$$y'_1 = \rho_1 \cdot \cos(\alpha_1 + d\varphi_1), \quad z'_1 = \rho_1 \cdot \sin(\alpha_1 + d\varphi_1).$$

Opuszczając nieskończenie małe rzędu 2-go i wyższych, otrzymamy stąd

$$\begin{aligned} y'_1 &= \rho_1 \cos \alpha_1 - \rho_1 \sin \alpha_1 \cdot d\varphi_1 = y - z \cdot d\varphi_1, \\ z'_1 &= \rho_1 \sin \alpha_1 + \rho_1 \cos \alpha_1 \cdot d\varphi_1 = z + y \cdot d\varphi_1; \end{aligned}$$

nieskończenie małe przesunięcia punktu  $m$  w kierunku osi  $y$  i osi  $z$  wskutek obrotu  $d\varphi_1$  będą przeto

$$y'_1 - y = -z \cdot d\varphi_1, \quad z'_1 - z = y \cdot d\varphi_1.$$

Podobnym sposobem otrzymamy przesunięcia tego punktu w kierunkach osi  $z$  i osi  $x$  wskutek obrotu  $d\varphi_2$ ,

$$-x \cdot d\varphi_2, \quad z \cdot d\varphi_2,$$

tudzież przesunięcia tego punktu w kierunkach osi  $x$  i osi  $y$  wskutek obrotu  $d\varphi_3$ ,

$$-y \cdot d\varphi_3, \quad x \cdot d\varphi_3.$$

Dodając przesunięcia w kierunku téj samej osi, otrzymamy

$$(1) \quad \begin{cases} dx = z \cdot d\varphi_2 - y \cdot d\varphi_3, \\ dy = x \cdot d\varphi_3 - z \cdot d\varphi_1, \\ dz = y \cdot d\varphi_1 - x \cdot d\varphi_2, \end{cases}$$

czyli, wstawiając wartości na  $d\varphi_1$ ,  $d\varphi_2$  i  $d\varphi_3$  i oznaczając przez  $a$ ,  $b$  i  $c$  dostawy kierunkowe prędkości kątowej  $\omega$ , geometrycznie przedstawionój,

$$(2) \quad \begin{cases} dx = (H \cdot z - Z \cdot y) \cdot dt = \omega(bz - cy) dt = (bz - cy) d\varphi, \\ dy = (Z \cdot x - \Xi \cdot z) \cdot dt = \omega(cx - az) dt = (cx - az) d\varphi, \\ dz = (\Xi \cdot y - H \cdot x) \cdot dt = \omega(ay - bx) dt = (ay - bx) d\varphi. \end{cases}$$

A jeżeli obie strony podzielimy przez  $dt$ , to otrzymamy prędkości punktu w kierunkach osi współrzędnych

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Hz - Zy = \omega(bz - cy), \\ \frac{dy}{dt} = Zx - \Xi z = \omega(cx - az), \\ \frac{dz}{dt} = \Xi y - Hx = \omega(ay - bx). \end{cases}$$

Jeżeli układ niezmienny obraca się chwilowo około  $n$  osi  $O_1, O_2, \dots, O_n$ , które przecinają się w punkcie  $A$ , to  $\Xi = \Sigma \Xi_i$ ,  $H = \Sigma H_i$ ,  $Z = \Sigma Z_i$  są składowymi jego obrotu wypadkowego. Otrzymamy zatem następujące wyrażenia na prędkości punktu  $(x, y, z)$ :

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = z \cdot \Sigma H_i - y \cdot \Sigma Z_i, \\ \frac{dy}{dt} = x \cdot \Sigma Z_i - z \cdot \Sigma \Xi_i, \\ \frac{dz}{dt} = y \cdot \Sigma \Xi_i - x \cdot \Sigma H_i, \end{cases}$$

z których się okazuje, że prędkość każdego punktu układu w kierunku każdej osi współrzędnych jest sumą algebriczną prędkości, jakich mu oddzielne obroty w kierunku téj osi udzielają. —

Możemy obliczyć przesunięcia  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  wskutek obrotu, jeżeli początek osi współrzędnych nie leży na osi tego obrotu. W tym celu na osi obrotu



w dowolnym punkcie  $(x, y, z)$  wystawmy trzy osi współrzędnych, równoległe do poprzednich, i oznaczmy przez  $x_1, y_1, z_1$  współrzędne punktu  $(x, y, z)$  względem tych osi. Mamy tu  $x = X + x_1, y = Y + y_1, z = Z + z_1$ , a zatem  $dx = dx_1, dy = dy_1, dz = dz_1$ . Ponieważ  $dx_1 = (bz_1 - cy_1)d\varphi = [b(z - Z) - c(y - Y)]d\varphi = [c(Y - y) - b(Z - z)]d\varphi$ , i podobne wyrażenia otrzymamy dla  $dy_1$  i  $dz_1$ , przeto będzie ogólnie

$$(5) \quad \begin{cases} dx = [c(Y - y) - b(Z - z)]d\varphi, & \frac{dx}{dt} = \omega[c(Y - y) - b(Z - z)], \\ dy = [a(Z - z) - c(X - x)]d\varphi, & \frac{dy}{dt} = \omega[a(Z - z) - c(X - x)], \\ dz = [b(X - x) - a(Y - y)]d\varphi, & \frac{dz}{dt} = \omega[b(X - x) - a(Y - y)]. \end{cases}$$

**25. MOMENTY OBROTU.** Iloczyn prędkości kątowej obrotu i odległości danego punktu od osi tego obrotu, nazywamy momentem obrotu tego względem punktu danego, a ten punkt dany nazywamy biegunem momentu. Moment obrotu jest równy zeru, jeżeli biegun leży na osi obrotu. Przedstawmy sobie biegun momentu stale połączony z osią obrotu; natenczas prędkość, której ten biegun nabywa wskutek obrotu około tej osi, równa się momentowi obrotu względem tego bieguna (art. 22). Ta uwaga pozwala moment obrotu względem punktu przedstawić geometrycznie. W tym celu przesuwamy płaszczyznę przez biegun momentu i oś obrotu, wystawiamy w biegunie prostopadłą do tej płaszczyzny i na tej prostopadłej odcinamy od bieguna wielkość momentu w tym kierunku, w którym biegun przesuwa się wskutek danego obrotu.

Niech  $x, y$  i  $z$  będą współrzędnymi dowolnego punktu na osi  $O$  obrotu, zaś  $a, b$  i  $c$  dostawami kierunkowymi tej osi. Odległość początku układu współrzędnych od prostej  $O$  wynosi

$$\delta = [(cy - bz)^2 + (az - cx)^2 + (bx - ay)^2]^{\frac{1}{2}};$$

jeżeli więc  $\omega$  jest prędkością kątową obrotu około prostej  $O$ , a  $\Xi, H, Z$  są składowymi tej prędkości, to moment  $\mu$  tego obrotu względem początku układu współrzędnych będzie

$$(1) \quad \mu = \omega\delta = [(Ly - Hz)^2 + (\Xi z - Zx)^2 + (Hx - \Xi y)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Przesuńmy płaszczyznę przez początek układu współrzędnych i przez oś obrotu, i niechaj  $a', b'$  i  $c'$  oznaczają dostawy kierunkowe prostopadłej do tej płaszczyzny, wystawionej w początku; wiadomo, że

$$(2) \quad a' = \frac{cy - bz}{\delta}, \quad b' = \frac{az - cx}{\delta}, \quad c' = \frac{bx - ay}{\delta}.$$

Odetnijmy na tej prostopadłej od początku układu współrzędnych moment  $\mu$ , rzuńmy ten odcinek na osi współrzędnych  $x, y$  i  $z$  i oznaczmy te rzuty odpowiednio przez  $\Lambda, M, N$ ; mamy tu

$$(3) \quad \Lambda = a'\mu = Zy - Hz, \quad M = b'\mu = \Xi z - Zx, \quad N = c'\mu = Hx - \Xi y.$$

Niech początek układu współrzędnych (biegun momentu  $\mu$ ) obraca się około osi  $O$  z prędkością kątową  $\omega$ ; rzuty  $v_x, v_y, v_z$  jego prędkości otrzymamy z równań (5) art. 24-go, kładąc w nich  $x=0, y=0, z=0$  i podstawiając współrzędne  $x, y$  i  $z$  punktu na osi  $O$  zamiast  $X, Y, Z$ . Tym sposobem otrzymamy

$$v_x : v_y : v_z = cy - bz : az - cx : bx - ay = \Lambda : M : N,$$

z czego się okazuje, że długość  $\mu$ , której kierunek wyznaczają równania (3), została odciętą na prostej ( $a', b', c'$ ) według poprzedniej reguły.

Z równań (3) wynikają dwa następujące:

$$(4) \quad \Xi \Lambda + H M + Z N = 0, \quad \Lambda x + M y + N z = 0,$$

wyrażające związki, jeden między rzutami prędkości kątowej obrotu a rzutami jego momentu względem początku układu współrzędnych, drugi między rzutami momentu a współrzędnymi dowolnego punktu na osi obrotu.

Niech w punkcie  $(x, y, z)$  przecinają się osi  $n$  obrotów jednoczesnych, a przez  $\Lambda_i, M_i, N_i$  oznaczmy rzuty momentu  $\mu_i$  obrotu  $\omega_i$  około osi  $O_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) względem początku współrzędnych; wówczas

$$\Lambda_i = Z_i y - H_i z, \quad M_i = \Xi_i z - Z_i x, \quad N_i = H_i x - \Xi_i y.$$

Jeżeli przez  $\Xi, H, Z$  oznaczmy rzuty prędkości kątowej obrotu wypadkowego, a przez  $\Lambda, M, N$  rzuty momentu  $\mu$  tego obrotu wypadkowego względem początku, to

$$\Lambda = Z y - H z = y \cdot \Sigma Z_i - z \cdot \Sigma H_i = \Sigma \Lambda_i,$$

a ponieważ podobne wyrażenia otrzymujemy na  $M$  i  $N$ , przeto będzie zawsze

$$(5) \quad \Lambda = \Sigma \Lambda_i, \quad M = \Sigma M_i, \quad N = \Sigma N_i.$$

Wystawmy w początku osi wiązkę prostych, wyobrażających geometrycznie momenty  $\mu_i$  danych obrotów składowych, tudzież prostą  $\mu$ , przedstawiającą moment obrotu wypadkowego. Wtedy z ostatnich trzech równań okazuje się, że rzut odcinka  $\mu$  na każdą prostą w przestrzeni równa się sumie algebraicznej rzutów wszystkich odcinków  $\mu_i$  na tę samą prostą, z czego wnosimy, że, jeżeli odcinki  $\mu_i$  przyłożymy do siebie takim samym sposobem, jak przykładaliśmy poprzednio (art. 4) do siebie prędkości składowe punktu, to odcinek  $\mu$  będzie bokiem zamykającym wielobok, utworzony z odcinków  $\mu_i$ . Możemy ten związek geometryczny między momentami  $\mu_i$  a momentem  $\mu$  tak wyrazić: *jeżeli osi ilukolwiek obrotów przecinają się w jednym punkcie, natenczas moment obrotu wypadkowego względem danego punktu jest wypadkową momentów tych obrotów względem tego punktu.* Początek układu współrzędnych mógł być dowolnie obrany, przeto podane twierdzenie jest prawdziwe dla każdego punktu. Skład momentów takich obrotów względem punktu dokonywa się więc podobnie, jak skład obrotów; figurę, której bokami są powyższe momenty, zowiemy wielobokiem momentów. Jeżeli biegun obierzemy na osi obrotu wypadkowego, natenczas moment wypadkowy będzie równy zeru; dla takiego zatem bieguna wielobok momentów będzie zamknięty. Oś więc obrotu wy-

padkowego jest miejscem geometrycznym biegunów, względem których wielobok momentów składowych się zamyka.

Jeżeli osi obrotów składowych leżą na jednej płaszczyźnie, na której także obieramy biegun momentów, to z powyższego twierdzenia wynika, że moment obrotu wypadkowego będzie sumą algebraiczną momentów obrotów składowych.

Znając moment  $\mu$  danego obrotu względem początku osi, możemy obliczyć jego moment  $\mu_1$  względem dowolnego punktu  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Przesuńmy w tym celu przez ten punkt trzy osi współrzędnych  $x_1, y_1, z_1$ , równoległe do pierwotnych, to będzie  $x_1 = x - \xi, y_1 = y - \eta, z_1 = z - \zeta$ ; jeżeli zatem  $\Lambda_1, M_1$  i  $N_1$  oznaczają rzuty momentu  $\mu_1$  względem punktu  $(\xi, \eta, \zeta)$  na osi współrzędnych, to

$$\Lambda_1 = Zy_1 - Hz_1 = Z(y - \eta) - H(z - \zeta) = \Lambda - (Z\eta - H\zeta).$$

Postępując podobnie z rzutami  $M_1$  i  $N_1$ , otrzymamy

$$(5) \quad \Lambda_1 = \Lambda - (Z\eta - H\zeta), \quad M_1 = M - (H\xi - Z\eta), \quad N_1 = N - (H\xi - E\eta);$$

$$(6) \quad \mu_1 = \sqrt{\Lambda_1^2 + M_1^2 + N_1^2}.$$

**26.** Iloczyn najkrótszej odległości dwu prostych i wstawy ich kąta nachylenia wzajemnego nazywamy momentem tych prostych. Jeżeli jedna z dwu prostych jest osią obrotu z prędkością kątową  $\omega$ , to momentem obrotu tego względem drugiej prostej nazywamy iloczyn momentu obu dwu prostych i prędkości kątowej tego obrotu. Prosta, względem której wyznaczamy moment pewnego obrotu, nazywa się osią momentu tego. Moment obrotu względem danej prostej jest równy zeru, jeżeli oś obrotu jest równoległa do tej prostej, lub ją przecina.

Niech prosta  $O$  będzie osią obrotu  $\omega$ ,  $L$  daną prostą, względem której mamy wyznaczyć moment tego obrotu,  $\delta$  oznacza najkrótszą odległość tych prostych, a  $\varphi$  kąt, który one z sobą tworzą. Wyznamy punkt  $a$ , w którym najkrótsza odległość  $\delta$  przecina prostą  $L$ , i przyjmijmy, że prosta  $L$  jest stale połączona z osią  $O$  i około niej się obraca. Wtedy punkt  $a$  nabędzie w elemencie czasu prędkość  $\delta \cdot \omega$ , a kierunek tej prędkości będzie z prostą  $L$  tworzył kąt  $\frac{\pi}{2} - \varphi$ , a więc rzut tej prędkości na prostą  $L$  będzie  $\delta \omega \cdot \sin \varphi$ , równy zatem momentowi obrotu  $\omega$  względem prostej  $L$ . Z tej uwagi wynika następujący sposób geometrycznego przedstawienia momentu obrotu  $\omega$  względem prostej  $L$ : od punktu  $a$  odcinamy na prostą  $L$  (na osi momentu) długość, proporcjonalną względem rzutu prędkości tego punktu na prostą  $L$ , i mającą kierunek tego rzutu; ta długość przedstawia moment geometrycznie. Możemy tę długość odciąć także od dowolnego punktu na osi momentu, dając jej przytym właściwy kierunek, a ona wciąż będzie geometrycznie przedstawiała moment uważanego obrotu względem tej prostej.

Obliczmy momenty danego obrotu  $\omega$  około osi  $O$  względem osi współrzędnych. W tym celu obierzmy na osi obrotu, której dostawy kierunkowe niech

będą  $a$ ,  $b$  i  $c$ , punkt dowolny  $(x, y, z)$ ; najkrótsze odległości prostej  $O$  od osi  $x$ -ów,  $y$ -ów i  $z$ -ów są odpowiednio, jak wiadomo,

$$\frac{cy - bz}{\sqrt{1 - a^2}}, \quad \frac{az - cx}{\sqrt{1 - b^2}}, \quad \frac{bx - ay}{\sqrt{1 - c^2}};$$

momenty zatem tej prostej względem osi współrzędnych są odpowiednio

$$(1) \quad cy - bz, \quad az - cx, \quad bx - ay.$$

Mnożąc je przez  $\omega$ , otrzymamy odpowiednie momenty danego obrotu względem osi współrzędnych,

$$(2) \quad \omega(cy - bz), \quad \omega(az - cx), \quad \omega(bx - ay).$$

A ponieważ  $\Xi = a\omega$ ,  $H = b\omega$ ,  $Z = c\omega$  są rzutami prędkości kątowej  $\omega$  na te trzy osi, przeto okazuje się, że wielkości

$$(3) \quad A = Zy - Hz, \quad M = \Xi z - Zx, \quad N = Hx - \Xi y,$$

w art. 25-ym rozważane, są odpowiednio momentami danego obrotu względem osi współrzędnych  $x$ ,  $y$  i  $z$ . Każda z tych wielkości jest zarazem (art. 25) rzutem momentu danego obrotu względem początku układu współrzędnych na odpowiednią oś współrzędnych. Te zaś osi dowolnie obrane zostały, przeto mamy twierdzenie: *moment obrotu względem danej prostej jest równy rzutowi na nią momentu tegoż obrotu względem dowolnego jej punktu*. A zatem możemy otrzymać moment obrotu względem danej prostej, przedstawiając geometrycznie moment tego obrotu względem punktu, dowolnie obranego na prostej, i rzucając ten moment na tę prostą; rzut ten przedstawia moment szukany. Odwracając zaś to postępowanie, możemy powiedzieć: *moment obrotu względem danego punktu jest równoważny momentom tego obrotu względem trzech prostych, przecinających się prostopadle w tym punkcie*.

Z równań (5) poprzedniego ustępu wynika twierdzenie: *jeżeli osi kilkuobrotów przecinają się w jednym punkcie, natenczas moment obrotu wypadkowego względem danej prostej równa się sumie algebraicznej momentów tych obrotów względem téjże prostej*.

**27. SKŁAD OBROTÓW OKOŁO OSI RÓWNOLEGŁYCH.** Udzielmy układowi niezmiennemu dwu chwilowych obrotów  $\omega_1$  i  $\omega_2$  około dwu osi równoległych  $O_1$  i  $O_2$ : mamy wyznaczyć jego ruch wypadkowy. Przyjmijmy naprzód, że obadwa obroty mają ten sam kierunek (fig. 14a); natenczas każdy punkt, obrany na płaszczyźnie  $P$ , przesuniętej przez obie osi, i łączący między tymi osiami, porusza się wskutek obudwu obrotów w dwu kierunkach wprost sobie przeciwnych. Jeżeli odległości takiego punktu od danych osi oznaczymy odpowiednio przez  $r_1$  i  $r_2$ , to możemy ten punkt tak obrać, żeby  $r_1\omega_1 = r_2\omega_2$ ; wtedy dwie prędkości, których punkt nabywa wskutek

Fig. 14a.

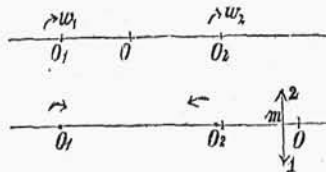


Fig. 14b.

tych obrotów, zniosą się i punkt pozostanie w spoczynku. Ponieważ miejscem geometrycznym takich punktów, pozostających w spoczynku wskutek danych obrotów, jest pewna prosta  $O$ , leżąca na płaszczyźnie  $P$  między danymi osiami i do nich równoległa, przeto (art. 21) widzimy, że obadwa obroty chwilowe są równoważne obrotowi chwilowemu około tej prostej  $O$ . Ta prosta dzieli wzajemną odległość danych osi odwrotnie proporcjonalnie względem odpowiednich prędkości kątowych; każdy punkt układu niezmiennego nabywa wskutek obrotu wypadkowego około prostej  $O$  téjże samej prędkości, co wskutek obudwu obrotów chwilowych około danych osi. Aby wyznaczyć prędkość kątową  $\omega$  obrotu wypadkowego, wyrażmy warunek, że prędkość dowolnego punktu, obranego na osi  $O_1$ , wskutek obudwu obrotów, ma być równa prędkości tego punktu wskutek obrotu wypadkowego; otrzymamy równanie  $r_1\omega = (r_1 + r_2)\omega_2$ . A ponieważ  $r_1:r_2 = \omega_2:\omega_1$ , przeto  $\omega = \omega_1 + \omega_2$ .

Niech (fig. 14b) dane obroty mają kierunki wprost sobie przeciwne,  $\omega_1$  niech będzie prędkością kątową obrotu około  $O_1$ , a  $\omega_2 = -(\omega_1 + \varepsilon)$ , gdzie  $\varepsilon$  jest liczbą o takimże znaku, jak  $\omega_1$ , prędkością kątową obrotu około  $O_2$ ; nadto obierzmy na płaszczyźnie  $P$  dowolny punkt  $m$ . Prędkość, udzielona temu punktowi przez każdy z danych obrotów zosobna, będzie miała kierunek bądźto strzałki 1, bądźtéż strzałki 2; przyjmijmy tę prędkość w pierwszym przypadku jako dodatnią, w drugim zaś jako ujemną. Niech  $r_1$  i  $r_2$  oznaczają odpowiednio odległości punktu  $m$  od danych osi  $O_1$  i  $O_2$ ,  $\delta$  wzajemną odległość tych osi, a  $v$  prędkość wypadkową punktu wskutek obudwu obrotów. Jeżeli punkt  $m$  znajduje się zewnątrz obudwu osi i bliżej osi  $O_1$ , to prędkość jego będzie

$$(1) \quad v = -r_1\omega_1 + r_2(\omega_1 + \varepsilon) = (r_2 - r_1)\omega_1 + r_2\varepsilon = \delta\omega_1 + r_2\varepsilon;$$

jeżeli został obrany między osiami, to

$$(2) \quad v = r_1\omega_1 + r_2(\omega_1 + \varepsilon) = (r_1 + r_2)\omega_1 + r_2\varepsilon = \delta\omega_1 + r_2\varepsilon,$$

a jeżeli leży zewnątrz tych osi i bliżej osi  $O_2$ , to otrzymamy

$$(3) \quad v = r_1\omega_1 - r_2(\omega_1 + \varepsilon) = (r_1 - r_2)\omega_1 - r_2\varepsilon = \delta\omega_1 - r_2\varepsilon.$$

Z tych równań widzimy, że  $v$  może być równe zeru tylko w ostatnim przypadku, że zatem miejscem punktów, które wskutek danych obrotów pozostają w spoczynku, jest pewna prosta, równoległa do danych osi, leżąca na płaszczyźnie  $P$  zewnątrz tych osi, a bliżej tej z nich, której odpowiada bezwzględnie większa prędkość kątowa. Odległości  $r_1$  i  $r_2$  owej prostej  $O$ , będącej osią obrotu wypadkowego, od danych osi otrzymujemy z równania (3), kładąc w nim  $v = 0$ ; mieć będziemy naprzód

$$r_2 = \frac{\delta\omega_1}{\varepsilon}, \text{ wskutek czego } r_1 = \frac{\delta(\omega_1 + \varepsilon)}{\varepsilon}, \text{ tak iż } \frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_1 + \varepsilon}{\omega_1}.$$

Te więc odległości są odwrotnie proporcjonalne względem odpowiednich prędkości kątowych. Gdy oznaczymy przez  $\omega$  prędkość obrotu wypadkowego, mającą kierunek prędkości bezwzględnie większej  $\omega_2$ , to podobnym sposo-



bem, jak poprzednio dla obrotów o spólnym kierunku, przekonamy się, że  $\omega = \omega_1 - (\omega_1 + \varepsilon) = -\varepsilon$ , t. j., że ta prędkość równa się sumie algebricznej danych prędkości kątowych. — Jeżeli  $\varepsilon = 0$ , wtedy prędkości kątowe obrotów składowych są bezwzględnie równe i mają kierunki wprost przeciwne. Wtedy  $\omega = 0$ , a  $r_1$  i  $r_2$  przybiorą wartości nieskończenie wielkie, a zatem oś obrotu wypadkowego o prędkości kątowej zero będzie prostą w nieskończoności płaszczyzny P. Aby zrozumieć ten wynik, przyjmijmy  $\varepsilon = 0$  w równaniu (1), (2) i (3); wtedy dla każdego punktu płaszczyzny P otrzymamy tę samą prędkość  $v = \delta\omega_1$ , z czego wnosimy (art. 21), że ta płaszczyzna, a wraz z nią i układ niezmienny, do którego ona należy, wykona chwilowy ruch postępowy z prędkością  $v = \delta\omega_1$ . Prędkość bowiem  $v$  (fig. 14b) jest prostopadła do płaszczyzny P i ma tenże sam kierunek, co odcinek, przedstawiający moment każdego z dwu obrotów, rozważanych względem punktu, obranego dowolnie na osi drugiego obrotu.

**28. PARA OBROTÓW.** Dwa obroty chwilowe około dwu osi równoległych, których prędkości kątowe są bezwzględnie równe a o przeciwnych kierunkach, nazywamy parą obrotów. Płaszczyznę, przechodzącą przez osi obrotów, nazywamy płaszczyzną pary, a iloczyn wzajemnej odległości obrotów i prędkości kątowej obrotów nazywamy momentem pary obrotów. Łatwo spostrzeżemy, że moment pary obrotów jest także równy momentowi każdego z dwu obrotów tej pary względem punktu, obranego dowolnie na osi drugiego obrotu téjże pary. Parę obrotów o prędkościach  $\omega$  i  $-\omega$  oznaczają będziemy symbolem  $(\omega, -\omega)$ . Wyniki, otrzymane w art. poprzedzającym, możemy teraz sformułować w twierdzeniu: *jeżeli dwa obroty chwilowe około osi równoległych nie stanowią pary obrotów, to są równoważne obrotowi chwilowemu; jeżeli zaś takie dwa obroty stanowią parę, wtedy są równoważne ruchowi postępowemu; prędkość tego ruchu jest równa momentowi pary, a jego kierunek jest ten sam, co odcinka, przedstawiającego moment każdego z dwu obrotów téj pary względem punktu, obranego dowolnie na osi drugiego obrotu téjże pary.*

Z tego wynika, że dwie pary obrotów, wywołujące ten sam ruch postępowy, są równoważne i mogą się nawzajem zastąpić. Dla danej pary obrotów można podać nieskończenie wiele par równoważnych. Weźmy bowiem na płaszczyźnie P parę obrotów  $(\omega, -\omega)$  o momencie  $\mu = \delta\omega$  i, przesunawszy w przestrzeni dowolną płaszczyznę P' równoległą do P, obierzmy na niej dowolnie dwie równoległe proste O'₁ i O'₂ w odległości wzajemnej  $\delta'$  i te proste przyjmijmy jako osi dwu obrotów chwilowych z takimi prędkościami kątowymi  $\omega'$  i  $-\omega'$ , żeby  $\mu = \delta'\omega'$  i żeby ruch postępowy, wywołany przez parę  $(\omega', -\omega')$ , miał ten sam kierunek, co ruch postępowy, odpowiedni parze  $(\omega, -\omega)$ ; natenczas pary  $(\omega, -\omega)$  i  $(\omega', -\omega')$  będą równoważne, albowiem wywołują ten sam ruch postępowy.

Podane wyżej twierdzenie daje możność przedstawienia geometrycznego pary obrotów. W tym celu wystawmy w dowolnym punkcie prostą w kierunku ruchu postępowego, równoważnego danej parze, i na niej weźmy odcinek



o długości odpowiadającej wielkości momentu pary; ten odcinek będzie oczywiście przedstawiał geometrycznie daną parę obrotów.

Pary obrotów, udzielonych temu samemu układowi niezmiennemu, można składać z sobą. Jeżeli mamy danych  $n$  par obrotów  $(\omega_1, -\omega_1), \dots, (\omega_n, -\omega_n)$  o momentach  $\mu_1, \dots, \mu_n$ , to przedstawmy te pary geometrycznie zapomocą odcinków, wychodzących z tego samego punktu, a następnie przykładajmy te odcinki do siebie takim sposobem, jak przy prędkościach ruchów postępowych; z nich więc utworzymy wielobok. Natenczas prosta, zamykająca ten wielobok, przedstawiać będzie moment pary wypadkowej. Jeżeli wielobok momentów par składowych sam się zamknie, to dane pary znoszą się. Parę obrotów można zawsze rozłożyć na dwie pary lub więcej, a to tym samym sposobem, jakiego używaliśmy do rozkładania prędkości punktu, lub do rozkładania obrotu chwilowego na inne obroty, których osi przecinały w tym samym punkcie oś danego obrotu. Ruch postępowy można zastąpić parą obrotów, która jest geometrycznie przedstawiona zapomocą odcinka, wyobrażającego prędkość ruchu danego.

## 29. SKŁAD OBROTU Z RUCHEM POSTĘPOWYM. SKRĘT CHWIŁOWY. —

a). Mając obrót  $\omega$  około osi  $O$  i ruch postępowy z prędkością  $v$  w kierunku prostopadłym do téjże osi, chcemy złożyć te dwa ruchy chwilowe. Zastąpiwszy ruch postępowy parą obrotów (art. 28) o momencie  $v$ , możemy prostą  $O$  obrać jako oś, a wielkość  $-\omega$  jako odpowiednią prędkość kątową jednego z dwu obrotów téj pary; wtedy oś  $S$  drugiego obrotu téj pary znajduje się na płaszczyźnie, przechodzącej przez  $O$  prostopadle do  $v$ ; odległość prostej  $S$  od  $O$  jest  $\delta = v : \omega$ , a  $\omega$  jest prędkością kątową obrotu około  $S$ . Obroty  $\omega$  i  $-\omega$  około prostej  $O$  znoszą się, a zatem ruchem wypadkowym jest tylko obrót chwilowy  $\omega$  około osi  $S$ . — Możemy to inaczej tak uzasadnić. Dowolny punkt  $m$  w odległości  $\rho$  od osi  $O$  (fig. 15) otrzymuje dwie prędkości, prostopadłe do téj

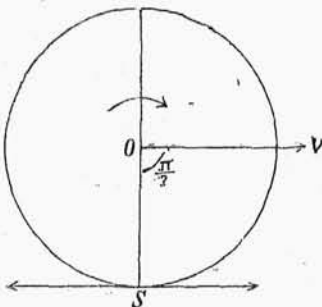


Fig. 15.

osi, mianowicie: prędkość  $\rho\omega$  wskutek danego obrotu i prędkość  $v$  wskutek danego ruchu postępowego. Punkt pozostanie w spoczynku, jeżeli  $\rho\omega = v$  i jeżeli kierunki obudwu prędkości będą wprost przeciwne. Kręśląc zatem z punktu  $O$  (leżącego na osi  $O$ ) koło o promieniu  $\rho = v : \omega$  i obierając na tym kole taki punkt  $S$ , żeby kierunki jego obudwu prędkości były wprost sobie przeciwne, otrzymamy ślad osi  $S$  na płaszczyźnie rysunku, a obrót chwilowy  $\omega$  około téj osi będzie równoważny obudwu danym ruchom.

Nawzajem, można obrót chwilowy  $\omega$  około danej osi  $S$  rozłożyć na obrót  $\omega$  około innej osi  $O$ , równoległej do  $S$ , i na ruch postępowy z prędkością  $v = \delta\omega$ , gdzie  $\delta$  oznacza wzajemną odległość prostych  $O$  i  $S$ .

b). Niech będzie dany obrót  $\omega$  około osi O (fig. 16) i ruch postępowy  $v$  w kierunku, tworzącym kąt  $\varphi$  z tą osią; mamy złożyć te dwa ruchy chwilowe. Rozłożmy prędkość  $v$  na dwie prędkości  $v'$  i  $v''$ ; składowa  $v'$  niech będzie równoległa do osi O, a  $v''$  niech będzie prostopadła do tej osi. Wtedy otrzymamy  $v' = v \cdot \cos \varphi$ ,  $v'' = v \cdot \sin \varphi$ . Dany obrót  $\omega$  wraz z ruchem postępowym  $v''$  sprawiają obrót  $\omega$  około pewnej osi S, równoległej do O, którą według  $\alpha$ . wyznaczyć możemy. Ruch zatem wypadkowy będzie się składał z obrotu chwilowego  $\omega$  około tej osi S i z chwilowego ruchu postępowego  $v'$  w kierunku osi O, a więc także osi S.

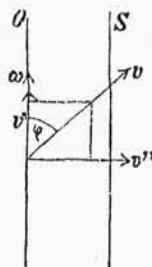


Fig. 16.

Ruch układu niezmiennego, składający się z obrotu chwilowego około pewnej osi i z chwilowego ruchu postępowego w kierunku tej osi, nazywamy skrętem chwilowym tego układu, tak iż *obróć chwilowy wraz z ruchem postępowym chwilowym, który nie jest prostopadły do osi obrotu, są równoważne skrętowi chwilowemu*. Gdy skręt zachodzi, rozróżniamy dwie prędkości, mianowicie: prędkość obrotu i prędkość ruchu postępowego. Jeżeli żadna z tych prędkości nie jest równa zeru, to skręt składa się z dwu ruchów chwilowych. Jeżeli prędkość obrotu jest równa zeru, to skręt sprowadza się do chwilowego ruchu postępowego; jeżeli zaś prędkość postępową jest równa zeru, to skręt redukuje się do samego obrotu chwilowego.

**30. SPÓRZĘDNE OBROTU CHWILOWEGO.** Niech będzie dany obrót chwilowy  $\omega$  około pewnej osi O, której położenie względem trzech prostokątnych osi współrzędnych jest wiadome. Poprowadźmy przez początek A współrzędnych prostą O', równoległą do O, i nadajmy układowi niezmiennemu dwa obroty chwilowe  $\omega$  i  $-\omega$  około tej prostej O'; nie zmienimy przez to jego ruchu chwilowego. Obrót dany  $\omega$  razem z obrotem  $-\omega$  około prostej O' tworzą parę obrotów, której moment  $\mu$  równy jest momentowi pierwotnego obrotu względem punktu A (art. 28). Tym sposobem zastąpiliśmy obrót pierwotny obrotem z tą samą prędkością kątową, lecz około prostej O' (przechodzącej przez początek współrzędnych), oraz ruchem postępowym o prędkości  $\mu$ . Rozłożmy teraz (art. 23) obrót  $\omega$  około prostej O' na trzy obroty  $\Xi$ , H i Z około osi współrzędnych Ax, Ay i Az, a ruch postępowy  $\mu$  (art. 5) na trzy  $\Lambda$ , M i N w kierunkach tych osi; widzimy, że *obróć chwilowy układu niezmiennego jest równoważny trzem obrotom chwilowym około trzech prostokątnych osi współrzędnych wraz z trzema ruchami chwilowymi postępowymi w kierunkach tychże osi*. To twierdzenie pozostaje widocznie prawdziwym dla układu ukośnokątnego współrzędnych.

Prędkości kątowe  $\Xi$ , H i Z trzech obrotów chwilowych około osi współrzędnych, tudzież prędkości  $\Lambda$ , M i N trzech ruchów chwilowych postępowych w kierunkach tych osi, nazywać będziemy współrzędnymi obrotu chwilowego danego. Współrzędne  $\Xi$ , H i Z są rzutami danej prędkości kątowej  $\omega$  na