

## ROZDZIAŁ XV.

### ZAGADNIENIA Z KINETYKI UKŁADÓW MATERYJALNYCH.

---

**159. RUCH PRZY UWZGLĘDNIENIU TARCIA.** Wyjaśniliśmy znaczenie tarcia przy równowadze sił w art. 118-ym. Podobnie należy reakcją powierzchni fizycznój, do którój ciało jest styczne podczas ruchu, rozdzielić na dwie części, normalną i styczną, a ta reakcja styczna stanowi właśnie tarcie. Między tarcie w spoczynku a tarcie podczas ruchu zachodzi ta główna różnica, że kierunek i wielkość tarcia podczas ruchu jest wogólności dokładnie określona, podczas gdy tarcie w spoczynku tylko wtedy daje się określić, kiedy zachodzi równowaga w położeniu krańcowym. Kierunek tarcia podczas ruchu jest przeciwny kierunkowi ruchu punktu styczności, a jego wielkość równa się iloczynowi współczynnika tarcia i ciśnienia normalnego na powierzchnią.

Z doświadczeń, które C. A. Coulomb (1779), G. Rennie (1825), A. Morin (1831 — 1833), D. Galton (1878 — 1879) i inni czynili, okazuje się, że współczynnik tarcia jest największy w chwili rozpoczęcia ruchu, i że jego wielkość zmniejsza się podczas ruchu. Z tego powodu rozróżniamy tarcie statyczne i tarcie kinetyczne; pierwsze pojawia się wtedy, kiedy ruch ciała właśnie się rozpoczyna, drugie zaś podczas ruchu. Współczynnik tarcia statycznego jest większy od współczynnika tarcia kinetycznego.

Wielkość tarcia zależy także od tego, czy ciało ślizga się na płaszczyźnie stycznej do powierzchni, czytóż toczy się na niej. W pierwszym przypadku punkt styczności ma prędkość skończoną w pewnym kierunku na płaszczyźnie stycznej; w drugim przypadku obraca się ciało chwilowo około osi, przez ten punkt przechodzącej i leżącej na płaszczyźnie stycznej, a prędkość punktu styczności jest równa zeru. Do posuwania ciała jest potrzebna siła, przyłożona do środka masy, do obracania go około osi jest potrzebna para sił o pewnym momencie; a ponieważ tarcie jest zawsze oporem, działającym wbrew ruchowi, przeto tarcie przy ślizganiu się należy uważać za siłę, a tarcie przy tocze-

niu się za parę sił. Zamiast mówić tarcie przy toczeniu się, można mówić lepiej: opór przeciw toczeniu się, co nadal czynić będziemy.

Prawa tarcia przy ślizganiu się, wyznaczone doświadczalnie, są następujące: 1-o kierunek tarcia jest przeciwny kierunkowi ślizgania się; 2-o wielkość tarcia niezależy od wielkości pola dotykania; 3-o współczynnik tarcia zależy od natury fizycznej obudwu ciał, a tym samym od stanu ich powierzchni; 4-o dla ciał twardych współczynnik tarcia jest funkcją ciągłą względnej prędkości ślizgania się, i zmniejsza się w miarę wzrastania prędkości. Zależność tarcia od prędkości można przedstawić zapomocą wzoru

$$f = f_0 e^{-\alpha v},$$

w którym  $f$  oznacza współczynnik tarcia przy prędkości  $v$ , a  $f_0$  i  $\alpha$  są parametrami, zależnymi od natury ciał. Dla  $v = 0$  będzie  $f = f_0$ , dla  $v = \infty$  będzie  $f = 0$ ;  $f_0$  oznacza więc współczynnik tarcia statycznego.

Ponieważ zmianę współczynnika  $f$  wypada uwzględniać tylko przy znacznych prędkościach, przeto w następujących zagadnieniach przyjmować będziemy, że  $f$  ma wartość stałą, przedstawiającą wartość średnią tego współczynnika między krańcowymi prędkościami uważanymi. Oznaczając przez  $R$  ciśnienie normalne na powierzchnię, a przez  $F$  tarcie, mamy równanie  $F = fR$ , w którym  $f < 1$ .

Niech punkt o masie  $m$ , do którego przykładamy siłę  $(X, Y, Z)$ , porusza się na powierzchni  $\Phi(x, y, z) = 0$ , na której doznaje tarcia, i niech  $a, b, c$  oznaczają dostawy kierunkowe normalnej w punkcie  $(x, y, z)$ ; równania ruchu będą

$$(1) \quad \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= X + R \left( a - f \frac{dx}{ds} \right), \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y + R \left( b - f \frac{dy}{ds} \right), \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + R \left( c - f \frac{dz}{ds} \right). \end{aligned}$$

Te równania, łącznie z równaniem powierzchni  $\Phi = 0$ , pozwalają wyznaczyć ruch punktu i reakcję  $R$ . Ponieważ praca siły  $R$  jest równa zero, przeto  $Xdx + Ydy + Zdz - fRds$  jest sumą prac sił działających; mamy zatem równanie

$$(2) \quad d \left( \frac{mv^2}{2} \right) = Xdx + Ydy + Zdz - fRds,$$

którego całka przedstawia energiją kinetyczną. Niech siła przyłożona ma potencyjał  $U$ ; wtedy całkując między krańcami, dla których  $T$  i  $T_0$  oznaczają odpowiednie energije, otrzymamy

$$(3) \quad T - T_0 = U - U_0 - f \int_{s_0}^s R ds.$$

Ponieważ całka po prawej stronie tego równania, przedstawiająca pracę tarcia, zależy od przebiegu całkowania i od krańców, przeto widzimy, że zasada

energii i zasada zachowania energii nie zachodzi w przypadku, gdy uwzględniamy tarcie. Przyrost energii ciała jest mniejszy od różnicy potencjałów o pracę tarcia.

Niech ciało sztywne, ograniczone wiadomą powierzchnią, porusza się z tarcieniem na wiadomej płaszczyźnie; wtedy równania ruchu otrzymamy sposobem następującym. Obierzmy płaszczyznę ruchu za płaszczyznę  $Oxy$ , i niech  $\xi, \eta, \zeta$  oznaczają współrzędne środka masy ciała, zaś  $x_0, y_0$  współrzędne punktu styczności, względem osi nieruchomego układu współrzędnych o wierzchołku  $O$ . Jeżeli ciało ślizga się na płaszczyźnie, a  $u, v$  oznaczają odpowiednie składowe prędkości punktu  $(x_0, y_0)$ , to rozkładając tarcie na dwie siły  $X_1, Y_1$  w kierunkach osi  $Ox, Oy$ , otrzymamy

$$(4) \quad \frac{X_1}{Y_1} = \frac{u}{v} \text{ czyli } X_1 v - Y_1 u = 0;$$

a jeżeli  $Z_1$  jest ciśnieniem normalnym, to wartość krańcowa tarcia będzie

$$(5) \quad F = f Z_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}.$$

Poprowadźmy w środku masy  $S$  osi bezwładności  $Sp, Sq, Sr$ , oznaczmy przez  $p, q, r$  składowe prędkości kątowej obrotu ciała w kierunkach tych osi, a przez  $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3$  odpowiednio dostawy kierunkowe tych osi względem osi układu  $Oxyz$ . Jeżeli  $\alpha, \beta, \gamma$  oznaczają współrzędne punktu styczności  $(x_0, y_0)$  względem osi układu  $Spqr$ , to prędkości tego punktu wskutek obrotu, wzięte w kierunkach osi bezwładności, będą odpowiednio:  $q\gamma - r\beta, r\alpha - p\gamma, p\beta - q\alpha$ ; rzucając te prędkości na osi  $Ox$  i  $Oy$  i dodając do tych rzutów prędkości środka masy, otrzymamy następujące dwa równania:

$$(6) \quad \begin{cases} u = \frac{d\xi}{dt} + a_1(q\gamma - r\beta) + a_2(r\alpha - p\gamma) + a_3(p\beta - q\alpha), \\ v = \frac{d\eta}{dt} + b_1(q\gamma - r\beta) + b_2(r\alpha - p\gamma) + b_3(p\beta - q\alpha). \end{cases}$$

W przypadku, gdy ciało toczy się bez ślizgania, będzie

$$(7) \quad u = 0, \quad v = 0.$$

Gdy  $X, Y, Z, L, M, N$  oznaczają współrzędne układu sił przyłożonych, wzięte względem osi równoległych do osi układu  $Oxyz$  i przesuniętych przez środek masy, równania ruchu środka masy będą

$$(8) \quad m \frac{d^2\xi}{dt^2} = X + X_1, \quad m \frac{d^2\eta}{dt^2} = Y + Y_1, \quad m \frac{d^2\zeta}{dt^2} = Z + Z_1,$$

gdzie  $m$  oznacza masę ciała. Aby otrzymać równania Euler'a, określające kręcenie się około środka masy, zważmy, że  $a_i L + b_i M + c_i N$ , ( $i = 1, 2, 3$ ), oznaczają momenty sił przyłożonych względem osi  $Sp, Sq, Sr$ . Momenty całkowitej reakcji ( $X_1, Y_1, Z_1$ ) płaszczyzny względem tychże osi wynoszą

$$Z\beta - H\gamma, \quad E\gamma - Z\alpha, \quad H\alpha - E\beta, \quad \text{gdzie}$$

$$E = a_1 X_1 + b_1 Y_1 + c_1 Z_1, \quad H = a_2 X_1 + b_2 Y_1 + c_2 Z_1, \quad Z = a_3 X_1 + b_3 Y_1 + c_3 Z_1.$$

Szukane zatem równania będą

$$(9) \quad \begin{cases} A \frac{dp}{dt} - (B-C) qr = a_1 L + b_1 M + c_1 N + Z\beta - H\gamma, \\ B \frac{dq}{dt} - (C-A) rp = a_2 L + b_2 M + c_2 N + \Xi\gamma - Z\alpha, \\ C \frac{dr}{dt} - (A-B) pq = a_3 L + b_3 M + c_3 N + H\alpha - \Xi\beta, \end{cases}$$

gdzie  $A, B, C$  oznaczają momenty główne ciała. Z tymi równaniami należy, jak wiadomo, połączyć 3 równania art. 49-go, wyrażające  $p, q, r$  przez kąty  $\varphi, \psi$  i  $\theta$ .

Jeżeli  $\Phi = 0$  jest równaniem powierzchni ciała względem osi głównych, to mamy równanie

$$(10) \quad \Phi(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

które wyraża, że punkt styczności znajduje się na powierzchni ciała. Płaszczyzną styczną w tym punkcie jest płaszczyzna  $Oxy$ , mamy więc dwa warunki:

$$(11) \quad a_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + a_3 \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad b_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + b_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + b_3 \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

gdzie w pochodnych cząstkowych należy podstawić spólrzędne  $\alpha, \beta, \gamma$  punktu styczności. Spólrzędna  $\xi$  oznacza odległość środka masy od płaszczyzny styczności; będzie więc

$$(12) \quad \xi \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2} = \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

W zagadnieniu mamy piętnaście niewiadomych  $\xi, \eta, \zeta; p, q, r; \varphi, \psi, \theta; \alpha, \beta, \gamma; X_1, Y_1, Z_1$ , które określają ruch ciała i reakcję. Do ich wyznaczenia mamy sześć równań (8) i (9); trzy równania między  $p, q, r, \varphi, \psi, \theta$ ; cztery równania (10), (11) i (12), wynikające z warunków geometrycznych; na koniec dwa równania (4) i (5), określające reakcję, w których należy podstawić wartości z (6); razem piętnaście równań. Jeżeli ślizganie się nie zachodzi, to zamiast równań (4) i (5) należy wziąć równania (7).

Aby rostrzygnąć, czy zachodzi ślizganie, czy też toczenie się, przypuszczamy naprzód, że ciało ślizga się na płaszczyźnie. Obliczywszy  $X_1, Y_1, Z_1$  jako funkcje czasu  $t$ , podstawiamy ich wartości w równaniu  $f_1 Z_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}$ , w którym  $f_1$  oznacza wartość współczynnika tarcia, aby ślizganie się nastąpić mogło. Jeżeli wypadnie  $f_1 \leq f$ , natenczas  $f_1$  nie osiągnie wartości krańcowej  $f$ , a ciało będzie się istotnie ślizgało. Gdyby zaś wypadło  $f_1 > f$ , to ślizganie się byłoby niemożliwe, więc nastąpi toczenie się, z czego wynika, że dalszy rachunek należy przeprowadzić na podstawie równań (7). W przypadku ślizgania się uważamy tarcie za dostateczne, a płaszczyznę za dostatecznie chropowatą; w przypadku przeciwnym mówimy o tarcu niedostatecznym i o niedostatecznie chropowatej płaszczyźnie.

**160. O UDERZENIU SIĘ CIAŁ.** Jeżeli dwa poruszające się ciała spotykają się wzajemnie, natenczas w stanie ruchu każdego ciała zachodzi nagle zmiana, nie pochodząca od sił ciągłych, działających na te ciała podczas ruchu, lecz wynikająca z wzajemnego działania jednego ciała na drugie, które nazywamy *uderzeniem się*, rozumiejąc przez to także samo zjawisko owej nagłej zmiany ruchu wskutek zetknięcia się dwu ciał.

Uderzenie się pojmujemy jako działanie sił chwilowych czyli popędowych, których miarą jest bądźto popęd, bądźtéż zmiana ilości ruchu ciała, do którego są przyłożone. Niech dwa ciała uderzają się o siebie, dotykając się przytém w punkcie  $m$ ; kierunek normalnej wspólnej do ich powierzchni w tym punkcie wyznacza kierunek uderzenia się. W tym kierunku doznaje każde ciało działania pewnej siły chwilowej, a jeżeli  $R$  jest siłą, przyłożoną do ciała  $A$ , to —  $R$  jest siłą popędową, przyłożoną do ciała  $B$ . Siła  $R$  jest wogólności zmienna podczas uderzenia się, a jéj miarą jest popęd  $\int_0^{\tau} R dt$ , odpowiedni trwaniu uderzenia się  $\tau$ , będącym bardzo małym, lecz skończonym przedziałem czasu. Gdy poprowadzimy z  $S$ , środka masy ciała  $A$ , trzy osi główne  $Sp, Sq$  i  $Sr$ , to możemy kierunki tych osi uważać za niezienne podczas uderzenia się. Oznaczmy przez  $x, y, z$  spółrzędne punktu  $m$  względem osi głównych; przez  $a, b, c$  dostawy kierunkowe normalnej wewnętrznej do powierzchni ciała  $A$  w tym punkcie; przez  $u_0, v_0, w_0$  prędkości środka masy  $S$  przed uderzeniem się, zaś przez  $u, v, w$  prędkości jego po uderzeniu się; przez  $p_0, q_0, r_0$  prędkości kątowe obrotu ciała przed uderzeniem się, a przez  $p, q$  i  $r$  jego prędkości po uderzeniu się. Wszystkie wielkości odnosimy do układu spółrzędnych  $Spqr$ . Z zasady d'Alemberta wypadają wtedy równania ruchu ciała  $A$ :

$$\begin{aligned} M(u - u_0) &= a \int R dt, \quad M(v - v_0) = b \int R dt, \quad M(w - w_0) = c \int R dt; \\ (1) \quad A(x - p_0) &= (cy - bz) \int R dt, \quad B(q - q_0) = (az - cx) \int R dt, \\ C(r - r_0) &= (bx - ay) \int R dt, \end{aligned}$$

w których  $A, B$  i  $C$  oznaczają momenty główne, a  $M$  masę tego ciała. Postępując podobnie z ciałem  $B$ , do którego osi głównych należy odnieść punkt  $m$  i kierunek uderzenia się, otrzymamy także sześć równań, określających zmianę ruchu tego ciała wskutek uderzenia się. Jako kierunek uderzenia się ma być wzięty kierunek siły —  $R$ . Wypisane równania polegają na wiadomej zasadzie, że wobec sił popędowych należy pominąć siły ciągłe (art. 137).

Dla ciała  $A$  mamy sześć niewiadomych  $u, v, w, p, q, r$ ; podobnie dla ciała  $B$ ; niewiadomy jest nakoniec popęd siły  $R$ . Mamy przeto razem trzynaście niewiadomych, a tylko dwanaście równań, z czego się okazuje, że zagadnienie, lubo z natury rzeczy dokładnie określone, nie daje się rozwiązać.

Niemожność rozwiązania tkwi w tym przypuszczeniu, że obadwa ciała są sztywne. Ponieważ ciała rzeczywiste zmieniają kształt swój przy uderzeniu się, przeto uważając związki, zachodzące między zmianą ruchu a zmianą kształtu ciała wskutek uderzenia się, będziemy mogli otrzymać jeszcze jedno równanie, które pozwoli rozwiązać nasze zagadnienie.

W przebiegu uderzenia się można rozróżnić dwie fazy. W pierwszej fazie obadwa ciała wzajemnie na siebie nacisk wywierają i doznają odkształceń, rosnących szybko do pewnego maximum. Punkty, posiadające mniejszą prędkość, ustępują przed tymi, które na nie cisną wskutek większej prędkości, aż nastąpi wyrównanie prędkości, któremu towarzyszy największe odkształcenie obudwu ciał. W drugiej fazie uderzenia się zachodzą odkształcenia, wprost przeciwne pierwszym, a każde ciało usiłuje wrócić do kształtu pierwotnego, który mniej lub więcej dokładnie odzyskuje. Jeżeli po upływie tej drugiej fazy uderzenia się spostrzegamy trwałe odkształcenia ciał, natenczas różnica ich prędkości po uderzeniu się jest bardzo mała; skoro zaś ciała odzyskały kształt pierwotny, wtedy rozchodzą się po uderzeniu z prędkościami, różniącymi się znacznie od siebie.

Ciało, które po uderzeniu się odzyskuje dokładnie swój kształt pierwotny, nazywamy doskonale sprężystym; ciało zaś zachowujące kształt, jaki po upływie pierwszej fazy uderzenia się otrzymało, zowiemy niesprężystym. Obadwa powyższe pojęcia należy uważać za oderwane; ciała rzeczywiste nie są bowiem ani doskonale sprężyste, ani niesprężyste, lecz tylko do takich się zbliżają. Ciała miękkie są zbliżone do niesprężystych; takie zaś ciała, jak kość słoniowa lub kauczuk zbliżają się do ciał doskonale sprężystych.

U ciał niesprężystych, których powierzchnie przyjmujemy za gładkie, kończy się uderzenie, skoro prędkości punktów, w których one się dotykają, wzięte w kierunku uderzenia, przybiorą tę samą wartość. Ten wynik doświadczenia prowadzi do trzynastego szukanego równania. Jeżeli wielkości, odnoszące się do ciała B, oznaczmy króskami u góry, i zważymy, że normalna w punkcie  $m$  ma być w obudwu ciałach wzięta w kierunkach przeciwnych, to szukane równanie będzie

$$(2) \quad a(u+qz-ry)+b(v+rx-pz)+c(w+py-qx)+a'(u'+q'z'-r'y')+ \\ +b'(v'+r'x'-p'z')+c'(w'+p'y'-q'x')=0,$$

czyli,

$$(3) \quad au+bv+cw+(cy-bz)p+(az-cx)q+(bx-ay)r+a'u'+b'v'+c'w'+ \\ +(c'y'-b'z')p'+(a'z'-c'x')q'+(b'x'-a'y')r'=0.$$

Oznaczmy przez  $F$  popęd siły  $R$ , przyjmijmy zatem  $F = \int R dt$ ; otrzymamy z równań (1),

$$(4) \quad u=u_0+\frac{aF}{M}, \quad v=v_0+\frac{bF}{M}, \quad w=w_0+\frac{cF}{M}; \\ p=p_0+(cy-bz)\frac{F}{A}, \quad q=q_0+(az-cx)\frac{F}{B}, \quad r=r_0+(bx-ay)\frac{F}{C}.$$

Podobne równania mieć będziemy dla drugiego ciała. Z nich otrzymujemy

$$(5) \quad bu - av = bu_0 - av_0, \quad cv - bw = cv_0 - bw_0, \quad aw - cu = aw_0 - cu_0,$$

a zatem:

$$(6) \quad (bu - av)^2 + (cv - bw)^2 + (aw - cu)^2 = (bu_0 - av_0)^2 + (cv_0 - bw_0)^2 + (aw_0 - cu_0)^2.$$

Strona lewa tego równania oznacza kwadrat rzutu prędkości środka masy ciała A po uderzeniu się na płaszczyznę styczną do powierzchni obudwu ciał w punkcie uderzenia  $m$ ; a prawa strona oznacza tę samą wielkość przed uderzeniem się. Ponieważ także samo równanie zachodzi także dla ciała B, przeto okazuje się, że *prędkość środka masy każdego ciała, wzięta równolegle do wspólnej płaszczyzny stycznej, zostaje zachowana przy uderzeniu się*. Z równań (4) wynika jeszcze

$$(7) \quad aAp + bBq + cCr = aAp_0 + bBq_0 + cCr_0,$$

co oznacza, że *rzut momentu ilości ruchu każdego ciała, odpowiedniej kręceniu się jego około środka masy, na kierunek uderzenia się, zostaje zachowany przy uderzeniu się*. Zredukujmy ilości ruchu wszystkich punktów ciała A do środka masy; otrzymamy siłę o składowych  $Mu$ ,  $Mv$ ,  $Mw$  i parę sił o składowych  $Ap$ ,  $Bq$ ,  $Cr$  w kierunku osi układu  $Spqr$ . Moment ilości ruchu względem kierunku uderzenia wynosi

$$aAp + bBq + cCr + M[(cy - bz)u + (az - cx)v + (bx - ay)w],$$

czyli

$$aAp + bBq + cCr + M[(bw - cv)x + (cu - aw)y + (av - bu)z].$$

Wstawmy w to wyrażenie  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ ,  $p_0$ ,  $q_0$ ,  $r_0$ ; według (5) i (7) otrzymamy tę samą wartość, z czego wynika, że *moment ilości ruchu każdego ciała względem kierunku uderzenia się zostaje zachowany przy uderzeniu się*. Z zasad podanych w art. 142-im wynika nadto, że *suma ilości ruchu obudwu ciał, tudzież suma momentów ich ilości ruchu, względem prostej dowolnej, zostaje zachowana przy uderzeniu się*.

#### 161. Przyjmijmy

$$(1) \quad V = au + bv + cw + (cy - bz)p + (az - cx)q + (bx - ay)r,$$

i oznaczmy przez  $V_0$  wartość tego wyrażenia, jeżeli w nim podstawimy  $u_0$ , ...,  $r_0$ ; wówczas  $V$  oznacza rzut prędkości punktu  $m$  na normalną po uderzeniu się, a  $V_0$  oznacza ten rzut przed uderzeniem się, jeżeli  $m$  uważamy za punkt należący do ciała A. Wstawiwszy w (1) wyrażenia (4) art. 160-go, otrzymamy

$$(2) \quad V = V_0 + \frac{1 + \Delta}{M} F,$$

a dla ciała B będzie  $V' = V'_0 + \frac{1 + \Delta'}{M'} F$ , gdzie

$$(3) \quad \frac{\Delta}{M} = \frac{(cy - bz)^2}{A} + \frac{(az - cx)^2}{B} + \frac{(bx - ay)^2}{C},$$

i analogicznie  $\frac{\Delta'}{M'}$ . Ponieważ według (3) art. 160-go mamy dla ciał niesprężystych  $V + V' = 0$ , przeto

$$V_0 + \frac{1 + \Delta}{M} F + V_0' + \frac{1 + \Delta'}{M'} F = 0,$$

z czego wynika

$$(4) \quad F = - \frac{MM'}{M(1 + \Delta) + M'(1 + \Delta')} (V_0 + V_0').$$

To równanie pozwala dla ciał niesprężystych obliczyć popęd siły chwilowej, sprawiającej zmianę ruchu. Popęd  $F$  jest oczywiście dodatny, a ponieważ pierwszy czynnik po prawej stronie równania (4) jest dodatny, przeto jest  $V_0 + V_0' < 0$ . Stosownie do przyjętego znakowania łatwo ten wynik zrozumieć. Obadwa ciała mogą się tak poruszać przed uderzeniem się, że prędkość  $V_0$  ma kierunek normalnej zewnętrznej do  $A$ , zaś  $V_0'$  kierunek normalnej wewnętrznej do  $B$ , lub tak, że obie prędkości mają kierunki normalnych zewnętrznych. W pierwszym przypadku będzie  $V_0 < 0$ ,  $V_0' > 0$ , w drugim zaś będzie  $V_0 < 0$ ,  $V_0' < 0$ ; w pierwszym więc przypadku nastąpi uderzenie się, jeżeli  $V_0 > V_0'$ , w drugim zaś przypadku zawsze uderzenie się nastąpi, a w obudwu przypadkach będzie  $V_0 + V_0' < 0$ . Gdyby było  $V_0 + V_0' \geq 0$ , wtedy nie nastąpiłoby uderzenie się.

Oznaczmy przez  $T$  różnicę, którą otrzymamy, gdy od sumy energii kinetycznych obudwu ciał przed uderzeniem się odejmiemy sumę ich energii po uderzeniu się; wówczas

$$(5) \quad 2T = M[(u_0^2 - u^2) + (v_0^2 - v^2) + (w_0^2 - w^2)] + M'[(u_0'^2 - u'^2) + (v_0'^2 - v'^2) + (w_0'^2 - w'^2)] + A(p_0^2 - p^2) + B(q_0^2 - q^2) + C(r_0^2 - r^2) + A'(p_0'^2 - p'^2) + B'(q_0'^2 - q'^2) + C'(r_0'^2 - r'^2).$$

Pomnóżmy równania (1) art. 160-go odpowiednio przez  $u + u_0$ ,  $v + v_0$ ,  $w + w_0$ ,  $p + p_0$ ,  $q + q_0$ ,  $r + r_0$  i postąpmy podobnie z równaniami dla ciała  $B$ , wstawmy otrzymane wyrażenia w (5) i uwzględnijmy równanie (3) art. 160-go i równanie (4); wtedy otrzymamy dla ciał niesprężystych:

$$(6) \quad 2T = -F(V_0 + V_0') = \frac{MM'}{M(1 + \Delta) + M'(1 + \Delta')} (V_0 + V_0')^2.$$

Uderzenie się obudwu ciał może nastąpić tylko pod warunkiem, że  $V_0 + V_0'$  jest różne od zera, z czego wynika, że prawa strona równania (6) jest dodatna, to znaczy, że *przy uderzeniu się ciał niesprężystych zachodzi strata energii kinetycznej*. Tę stratę należy tak rozumieć, że suma energii kinetycznych po uderzeniu się jest mniejsza od sumy energii przed uderzeniem się. Dowolny punkt  $(x_i, y_i, z_i)$  ciała  $A$ , którego masa wynosi  $dm_i$ , posiada przed uderzeniem się następujące prędkości w kierunkach osi głównych:  $u_0 + q_0 z_i - r_0 y_i$ ,

$v_0 + r_0 x_i - p_0 z_i$ ,  $w_0 + p_0 y_i - q_0 x_i$ ; kładąc w tych wyrażeniach  $u, v, w, p, q, r$ , otrzymamy prędkości tego punktu po uderzeniu się. Podwójna energia kinetyczna tego punktu, odpowiednia różnicy tych prędkości, wynosi

$$\{[(u_0 - u) + (q_0 - q) z_i - (r_0 - r) y_i]^2 + [(v_0 - v) + (r_0 - r) x_i - (p_0 - p) z_i]^2 + [(w_0 - w) + (p_0 - p) y_i - (q_0 - q) x_i]^2\} dm_i,$$

a jeżeli scałkujemy to wyrażenie dla wszystkich elementów ciała A, to otrzymamy

$$(7) \quad 2T_a = M[(u_0 - u)^2 + (v_0 - v)^2 + (w_0 - w)^2] + A(p_0 - p)^2 + B(q_0 - q)^2 + C(r_0 - r)^2,$$

gdzie  $T_a$  oznacza tę energiją, któraby posiadało ciało A, gdyby każdy punkt miał prędkość, równą zmianie swój prędkości w skutek uderzenia się. Wstawiając wyrażenia, wynikające z (4) art. 160-go, mieć będziemy:

$$(8) \quad 2T_a = \frac{1 + \Delta}{M} F^2, \text{ a podobnie } 2T_b = \frac{1 + \Delta'}{M'} F^2,$$

gdzie  $T_b$  odnosi się do ciała B. Dodając oba równania, wstawiając wartość  $F$  i uwzględniając (6), otrzymamy

$$(9) \quad T = T_a + T_b,$$

co przedstawia ważne twierdzenie: *strata energii kinetycznej przy uderzeniu się dwu ciał niesprężystych równa się sumie energii kinetycznych obu ciał, odpowiednich zmianom prędkości ich punktów wskutek uderzenia się* (tw. Carnot'a).

Gdy oznaczymy przez  $P$  średnią wartość siły, której popęd w czasie  $\tau$  oznaczyliśmy przez  $F$ , to mieć będziemy według określenia,

$$(10) \quad P\tau = \int_0^\tau R dt = F, \text{ więc } P = \frac{F}{\tau}.$$

Obadwa ciała doznają w kierunku uderzenia się pewnych zagłębień, które oznaczmy odpowiednio przez  $\epsilon$  i  $\epsilon'$ . Iloczyn  $P(\epsilon + \epsilon')$  wyraża pracę mechaniczną siły  $P$ , a ponieważ właśnie wskutek tej pracy, sprawiającej stałe odkształcenia ciał, nastąpił ubytek  $T$  energii kinetycznej, przeto  $P(\epsilon + \epsilon') = T$ , z czego wynika

$$(11) \quad P = \frac{MM'}{M(1 + \Delta') + M'(1 + \Delta)} \cdot \frac{(V_0 + V_0')^2}{2(\epsilon + \epsilon')}, \quad \tau = -\frac{2(\epsilon + \epsilon')}{V_0 + V_0'}.$$

Ostatnie równanie, w którym  $V_0 + V_0'$  jest zawsze ujemne, pozwala obliczyć trwanie uderzenia się. Im większe obadwa ciała (im większe  $\epsilon$  i  $\epsilon'$ ), i im mniejsza suma ich prędkości normalnych, tym dłużej trwa ich uderzenie się.

*Przy uderzeniu się ciał doskonale sprężystych nie zachodzi strata energii kinetycznej.* Jakoż w pierwszej fazie uderzenia się doznają ciała pewnych odkształceń, wskutek czego suma ich energii kinetycznych zmniejsza się; w drugiej fazie atoli pojawia się działanie przeciwne pobudzonych sił międzycząstkowych, które niweczy odkształcenia i przywodzi cząstki tych ciał do pierw-

tego położenia wzajemnego. Praca więc tych sił wyrównywa dokładnie pracy siły chwilowej w pierwszej fazie, a zatem suma energii przyrośnie o tę samą wielkość, o którą poprzednio się zmniejszyła. Przy końcu uderzenia się będzie więc  $T=0$ , a zatem suma energii kinetycznych zostanie zachowana. Z tego twierdzenia wynika, zamiast równania (2) art. 160-go, następujące równanie, cechujące uderzenie się ciał doskonale sprężystych:

$$(12) \quad 0 = M[(u_0^2 - u^2) + (v_0^2 - v^2) + (w_0^2 - w^2)] + M'[(u_0'^2 - u'^2) + (v_0'^2 - v'^2) + (w_0'^2 - w'^2)] + A(p_0^2 - p^2) + B(q_0^2 - q^2) + C(r_0^2 - r^2) + A'(p_0'^2 - p'^2) + B'(q_0'^2 - q'^2) + C'(r_0'^2 - r'^2),$$

które łącznie z dwunastoma równaniami art. 160-go pozwala zbadać stan ruchu takich ciał po uderzeniu się. Podstawiając w tym równaniu wyrażenia, otrzymane z (4) art. 160-go, mieć będziemy  $F[V + V' + V_0 + V_0'] = 0$ , a ponieważ  $F$  nie jest równe zeru, przeto

$$(13) \quad V + V' = -(V_0 + V_0'),$$

to znaczy, że suma prędkości normalnych obu ciał w punkcie  $m$  po ich uderzeniu się jest równa i przeciwna wartości téż sumy przed uderzeniem się. Obadwa ciała posiadają więc w punkcie  $m$  różne prędkości normalne po uderzeniu się. Wstawiając wyrażenia (2) dla  $V$  i  $V'$ , otrzymamy:

$$(14) \quad F = -2 \frac{MM'}{M(1+\Delta') + M'(1+\Delta)} (V_0 + V_0').$$

Popęd  $F$  ma więc podwójną wartość popędu, odpowiedniego uderzeniu się ciał niesprężystych. Z tego otrzymamy dla ciał sprężystych,

$$(15) \quad \begin{aligned} V &= V_0 - 2 \frac{M'(1+\Delta)}{M(1+\Delta') + M'(1+\Delta)} (V_0 + V_0'), \\ V' &= V_0' - 2 \frac{M(1+\Delta')}{M(1+\Delta) + M'(1+\Delta')} (V_0 + V_0'). \end{aligned}$$

a dla ciał niesprężystych będzie

$$(16) \quad \begin{aligned} V &= V_0 - \frac{M'(1+\Delta)}{M(1+\Delta') + M'(1+\Delta)} (V_0 + V_0'), \\ V' &= V_0' - \frac{M(1+\Delta')}{M(1+\Delta) + M'(1+\Delta')} (V_0 + V_0'). \end{aligned}$$

Jeżeli kierunek uderzenia się przechodzi przez środki masy obu ciał, to uderzenie się nazywamy centralnym; w razie przeciwnym nazywamy je excentrycznym. Dla uderzenia się centralnego będzie  $x:y:z = a:b:c$ ,  $x':y':z' = a':b':c'$ , z czego wynika, że momenty popędu  $F$  względem środków masy są równe zeru, a zatem  $p=p_0$ ,  $q=q_0$ ,  $r=r_0$ . Podobne rezultaty otrzymamy dla ciała  $B$ . Uderzenie się centralne nie zmienia kręcenia się ciał około środków masy, ono wpływa więc tylko na ruchy postępowe tych ciał. Dla uderzenia się centralnego mamy nadto  $\Delta = \Delta' = 0$ , przez co upraszczają się wyrażenia  $F$ ,  $V$  i  $V'$ .

Uderzenie się dwu ciał, mających równoległe ruchy postępowe (w tym samym kierunku lub w kierunkach przeciwnych), zwiemy prostym, jeżeli kierunek uderzenia się jest równoległy do kierunku tego ruchu. W razie przeciwnym nazywamy uderzenie się ciał ukośnym. Dla uderzenia się prostego mamy  $p_0 = q_0 = r_0 = p'_0 = q'_0 = r'_0 = 0$ ; a gdy przez  $u_0, v_0, w_0; u'_0, v'_0, w'_0$  oznaczymy prędkości ruchów postępowych, przez  $a, b, c$  dostawy kierunkowe normalnej w punkcie uderzenia się względem nieruchomych osi współrzędnych, to otrzymamy  $u_0 : v_0 : w_0 = u'_0 : v'_0 : w'_0 = a : b : c$ . To pozwala wyprowadzić równania odpowiadające uderzeniu się prostemu ciał, co pozostawiamy czytelnikowi. —

Zastosujmy podaną teorię do uderzenia się dwu kul o masach  $M_1$  i  $M_2$ , poruszających się z prędkościami  $c_1$  i  $c_2$  po linii, łączącej ich środki  $S_1$  i  $S_2$ . Uderzenie się będzie proste, a ponieważ jest nadto centralne, przeto nie potrzebujemy uwzględniać kręcenia się kul około ich środków. Przyjmijmy kierunek prędkości  $c_1$  jako dodatny; gdy  $c_2 > 0$ , nastąpi uderzenie się, jeżeli  $c_1 > c_2$ , gdy zaś  $c_2 < 0$ , uderzenie się zawsze nastąpi. Jeżeli  $v_1$  i  $v_2$  oznaczają prędkości kul po uderzeniu się, to z zasady zachowania ilości ruchu otrzymujemy równanie  $M_1 c_1 + M_2 c_2 = M_1 v_1 + M_2 v_2$ ; gdy kule są niesprężyste, wówczas kończy się uderzenie, skoro  $v_1 = v_2 = v$ , a zatem  $M_1 c_1 + M_2 c_2 = (M_1 + M_2) v$ , skąd  $v = (M_1 c_1 + M_2 c_2) : (M_1 + M_2)$ . Z zasady zachowania energii otrzymujemy dla kul doskonale sprężystych drugie równanie  $M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2 = M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2$ , które możemy napisać w postaci  $M_1 (c_1 + v_1) (c_1 - v_1) = -M_2 (c_2 + v_2) (c_2 - v_2)$ . Ponieważ  $M_1 (c_1 - v_1) = -M_2 (c_2 - v_2)$ , przeto  $c_1 + v_1 = c_2 + v_2$  czyli  $v_1 - v_2 = -(c_1 - c_2)$ .

Mamy zatem dla kul niesprężystych  $v_1 - v_2 = 0$ , zaś dla kul doskonale sprężystych  $v_1 - v_2 = -(c_1 - c_2)$ . Kule rzeczywiste nie są ani niesprężyste, ani doskonale sprężyste, możemy więc dla kul rzeczywistych przyjąć

$$(17) \quad v_1 - v_2 = -\varepsilon (c_1 - c_2),$$

przyczem  $0 < \varepsilon < 1$ ; wartość liczebna współczynnika  $\varepsilon$  daje się wyznaczyć przez doświadczenie. Łącząc to równanie z równaniem  $M_1 c_1 + M_2 c_2 = M_1 v_1 + M_2 v_2$ , otrzymamy

$$(18) \quad c_1 - v_1 = (1 + \varepsilon) \frac{M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}, \quad v_2 - c_2 = (1 + \varepsilon) \frac{M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2},$$

$$\frac{c_1 - v_1}{v_2 - c_2} = \frac{M_2}{M_1},$$

skąd wynika, że kula uderzająca traci, a uderzona zyskuje na prędkości, a ich zysk i strata są odwrotnie proporcjonalne względem ich mas. Stratę energii możemy obliczyć z równania

$$2T = M_1 (c_1^2 - v_1^2) + M_2 (c_2^2 - v_2^2) = M_1 (c_1 - v_1)^2 + M_2 (c_2 - v_2)^2 + 2M_1 v_1 (c_1 - v_1) - 2M_2 v_2 (v_2 - c_2).$$

Ponieważ

$$M_1(c_1 - v_1) = M_2(v_2 - c_2) = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (c_1 - c_2) (1 + \varepsilon),$$

przeto

$$(19) \quad 2T = M_1(c_1 - v_1)^2 + M_2(c_2 - v_2)^2 - 2\varepsilon(1 + \varepsilon) \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (c_1 - c_2)^2.$$

Dla  $\varepsilon = 0$  otrzymujemy twierdzenie Carnot'a.

Niech kula  $M_1$  uderza pod kątem prostym o ścianę płaską o masie bardzo wielkiej. Przyjmując wtedy  $c_2 = 0$  i pomijając  $M_1$ , otrzymamy  $v_1 = -\varepsilon c_1$ . To równanie pozwala obliczyć  $\varepsilon$ . Z doświadczeń z kulami, uderzającymi o ściany (bandy) bilardu, przekonał się Coriolis, że gdy  $c_1$  nie przenosi 7 m na sekundę, otrzymujemy  $v_1: -c_1 = 0,55$ , a stąd  $\varepsilon = 0,55$ . Kula bilardowa z kości słoniowej, spuszczone na płytę marmurową, podskakuje do  $\frac{2}{3}$  wysokości spadku, skąd  $\varepsilon = \sqrt{2/3}$ .

Rozważajmy uderzenie się ukośne dwu kul, przyjmując, że proste, po których poruszają się ich środki, znajdują się na jednej płaszczyźnie, i uwzględnijmy tarcie w punkcie uderzenia się. Linia środków  $S_1 S_2$  niech będzie osią  $x$ , prostopadła do niej na płaszczyźnie prędkości początkowych  $c_1$  i  $c_2$  osią  $y$ , a oś  $z$  prostopadła do  $x$  i  $y$ . Jeżeli prędkości  $c_1$  i  $c_2$  tworzą z osią  $x$  kąty  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ , a kule nie kręcą się około środków przed uderzeniem się, to składowe prędkości kuli  $M_1$  są  $c_1 \cos \alpha_1, c_1 \sin \alpha_1, 0$ , kuli zaś  $M_2: c_2 \cos \alpha_2, c_2 \sin \alpha_2, 0$ . Jeżeli kierunek popędu  $F$  działania kuli  $M_1$  na  $M_2$  przyjmiemy jako dodatni i oznaczmy przez  $f$  współczynnik tarcia, to  $fF$  jest popędem tarcia, jakiego doznaje  $M_2$ , zaś  $-fF$  popędem tarcia, jakiego doznaje  $M_1$ . Oznaczmy przez  $u_1, v_1, w_1, p_1, q_1$  i  $r_1$  składowe prędkości kuli  $M_1$  po uderzeniu się, przez  $R_1$  jej promień a przez  $A_1 = \frac{2}{5} M_1 R_1^2$  jej moment bezwładności, wielkości zaś odpowiednie dla  $M_2$  odróżnijmy wskaźnikiem 2. Otrzymamy następujące równania ruchu:

$$(20) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Dla kuli } M_1: \\ \left\{ \begin{array}{l} M_1(u_1 - c_1 \cos \alpha_1) = -F, \\ M_1(v_1 - c_1 \sin \alpha_1) = -fF, \\ M_1 w_1 = 0, \\ A_1 p_1 = 0, \\ A_1 q_1 = 0, \\ A_1 r_1 = -fF R_1. \end{array} \right. \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{Dla kuli } M_2: \\ \left\{ \begin{array}{l} M_2(u_2 - c_2 \cos \alpha_2) = F, \\ M_2(v_2 - c_2 \sin \alpha_2) = fF, \\ M_2 w_2 = 0, \\ A_2 p_2 = 0, \\ A_2 q_2 = 0, \\ A_2 r_2 = fF R_2. \end{array} \right. \end{array}$$

Z równania (17) otrzymamy

$$(21) \quad u_1 - u_2 = -\varepsilon(c_1 \cos \alpha_1 - c_2 \cos \alpha_2),$$

a stąd, według (20),

$$(22) \quad F = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (1 + \varepsilon) (c_1 \cos \alpha_1 - c_2 \cos \alpha_2),$$

$$(23) \quad \begin{cases} u_1 = \frac{1}{M_1 + M_2} [(M_1 - M_2 \varepsilon) c_1 \cos \alpha_1 + M_2 (1 + \varepsilon) c_2 \cos \alpha_2], \\ v_1 = \frac{1}{M_1 + M_2} [(M_1 + M_2) c_1 \sin \alpha_1 - f M_2 (1 + \varepsilon) (c_1 \cos \alpha_1 - c_2 \cos \alpha_2)], \\ r_1 = -\frac{5}{2} \frac{f}{R_1} \frac{M_2}{M_1 + M_2} (1 + \varepsilon) (c_1 \cos \alpha_1 - c_2 \cos \alpha_2), \\ u_2 = \frac{1}{M_1 + M_2} [M_1 (1 + \varepsilon) c_1 \cos \alpha_1 + (M_2 - M_1 \varepsilon) c_2 \cos \alpha_2], \\ v_2 = \frac{1}{M_1 + M_2} [(M_1 + M_2) c_2 \sin \alpha_2 + f M_1 (1 + \varepsilon) (c_1 \cos \alpha_1 - c_2 \cos \alpha_2)], \\ r_2 = -\frac{5}{2} \frac{f}{R_2} \frac{M_1}{M_1 + M_2} (1 + \varepsilon) (c_1 \cos \alpha_1 - c_2 \cos \alpha_2), \end{cases}$$

a nadto  $w_1 = p_1 = q_1 = w_2 = p_2 = q_2 = 0$ . Stąd widzimy, że po uderzeniu się kule będą się wskutek tarcia obracały w kierunkach przeciwnych około osi prostopadłych do płaszczyzny  $xy$  z prędkościami  $r_1$  i  $r_2$ . Prędkości ruchów postępowych po uderzeniu się będą tworzyły z osią  $x$  kąty  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ , przyczem

$$(24) \quad \begin{cases} \tan \varphi_1 = \frac{v_1}{u_1} = \frac{(M_1 + M_2) c_1 \sin \alpha_1 - f M_2 (1 + \varepsilon) (c_1 \cos \alpha_1 - c_2 \cos \alpha_2)}{(M_1 - M_2 \varepsilon) c_1 \cos \alpha_1 + M_2 (1 + \varepsilon) c_2 \cos \alpha_2}, \\ \tan \varphi_2 = \frac{v_2}{u_2} = \frac{(M_1 + M_2) c_2 \sin \alpha_2 + f M_1 (1 + \varepsilon) (c_1 \cos \alpha_1 - c_2 \cos \alpha_2)}{M_1 (1 + \varepsilon) c_1 \cos \alpha_1 + (M_2 - M_1 \varepsilon) c_2 \cos \alpha_2}. \end{cases}$$

Gdybyśmy tarcie pominęli, przyjęli kule jako doskonale sprężyste, a kulę  $M_2$  w spoczynku, wówczas  $f = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $c_2 = 0$ , skąd

$$(25) \quad \tan \varphi_1 = \frac{M_1 + M_2}{M_1 - M_2} \tan \alpha_1, \quad \tan \varphi_2 = 0.$$

Gdyby masy kul były równe, otrzymalibyśmy stąd  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi_2 = 0$ . Obie kule rozbiegną się pod kątem prostym, a kula uderzona będzie się poruszała w kierunku linii środków.

**162. WAHADŁO FIZYCZNE.** Tak nazywamy ciało materjalne, waha-  
jące się pod działaniem siły ciężkości około osi poziomój, nie przechodzącej  
przez środek masy tego ciała. Poprowadźmy płaszczyznę pionową przez śro-  
dek masy  $S$ , i niech  $O$  będzie śladem osi wahań na tej płaszczyźnie; punkt  $O$   
nazywamy punktem zawieszenia wahadła. Kąt  $\varphi$ , który prosta  $OS$  two-  
rzy z pionem punktu zawieszenia, jest odchyleniem wahadła, a największa jego  
wartość  $\alpha$  jest obszernością wahan. Oznaczmy przez  $\delta$  długość  $OS$ , a przez  
 $M$  masę wahadła; moment jego ciężaru względem osi jest  $Mg\delta \sin \varphi$ . Gdy  $\omega$   
oznacza prędkość kątową wahan, to  $\omega = -\frac{d\varphi}{dt}$ , jeżeli uważamy waha-  
nie się ku pionowi. Według art. 146-go mamy następujące równanie ruchu:

$$(1) \quad -\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{Mg\delta}{I} \sin \varphi, \text{ czyli } \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{Mg\delta}{I} \sin \varphi = 0,$$

w którym  $I$  oznacza moment bezwładności wahadła względem osi wahań. Porównyując to równanie z równaniem (13) art. 92-go, widzimy, że wahadło fizyczne odbywa taki sam ruch, jak wahadło matematyczne o długości

$$(2) \quad r = \frac{I}{M\delta} = \frac{Mk^2}{M\delta} = \frac{k^2}{\delta},$$

gdzie  $k$  oznacza ramię bezwładności wahadła względem osi wahań. Długość  $r$  wahadła prostego, którego ruch jest zgodny z ruchem wahadła fizycznego, nazywamy długością zredukowaną wahadła fizycznego. Punkt, znajdujący się na pionie punktu zawieszenia w odległości  $r$  od niego, nazywamy środkiem wahań tego wahadła. Porównyując wzór (2) z równaniem (2) art. 148-go, otrzymujemy twierdzenie: *środek wahań jest zarazem środkiem uderzenia względem osi wahań*. Środek wahań porusza się tak, jak punkt osobniony, w którym skupiono całą masę wahadła fizycznego. Oznaczmy przez  $I_s$  moment bezwładności wahadła względem prostej, równoległej do osi wahań i poprowadzonej przez środek masy;  $I = I_s + M\delta^2$ , a zatem

$$(3) \quad r = \frac{I_s}{M\delta} + \delta,$$

z czego wynika, że  $r > \delta$ , a zatem *środek wahań znajduje się poniżej środka masy*. Redukując wahadło fizyczne do matematycznego, rozwiązujemy tym samym zadanie o trwaniu wahnięcia na podstawie wzorów, podanych w art. 92-im.

Gdy uczynimy środek wahań punktem zawieszenia, to długość zredukowana będzie

$$r' = \frac{I_s}{M(r-\delta)} + r - \delta = \frac{I_s}{M} \cdot \frac{M\delta}{I_s} + r - \delta = r,$$

to znaczy, że pierwotny punkt zawieszenia będzie środkiem wahań. Między więc punktem zawieszenia, a środkiem wahań zachodzi wzajemność, a trwanie wahnięcia nie zmienia się, jeżeli wahadło waha się około osi, przechodzącej przez środek wahań.

Z równania (3) wynika

$$\frac{dr}{d\delta} = -\frac{I_s}{M\delta^2} + 1, \quad \frac{d^2r}{d\delta^2} = 2 \cdot \frac{I_s}{M\delta^3};$$

otrzymany więc najmniejsze  $r$  dla  $\delta = \sqrt{\frac{I_s}{M}}$ , albo, kładąc  $I_s = Mk_s^2$ ,

gdzie  $k_s$  jest ramieniem bezwładności wahadła względem prostej, przechodzącej przez środek masy, dla  $\delta = k_s$ ; a najmniejsza wartość  $r$  będzie  $2k_s$ . Bierąc więc punkt zawieszenia w odległości  $k_s$  od środka masy, otrzymamy najkrótsze wahadło zredukowane, a zatem najmniejsze trwanie wahnięcia.

Niech dane ciało waha się naprzód około osi  $O$ , a następnie około osi  $O'$  równoległej do  $O$ , i niech  $\delta$  i  $\delta'$  oznaczają odpowiednio odległości osi  $O$  i  $O'$  od środka masy,  $k$  i  $k'$  ramiona bezwładności wahadła względem tych osi, a  $T$

i  $T'$  odpowiednie trwania jednej oscylacji. Wtedy  $k^2 = k_s^2 + \delta^2$ ,  $k'^2 = k_s^2 + \delta'^2$ , więc

$$T = \pi \sqrt{\frac{k_s^2 + \delta^2}{g\delta}}, \quad T' = \pi \sqrt{\frac{k_s^2 + \delta'^2}{g\delta'}}.$$

Jeżeli  $L$  oznacza długość wahadła sekundowego (matematycznego), to  $g = \pi^2 L$ , a stąd

$$L T^2 \delta = k_s^2 + \delta^2, \quad L T'^2 \delta' = k_s^2 + \delta'^2;$$

rugując z tych równań  $k_s^2$ , otrzymamy

$$(4) \quad L = \frac{\delta^2 - \delta'^2}{\delta T^2 - \delta' T'^2}.$$

Mierząc przeto czasy  $T$  i  $T'$  zapomocą obserwacji bardzo małych wahań wahadła fizycznego, zawieszanego kolejno na dwu różnych osiach równoległych, których odległości od środka masy są dokładnie znane, możemy obliczyć długość wahadła sekundowego. Zastosowanie wzoru (4) jest z tego powodu trudne, że dokładny pomiar odległości  $\delta$  i  $\delta'$  jest połączony z wielkimi trudnościami. Według Kater'a można wahadło zaopatrzyć w mały ciężar przesuwalny i dać temu ciężarowi takie położenie, żeby przy wahaniami około  $O$  i  $O'$  było  $T = T'$ . Wtedy otrzymamy z (4)

$$(5) \quad L = \frac{\delta + \delta'}{T^2},$$

a zastosowanie tego wzoru wymaga tylko dokładnego mierzenia wzajemnej odległości  $\delta + \delta'$  obudwu osi.

Wahadło odśrodkowe składa się z pręta  $OB$  fig. 61, którego górny koniec  $O$  obraca się w stawie (zawiasie), a na drugim końcu jest umieszczone ciało ciężkie, które przyjmujemy w kształcie kuli. Cały układ obraca się nadto około pionu  $Oz$ , z którym oś stawu stanowi jedną całość. Oś stawu przyjmujemy za  $Ox$ , pion za  $Oz$ ; środek kuli  $A$  znajduje się na płaszczyźnie  $Oyz$ , obracającej się około  $Oz$  jednostajnie z prędkością kątową  $\omega$ . Jeżeli  $r$  jest promieniem kuli;  $0, \beta, \gamma$  oznaczają współrzędne środka, to równanie kuli będzie  $x^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2$ . Przy obrocie musimy uwzględnić momenty sił odśrodkowych kuli i pręta, prostopadłych do  $Oz$ , względem osi  $Ox$ , około której obraca się wahadło. Rozważajmy warstwę kuli, ograniczoną płaszczyznami poziomymi  $z$  i  $z + dz$ . Niech  $df$  będzie elementem powierzchni koła  $x^2 + (y - \beta)^2 = r^2 - (z - \gamma)^2$ , podług którego płaszczyzna  $z$  przecina kulę; wówczas  $dM = \sigma df dz$  będzie elementem masy kuli o gęstości  $\sigma$ . Rzuty siły odśrodkowej tego elementu są odpowiednio  $\omega^2 x dM$ ,  $\omega^2 y dM$ ; pierwszej sile odpowiada moment równy zeru względem  $Ox$ , drugiej zaś moment  $\omega^2 y z dM =$

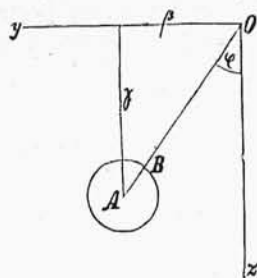


Fig. 61.

$= \sigma \omega^2 z dz y df$ ; suma więc momentów sił odśrodkowych tej warstwy wynosi  $\sigma \omega^2 z dz \int y df$ . Całka  $\int y df$  jest momentem masy koła względem  $Ox$ , a zatem  $\int y df = \pi \beta [r^2 - (z - \gamma)^2]$ ; suma więc momentów sił dla tej warstwy będzie  $\pi \sigma \omega^2 \beta [r^2 - (z - \gamma)^2] z dz$ , a dla całej kuli otrzymamy moment  $\mu$  sił odśrodkowych:

$$\mu = \pi \sigma \omega^2 \beta \int_{\gamma-r}^{\gamma+r} [r^2 - (z - \gamma)^2] z dz = \frac{4\pi}{3} \sigma r^3 \beta \gamma \omega^2 = M \beta \gamma \omega^2,$$

gdzie  $M$  oznacza masę kuli. Aby obliczyć moment  $\mu'$  sił odśrodkowych dla pręta o gęstości  $\sigma'$ , przyjmijmy, że pręt jest walcem kołowym prostym o podstawie  $\Omega$ . Dla warstwy między płaszczyznami  $z$  i  $z + dz$  otrzymamy moment  $\sigma' \omega^2 z dz \int y df$ , a jeżeli  $F$  jest polem przekroju, to  $\int y df = F z \operatorname{tg} \varphi$ , gdzie  $\varphi$  jest kątem, który oś pręta tworzy z pionem. Będzie więc

$$\mu' = \sigma' \omega^2 \operatorname{tg} \varphi \int_0^l F z^2 dz, \text{ gdzie } l = OB.$$

Mamy  $\Omega = F \cos \varphi$ , a jeżeli  $\rho$  oznacza odległość punktu  $z$  na osi  $OB$  od  $O$ , to  $z = \rho \cos \varphi$ ,  $dz = d\rho \cos \varphi$ , więc

$$\mu' = \sigma' \omega^2 \operatorname{tg} \varphi \Omega \cos^3 \varphi \int_0^l \rho^2 d\rho = \frac{\sigma' \omega^2 \Omega l^3}{3} \cos \varphi \sin \varphi = \frac{m \omega^2 l^2}{3} \cos \varphi \sin \varphi,$$

gdzie  $m$  jest masą pręta. Kładąc  $\beta = (l + r) \sin \varphi$ ,  $\gamma = (l + r) \cos \varphi$ , mamy  $\mu = M \omega^2 (l + r)^2 \cos \varphi \sin \varphi$ . Moment ciężaru kuli względem  $Ox$  wynosi  $Mg(l + r) \sin \varphi$ , a moment ciężaru pręta wynosi  $\frac{mg l}{2} \sin \varphi$ . Z zasady przeto d'Alembert'a wynika równanie

$$M \omega^2 (l + r)^2 \cos \varphi \sin \varphi + \frac{m \omega^2 l^2}{3} \cos \varphi \sin \varphi = Mg(l + r) \sin \varphi + \frac{mg l}{2} \sin \varphi,$$

z którego

$$(6) \quad \cos \varphi = \frac{g}{\omega^2} \cdot \frac{M(l + r) + \frac{ml}{2}}{M(l + r)^2 + \frac{ml^2}{3}},$$

$$(7) \quad \gamma = (l + r) \cos \varphi = \frac{g(l + r)}{\omega^2} \cdot \frac{M(l + r) + \frac{ml}{2}}{M(l + r)^2 + \frac{ml^2}{3}}.$$

Odległość więc środka kuli od punktu  $O$  jest odwrotnie proporcjonalna względem kwadratu prędkości kątowej obrotu około  $Oz$ . Rozwijając na szereg

ostatni ułamek i opuszczając z powodu małej masy pręta, wyrazy tego rzędu co  $\left(\frac{m}{M}\right)^2$  i rzędów wyższych, otrzymamy

$$(8) \quad \gamma = \frac{g}{\omega^2} \left[ 1 + \frac{m}{M} \cdot \frac{l\left(\frac{l}{3} + r\right)}{2(l+r)^2} \right];$$

a pomijając całkiem masę pręta, mamy  $\gamma = \frac{g}{\omega^2}$ . Trwanie jednego obrotu około  $Oz$  wynosi  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ; wstawiwszy wyrażenie  $\omega$ , wynikające z równania (7) otrzymamy

$$(9) \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{\gamma}{l+r} \cdot \frac{M(l+r)^2 + \frac{ml^2}{3}}{M(l+r) + \frac{ml}{2}}}.$$

Jeżeli  $L$  jest długością zredukowaną tego wahadła, to  $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ , a zatem

$$(10) \quad L = \frac{\gamma}{l+r} \cdot \frac{M(l+r)^2 + \frac{ml^2}{3}}{M(l+r) + \frac{ml}{2}} = \frac{g}{\omega^2} \cdot \frac{M(l+r)^2 + \frac{ml^2}{3}}{M(l+r) + \frac{ml}{2}}.$$

Pomijając masę pręta, otrzymalibyśmy  $L = \gamma$ ; wahadło więc proste o długości  $\gamma$  wykona podwójną oscylację w tym samym czasie, w którym wahadło odśrodkowe raz się obróci.

Przy doświadczeniach nieprzechodzi koniec pręta przez  $O$ , lecz przez punkt  $O'$  (fig. 62) znajdujący się na końcu ramienia poziomego o długości

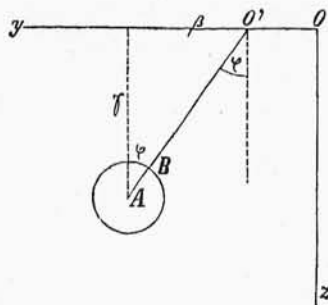


Fig. 62.

$\lambda = OO'$ , a pręt obraca się około osi  $O'x'$  równoległej do  $Ox$ . Dla kuli otrzymamy wtedy  $\beta = \lambda + (l+r) \sin \varphi$ , więc  $\mu = M\omega^2 (l+r) [\lambda + (l+r) \sin \varphi] \cos \varphi$ . Zapomocą podobnego, jak wyżej rachunku, otrzymamy dla pręta

$$\mu' = \frac{m\omega^2 l}{6} (3\lambda + 2l \sin \varphi) \cos \varphi.$$

Kładąc w równaniu d'Alembert'a  $u = \tan \varphi$ , i  $A = \frac{M(l+r)^2 + \frac{ml^2}{3}}{M(l+r) + \frac{ml}{2}}$ , otrzymamy

$$(11) \quad \left(\frac{g}{\omega^2}\right)^2 u^4 - \frac{2g\lambda}{\omega^2} u^3 + \left[\lambda^2 - A^2 + \left(\frac{g}{\omega^2}\right)^2\right] u^2 - \frac{2g\lambda}{\omega^2} u + \lambda^2 = 0.$$

Jedyny pierwiastek rzeczywisty i dodatni tego równania wyznacza kąt  $\varphi$  dla wiadomego  $\omega$ .

**163. RUCH KULI NA PŁASZCZYŹNIE.** Kula o masie  $M$  i o promieniu  $R$  zostaje wprowadzona w ruch na chropowatej płaszczyźnie poziomej, i następnie jest sobie samej zostawiona; mamy wyznaczyć ruch tej kuli. Obierzmy na płaszczyźnie poziomej osi prostokątne  $Ox$  i  $Oy$ , a oś  $Oz$  pionowo w górę, a w środku kuli wystawmy układ osi równoległych, które poruszają się równolegle do siebie, tak iż względem nich kula się obraca. Osi drugiego układu są w każdej chwili osiami głównymi kuli. Niech  $u_0, v_0, w_0$  oznaczają prędkości początkowe środka kuli w kierunkach osi; z założenia  $w_0 = 0$ ;  $p_0, q_0, r_0$  niech będą początkowymi prędkościami kątowymi obrotu kuli około osi drugiego układu. Jeżeli  $u, v, w; p, q, r$  oznaczają powyższe prędkości po upływie czasu  $t$ ; a  $U, V, W$  są prędkościami punktu styczności  $(0, 0, -R)$ , to

$$(1) \quad U = u - qR, \quad V = v + pR, \quad W = 0,$$

a prędkość  $C$  ślizgania się, t. j. prędkość punktu styczności, będzie

$$(2) \quad C = \sqrt{U^2 + V^2} = \sqrt{(u - qR)^2 + (v + pR)^2}.$$

Ciśnienie kuli na płaszczyznę wynosi  $Mg$ , tarcie przy ślizganiu się będzie zatem  $fMg$ , a ponieważ kierunek tego tarcia jest przeciwny kierunkowi ślizgania się, przeto składowe  $X_1, Y_1, Z_1$  tarcia będą

$$X_1 = -\frac{fMgU}{C}, \quad Y_1 = -\frac{fMgV}{C}, \quad Z_1 = 0,$$

a momenty tarcia, przyłożonego do punktu  $(0, 0, -R)$ , względem osi drugiego układu, wynoszą

$$L_1 = -fMg \frac{VR}{C}, \quad M_1 = fMg \frac{UR}{C}, \quad N_1 = 0.$$

Na kulę działa ciężar własny  $-Mg$ , reakcja normalna  $Mg$  i tarcie. Momenty bezwładności kuli względem osi drugiego układu są sobie równe i wynoszą  $\frac{2}{5}MR^2$ ; z równania ruchu środka i równań Euler'a wynika po skróceniu przez  $M$ ,

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = -fg \frac{U}{C}, & \frac{dv}{dt} = -fg \frac{V}{C}, & \frac{dw}{dt} = 0, \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{5}{2} \frac{fg}{R} \frac{V}{C}, & \frac{dq}{dt} = \frac{5}{2} \frac{fg}{R} \frac{U}{C}, & \frac{dr}{dt} = 0. \end{cases}$$