

(24). Wyznaczyć środek masy spiralnej logarytmicznej, której gęstość jest w każdym punkcie proporcjonalna względem jęj krzywizny.

(25). Elipsojda składa się z nieskończenie cienkich warstw, ograniczonych powierzchniami elipsójd podobnych i podobnie leżących, a gęstość zmienia się od warstwy do warstwy według danego prawa; wyznaczyć środek masy ósmj części téj bryły.

(26). Elipsa, której mimośróđ wynosi $\frac{4}{3\pi}$, obraca się około różnych sty-
cznych; okazać, że objętość bryły, utworzonj przez jednę część, na którą ós mniej-
sza dzieli pole elipsy, jest odwrotnie proporcjonalna względem objętości bryły, utwo-
rzonj przez pozostałą część pola elipsy.

(27). Figura płaska porusza się tak, że jęj płaszczyzna jest ciągle prostopa-
dła do toru środka masy; okazać, że objętość bryły utworzonj równa się iloczynowi
pola figury i drogi jęj środka masy.

(28). Jeżeli wlewamy płyn do naczynia, to środek masy naczynia razem z pły-
nem zajmie wtedy położenie najniższe, gdy znajduje się na powierzchni płynu.

99. MOMENTY BEZWŁADNOŚCI. Iloczyn masy punktu materyjalnego
i kwadratu jego odległości od danj prostj, nazywamy momentem bez-
władności punktu względem prostj danj. Prosta, względem którj
bierzemy ów moment, nazywa się osią momentu bezwładności tego
punktu. Momentem bezwładności punktu względem płaszczyzny nazy-
wamy iloczyn jego masy i kwadratu odległości tego punktu od płaszczyzny,
a momentem bezwładności punktu względem punktu zowiemy iloczyn
masy punktu pierwszego i kwadratu jego odległości od punktu pozostałego.
Zagadnienia dynamiki wymagają głównie znajomości momentu bezwładności
względem prostj; dlatego tym ostatnim się zajmiemy.

Sumę momentów bezwładności wszystkich punktów układu materyjalne-
go względem danj prostj nazywamy momentem bezwładności układu
tego względem owj prostj. Z tego określenia wynika, że moment bezwła-
dności układu jest sumą, wyłącznie tylko wielkości dodatnych; ten moment
może być równy zeru tylko wtenczas, jeżeli układ jest prostoliniowy, a osią
momentu jest prosta, na którj leżą punkty układu. W każdym innym przy-
padku moment bezwładności ma wartość dodatną.

Niech prosta L będzie osią momentu bezwładności układu materyjalne-
go (m_i); obierzmy na téj osi dowolny punkt O , poprowadźmy przez ten punkt
trzy prostopadłe osi układu spółrzednych, Ox , Oy , Oz i niech x_i , y_i , z_i będą
spółrzednymi punktu o masie m_i , należącego do układu (m_i). Jeżeli a , b , c
oznaczają dostawy kierunkowe osi momentu, to kwadrat odległości δ_i tego
punktu od osi wyraża się zapomocą wzoru

$$\delta_i^2 = a^2(y_i^2 + z_i^2) + b^2(z_i^2 + x_i^2) + c^2(x_i^2 + y_i^2) - 2abx_iy_i - 2bcy_iz_i - 2cax_iz_i.$$

Moment bezwładności tego punktu będzie przeto $m_i\delta_i^2$. Kładąc

$$(1) \quad \begin{cases} A = \sum m_i(y_i^2 + z_i^2), \\ B = \sum m_i(z_i^2 + x_i^2), \\ C = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2), \end{cases} \quad \begin{cases} D = \sum m_iy_iz_i, \\ E = \sum m_iz_ix_i, \\ F = \sum m_ix_iy_i, \end{cases}$$

gdzie znak Σ rozciąga się na wszystkie punkty układu (m_i), otrzymamy dla momentu bezwładności I układu względem danej prostej następujące wyrażenie ogólne:

$$(2) \quad I = Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 - 2Dbc - 2Eca - 2Fab.$$

Moment więc bezwładności jest funkcją jednorodną stopnia 2-go współrzędnych a, b, c osi momentu, wyznaczających jej kierunek, a współczynniki A, B, C, D, E, F tej funkcji zależą od gęstości w oddzielnych punktach układu i od jego położenia względem osi współrzędnych. Z równań (1) okazuje się, że współczynniki A, B i C oznaczają odpowiednio momenty bezwładności układu (m_i) względem osi współrzędnych Ox, Oy i Oz ; te przeto współczynniki są wielkościami dodatnimi. Współczynniki zaś D, E, F nie przedstawiają momentów bezwładności, i mogą być wielkościami bądź dodatnimi, bądź ujemnymi, bądź też równać się zeru.

Obierzmy pewien punkt O' , o współrzędnych x, y, z względem powyższych osi, poprowadźmy przez O' prostą L' , równoległą do L , i obliczmy moment bezwładności I' układu (m_i) względem L' . Odległość δ'_i punktu m_i od tej prostej wynosi

$$\delta_i'^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 - [a(x - x_i) + b(y - y_i) + c(z - z_i)]^2,$$

albo także

$$\delta_i'^2 = \delta_i^2 + \Delta^2 + 2(ax + by + cz)(ax_i + by_i + cz_i) - 2(xx_i + yy_i + zz_i),$$

gdzie Δ jest odległością prostej L' od prostej L . Mnożąc to równanie przez m_i i biorąc sumę względem wskaźnika i , otrzymamy I' . Jeżeli $M = \Sigma m_i$ jest masą układu, a

$$\mu_x = \Sigma m_i x_i, \quad \mu_y = \Sigma m_i y_i, \quad \mu_z = \Sigma m_i z_i$$

oznaczają odpowiednio momenty masy układu (m_i) względem płaszczyzn współrzędnych Oyz, Ozx, Oxy , to

$$(3) \quad I' = I + M\Delta^2 + 2(ax + by + cz)(a\mu_x + b\mu_y + c\mu_z) - 2(x\mu_x + y\mu_y + z\mu_z).$$

Niech prosta L przechodzi przez środek masy układu (m_i), który jako początek osi współrzędnych obieramy. Natenczas $\mu_x = 0, \mu_y = 0, \mu_z = 0$ i otrzymamy

$$(4) \quad I' = I + M\Delta^2.$$

Ten wzór pozwala bardzo prostym sposobem wyznaczyć moment bezwładności I' względem danej prostej, jeżeli znamy moment bezwładności I względem prostej, równoległej do danej, przechodzącej przez środek masy układu. Dodając do momentu I iloczyn masy układu i kwadratu odległości osi momentu od środka masy, otrzymamy żądany moment bezwładności I' .

Ponieważ $M\Delta^2$ jest wielkością dodatnią, jakiegokolwiek byłoby położenie prostej L , przeto moment I' jest większy od I . *Moment bezwładności układu względem prostej, poprowadzonej przez środek masy tego układu, jest najmniejszy z momentów bezwładności tego układu względem prostych, do niej równole-*

głych. Miejszem więc geometrycznym prostych równoległych, względem których układ masy posiada ten sam moment bezwładności, jest walec obrotowy, którego oś przechodzi przez środek masy; im większy promień tego walca, tym większy moment bezwładności.

100. ELIPSOJDA BEZWŁADNOŚCI. Podobnie jak twierdzenie ostatnie pozwala rozpoznać zmianę momentu bezwładności, zależną od zmiany położenia osi przy stałym jej kierunku, tak wzór ogólny (2) artykułu poprzedniego daje prawo zmiany tego momentu wraz, gdy oś zmienia swoje położenie, przechodząc jednak ciągle przez punkt stały O.

Kładąc

$$(1) \quad I = M k^2,$$

i przedstawiając sobie masę M układu (m_i) skupioną w punkcie, którego odległość od osi momentu jest równa k , mieć będziemy moment bezwładności tego punktu równy momentowi bezwładności całego układu. Długość

$k = \sqrt{\frac{I}{M}}$, określona równaniem (1), nazywamy ramieniem bezwładności układu masy względem uważanej osi. Ramię bezwładności układu względem pewnej osi jest proporcjonalne względem pierwiastka momentu bezwładności względem tej prostej. Znając więc moment, możemy wyznaczyć ramię bezwładności, i nawzajem, możemy obliczyć moment z wiadomego ramienia bezwładności. Odetnijmy od punktu O na osi momentu w obu kierunkach długość, odwrotnie proporcjonalną względem ramienia bezwładności, a zatem długość

$$\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{M}{I}},$$

gdzie ε jest taką liczbą dodatnią, iż stosunek odciętej długości do obranej jednostki jest równy stosunkowi $\varepsilon : k$. Tym sposobem otrzymamy na osi momentu dwa punkty (x, y, z) i $(-x, -y, -z)$, dla których

$$x = a\varepsilon \sqrt{\frac{M}{I}}, \quad y = b\varepsilon \sqrt{\frac{M}{I}}, \quad z = c\varepsilon \sqrt{\frac{M}{I}},$$

a stąd

$$(2) \quad a = \frac{x}{\varepsilon} \sqrt{\frac{I}{M}}, \quad b = \frac{y}{\varepsilon} \sqrt{\frac{I}{M}}, \quad c = \frac{z}{\varepsilon} \sqrt{\frac{I}{M}}.$$

Uczynmy to samo na każdej prostej, poprowadzonej przez punkt O, biorąc za ε ciągle tę samą wartość, to na każdej takiej prostej otrzymamy dwa punkty, symetrycznie względem O leżące. Ponieważ I nie jest ani równe zero, ani wielkością ujemną, przeto obadwa punkty będą rzeczywiste, a żaden z nich ani razem się nie zejdzie z punktem O, ani nie będzie punktem w nieskończoności. Wstawiając wartości dla a, b, c z (2) w równanie $I = Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 - 2Dbc - 2Eca - 2Fab$, otrzymamy następujące równanie miejsca geometrycznego punktów, powyższym sposobem wyznaczonych:

$$(3) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy = M\varepsilon^2.$$

Z tego równania okazuje się, że te punkty tworzą powierzchnią rzędu 2-go, której środkiem jest punkt O. Ponieważ odległość każdego punktu od środka jest skończona, przeto ta powierzchnia jest wogólności elipsojdą; że zaś w równaniu (3) współczynnik ϵ jest dowolny, przeto to równanie wyobraża właściwie jakąkolwiek powierzchnią w układzie elipsójd podobnych i podobnie położonych.

Którąkolwiek elipsoidę, takim sposobem otrzymaną, a której wymiary liniowe zależą od wyboru współczynnika ϵ , nazywamy elipsoidą bezwładności układu masyjnego względem punktu O. Dla każdego układu masyjnego, bez względu na jego ustrój, możemy w każdym punkcie wystawić nieskończenie wiele elipsójd bezwładności, podobnych i podobnie położonych. Z określenia wynika, że średnica elipsoidy bezwładności jest odwrotnie proporcjonalny względem pierwiastka odpowiedniego momentu bezwładności, czyli, że *kwadrat średnicy elipsoidy bezwładności jest odwrotnie proporcjonalny względem momentu bezwładności układu względem téjże średnicy*. Jeżeli obierzemy ϵ tak, żeby $M\epsilon^2 = 1$, to otrzymamy elipsoidę,

$$(4) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy = 1,$$

która w późniejszych dochodzeniach kinetycznych znajdzie ważne zastosowanie. Niech k_x, k_y, k_z oznaczają odpowiednio ramiona bezwładności względem osi O*x*, O*y*, O*z*; wówczas

$$(5) \quad A = Mk_x^2, \quad B = Mk_y^2, \quad C = Mk_z^2.$$

Możemy więc równanie (3) tak napisać:

$$(6) \quad k_x^2 \cdot x^2 + k_y^2 \cdot y^2 + k_z^2 \cdot z^2 - \frac{2}{M} (D \cdot yz + E \cdot zx + F \cdot xy) = 1,$$

uważając je w téj postaci także jako równanie elipsoidy bezwładności w punkcie O. Elipsoidę bezwładności, której środkiem jest środek masy układu masyjnego, nazywamy elipsoidą centralną tego układu.

Elipsoida bezwładności daje dokładny obraz geometryczny związku między momentem bezwładności a położeniem osi, przechodzącej przez środek téj elipsoidy. Wiadomo, że elipsoida posiada wogólności jeden układ tak zwanych osi głównych, t. j. trzech średnic sprzężonych i wzajemnie do siebie prostopadłych, z których jedna jest, jak wiadomo, najmniejsza, a inna największa ze wszystkich średnic téj powierzchni. Z tego wynika, że *w każdym punkcie w przestrzeni można wystawić jeden układ trzech prostych, wzajemnie do siebie prostopadłych, spośród których jedna jest osią największego i jedna najmniejszego momentu bezwładności danego układu z pomiędzy wszystkich prostych, przez ten punkt przechodzących*. Te trzy proste, będące osiami głównymi elipsoidy bezwładności w danym punkcie, nazywamy osiami bezwładności układu w tym punkcie. Najdłuższa oś elipsoidy jest osią najmniejszego, zaś oś najkrótsza jest osią największego momentu bezwładności. Osi główne elipsoidy centralnej nazywamy osiami głównymi bezwładności

układu, albo krócej, jego osiami głównymi, a momenty bezwładności układu względem jego osi głównych zowiemy krótko momentami głównymi tego układu.

Z twierdzenia artykułu poprzedniego (wzór 4) wynika, że każda średnica elipsojdy centralnej jest dłuższa, niż średnica równoległa elipsojdy bezwładności w którymkolwiek punkcie. Nadto otrzymujemy ważny wynik, że *najmniejszy z momentów głównych układu jest zarazem najmniejszy ze wszystkich momentów bezwładności tego układu*. Gdy obierzemy osi bezwładności w punkcie O jako osi współrzędnych, to równanie elipsojdy bezwładności będzie, jak wiadomo

$$(7) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = M\epsilon^2,$$

albo także, biorąc $\epsilon = 1$,

$$(7') \quad k_x^2 x^2 + k_y^2 y^2 + k_z^2 z^2 = 1,$$

z czego wnosimy, że dla osi bezwładności układu w punkcie uważanym będzie jednocześnie $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$. *W każdym punkcie można wystawić jeden układ trzech osi, wzajemnie do siebie prostopadłych, względem których trzy współczynniki D, E i F, są równe zeru. Te trzy proste są właśnie osiami bezwładności w uważanym punkcie, a żaden inny układ prostych, przez ten punkt przechodzących, nie posiada tej własności.* Względem więc osi bezwładności jako osi współrzędnych otrzymamy

$$(8) \quad I = Aa^2 + Bb^2 + Cc^2$$

jako najprostsze wyrażenie momentu bezwładności układu w funkcji współrzędnych kierunkowych a , b , c danej osi momentu. Obierzmy ϵ tak, żeby $M\epsilon^2 = 1$; wtedy powierzchnią, wyrażoną zapomocą równania

$$(9) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

możemy także uważać za elipsojdę bezwładności.

Jeżeli wszystkie punkty układu masy materialnego leżą na jednej płaszczyźnie, natenczas w wielu zagadnieniach dynamiki wystarcza rozważać momenty bezwładności tego układu względem prostych, leżących na tej płaszczyźnie. Obierzmy na tej płaszczyźnie punkt O i poprowadźmy przez niego prostą o współrzędnych kierunkowych a , b względem Ox i Oy ; otrzymamy moment bezwładności układu względem tej prostej

$$(10) \quad I = Aa^2 + Bb^2 - 2Fab$$

gdzie

$$(11) \quad A = \sum m_i y_i^2, \quad B = \sum m_i x_i^2, \quad F = \sum m_i x_i y_i.$$

A i B są odpowiednio momentami bezwładności względem osi Ox i Oy . Postępując opisanym poprzednio sposobem ze wszystkimi prostymi, przechodzącymi na płaszczyźnie przez punkt O, otrzymamy elipsę bezwładności układu płaskiego, której równanie jest

$$(12) \quad Ax^2 + By^2 - 2Fxy = M\epsilon^2,$$

albo także, kładąc $\varepsilon = 1$,

$$(13) \quad k_x^2 \cdot x^2 + k_y^2 \cdot y^2 - \frac{2F}{M} xy = 1,$$

gdzie k_x i k_y oznaczają odpowiednio ramiona bezwładności względem osi Ox i Oy . W środku masy układu płaskiego otrzymamy jego elipsę centralną. Dla osi bezwładności w punkcie O będzie $F = 0$, więc równanie elipsy będzie

$$(14) \quad Ax^2 + By^2 = M\varepsilon^2, \quad k_x^2 \cdot x^2 + k_y^2 \cdot y^2 = 1,$$

nakoniec otrzymamy

$$(15) \quad I = Aa^2 + Bb^2.$$

Może się wydarzyć, że długości dwu osi elipsojdy bezwładności w punkcie O są równe, wtedy ta powierzchnia będzie elipsojdą obrotową, a trzecia oś bezwładności będzie osią obrotu. Momenty bezwładności względem średnic elipsojdy, prostopadłych do osi obrotu, będą w tym przypadku równe sobie. Jeżeli wszystkie trzy osi główne elipsojdy bezwładności są sobie równe, wtedy otrzymamy kulę jako szczególny przypadek tej powierzchni. Układ ma wtenczas tenżesam moment względem wszystkich średnic tej kuli, a osi bezwładności w punkcie rozważanym są nieoznaczone.

101. SPOSOBY WYZNACZANIA MOMENTÓW BEZWŁADNOŚCI. W zagadnieniach dynamiki idzie przedewszystkiem o momenty bezwładności ciał masyjnych, których elementy następują po sobie w sposób ciągły. Najwłaściwiej używamy w tym celu współrzędnych prostokątnych, robiąc użytek z poprzednio okazanych twierdzeń. Jeżeli x, y, z są współrzędnymi punktu, w którym zachodzi gęstość σ , a który obieramy jako wierzchołek równoległoscianu elementarnego o krawędziach dx, dy, dz , to w tym elemencie mieści się masa $dm = \sigma \cdot dx \cdot dy \cdot dz$. Dla ciała masyjnego otrzymamy stąd

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \iiint \sigma(y^2 + z^2) dx dy dz, \\ B = \iiint \sigma(z^2 + x^2) dx dy dz, \\ C = \iiint \sigma(x^2 + y^2) dx dy dz, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} D = \iiint \sigma yz \cdot dx dy dz, \\ E = \iiint \sigma zx \cdot dx dy dz, \\ F = \iiint \sigma xy \cdot dx dy dz. \end{array} \right.$$

Dla ciała jednorodnego o gęstości σ

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \sigma \int (y^2 + z^2) dV, \\ B = \sigma \int (z^2 + x^2) dV, \\ C = \sigma \int (x^2 + y^2) dV, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} D = \sigma \int yz \cdot dV, \\ E = \sigma \int zx \cdot dV, \\ F = \sigma \int xy \cdot dV, \end{array} \right.$$

gdzie $dV = dx dy dz$. Całki w pierwszych trzech równaniach (2) przedsta-

wiają momenty bezwładności ciała jednorodnego o danym ograniczeniu, którego gęstość jest równa jednostce; a iloczyn momentu takiego ciała i gęstości ciała danego przedstawia odpowiedni moment bezwładności przy gęstości σ . Obliczając moment ciała jednorodnego, będziemy przyjmowali, że gęstość tego ciała jest równa jednostce, a wtedy, zamiast elementu masy, bierzemy element objętości dV , lub element powierzchni dF , lub na koniec element długości ds , według tego, czy obliczamy moment bryły, czy powierzchni, czytóż linii. Ponieważ dm jest wielkością nieskończenie małą rzędu 3-go lub 2-go lubtóż 1-go, a to według tego, czy I jest momentem bryły, czy powierzchni, czytóż linii krzywój, przeto moment bezwładności bryły jest wielkością rzędu 5-go, moment powierzchni jest wielkością rzędu 4-go, a linii rzędu 3-go. Wielkości

$$(3) \quad \alpha = \int x^2 \cdot dm, \quad \beta = \int y^2 \cdot dm, \quad \gamma = \int z^2 \cdot dm$$

przedstawiają według art. 99-go odpowiednio momenty bezwładności ciała względem płaszczyzn współrzędnych Oyz , Ozx , Oxy . Z równań (1) i (3) wynika

$$(4) \quad A = \beta + \gamma, \quad B = \gamma + \alpha, \quad C = \alpha + \beta;$$

podług tych wzorów można zatym momenty bezwładności względem osi współrzędnych obliczyć z momentów względem płaszczyzn współrzędnych. Z tych równań wynika

$$(5) \quad \begin{aligned} 2\alpha &= B + C - A, & 2\beta &= C + A - B, & 2\gamma &= A + B - C \\ 2(\alpha + \beta + \gamma) &= A + B + C. \end{aligned}$$

Ponieważ α , β i γ są dodatne, przeto z trzech poprzednich równań okazuje się, że $B + C > A$, $C + A > B$ i $A + B > C$, że więc (art. 100) *suma odwrotności kwadratów dwu osi jakiegokolwiek elipsojdy bezwładności jest większa, niż odwrotność kwadratu trzeciej osi téjże elipsojdy*. Z tego wnosimy, że nie każda dowolna elipsojda może przedstawiać elipsojdę bezwładności ciała (lub układu) materyjalnego.

Moment bezwładności figury płaskiej względem prostój, poprowadzonej przez dowolny punkt prostopadle do płaszczyzny figury, zwiemy momentem biegunowym bezwładności téj figury; obliczamy go przedewszystkim względem prostopadłej, wyprowadzonej ze środka masy figury. Jeżeli tę prostopadłą obierzemy jako oś z -ów, to α i β będą odpowiednio momentami figury względem dwu dowolnych prostych, wyprowadzonych z początku prostopadle do płaszczyzny figury. Z ostatniego przeto równania (4) wynika twierdzenie: *biegunowy moment bezwładności figury płaskiej jest równy sumie jój momentów bezwładności względem dwu prostych, wzajemnie do siebie prostopadłych, wyprowadzanych na płaszczyźnie figury ze spodka osi momentu*.

Znając osi i momenty główne bezwładności ciała, możemy wyznaczyć jego moment bezwładności względem jakiegokolwiek prostój, jak to okazano w art. 99 i 100. Wyznaczenie przeto tych osi i momentów jest głównym

zadaniem przy obliczaniu momentów bezwładności danego ciała. Obrawszy jakiegokolwiek trzy prostopadłe osi układu współrzędnych, przecinające się w środku masy ciała, i obliczywszy względem tych osi współczynniki A, B, C, D, E, F , możemy z równania elipsojdy centralnej według wiadomych reguł geometrii analitycznej wyznaczyć osi tej elipsojdy, które przedstawiają osi główne ciała. Często można bezpośrednio podać te osi, a to na podstawie twierdzenia, że współczynniki D, E i F , do nich odniesione, są równe zeru. Jeżeli np. bryła ma płaszczyzną symetrii, na której zatym leży środek masy, to prostopadła do tej płaszczyzny, wyprowadzona ze środka masy, jest jedną z osi głównych tej bryły. Obierając bowiem tę prostą za oś z -ów, otrzymamy dla każdego punktu (x, y, z) punkt symetrycznie leżący $(x, y, -z)$; będzie więc $D=0, E=0$. Prostopadła przeto do płaszczyzny symetrii jest osią bezwładności względem jej spodka. Jeżeli bryła posiada dwie do siebie prostopadłe płaszczyzny symetrii, a zatym oś symetrii, natenczas prostopadłe, wystawione do tych płaszczyzn w środku masy, są dwiema osiami głównymi, a oś symetrii jest trzecią osią główną. Jeżeli nakoniec bryła posiada środek, w którym przecinają się trzy do siebie prostopadłe płaszczyzny symetrii, natenczas proste, w których te płaszczyzny się przecinają, są osiami głównymi. Osi zatym główne prostopadłościannu przechodzą przez jego środek i są równoległe do krawędzi. Elipsojda zaś centralna jednorodnej bryły foremnej jest kulą, przeto jej osi główne są nieoznaczone. Elipsojda bezwładności jest powierzchnią obrotową dla każdego punktu jednorodnej bryły obrotowej, leżącego na osi tej bryły, a oś bryły jest osią tej elipsojdy.

Jeżeli dwa układy materijalne mają równe masy, wspólny środek masy, te same osi i te same momenty główne bezwładności, natenczas z poprzedniej teorii wynika, że ich momenty bezwładności względem jakiegokolwiek prostej są równe sobie. Takie zatym dwa układy są równoważne pod względem momentów bezwładności.

PRZYKŁADY I ĆWICZENIA.

(1). Trójkąt. Gdy $AC = b$ (fig. 45) jest podstawą, h wysokością trójkąta ($\sigma = 1$), dzielimy jego powierzchnią na elementy, ograniczone prostymi równoległymi do AC ; oznaczmy przez u szerokość, a przez dv wysokość takiego elementu, wtedy otrzymamy moment bezwładności I_b trójkąta ABC względem AC ,

$$I_b = \int_0^h v^2 \cdot u \cdot dv, \text{ a ponieważ } \frac{u}{b} = \frac{h-v}{h}, \quad u = \frac{b}{h}(h-v), \text{ przeto}$$

$$I_b = \frac{b}{h} \int_0^h v^2 (h-v) \cdot dv = \frac{bh^3}{12}.$$

A jeżeli $m = \frac{bh}{2}$ oznacza masę trójkąta (powierzchnią), to

$$I_b = m \cdot \frac{h^2}{6}.$$

Podobnie otrzymamy momenty I_c , I_a względem boku BA i boku CB. Poprowadźmy przez wierzchołek A dowolną prostą Ax , i niech A' będzie momentem bezwładności trójkąta względem tej prostej. Aby go obliczyć, przedłużmy BC aż do punktu D, i oznaczmy przez A'_1 i A'_2 odpowiednio momenty trójkątów ABD i ACD względem Ax , to $A' = A'_1 - A'_2$. Jeżeli β' i γ' oznaczają długości prostokątnych BB' i CC' , spuszczo-nych z B i C na Ax , i jeżeli przyjmiemy $\delta = AD$, to

$$A'_1 = \frac{\delta \beta'^3}{12}, \quad A'_2 = \frac{\delta \gamma'^3}{12}, \quad A' = \frac{\delta}{12} (\beta'^2 + \beta' \gamma' + \gamma'^2) (\beta' - \gamma'),$$

a ponieważ $2m = \delta(\beta' - \gamma')$, przeto

$$A' = \frac{m}{6} (\beta'^2 + \beta' \gamma' + \gamma'^2) = \frac{m}{3} \left[\left(\frac{\beta'}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma'}{2} \right)^2 + \left(\frac{\beta' + \gamma'}{2} \right)^2 \right].$$

Spuśmy ze środków s_1 , s_2 , s_3 boków BC, CA i AB odpowiednio prostopadłe α , β i γ na prostą Ax ; wtedy $\alpha = \frac{\beta' + \gamma'}{2}$, $\beta = \frac{\gamma'}{2}$, $\gamma = \frac{\beta'}{2}$. Otrzymamy zatem

$$A' = \frac{m}{3} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

to znaczy, że moment bezwładności trójkąta względem Ax równa się momentowi układu trzech równych mas, skupionych w środkach jego boków, z których każda wynosi $\frac{1}{3}$ jego masy.

(2). Prostopadłościan. Osiami głównymi tej bryły są proste, przechodzące przez środek równolegle do krawędzi. Biorąc te proste jako osi x , y i z , do których krawędzi odpowiednio a , b i c są równoległe, otrzymamy

$$\alpha = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^2 \cdot dm = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} x^2 \cdot dm, \text{ a ponieważ } dm = bc \cdot dx, \text{ przeto mamy}$$

$$\alpha = 2bc \int_0^{\frac{a}{2}} x^2 \cdot dx = \frac{a^3 bc}{12}, \text{ gdy zaś przyjmiemy } m = abc, \text{ to}$$

$$\alpha = \frac{ma^2}{12}, \quad \beta = \frac{mb^2}{12}, \quad \gamma = \frac{mc^2}{12},$$

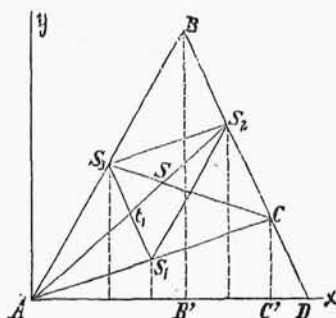


Fig. 45.

a stąd momenty główne

$$A = \frac{m}{12} (b^2 + c^2), \quad B = \frac{m}{12} (c^2 + a^2), \quad C = \frac{m}{12} (a^2 + b^2);$$

$$k_x^2 = \frac{b^2 + c^2}{12}, \quad k_y^2 = \frac{c^2 + a^2}{12}, \quad k_z^2 = \frac{a^2 + b^2}{12}.$$

Jeżeli $a < b < c$, to $A > B > C$; równanie zaś elipsoidy centralnej jest tu, biorąc $\varepsilon = 1$,

$$(b^2 + c^2)x^2 + (c^2 + a^2)y^2 + (a^2 + b^2)z^2 = 12.$$

Najdłuższa oś tej elipsoidy jest równoległa do najdłuższej krawędzi bryły, a oś najkrótsza do najkrótszej krawędzi. Momenty względem krawędzi wynoszą odpowiednio

$$I_a = \frac{m}{3} (b^2 + c^2), \quad I_b = \frac{m}{3} (c^2 + a^2), \quad I_c = \frac{m}{3} (a^2 + b^2).$$

Dla sześcianu $a = b = c = l$, $A = B = C = \frac{m}{6} l^2 = \frac{l^5}{6}$. Elipsoida centralna sześcianu jest kulą.

(3). Elipsoida. Ośiami głównymi bezwładności są osi główne elipsoidy. Niech a , b , c oznaczają połowy osi głównych; w celu obliczenia momentu α dzielimy elipsoidę na warstwy, płaszczyznami prostopadłymi do osi x . Równanie przekroju na płaszczyźnie x będzie

$$\frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1;$$

masa zatem warstwy o grubości dx wynosi $dm = \pi b c \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$, skąd

$$\alpha = 2 \int_0^a x^2 \cdot dm = 2 \pi b c \int_0^a x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{15} \pi a^3 b c,$$

a ponieważ $m = \frac{4}{3} \pi a b c$, przeto otrzymamy

$$\alpha = \frac{m a^2}{5}, \quad \beta = \frac{m b^2}{5}, \quad \gamma = \frac{m c^2}{5};$$

$$A = \frac{m}{5} (b^2 + c^2), \quad B = \frac{m}{5} (c^2 + a^2), \quad C = \frac{m}{5} (a^2 + b^2);$$

$$k_x^2 = \frac{b^2 + c^2}{5}, \quad k_y^2 = \frac{c^2 + a^2}{5}, \quad k_z^2 = \frac{a^2 + b^2}{5}.$$

Równanie elipsoidy centralnej jest

$$(b^2 + c^2)x^2 + (c^2 + a^2)y^2 + (a^2 + b^2)z^2 = 5.$$

Stosunek osi głównych tej elipsoidy jest równy stosunkowi

$$\frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}} : \frac{1}{\sqrt{c^2 + a^2}} : \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

jeżeli zatem $a < b < c$, to $k_x > k_y > k_z$. Osi więc najdłuższa i najkrótsza elipsoidy centralnej razem się schodzą odpowiednio z osiami najdłuższą i najkrótszą danej elipsoidy, chociaż obie powierzchnie nie są podobne. Dla kuli $a = b = c = r$, więc $\alpha = \beta = \gamma = \frac{mr^2}{5}$, $A = B = C = \frac{2mr^2}{5}$, gdzie m oznacza masę kuli jednorodnej.

Gdy oznaczymy dla danej elipsoidy $\frac{b}{a} = \mu$, $\frac{c}{a} = \nu$, to $m = \frac{4}{3} \pi \mu \nu \cdot a^3$, $A = \frac{4}{15} \pi \mu \nu (\mu^2 + \nu^2) a^5$. Niech będzie dana nieskończenie cienka warstwa, ograniczona daną elipsoidą o osiach a , b , c i nieskończenie bliską elipsoidą podobną. Masa tej warstwy jest $dm = 4\pi \mu \nu a^2 \cdot da$, a jej moment bezwładności względem osi a jest

$$dA = \frac{dm}{3} (\mu^2 + \nu^2) a^2 = \frac{dm}{3} (b^2 + c^2).$$

Według tego wzoru można obliczyć moment bezwładności elipsoidy niejednorodnej, składającej się z warstw jednorodnych, ograniczonych elipsoidami homotetycznymi, jeżeli znany prawo zmiany gęstości od warstwy do warstwy.

(4). Elipsa. Możemy obliczyć moment bezwładności elipsy z momentu koła. Niech C będzie momentem biegunowym koła względem prostopadłej, wyprowadzonej ze środka; wówczas, z powodu, że $A = B$, jest $C = 2A$. Aby wyznaczyć C , dzielimy koło o promieniu r na pierścienie; moment pierścienia, ograniczonego kołami o promieniach ρ i $\rho + d\rho$, będzie $2\pi\rho^3 \cdot d\rho$, a zatem

$$C = 2\pi \int_0^r \rho^3 \cdot d\rho = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{mr^2}{2}, \text{ gdzie } m = \pi r^2.$$

Moment więc bezwładności koła względem średnicy będzie

$$A = \frac{C}{2} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{mr^2}{4}.$$

Aby wyznaczyć moment elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ względem osi a , przyjmijmy $x = a\xi$, $y = b\eta$; otrzymamy koło o promieniu równym jedności, $\xi^2 + \eta^2 = 1$. Dla elipsy mamy

$$dm = dx dy = ab \cdot d\xi d\eta = ab d\mu,$$

gdzie $d\mu$ jest masą odpowiedniego elementu koła. Otrzymamy zatem dla elipsy

$$A = \int y^2 \cdot dm = ab^3 \int \eta^2 d\mu = \frac{ab^3\mu}{4},$$

a ponieważ $m = ab\mu$, przeto mamy dla elipsy

$$A = \frac{mb^2}{4}, \quad B = \frac{ma^2}{4},$$

jako momenty główne względem osi a i b , gdzie $m = \pi ab$. Mamy więc

$$k_x^2 = \frac{b^2}{4}, \quad k_y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Jeżeli I jest momentem względem średnicy, tworzącej z osią a kąt φ , to

$$I = A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi = \frac{m}{4} (b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi).$$

Średnica sprzężona tworzy z osią a kąt φ' , przyczym

$$\tan \varphi \cdot \tan \varphi' = -\frac{b^2}{a^2};$$

obliczając przeto $\cos \varphi'$ i $\sin \varphi'$, otrzymamy moment I' względem średnicy sprzężonej

$$I' = \frac{m a^2 b^2}{4} \cdot \frac{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}{b^4 \cos^2 \varphi + a^4 \sin^2 \varphi}.$$

Jeżeli k i k' oznaczają odpowiednie ramiona, to otrzymamy

$$k^2 = \frac{1}{4} (b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi), \quad k'^2 = \frac{a^2 b^2}{4} \cdot \frac{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}{b^4 \cos^2 \varphi + a^4 \sin^2 \varphi},$$

a stąd

$$\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k'^2} = 4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$$

(5). Pierścień kołowy. Tak nazywamy powierzchnią, utworzoną przez obrót koła około dowolnej prostej, leżącej na jego płaszczyźnie. Obierzmy środek O pierścienia jako początek, a jego oś jako oś z -ów, to możemy każdy punkt tej bryły określić przez następujące trzy współrzędne: przez odległość ρ od środka koła, przez kąt θ , który ρ tworzy z osią z , i przez kąt ϕ , który południk uważanego punktu tworzy z płaszczyzną xOz . Dla punktu (ρ, θ, ϕ) bryły jest

$$x = (a + \rho \sin \theta) \cos \phi, \quad y = (a + \rho \sin \theta) \sin \phi, \quad z = \rho \cos \theta,$$

gdzie a oznacza odległość środka koła tworzącego od osi. Dla punktu na powierzchni pierścienia mamy $\rho = r$, gdzie r jest promieniem koła, będzie więc

$$x = (a + r \cos \theta) \cos \phi, \quad y = (a + r \sin \theta) \sin \phi, \quad z = r \cos \theta.$$

Tym sposobem przedstawiamy równania pierścienia kołowego przez parametry θ i ϕ . Aby otrzymać element masy tej bryły, obierzmy na płaszczyźnie koła tworzącego element pola $\rho \cdot d\rho \cdot d\theta$; biorąc go za podstawę elementu bryły, ograniczonego płaszczyznami południków ϕ i $\phi + d\phi$, otrzymamy

$$dm = \rho d\rho d\theta \cdot \frac{x \cdot d\phi}{\cos \phi} = \rho (a + \rho \sin \theta) d\rho d\theta d\phi;$$

a na mocy twierdzenia Pappusa $m = 2\pi^2 a r^2$. Z tego wynika, iż

$$A = B = \int (y^2 + z^2) dm = \iiint [(a + \rho \sin \theta)^2 \sin^2 \phi + \rho^2 \cos^2 \theta] (a + \rho \sin \theta) \rho \cdot d\rho \cdot d\theta \cdot d\phi,$$

gdzie krawcami są 0 i r dla ρ , 0 i 2π dla θ , 0 i 2π dla ϕ . Kładąc

$$A_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^r (a + \rho \sin \theta)^3 \sin^2 \phi \cdot \rho d\rho d\theta d\phi = \pi^2 a r^2 \left(a^2 + \frac{3}{4} r^2 \right),$$

$$A_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^r (a + \rho \sin \theta) \rho^3 \cos^2 \theta d\rho d\theta d\phi = \frac{\pi^2 a r^4}{2}, \text{ otrzymamy}$$

$$A = B = A_1 + A_2 = m \left(\frac{a^2}{2} + \frac{5}{8} r^2 \right).$$

Moment bezwładności względem osi obrotu będzie

$$C = \int (x^2 + y^2) dm = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^r (a + \rho \sin \theta)^3 \rho d\rho d\theta d\phi = m \left(a^2 + \frac{3}{4} r^2 \right).$$

(6). Jeżeli $S = 0$ jest równaniem elipsoidy centralnej względem osi głównych, okazać, że równanie elipsoidy bezwładności względem punktu (ξ, η, ζ) można napisać w postaci

$$S + m(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(x^2 + y^2 + z^2) - m(\xi x + \eta y + \zeta z)^2 = 0,$$

gdzie m jest masą danego układu.

(7). Udowodnić twierdzenie: jeżeli przez punkt dowolny przesuniemy wiązkę płaszczyzn; na prostopadłej do każdej płaszczyzny odetniemy długość, proporcjonalną względem ramienia bezwładności układu względem tej płaszczyzny, i przez punkt końcowy tego odcinka przesuniemy płaszczyznę równoległą, to płaszczyzny równoległe utworzą elipsoidę, której środkiem jest punkt uważany (elipsoida Binet'go). Równanie tej elipsoidy jest

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1 \text{ wraz, gdy przyjmiemy } \varepsilon = 1.$$

(8). Układ masyjny daje się nieskończenie wieloma sposobami zastąpić przez układ równoważny pod względem momentów bezwładności, składający się z czterech punktów. Jeżeli jeden punkt oberzemy dowolnie, to trzy pozostałe punkty leżą na płaszczyźnie biegunowej środka masy układu względem elipsoidy Binet'go, odpowiadającej punktowi obranemu (twierdzenie Reye'go).

(9). Moment bezwładności układu o masie m względem prostej $\frac{x-\xi}{a} = \frac{y-\eta}{b} = \frac{z-\zeta}{c}$, odniesionej do osi współrzędnych, które przecinają się prostopadle w środku masy, jest:

$$I = Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 - 2Dbc - 2Eca - 2Fab + m[\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - (a\xi + b\eta + c\zeta)^2].$$

(10). Jeżeli wyznaczymy elipsoidę bezwładności układu w każdym punkcie danej prostej, natenczas płaszczyzny średnicowe tych elipsoid, sprzężone z daną prostą, przecinają się z sobą według pewnej prostej.

(11). Ramiona główne bezwładności trójkąta o bokach a, b, c , którego polem jest F , są pierwiastkami równania

$$x^4 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{36} x^2 + \frac{F^2}{108} = 0.$$

W następujących ośmiu zagadnieniach k oznacza ramię bezwładności względem danej prostej. Okazać, że

(12). Dla prostej o długości l , względem osi, przechodzącej przez punkt końcowy tej prostej i tworzącej z nią kąt φ , $k^2 = \frac{l^2}{3} \sin^2 \varphi$.

(13). Dla prostokąta o bokach b i h , względem osi głównych, równoległych do tych boków, $k_b^2 = \frac{h^2}{12}$, $k_h^2 = \frac{b^2}{12}$.

(14). Dla wielokąta foremnego o n bokach, z których każdy ma długość l , względem osi głównej

$$k^2 = \frac{l^2}{12} \cdot \frac{2 + \cos \frac{2\pi}{n}}{1 - \cos \frac{2\pi}{n}}, \text{ albo także } k^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{l^2}{12} \right),$$

gdzie r oznacza promień koła opisanego.

(15). Dla elipsy,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + 1 = 0,$$

względem średnicy równoległej do osi x -ów $k^2 = -\frac{\Delta}{4} \cdot \frac{a}{(b^2 - ac)^2}$, gdzie $\Delta = ac - b^2 + 2bed - ae^2 - cd^2$ oznacza wyróżnik równania elipsy.

(16). Dla walca obrotowego o promieniu r i wysokości l , względem osi $k^2 = \frac{r^2}{2}$; względem zaś prostopadłej do osi w środku masy,

$$k^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{r^2}{3} + l^2 \right).$$

(17). Dla stożka obrotowego o wysokości h , którego podstawa ma promień r , względem osi $k^2 = \frac{3}{10} r^2$, względem zaś prostopadłej do osi w wierzchołku

$$k^2 = \frac{3}{5} \left(h^2 + \frac{r^2}{4} \right).$$

(18). Dla łuku koła o promieniu r i kącie środkowym 2φ , względem osi symetrii $k^2 = \frac{2\varphi - \sin 2\varphi}{4\varphi} \cdot r^2$, względem zaś średnicy, równoległej do cięciwy, $k^2 = \frac{2\varphi + \sin 2\varphi}{4\varphi} r^2$.

(19). Dla części pola paraboli, ograniczonego cięciwą i prostopadłą do osi względem prostopadłej do osi w wierzchołku $k^2 = \frac{3}{7} x^2 + \frac{1}{5} y^2$, gdzie (x, y) są współrzędnymi punktu końcowego.

(20). Jeżeli na kuli opiszemy bryłę foremną i masę powierzchni téj kuli rozdzielimy jednostajnie między wierzchołki téj bryły, to układ tych mas, pod względem momentów bezwładności, będzie równoważny powierzchni téj kuli.

(21). Na danéj prostej wyznaczyć taki punkt, w którym ta prosta jest jedną z osi bezwładności danego układu, i znaleźć dwie inne osi bezwładności.

(22). Okazać, że oś główna układu jest osią bezwładności tego układu w każdym swoim punkcie.

Literatura (Rozdz. IX).

J. BINET, Mémoire sur la théorie des axes conjugués et des moments d'inertie des corps (Journ. de l'ec. polyt., t. IX, 1813). — L. POINSOT, Théorie nouvelle de la rotation des corps (Journ. des math., t. XVI, 1851). — MAC CULLAGH, On the rotation of a solid body round a fixed point (Transactions of the Royal. Irish Acad., t. XXII, Dublin, 1855; także: Collected works. Dublin, 1880). — J. N. HATON DE LA GOU-PILLIÈRE, Mémoire sur une théorie nouvelle de la géométrie des masses (Journ. de l'ec. polyt., t. XXI, 1858). — R. TOWNSEND, On the principal axes of a body, their moment of inertia and distribution in space (Cambridge & Dublin mathematical journal, t. I i II). — REYE, Beiträge zur Lehre von den Trägheitsmomenten (Zeitschrift von Schlömilch, t. X, Leipzig, 1865).