

## ROZDZIAŁ III.

### OGÓLNA TEORYJA RUCHU UKŁADÓW NIEZMIENNYCH.

**38. RUCH CHWIŁOWY UKŁADU NIEZMIENNEGO.** Przywiedziemy układ niezmienny z danego położenia do położenia nieskończenie bliskiego, udzielając mu ruchu takiego, żeby trzy punkty ruch wyznaczające zajęły jednocześnie położenia nieskończenie bliskie, przez dane warunki określone. Niech  $m_1, m_2$  i  $m_3$  (fig. 19) będą wiadomymi położeniami owych trzech punktów w czasie  $t$ , a  $m'_1, m'_2$  i  $m'_3$  ich położeniami odpowiednimi po upływie elementu czasu  $dt$ . Nadajmy trójkątowi  $m'_1 m'_2 m'_3$  nieskończenie mały ruch postępowy  $m'_1 m_1$ , wskutek czego ten trójkąt przyjmie położenie trójkąta  $m_1 \mu_2 \mu_3$ . Połączmy z sobą punkty  $m_2$  i  $\mu_2$  prostą, a przez środek prostej  $m_2 \mu_2$ , t. j. przez punkt  $\alpha$ , poprowadźmy płaszczyznę  $P_\alpha$ , prostopadłą do  $m_2 \mu_2$ ; podobnie przez środek  $\beta$  prostej  $m_3 \mu_3$  poprowadźmy płaszczyznę  $P_\beta$ , prostopadłą do  $m_3 \mu_3$ . Ponieważ obie płaszczyzny,  $P_\alpha$  i  $P_\beta$ , przechodzą przez punkt  $m_1$ , przeto przetną się podług pewnej prostej  $O_1$ , przez ten punkt przechodzącej.

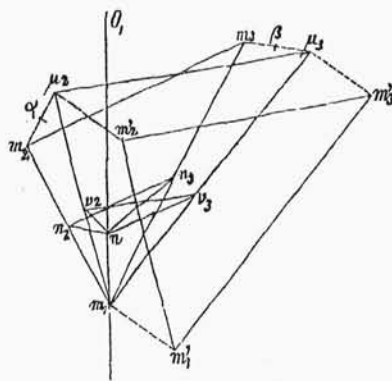


Fig. 19.

Możemy teraz łatwo okazać, że trójkąt  $m_1 m_2 m_3$  można przywieść do położenia  $m_1 \mu_2 \mu_3$  przez nieskończenie mały obrót około prostej  $O_1$ . Aby tego dowieść, poprowadźmy przez punkt  $n$ , dowolnie obrany na prostej  $O_1$ , płaszczyznę prostopadłą do téj prostej; ta płaszczyzna przetnie proste  $m_1 m_2$ ,  $m_1 \mu_2$ ,  $m_1 m_3$  i  $m_1 \mu_3$  odpowiednio w punktach  $n_2, \nu_2, n_3$  i  $\nu_3$ . Ponieważ proste  $m_1 m_2$  i  $m_1 \mu_2$  są tworzącymi stożka obrotowego, którego osią jest  $O_1$ , przeto  $nn_2 = n\nu_2$ ; po-

nieważ podobnie proste  $m_1m_3$  i  $m_1p_3$  są tworzącymi innego stożka obrotowego, którego osią jest także  $O_1$ , przeto  $nn_3 = n\nu_3$ . Nadto mamy  $m_1n_2 = m_1\nu_2$  i  $m_1n_3 = m_1\nu_3$ , a ponieważ trójkąty  $m_1m_2m_3$  i  $m_1p_2p_3$  są równe, przeto także  $n_2n_3 = \nu_2\nu_3$ . A zatym i dwa trójkąty  $nn_2n_3$  i  $n\nu_2\nu_3$  są równe, a więc kąt  $n_2nn_3$  jest równy kątowi  $\nu_2n\nu_3$ , z czego wynika, że kąt nieskończenie mały  $n_2nn_3$  równa się kątowi  $n_3n\nu_3$ . Jeżeli zatym obrócimy trójkąt  $m_1m_2m_3$  około prostej  $O_1$  o kąt nieskończenie mały  $d\varphi_1 = n_2n\nu_2 = n_3n\nu_3$  w kierunku od  $n_2$  ku  $\nu_2$ , to punkt  $n_2$  zejdzie się razem z  $\nu_2$ , a jednocześnie punkt  $n_3$  z punktem  $\nu_3$ , a zatym prosta  $m_1m_2$  zajmie położenie  $m_1p_2$ , a jednocześnie prosta  $m_1m_3$  zajmie położenie  $m_1p_3$ , z czego się okazuje, że wskutek obrotu o kąt  $d\varphi_1$  około prostej  $O_1$  trójkąt  $m_1m_2m_3$  przyjmie położenie trójkąta  $m_1p_2p_3$ , c. n. d. Przywiodszy tym sposobem trójkąt  $m_1m_2m_3$  do położenia  $m_1p_2p_3$ , udzielmy mu z tego położenia nieskończenie małego ruchu postępowego  $m_1m'_1$ ; wtedy trójkąt zajmie położenie  $m'_1m'_2m'_3$ , jakie miał właśnie mając po upływie rozważanego elementu czasu.

Ponieważ jakiegokolwiek trzy punkty układu niezmiennego, nie leżące na jednej prostej, mogą służyć do wyznaczenia jego ruchu, a opisane powyżej postępowanie daje się zastosować do któregośkolwiek z tych punktów, przeto mamy następujące twierdzenie: *ruch chwilowy układu niezmiennego może być nieskończenie wieloma sposobami wywołany przez obrót chwilowy układu i jednocześnie ruch chwilowy postępowy tego układu.*

Oznaczmy przez  $ds_1$  drogę  $m_1m'_1$  punktu  $m_1$  w czasie  $dt$ , i niech  $\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}$ ,  $v_1 = \frac{ds_1}{dt}$ ; jest więc  $\omega_1$  prędkością kątową chwilowego obrotu układu około prostej  $O_1$ , a  $v_1$  prędkością jego ruchu postępowego chwilowego w kierunku ruchu punktu  $m_1$ . Obracając inny punkt  $m_2$ , możemy podobnym sposobem wyznaczyć prędkość kątową  $\omega_2$  obrotu około pewnej osi  $O_2$ , przez tenże punkt przechodzącej, który razem z ruchem postępowym o prędkości  $v_2$  tego punktu przywiedzie układ również z danego położenia w czasie  $t$  do położenia w czasie  $t + dt$ . Wszystkie połączenia dwu ruchów chwilowych, tym sposobem wyznaczone, są równoważne, ponieważ wywołują ten sam ruch układu niezmiennego.

Kierunek ruchu postępowego układu nie będzie wogólności prostopadły do osi odpowiedniego obrotu, a przeto takie dwa ruchy są równoważne skrętowi (art. 29). A ponieważ połączenia ruchów obrotowych z postępowymi, do których się odnosi poprzednie twierdzenie, są z sobą równoważne, przeto dają one zawsze ten sam skręt wypadkowy. Dochodzimy więc do twierdzenia ogólnego: *ruch chwilowy układu niezmiennego może być tylko jednym sposobem wywołany przez skręt chwilowy układu* (twierdzenie Chasles'a). Oś tego skrętu, który układ przenosi z pewnego położenia do położenia nieskończenie bliskiego, nazywamy osią centralną ruchu, albo także osią chwilową ruchu tego układu w chwili uważanej.

**39.** Aby wyznaczyć skręt chwilowy układu z wiadomych ruchów 3-ch jego punktów, zważmy, że oś skrętu, wynikającego ze składu obrotu

z ruchem postępowym, jest równoległa do osi tego obrotu, że prędkość kątowna skreću równa się prędkości kątovej danego obrotu i że nakoniec prędkość ruchu postępowego skreću równa się rzutowi prędkości danego ruchu postępowego na oś obrotu (art. 29). Z tego się okazuje, że osi obrotu  $O_1, O_2, \dots$ , rozważane w artykule poprzednim, przechodzące przez punkty  $m_1, m_2, \dots$ , są równoległe do osi chwilowej ruchu układu, tudzież, że rzut prędkości  $v_1, v_2, \dots$  któregośkolwiek z punktów  $m_1, m_2, \dots$  na kierunek téj osi daje prędkość ruchu postępowego skreću chwilowego. Widzimy więc, że *rzut prędkości każdego punktu układu niezmiennego na oś chwilową ruchu jest stały co do wielkości i co do kierunku*. Jeżeli zatem w punkcie dowolnym A wystawimy trzy odcinki, przedstawiające prędkości trzech punktów ruch wyznaczających, i poprowadzimy płaszczyznę przez punkty końcowe tych odcinków, to prostopadła, spuszczone z punktu A na tę płaszczyznę, jest równoległa do osi chwilowej, a długość téj prostopadłej przedstawia prędkość ruchu postępowego skreću chwilowego. Na podstawie więc twierdzenia poprzedzającego mamy nowe: *punkty końcowe odcinków, wystawionych w punkcie dowolnym i przedstawiających prędkości jednocześnie wszystkich punktów układu niezmiennego, leżą na płaszczyźnie, prostopadłej do osi chwilowej ruchu tego układu*.

Niech  $m$  będzie punktem dowolnym układu,  $v$  prędkością tego punktu, a  $P$  jakąkolwiek płaszczyzną, prostopadłą do osi chwilowej; oznaczmy przez  $M$  rzut punktu  $m$ , a przez  $V$  rzut jego prędkości  $v$  na płaszczyznę  $P$ . Rzut  $V$  przedstawia widocznie prędkość, której punkt  $m$  nabywa wskutek obrotu układu około osi chwilowej, a prosta, przechodząca przez  $M$  prostopadłe do  $V$  i leżąca na płaszczyźnie  $P$ , przechodzi przez ślad osi chwilowej na téj płaszczyźnie. Jeżeli przeto z prędkości  $v_1, v_2, v_3$  trzech punktów  $m_1, m_2, m_3$  wyznaczymy, według twierdzenia poprzedzającego, kierunek płaszczyzny  $P$ , a następnie rzucimy te punkty i ich prędkości na płaszczyznę  $P$ , z rzutów zaś  $M_1, M_2, M_3$  tych punktów wyprowadzimy na płaszczyźnie  $P$  odpowiednio prostopadłe do rzutów  $V_1, V_2, V_3$  prędkości tychże punktów, to te trzy prostopadłe przetną się w jednym punkcie, który jest śladem osi chwilowej na płaszczyźnie  $P$ . Dzieląc nakoniec rzut  $V_1$  prędkości  $v_1$  przez odległość punktu  $M_1$  od tego śladu, otrzymamy prędkość kątową skreću chwilowego. Tym sposobem wyznaczyć możemy skreću chwilowy układu.

40. Ruch chwilowy układu niezmiennego możemy jeszcze innym sposobem wywołać. Wiadomo (art. 35), że skreću można nieskończenie wieloma sposobami zastąpić dwoma obrotami około dwu osi sprzężonych, które względem siebie mają położenie skośne. A zatem *ruch chwilowy układu niezmiennego może być nieskończenie wieloma sposobami wywołany przez dwa obroty około osi skośnych*. Aby takie dwie osi wyznaczyć z wiadomych ruchów trzech punktów, połączmy punkty  $m_1$  i  $m'_1$ , wystawmy w środku prostej  $m_1m'_1$  płaszczyznę  $P_1$ , prostopadłą do téj prostej, i poprowadźmy podobnie przez środek prostej  $m_2m'_2$  płaszczyznę  $P_2$ , prostopadłą do téjże prostej. Obie płaszczyzny przetną się podług pewnej prostej  $O_{12}$ , a łatwo okazać (co pozostawiamy czytelnikowi), że obrót chwilowy około  $O_{12}$  przywiedzie prostą  $m_1m_2$  do położenia

$m'_1m'_2$ , jakie ona ma zająć w czasie  $t + dt$ . Niech skutek tego obrotu punkt  $m_3$  zajmie miejsce  $m''_3$ ; wówczas, obróciwszy trójkąt  $m'_1m'_2m''_3$  około prostej  $m'_1m'_2$ , możemy punkt  $m''_3$  przywieść do położenia  $m'_3$ . Widzimy zatem, że dwa obroty około prostych  $O_{12}$  i  $m'_1m'_2$  przywodzą układ do położenia żądanego, z czego się okazuje, że te dwie proste są dwiema osiami sprzężonymi obrotu. Jeżeli element czasu  $dt$  nieograniczenie zdąża do zera, to elementy liniowe  $m_1m'_1$  i  $m_2m'_2$  będą stycznymi do kierownic  $(m_1)$  i  $(m_2)$ , a zatem  $P_1$  i  $P_2$  będą płaszczyznami normalnymi do tych kierownic w punktach  $m_1$  i  $m_2$ .

Wystawiwszy w punkcie dowolnym układ współrzędnych prostokątny, możemy skręt chwilowy rozłożyć na trzy obroty około osi tego układu i na trzy ruchy postępowe w kierunkach tychże osi. A zatem *ruch chwilowy układu niezmiennego może być nieskończenie wieloma sposobami wywołany przez trzy obroty około trzech prostych, wzajemnie do siebie prostopadłych w jednym punkcie, i przez trzy ruchy postępowe w kierunkach tychże prostych.* (Gdyby nawet te proste nie przecinały się z sobą pod kątami prostymi, to jednak twierdzenie prawdziwym pozostanie.)

Możemy na koniec wypowiedzieć twierdzenie: *ruch chwilowy układu niezmiennego może być nieskończenie wieloma sposobami wywołany przez sześć obrotów około sześciu osi niezależnych.*

**41. RUCH CIĄGŁY UKŁADU NIEZMIENNEGO.** Wyznaczywszy podług art. 38-go prostą  $O_1$ , przechodzącą przez punkt  $m_1$ , obróćmy układ nieskończenie mało około tej prostej i przesunijmy go o długość nieskończenie małą  $m_1m'_1$ ; układ zajmie położenie odpowiednie po upływie czasu  $t + dt$ . Uczyńmy toż samo w następnym elemencie czasu, t. j. obróćmy układ około pewnej osi  $O'_1$ , przechodzącej przez punkt  $m'_1$ , i przesunijmy go o dalszy element  $m'_1m''_1$  drogi punktu  $m_1$ . I t. d. Wskutek tych ciągłych ruchów chwilowych punkty ruch wyznaczające będą się przesuwały po swoich kierownicach, a zatem układ wykona ruch, przez dane warunki określony.

Poprowadźmy przez punkt dowolny A proste równoległe do następujących po sobie osi  $O_1, O'_1, O''_1, \dots$ ; te równoległe utworzą stożek o wierzchołku A, który oznaczmy symbolem [O]. Jakoż, dla każdego skończonego przedziału czasu otrzymamy pojedynczą nieskończoność osi  $O_1, O'_1, \dots$ , tudzież prostych do nich równoległych, z czego wynika, że dowolna płaszczyzna przetnie układ tych równoległych w pojedynczej nieskończoności punktów, a więc podług linii krzywój; miejscem zatem geometrycznym tych równoległych jest powierzchnia stożkowa. Przyjmując punkt  $m_1$  jako wierzchołek tego stożka, widzimy, że ruch ciągły układu daje się wywołać przez posuwanie się stożka razem z układem wzdłuż kierownicy  $(m_1)$  i obrót układu około następujących po sobie tworzących tegoż stożka, przyczem każda tworząca jest tylko przez chwilę osią obrotu. Gdybyśmy za wierzchołek obrali inny punkt, niż  $m_1$ , otrzymalibyśmy ten sam stożek, widzieliśmy bowiem (art. 38), że osi obrotu, przechodzące przez rozmaite punkty układu, są do siebie równoległe. Możemy zatem stożek [O] przesuwać wzdłuż toru któregośkolwiek punktu układu, jeżeli

tylko prędkość kątową obrotu wyznaczymy w każdej chwili odpowiednio dla tego punktu (art. 38); tym sposobem wywołamy zawsze żądany ruch układu.

Osi  $O_1, O'_1, O''_1, \dots$  zajmują nie tylko pewne położenie w przestrzeni, ale zarazem każda z nich ma pewne położenie względem poruszającego się układu. Jeżeli w czasie  $t$  wierzchołek stożka  $[O]$  znajduje się w  $m_1$ , a prosta  $O_1$  jest osią obrotu, to pewna prosta  $o'_1$  układu, skutkiem obrotu chwilowego około  $O_1$ , zejdzie się razem z następującą osią obrotu  $O'_1$ . W czasie  $t + dt$  znajduje się wierzchołek stożka w punkcie  $m'_1$ , a  $O'_1$  jest osią obrotu; w układzie znajdziemy znowu pewną prostą  $o''_1$ , która wskutek obrotu około  $O'_1$  razem się zejdzie z prostą  $O''_1$ , i t. d. Wystawmy w punkcie  $m_1$  (lub w jakimkolwiek innym punkcie) proste, równoległe do powyższych prostych  $o'_1, o''_1, \dots$ ; te równoległe utworzą także pewną powierzchnię stożkową  $[o]$ . Stożek  $[O]$  jest zbiorem wszystkich prostych w przestrzeni, stożek zaś  $[o]$  jest zbiorem wszystkich prostych w poruszającym się układzie, które stają się kolejno osiami chwilowymi obrotu tego układu i przechodzą przez wierzchołek wspólny tych stożków. Obadwa stożki są styczne do siebie w każdej chwili wzdłuż tej tworzącej, która jest właśnie osią obrotu układu. Jakoż, skoro prosta  $O'_1$  jest osią obrotu, to tworząca  $o'_1$  schodzi się z nią razem, a sąsiednia tworząca  $o''_1$  stożka  $[o]$  skutkiem tego obrotu schodzi się z sąsiednią tworzącą  $O''_1$  stożka  $[O]$ ; z tego wynika, że obadwa stożki są do siebie styczne wzdłuż prostej  $O'_1$ . Stożek  $[o]$  posuwa się więc w ten sposób na stożku  $[O]$ , iż jest doń stycznym wzdłuż jednej tworzącej, obracając się chwilowo około téjże tworzącej. Ponieważ taki ruch stożka  $[o]$  nazywamy toczeniem się tego stożka, przeto mamy twierdzenie: *ruch ciągły układu niezmiennego może być wywołany przez to, że pewien stożek, do układu nie należący, a którego wierzchołkiem jest dowolny punkt układu, posuwa się po torze tego punktu, a inny stożek o tym samym wierzchołku, lecz stale połączony z układem, toczy się po pierwszym stożku* (twierdzenie Poinso't'a).

Wyznamy w każdej chwili oś  $S$  skrętu układu; te osi  $S, S', S'', \dots$  utworzą pewną powierzchnię skośną  $[S]$ , dokładnie oznaczoną, będącą zbiorem tych prostych w przestrzeni, około których należy układ skręcać chwilowo, aby tym sposobem wywołać jego ruch ciągły. Weźmy pod uwagę, podobnie jak wyżej, skręt chwilowy w czasie  $t$  około prostej  $S$ ; w układzie znajdziemy pewną prostą  $s'$ , która wskutek tego skrętu razem się zejdzie z prostą  $S'$  i w chwili następnej stanie się osią skrętu tego układu. Czyniąc to samo w każdej z chwil, otrzymamy proste  $s', s'', s''', \dots$ , które utworzą drugą powierzchnię skośną  $[s]$ , będącą zbiorem tych prostych w układzie, które stają się kolejno osiami chwilowymi jego ruchu. Łatwo okazać (co pozostawiamy czytelnikowi), że obie powierzchnie  $[S]$  i  $[s]$  są styczne do siebie chwilowo wzdłuż téj tworzącej, która jest właśnie osią skrętu układu. Każdą z tych powierzchni nazywamy powierzchnią centralną ruchu układu, a mianowicie powierzchnią  $[S]$  zowiemy powierzchnią centralną w przestrzeni, zaś  $[s]$  powierzchnią centralną w układzie. Ruch powierzchni  $[s]$  względem  $[S]$  składa się z obrotu około tworzącej styczności i z ruchu

postępowego wzdłuż tej tworzącej, czyli z toczenia się i ślizgania. A zatem *ruch ciągły układu niezmiennego może być wywołany przez to, że powierzchnia centralna w układzie toczy się ze ślizganiem na powierzchni centralnej w przestrzeni* (twierdzenie Poncelet'go). Poprzednio przeto rozważane stożki  $[O]$  i  $[o]$  są tak zwanymi stożkami kierunkowymi, odpowiednimi powierzchniom  $[S]$  i  $[s]$ .

**42. RZĘD SWOBODY UKŁADU.** Układ niezmienny nazywamy swobodnym, jeżeli z danego położenia może przyjąć wszelkie położenia sąsiednie. Ponieważ najogólniejszy ruch chwilowy układu niezmiennego jest skrętem, a każdy skręt daje się rozłożyć na 6 obrotów około 6-u osi niezależnych (art. 36), a nadto, ponieważ z obrotów około takich 6-u osi można utworzyć każdy skręt chwilowy, jeżeli tylko prędkości kątowe tych obrotów odpowiednio obranymi zostaną, przeto możemy wypowiedzieć następujące ważne twierdzenie: *układ niezmienny jest swobodny, jeżeli daje się obracać około sześciu osi niezależnych*. Używając zaś trzech osi współrzędnych prostokątnych, możemy cechy swobody układu ująć w twierdzenie: *układ niezmienny jest swobodny, jeżeli daje się obracać około trzech prostych, wzajemnie do siebie prostopadłych w jednym punkcie, i zarazem przesuwając w kierunkach tychże prostych* \*).

Wystawmy w dowolnym punkcie w przestrzeni trzy osi układu współrzędnych prostokątnego i rozłożmy skręt chwilowy układu niezmiennego na trzy obroty z prędkościami kątowymi  $E, H, Z$  około tych osi, tudzież na trzy ruchy postępowe z prędkościami  $\Lambda, M, N$  w kierunkach tychże osi; te sześć prędkości  $E, H, Z, \Lambda, M, N$  nazywamy współrzędnymi ruchu tego układu w chwili rozważanej względem powyższych osi. Te wielkości przedstawiają współrzędne skrętu chwilowego układu (art. 31). Znając współrzędne ruchu, możemy według równania (9) art. 31-go obliczyć składowe prędkości każdego punktu układu, które wyrażają się, jak widać z tych równań, przez funkcje liniowe współrzędnych prostokątnych tego punktu.

Jeżeli sześć współrzędnych ruchu układu mogą przybierać wszelkie wartości, natenczas układ jest swobodny, a każdy z jego punktów może się z danego położenia poruszać w przestrzeni we wszystkich kierunkach. Jeżeli zaś między współrzędnymi ruchu zachodzą jakiekolwiek związki, natenczas swoboda układu będzie ograniczona, a układ nie będzie już mógł być obracany około sześciu osi niezależnych.

Stosownie do ilości związków, zachodzących między współrzędnymi ruchu, rozróżniamy rozmaite rzędy swobody układu niezmiennego. Jeżeli między współrzędnymi ruchu układu zachodzi  $n$  związków, przyczem oczywiście  $n \leq 6$ , to powiemy, że układ ma swobodę ruchów rzędu  $(6 - n)$ -go. Według

---

\*) W odnóżach przednich człowieka, od ramienia do kończyn palców, można rozróżniać sześć osi, około których każdy palec (oprócz wielkiego) może się obracać, mianowicie w stawie ramieniowym, w łokciu, w przedgarściu, w śródgarku i na końcach członków. Nie wiemy, czy powyższe osi stanowią układ niezależny w każdym położeniu odnóży; możemy jednak na podstawie danych twierdzeń wytłumaczyć doskonałą ruchliwość odnóży, a szczególności kończyn palców.

więc tego określenia zmniejsza się rząd swobody odpowiednio do ilości związków, które tę swobodę ograniczają; zupełna swoboda ruchów jest swobodą rzędu 6-go, a zupełny brak swobody zachodzi wówczas, gdy ona jest rzędu zero; wtedy bowiem wszystkie spółrzedne ruchu są określone przez warunki zadania. Z tego wynika także, że ruch chwilowy układu niezmiennego jest zupełnie określony, jeżeli mamy sześć danych warunków, z których można wyznaczyć sześć spółrzednych tego ruchu, jak to innym sposobem okazaliśmy w art. 20-ym.

**43. ANALIZA RUCHU UKŁADU.** Twierdzenia, okazane w tym rozdziale drogą przeważnie syntetyczną, są tak ważne, że uważamy za potrzebne okazać je także sposobem analitycznym, który pozwoli obliczyć przyspieszenie każdego punktu układu niezmiennego.

Obierzmy w dowolnym punkcie  $A$  układ spółrzednych prostokątny o osiach  $Ax$ ,  $Ay$ ,  $Az$ , nieruchomych w przestrzeni, a w dowolnym punkcie  $M$  układu niezmiennego, którego spółrzedne względem tych osi niech będą  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , wystawmy trzy osi prostokątne  $M\xi$ ,  $M\eta$ ,  $M\zeta$  nowego układu spółrzednych, poruszające się razem z naszym układem niezmiennym. Każdy punkt  $m$  układu ma teraz dwojakiego rodzaju spółrzedne, mianowicie spółrzedne zmienne,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , określające chwilowe położenie tego punktu w przestrzeni, i spółrzedne stałe,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , określające położenie tego punktu w układzie. Jeżeli  $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3$  oznaczają dostawy kierunkowe osi odpowiednio  $M\xi$ ,  $M\eta$ ,  $M\zeta$  względem osi  $Ax$ ,  $Ay$ ,  $Az$ , to między nimi zachodzą wiadome związki

$$(1) \quad \begin{cases} a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1, & (i = 1, 2, 3); \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1, & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1; \\ a_1a_k + b_1b_k + c_1c_k = 0, & (i, k = 1, 2, 3); \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0, & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0, & c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = 0, \end{cases}$$

a wyznacznik  $\Sigma \pm a_1b_2c_3$  jest równy  $+1$  lub  $-1$  według tego, czy, po obróceniu jednego z układów tak, iżby dodatnie kierunki dwu jego osi były równoległe do dodatnich kierunków odpowiednich osi drugiego i w tę samą zwrócone strony, dodatnie kierunku osi pozostałych są w tę samą stronę zwrócone, czyteliż w strony przeciwne. Wzory na przejście od jednych z tych spółrzednych do drugich są:

$$(2) \quad \begin{cases} x = X + a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta, \\ y = Y + b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta, \\ z = Z + c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = a_1(x - X) + b_1(y - Y) + c_1(z - Z), \\ \eta = a_2(x - X) + b_2(y - Y) + c_2(z - Z), \\ \zeta = a_3(x - X) + b_3(y - Y) + c_3(z - Z), \end{cases}$$

Aby obliczyć prędkość punktu  $m$ , różniczkujmy równania (2) względem czasu, dla krótkości oznaczając otrzymywane pochodne zapomocą kręsek u góry; składowe więc prędkości punktu  $(x, y, z)$  są:

$$(3) \quad \begin{cases} x' = X' + a_1'\xi + a_2'\eta + a_3'\zeta, \\ y' = Y' + b_1'\xi + b_2'\eta + b_3'\zeta, \\ z' = Z' + c_1'\xi + c_2'\eta + c_3'\zeta. \end{cases}$$

Różniczkujemy ostatnie z równań (1) względem czasu, wprowadzając jednocześnie oznaczenia:

$$(4) \quad \begin{cases} b_1 c'_1 + b_2 c'_2 + b_3 c'_3 = - (b'_1 c_1 + b'_2 c_2 + b'_3 c_3) = \Xi, \\ c_1 a'_1 + c_2 a'_2 + c_3 a'_3 = - (c'_1 a_1 + c'_2 a_2 + c'_3 a_3) = H, \\ a_1 b'_1 + a_2 b'_2 + a_3 b'_3 = - (a'_1 b_1 + a'_2 b_2 + a'_3 b_3) = Z. \end{cases}$$

Podstawiając w równaniach (3) za  $\xi, \eta, \zeta$  ich wyrażenia (2), otrzymujemy

$$(5) \quad \begin{cases} x' = X' - Z(y - Y) + H(z - Z), \\ y' = Y' - \Xi(z - Z) + Z(x - X), \\ z' = Z' - H(x - X) + \Xi(y - Y); \end{cases}$$

gdą jeszcze nazwiemy

$$(6) \quad \begin{cases} ZY - HZ + X' = \Lambda, \\ \Xi Z - ZX + Y' = M, \\ HX - \Xi Y + Z' = N, \end{cases}$$

to mieć będziemy

$$(7) \quad \begin{cases} x' = Hx - Zy + \Lambda, \\ y' = Zx - \Xi z + M, \\ z' = \Xi y - Hx + N, \end{cases}$$

jako najprostsze wyrażenia prędkości punktu  $(x, y, z)$  w kierunkach osi odpowiednio  $Ax, Ay, Az$ . Porównyując te wyrażenia z równaniami (9) art. 31-go, widzimy, że wszystkie punkty układu skreślają się w chwili rozważanej około pewnej osi, oraz że wielkości  $\Xi, H, Z, \Lambda, M, N$ , według wzorów (4) i (6) obliczone, są właśnie współrzędnymi tego skrętu. Te zatem wielkości przedstawiają, według art. 42-go, sześć współrzędnych ruchu układu. Współrzędne  $\Xi, H, Z$  wyznaczają prędkość kątową skrętu i kierunek jego osi. Oznaczając tę prędkość przez  $\Omega$ , mamy:

$$(8) \quad \Omega = \sqrt{\Xi^2 + H^2 + Z^2},$$

Parametr skrętu wynosi

$$(9) \quad x = \Xi\Lambda + HM + ZN = \Xi X' + HY' + ZZ' = \Xi x' + Hy' + Zz',$$

a wskaźnik

$$(10) \quad \lambda = \frac{\Xi X' + HY' + ZZ'}{\Omega^2},$$

prędkość zaś ruchu postępowego skrętu jest

$$(11) \quad V = \frac{\Xi X' + HY' + ZZ'}{\Omega}.$$

Jeżeli  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$  oznaczają współrzędne osi chwilowej ruchu, to (art. 31)

$$(12) \quad a = \frac{\Xi}{\Omega}, \quad b = \frac{H}{\Omega}, \quad c = \frac{Z}{\Omega}, \quad \alpha = \frac{\Lambda - \lambda \Xi}{\Omega}, \quad \beta = \frac{M - \lambda H}{\Omega}, \quad \gamma = \frac{N - \lambda Z}{\Omega}.$$

Równanie  $\kappa = \Xi x' + H y' + Z z'$  wyraża wiadome (art. 39) twierdzenie, że rzut prędkości każdego punktu na oś chwilową ruchu jest wielkością stałą, która, według (11), jest równa prędkości ruchu postępowego skrętu chwilowego.

Ruch chwilowy układu będzie samym tylko obrotem, jeżeli  $\kappa = 0$ , a zatem  $\Xi X' + H Y' + Z Z' = 0$ . Ten przypadek nastąpi albo wtedy, kiedy  $X' = 0$ ,  $Y' = 0$ ,  $Z' = 0$ , t. j. kiedy punkt M jest w spoczynku, albowież wtedy, kiedy dla każdego punktu  $\Xi x' + H y' + Z z' = 0$ , t. j., kiedy wszystkie punkty układu posuwają się równolegle do tej samej płaszczyzny.

Niech  $A_0, B_0, C_0, A_0, B_0, \Gamma_0$  oznaczają współrzędne osi chwilowej względem osi  $M\xi, M\eta, M\zeta$ ; wówczas  $A_0 = a a_1 + b b_1 + c c_1$  i podobnie  $B_0$  i  $C_0$ . Podstawiając zatem wyrażenia (12), otrzymamy

$$(13) \quad \begin{cases} A_0 = \frac{1}{\Omega} (a_1 \Xi + b_1 H + c_1 Z), \\ B_0 = \frac{1}{\Omega} (a_2 \Xi + b_2 H + c_2 Z), \\ C_0 = \frac{1}{\Omega} (a_3 \Xi + b_3 H + c_3 Z). \end{cases}$$

Niech  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  oznaczają odpowiednio momenty osi  $M\xi$  względem osi  $Ax, Ay, Az$ ; wtedy  $\alpha_1 = c_1 Y - b_1 Z$ ,  $\beta_1 = a_1 Z - c_1 X$ ,  $\gamma_1 = b_1 X - a_1 Y$ . A ponieważ, jak wiadomo (art. 33),

$$A_0 = a \alpha_1 + b \beta_1 + c \gamma_1 + \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1,$$

przeto otrzymamy

$$(14) \quad \begin{cases} A_0 = \frac{1}{\Omega} [a_1(X' - \lambda \Xi) + b_1(Y' - \lambda H) + c_1(Z' - \lambda Z)], \text{ i podobnie} \\ B_0 = \frac{1}{\Omega} [a_2(X' - \lambda \Xi) + b_2(Y' - \lambda H) + c_2(Z' - \lambda Z)], \\ \Gamma_0 = \frac{1}{\Omega} [a_3(X' - \lambda \Xi) + b_3(Y' - \lambda H) + c_3(Z' - \lambda Z)]. \end{cases}$$

Równania (12) wyznaczają położenie osi chwilowej w przestrzeni, równania zaś (13) i (14) wyznaczają jej położenie w poruszającym się układzie. Wyrażając równania tej osi we współrzędnych prostokątnych  $x, y, z$  według (12), oraz rugując z otrzymanych dwu równań czas  $t$ , otrzymamy równanie powierzchni centralnej w przestrzeni. Postępując zaś podobnie z równaniami (13) i (14) co do współrzędnych  $\xi, \eta, \zeta$ , otrzymamy, po wyrugowaniu czasu, równanie powierzchni centralnej w układzie.

Niech  $v_\xi, v_\eta, v_\zeta$  oznaczają składowe prędkości punktu  $(\xi, \eta, \zeta)$ , wzięte w kierunkach osi ruchomych odpowiednio  $M\xi, M\eta, M\zeta$ ; wówczas

$$\begin{aligned} v_\xi &= a_1 x' + b_1 y' + c_1 z', \\ v_\eta &= a_2 x' + b_2 y' + c_2 z', \\ v_\zeta &= a_3 x' + b_3 y' + c_3 z', \end{aligned}$$

Jeżeli podstawimy wyrażenia (3) na  $x', y', z'$  i nazwiemy

$$(15) \quad \begin{cases} a_3 a'_{12} + b_3 b'_{12} + c_3 c'_{12} = -(a_2 a'_{13} + b_2 b'_{13} + c_2 c'_{13}) = p, \\ a_1 a'_{13} + b_1 b'_{13} + c_1 c'_{13} = -(a_3 a'_{11} + b_3 b'_{11} + c_3 c'_{11}) = q, \\ a_2 a'_{11} + b_2 b'_{11} + c_2 c'_{11} = -(a_1 a'_{12} + b_1 b'_{12} + c_1 c'_{12}) = r, \end{cases}$$

to otrzymamy

$$(16) \quad \begin{cases} v_\xi = q\zeta - r\eta + V_\xi, \\ v_\eta = r\xi - p\zeta + V_\eta, \\ v_\zeta = p\eta - q\xi + V_\zeta, \end{cases}$$

gdzie  $V_\xi, V_\eta, V_\zeta$  oznaczają rzuty prędkości punktu  $M$  na osi  $M\xi, M\eta, M\zeta$ . Z tych wyrażeń widzimy, że wielkości  $p, q, r$  przedstawiają rzuty prędkości kątownej skrętu chwilowego na osi współrzędnych odpowiednio  $M\xi, M\eta, M\zeta$ , poruszające się razem z układem, podobnie jak  $\Xi, H, Z$  są rzutami téjże samej prędkości na osi nieruchome  $Ax, Ay, Az$ . Z tych rzutów możemy obliczyć współrzędne osi skrętu chwilowego względem osi  $M\xi, M\eta, M\zeta$ , zważając, że

$$(17) \quad \Omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2},$$

$$(18) \quad \kappa = pV_\xi + qV_\eta + rV_\zeta, \quad \lambda = \frac{p \cdot V_\xi + q \cdot V_\eta + r \cdot V_\zeta}{\Omega^2}, \quad V = \frac{p \cdot V_\xi + q \cdot V_\eta + r \cdot V_\zeta}{\Omega}.$$

Wyrażając prędkości  $x', y', z'$  przez  $v_\xi, v_\eta, v_\zeta$ , mieć będziemy

$$\begin{aligned} x' &= a_1 v_\xi + a_2 v_\eta + a_3 v_\zeta, \\ y' &= b_1 v_\xi + b_2 v_\eta + b_3 v_\zeta, \\ z' &= c_1 v_\xi + c_2 v_\eta + c_3 v_\zeta, \end{aligned}$$

a jeżeli tu wstawimy wyrażenia (16), to wypadnie

$$(19) \quad \begin{cases} x' = X' + \xi(a_2 r - a_3 q) + \eta(a_3 p - a_1 r) + \zeta(a_1 q - a_2 p), \\ y' = Y' + \xi(b_2 r - b_3 q) + \eta(b_3 p - b_1 r) + \zeta(b_1 q - b_2 p), \\ z' = Z' + \xi(c_2 r - c_3 q) + \eta(c_3 p - c_1 r) + \zeta(c_1 q - c_2 p). \end{cases}$$

Z porównania tych wzorów z równaniami (3) otrzymamy następujące wyrażenia pochodnych dostaw kierunkowych osi  $M\xi, M\eta, M\zeta$ :

$$(20) \quad \begin{cases} a'_1 = a_2 r - a_3 q, & b'_1 = b_2 r - b_3 q, & c'_1 = c_2 r - c_3 q, \\ a'_2 = a_3 p - a_1 r, & b'_2 = b_3 p - b_1 r, & c'_2 = c_3 p - c_1 r, \\ a'_3 = a_1 q - a_2 p, & b'_3 = b_1 q - b_2 p, & c'_3 = c_1 q - c_2 p. \end{cases}$$

**44.** Obliczmy przyspieszenie dowolnego punktu układu. W tym celu obierzmy dowolny punkt  $(X_0, Y_0, Z_0)$  na osi chwilowej; wtedy

$$\alpha = cY_0 - bZ_0, \quad \beta = aZ_0 - cX_0, \quad \gamma = bX_0 - aY_0.$$

A ponieważ, według równań (1) art. 36-go, mamy

$$\Lambda = \alpha\Omega + a\dot{V}, \quad M = \beta\Omega + b\dot{V}, \quad N = \gamma\Omega + c\dot{V},$$

przeto otrzymamy

$$(1) \quad \begin{cases} \Lambda = (c Y_0 - b Z_0) \Omega + a V, \\ M = (a Z_0 - c X_0) \Omega + b V, \\ N = (b X_0 - a Y_0) \Omega + c V. \end{cases}$$

Rzuty zatem prędkości dowolnego punktu  $(x, y, z)$  będą

$$(2) \quad \begin{cases} x' = [b(z - Z_0) - c(y - Y_0)] \cdot \Omega + a V, \\ y' = [c(x - X_0) - a(z - Z_0)] \cdot \Omega + b V, \\ z' = [a(y - Y_0) - b(x - X_0)] \cdot \Omega + c V. \end{cases}$$

Aby otrzymać składowe  $x'', y'', z''$  przyspieszenia punktu  $(x, y, z)$ , różniczkujemy te równania względem czasu i wprowadzmy  $v = a(X_0 - x) + b(Y_0 - y) + c(Z_0 - z)$ ; otrzymamy

$$(3) \quad \begin{aligned} x'' &= [b(z - Z_0) - c(y - Y_0)] \Omega' - [a v + (x - X_0)] \Omega^2 + \\ &\quad + [b'(z - Z_0) - c'(y - Y_0) + c Y'_0 - b Z'_0] \Omega + (a V)', \\ y'' &= [c(x - X_0) - a(z - Z_0)] \Omega' - [b v + (y - Y_0)] \Omega^2 + \\ &\quad + [c'(x - X_0) - a'(z - Z_0) + a Z'_0 - c X'_0] \Omega + (b V)', \\ z'' &= [a(y - Y_0) - b(x - X_0)] \Omega' - [c v + (z - Z_0)] \Omega^2 + \\ &\quad + [a'(y - Y_0) - b'(x - X_0) + b X'_0 - a Y'_0] \Omega + (c V)'. \end{aligned}$$

Obierzmy oś chwilową  $S$  (fig. 20) w kierunku prędkości  $V$  ruchu postępowego jako dodatnią oś  $z$ -ów; punkt  $\Sigma$ , w którym krzywa zwężenia powierzchni  $[S]$  przecina prostą  $S'$ , niech będzie początkiem układu współrzędnych, a najkrótsza odległość  $\Sigma\sigma'$  dwu sąsiednich osi chwilowych  $S$  i  $S'$  niech będzie osią  $x$ -ów; na koniec niech punkt  $\Sigma$  będzie punktem  $(X_0, Y_0, Z_0)$ . Wtedy

$$\begin{aligned} X_0 &= 0, & Y_0 &= 0, & Z_0 &= 0, \\ a &= 0, & b &= 0, & c &= 1. \end{aligned}$$

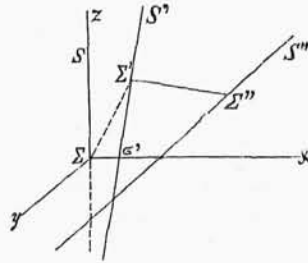


Fig. 20.

Dostawmy kierunkowe sąsiedniej osi chwilowej  $S'$  są  $a + a' \cdot dt$ ,  $b + b' \cdot dt$ ,  $c + c' \cdot dt$ , a współrzędne punktu  $\Sigma'$ , w którym krzywa zwężenia przecina prostą  $S'$ , są:  $X_0 + X'_0 \cdot dt$ ,  $Y_0 + Y'_0 \cdot dt$ ,  $Z_0 + Z'_0 \cdot dt$ . Oznaczmy przez  $d\delta$  najkrótszą odległość  $\Sigma\sigma'$  prostych  $S$  i  $S'$ , a przez  $d\varepsilon$  kąt, między tymi prostymi zawarty. Z uwagi, że element  $\Sigma\Sigma' = ds$  krzywój zwężenia tworzy z osią  $x$ -ów kąt  $\Sigma'\Sigma\sigma' = \varphi$ , mamy:  $a + a' \cdot dt = 0$ , a zatem  $a' = 0$ ;  $b + b' \cdot dt = \sin d\varepsilon = d\varepsilon$  a więc  $b' = \frac{d\varepsilon}{dt}$ ;  $c + c' \cdot dt = \cos d\varepsilon = 1$ , przeto  $c' = 0$  — skoro opuszczamy nieskończenie małe względem  $dt$ . Wskutek tego:  $X_0 + X'_0 \cdot dt = d\delta$ , a zatem  $X'_0 = \frac{d\delta}{dt}$ ; z trójkąta zaś nieskończenie małego  $\Sigma'\Sigma\sigma'$ , prostokątnego przy  $\sigma'$ , wynika  $Y_0 + Y'_0 \cdot dt = \sigma'\Sigma' \cdot \sin d\varepsilon = ds \cdot d\varepsilon \sin \varphi$ , ale  $Y_0 = 0$ , przeto wielkość  $Y'_0 \cdot dt$  jest nieskończenie małą względem  $dt$ ; należy ją opuścić;

nakoniec:  $Z_0 + Z'_0 \cdot dt = \sigma' \Sigma' \cdot \cos d\varepsilon$ , a gdy  $\sigma' \Sigma' = d\delta \cdot \tan \varphi$ , przeto  $Z'_0 = \frac{d\delta}{dt} \cdot \tan \varphi$ . Prócz tego mamy  $v = -z$ . Podstawiając te wartości w równania (2) i (3), otrzymamy:

$$(4) \quad x' = -\Omega y, \quad y' = \Omega x, \quad z' = V,$$

$$(5) \quad \begin{cases} x'' = -\Omega^2 x - \Omega y + \Omega \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} z, \\ y'' = \Omega^2 x - \Omega^2 y - \Omega \cdot \frac{d\delta}{dt} + V \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}, \\ z'' = -\Omega \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \cdot x + V', \end{cases}$$

jako najprostsze wyrażenia składowych prędkości i składowych przyspieszenia punktu  $(x, y, z)$ , jeżeli miejsce tego punktu w danej chwili wyznaczamy względem powyższego układu osi współrzędnych.

Wyrażając w równaniach (2) art. 43-go współczynniki  $a_i, b_i, c_i$ , tudzież wielkości  $X, Y, Z$ , jako funkcje czasu i następnie rugując czas z tych trzech równań, otrzymamy równania toru dowolnego punktu układu. Równania (4) i (5) pozwalają wyznaczyć wszystkie cechy geometryczne tego toru. Równanie płaszczyzny ściśle stycznej do toru punktu  $(x, y, z)$  jest

$$(6) \quad (y'z'' - z'y'')(x_p - x) + (z'x'' - x'z'')(y_p - y) + (x'y'' - y'x'')(z_p - z) = 0,$$

gdzie  $x_p, y_p, z_p$  są współrzędnymi dowolnego punktu tej płaszczyzny, a krzywizna toru wyrazi się wzorem

$$(7) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{[(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2]^{\frac{1}{2}}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

**45. WARUNKI, OKRĘSLAJĄCE RUCH UKŁADU.** Okazaliśmy, że ruch chwilowy układu jest wiadomy, jeżeli jest znanych sześć współrzędnych tego ruchu, które przez tyleż warunków określone być mogą (art. 42). Aby bliżej rozpoznać te warunki, obierzmy trzy punkty  $m_i$ , gdzie  $i = 1, 2, 3$ , i oznaczmy współrzędne prostokątne każdego przez  $x_i, y_i, z_i$ . Znając prędkość punktu  $m_1$ , znamy tym samym wartości pochodnych  $x'_1, y'_1, z'_1$ ; prędkość drugiego punktu  $m_2$  nie jest bezwzględnie dowolna, gdyż pochodne  $x'_2, y'_2, z'_2$  zadość czynią równaniu  $(x'_2 - x'_1)(x_2 - x_1) + (y'_2 - y'_1)(y_2 - y_1) + (z'_2 - z'_1)(z_2 - z_1) = 0$ , wyrażającemu warunek, iż długość prostej  $m_1 m_2$  nie zmienia się podczas ruchu. Możemy jednak obrać dowolnie stosunki  $x'_2 : y'_2 : z'_2$  między tymi pochodnymi, czyli kierunek prędkości punktu  $m_2$ , a wtedy z równań (5) art. 43-go otrzymamy stosunki  $\Xi : H : Z$ . Pozostały punkt  $m_3$  możemy jeszcze poddać warunkowi  $A_3 x'_3 + B_3 y'_3 + C_3 z'_3 = 0$ , gdzie  $A_3, B_3, C_3$  oznaczają liczby wiadome, wyrażającemu, że prędkość tego punktu jest równoległa do płaszczyzny  $A_3 x + B_3 y + C_3 z = 0$ . Tym sposobem otrzymamy sześć warunków, pozwalających wyznaczyć sześć współrzędnych ruchu układu. A zatym *ruch chwilowy układu niezmiennego jest zupełnie określony ze względu na przestrzeń i na czas,*

jeżeli wiadome są: prędkość jednego punktu, kierunek prędkości drugiego punktu, oraz płaszczyzna, do której prędkość trzeciego punktu ma być równoległa. Te trzy punkty nie powinny leżeć na jednej prostej.

Aby określić ruch ciągły układu, należy mieć równania ruchu punktu  $m_1$ , które w każdej chwili dają jego prędkość, tudzież tor punktu  $m_2$ , który wyznacza kierunek prędkości tego punktu. W równaniu warunkowym  $A_3x'_3 + B_3y'_3 + C_3z'_3 = 0$  dla punktu  $m_3$  będą współczynniki  $A_3, B_3, C_3$  wogólności wielkościami zmiennymi, a wtedy kierunek prędkości tego punktu będzie w każdej chwili równoległy do coraz innej płaszczyzny. Ten ostatni warunek możemy geometrycznie tak wyrazić: punkt  $m_3$  ma się poruszać na pewnej powierzchni danej, która w każdym miejscu ogranicza jego ruch o tyle, iż nieskończenie małe przesunięcie punktu z tego miejsca przypada na płaszczyznę styczną do tej powierzchni, a zresztą kierunek jego ruchu pozostaje dowolnym. Tę powierzchnią, na której punkt porusza się, zakreślając zresztą dowolny tor na tej powierzchni, nazwiemy powierzchnią toru punktu tego. Mamy więc twierdzenie: *ruch ciągły układu niezmiennego jest zupełnie określony ze względu na przestrzeń i na czas, jeżeli znane są równania ruchu jednego punktu, tor drugiego punktu i powierzchnia toru trzeciego punktu. Te trzy punkty nie powinny leżeć na jednej prostej.*

Z powyższych danych można, według art. 43-go, obliczyć współrzędne ruchu układu. Założmy, że  $x'_2 : y'_2 : z'_2 = p_2 : q_2 : r_2$ , gdzie  $p_2, q_2, r_2$  są liczbami danymi, i wprowadźmy:

$$(1) \quad \begin{cases} x_{21} = x_2 - x_1, & y_{21} = y_2 - y_1, & z_{21} = z_2 - z_1; \\ x_{31} = x_3 - x_1, & y_{31} = y_3 - y_1, & z_{31} = z_3 - z_1; \\ \alpha_{21} = p_2 x_{21} + q_2 y_{21} + r_2 z_{21}, & \beta_{21} = x'_1 x_{21} + y'_1 y_{21} + z'_1 z_{21}, \\ & \alpha = A_3 p_2 + B_3 q_2 + C_3 r_2, \\ \alpha_{31} = p_2 x_{31} + q_2 y_{31} + r_2 z_{31}, & \beta_{31} = x'_1 x_{31} + y'_1 y_{31} + z'_1 z_{31}, \\ & \beta = A_3 x'_1 + B_3 y'_1 + C_3 z'_1; \end{cases}$$

$$D = A_3(y_{21}z_{31} - y_{31}z_{21}) + B_3(z_{21}x_{31} - z_{31}x_{21}) + C_3(x_{21}y_{31} - x_{31}y_{21}).$$

Dla obliczenia współrzędnych  $\Xi, H, Z, \Lambda, M, N$  ruchu chwilowego utworzymy, według równań (4)—(7) art. 43-go, następujące równania:

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha_{21} D \cdot \Xi = \alpha_{21} \beta (x_3 - x_2) - \beta_{21} \alpha \cdot x_{31} + A_3(\alpha_{31} \beta_{21} - \alpha_{21} \cdot \beta_{31}), \\ \alpha_{21} D \cdot H = \alpha_{21} \beta (y_3 - y_2) - \beta_{21} \alpha \cdot y_{31} + B_3(\alpha_{31} \beta_{21} - \alpha_{21} \cdot \beta_{31}), \\ \alpha_{21} D \cdot Z = \alpha_{21} \beta (z_3 - z_2) - \beta_{21} \alpha \cdot z_{31} + C_3(\alpha_{31} \beta_{21} - \alpha_{21} \cdot \beta_{31}), \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha_{21} D \cdot \Lambda = (\alpha_{21} \beta - \beta_{21} \alpha)(z_3 y_1 - z_1 y_3) - \alpha_{21} \beta (z_2 y_1 - z_1 y_2) + \\ + (\alpha_{31} \beta_{21} - \alpha_{21} \beta_{31})(C_3 y_1 - B_3 z_1) + \alpha_{21} D x'_1, \\ \alpha_{21} D \cdot M = (\alpha_{21} \beta - \beta_{21} \alpha)(x_3 z_1 - x_1 z_3) - \alpha_{21} \beta (x_2 z_1 - x_1 z_2) + \\ + (\alpha_{31} \beta_{21} - \alpha_{21} \beta_{31})(A_3 z_1 - C_3 x_1) + \alpha_{21} D y'_1, \\ \alpha_{21} D \cdot N = (\alpha_{21} \beta - \beta_{21} \alpha)(y_3 x_1 - y_1 x_3) - \alpha_{21} \beta (y_2 x_1 - y_1 x_2) + \\ + (\alpha_{31} \beta_{21} - \alpha_{21} \beta_{31})(B_3 x_1 - A_3 y_1) + \alpha_{21} D z'_1. \end{cases}$$

Jeżeli wszystkie trzy punkty  $m_i$  poruszają się równolegle do płaszczyzny

$A_3x + B_3y + C_3z = 0$ , to wtedy  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ; otrzymamy wskutek tego  $\Xi : H : Z = A_3 : B_3 : C_3$ , co oznacza, że oś chwilowa jest prostopadła do tej płaszczyzny. Z równań nadto (2) i (3) wynika w tym przypadku  $\Xi\Lambda + HM + ZN = 0$ , t. j., że ruch chwilowy układu jest obrotem. *Jeżeli trzy punkty układu, nie leżące na jednej prostej, posuwają się równolegle do téjże samej płaszczyzny, to ruch chwilowy układu jest obrotem około osi, prostopadłej do tej płaszczyzny, a zatem każdy punkt układu porusza się równolegle do téjże płaszczyzny.*

**46. RUCH LINII PROSTEJ.** Niech prosta o spółrzednych  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$  wykonywa skręt chwilowy o spółrzednych  $\Xi, H, Z, \Lambda, M, N$ : wyznaczmy przyrosty spółrzednych tej prostej. W tym celu zważmy, że prosta przyjmuje inny kierunek tylko wskutek obrotu i że dwie proste równoległe pozostają równoległymi po obrocie o tenże sam kąt około téjże samej osi. Poprowadźmy zatem przez początek osi spółrzednych prostą, równoległą do danej prostej, i obróćmy tę równoległą około osi spółrzednych z prędkościami kątowymi odpowiednio  $\Xi, H, Z$ . Gdy na tej równoległej obierzemy punkt o spółrzednych  $a, b, c$ , którego odległość od początku będzie równa jednostce, to otrzymamy, według równań (2) art. 24-go,

$$(1) \quad da = (Hc - Zb) \cdot dt, \quad db = (Za - \Xi c) \cdot dt, \quad dc = (\Xi b - Ha) \cdot dt.$$

Obierzmy na danej prostej punkt  $(x, y, z)$ , wyrażmy momenty  $\alpha, \beta, \gamma$  zapomocą  $a, b, c, x, y, z$  (art. 33), weźmy ich różniczki względem czasu i wyrażmy  $da, db, dc, dx, dy, dz$  według (1) oraz według wzorów (9) art. 31-go; mieć będziemy

$$(2) \quad \begin{cases} d\alpha = (H\gamma - Z\beta + Mc - Nb)dt, \\ d\beta = (Z\alpha - \Xi\gamma + Na - \Lambda c)dt, \\ d\gamma = (\Xi\beta - H\alpha + \Lambda b - Ma)dt. \end{cases}$$

Obliczmy następnie według równań (9) art. 31-go przesunięcia  $dx, dy, dz$  punktu  $(x, y, z)$  tej prostej wskutek skrętu, pomnóżmy te przesunięcia odpowiednio przez  $a, b, c$  i dodajmy iloczyny; otrzymamy

$$(3) \quad a \cdot dx + b \cdot dy + c \cdot dz = (a\Lambda + bM + cN + \alpha\Xi + \beta H + \gamma Z)dt.$$

Ponieważ lewa strona tego równania przedstawia rzut przesunięcia punktu  $(x, y, z)$  prostej na tęż prostą, a strona prawa nie zawiera spółrzednych punktu, przeto możemy wypowiedzieć twierdzenie: *rzut nieskończonego małego przesunięcia każdego punktu poruszającej się prostej na tęż prostą jest stały.* Jeżeli przeto dla jednego punktu prostej rzut przesunięcia będzie równy zeru, to toż samo zajdzie dla każdego innego punktu prostej, t. j. *jeżeli poruszająca się prosta jest prostopadła do toru jednego ze swych punktów, to jest prostopadła do torów wszystkich swoich punktów.*

Równanie płaszczyzny  $P_1$ , poprowadzonej przez punkt  $(x_1, y_1, z_1)$  tej prostej, a normalnej do jego toru, jest

$$P_1 \equiv (Hz_1 - Zy_1 + \Lambda)(X - x_1) + (Zx_1 - \Xi z_1 + M)(Y - y_1) + (\Xi y_1 - Hx_1 + N)(Z - z_1) = 0,$$

czyli

$$(4) \quad P_1 \equiv (H z_1 - Z y_1 + \Lambda) X + (Z x_1 - \Xi z_1 + M) Y + \\ + (\Xi y_1 - H x_1 + N) Z - (\Lambda x_1 + M y_1 + N z_1) = 0;$$

podobnie, równanie płaszczyzny  $P_2$ , przesuniętej przez drugi punkt  $(x_2, y_2, z_2)$  téjże prostej, a normalnej do toru tego punktu, jest

$$(5) \quad P_2 \equiv (H z_2 - Z y_2 + \Lambda) X + (Z x_2 - \Xi z_2 + M) Y + \\ + (\Xi y_2 - H x_2 + N) Z - (\Lambda x_2 + M y_2 + N z_2) = 0,$$

Spółrzędne zaś punktu dowolnego  $(x, y, z)$  na téj prostej możemy, jak wiadomo, wyrazić linijowo zapomocą spółrzędnych powyższych dwu punktów, kładąc

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad z = \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

gdzie  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  oznaczają spółczynniki zmienne. Wystawmy w punkcie  $(x, y, z)$  płaszczyznę  $P$ , normalną do jego toru; z równań (4) i (5) wynika równanie téj płaszczyzny,

$$(6) \quad P \equiv \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0,$$

które wyraża twierdzenie następujące: *płaszczyzny normalne do jednoczesnych torów wszystkich punktów poruszających się prostą przecinają się podług pewnej prostej*. Niech  $L$  oznacza daną prostą, a  $l$  tę prostą, podług której przecinają się płaszczyzny  $P$ ; wówczas z podanego twierdzenia wynika, jako wniosek, że prosta  $L$  może być przywiedziona do położenia nieskończenie bliskiego przez obrót chwilowy około prostej  $l$ .

Rozważajmy poruszającą się prostą w dwu położeniach sąsiednich  $L$  i  $L'$ . Prosta, łącząca dwa sąsiednie położenia  $m$  i  $m'$  dowolnego punktu téj prostej, jest styczna do toru tego punktu. Ponieważ każda taka styczna przecina obie proste  $L$  i  $L'$  i, według ostatniego twierdzenia, jest równoległa do płaszczyzny, prostopadłej do prostej  $l$  (płaszczyzny obrotu), przeto otrzymujemy nowe twierdzenie: *jednoczesne styczne do torów, opisywanych przez punkty poruszającą się prostą, są tworzącymi paraboloidy hiperbolicznej*. Proste  $L$  i  $L'$  są także tworzącymi téj paraboloidy; nie należą jednak do tego układu tworzących, który stanowią styczne do torów, opisywanych przez punkty prostej  $L$ . Jedna z płaszczyzn asymptotycznych téj paraboloidy jest równoległa do płaszczyzny obrotu około prostej  $l$ , a druga do  $L$  i  $L'$ ; wierzchołkiem paraboloidy jest punkt, w którym najkrótsza odległość prostych  $L$  i  $L'$  przecina prostą  $L$ .

**47. RUCH PŁASZCZYZNY I RUCH POWIERZCHNI.** Niech płaszczyzna  $P$  wykonywa ruch chwilowy i niech wskutek tego ruchu przyjmie położenie  $P'$ . Jeżeli te obadwa położenia płaszczyzny przecinają się podług prostej  $\pi'$ , to na płaszczyźnie  $P$  znajduje się pewna prosta  $\pi$ , która wskutek ruchu chwilowego zajęła położenie prostej  $\pi'$ , z czego się okazuje, że prosta  $\pi$  posuwała się na płaszczyźnie  $P$  podczas ruchu chwilowego téj płaszczyzny. Obierzmy na pro-

stój  $\pi$  dwa punkty  $a$  i  $b$ , które wskutek danego ruchu zajmą na prostej  $\pi'$  położenia odpowiednio  $a'$  i  $b'$ , wystawmy w punkcie  $a$  płaszczyznę normalną do  $aa'$ , a w punkcie  $b$  płaszczyznę normalną do  $bb'$ ; obie płaszczyzny przetną się podług pewnej prostej  $O$ , która jest prostopadła do płaszczyzny  $P$  i przecina tę płaszczyznę w pewnym punkcie  $p$ . Obróćmy tak płaszczyznę  $P$  około prostej  $O$ , żeby prosta  $\pi$  razem się zeszła z prostą  $\pi'$ , a następnie obróćmy tę płaszczyznę około prostej  $\pi'$ ; wówczas dana płaszczyzna przyjmie położenie  $P'$ .

Prostą  $\pi'$  podług której przecinają się z sobą dwa nieskończenie bliskie położenia płaszczyzny  $P$ , nazywamy charakterystyką płaszczyzny  $P$ , a punkt  $p$ , w którym prosta  $O$  przecina płaszczyznę  $P$ , nazywamy ogniskiem płaszczyzny  $P$ , odpowiednio do ruchu chwilowego, jaki tej płaszczyźnie został udzielony. Ruch chwilowy płaszczyzny może więc być wywołany przez obrót około charakterystyki razem z obrotem około prostej, wystawionej w ognisku prostopadłe do płaszczyzny. Ponieważ ognisko płaszczyzny bierze udział tylko w obrocie około charakterystyki, a jego tor wskutek tego obrotu jest prostopadły do płaszczyzny, przeto widzimy, że *ognisko jest w ogólności jedynym punktem na poruszającej się płaszczyźnie, którego tor jest normalny do płaszczyzny*.

Obierzmy na płaszczyźnie  $P$  dowolny punkt  $m$ ; wskutek obrotu około  $\pi'$  element toru tego punktu,  $mp$ , jest prostopadły do  $P$ , a wskutek następującego obrotu około  $O$  element toru,  $pm'$ , jest prostopadły do  $O$ , a punkt  $m$  zajmie położenie  $m'$  na płaszczyźnie  $P'$ . Ponieważ prosta  $mp$ , łącząca punkt  $m$  z ogniskiem  $p$ , jest prostopadła do torów  $mp$  i  $pm'$ , przeto ona jest także prostopadła do toru wypadkowego  $mm'$  tego punktu. Z tego wynika, że płaszczyzna normalna do toru  $mm'$  punktu  $m$ , wystawiona w punkcie  $m$ , przechodzi przez prostą  $mp$ , a zatem także przez ognisko  $p$ , t. j. *płaszczyzny, normalne do jednoczesnych torów wszystkich punktów poruszającej się płaszczyzny, przecinają się w ognisku tej płaszczyzny*. Dana płaszczyzna jest normalna do toru swego ogniska. —

Niech powierzchnia  $F$  wykonywa ruch chwilowy. Przesuńmy przez każdy punkt tej powierzchni płaszczyznę normalną do elementu toru tego punktu; obwiednią tych płaszczyzn będzie pewna powierzchnia  $f$ . Niech  $F$  będzie powierzchnią algebriczną rzędu  $n$ -go; prosta dowolna  $L$  przecina tę powierzchnię co najwyżej w  $n$  punktach; płaszczyzny normalne do torów tych punktów przecinają się podług pewnej prostej  $l$  (art. 46), a każda z tych płaszczyzn jest styczna do powierzchni  $f$ . Z tego wynika, że przez prostą dowolną  $l$  można do powierzchni  $f$  poprowadzić co najwyżej  $n$  płaszczyzn stycznych. Mamy więc twierdzenie: *płaszczyzny normalne do torów wszystkich punktów poruszającej się powierzchni algebricznej rzędu  $n$ -go są styczne do pewnej powierzchni algebricznej klasy  $n$ -ej*. Takie dwie powierzchnie, jak  $F$  i  $f$ , nazywamy powierzchniami wzajemnymi względem danego ruchu. Proste  $L$  i  $l$  (art. 46), tudzież płaszczyzna  $P$  i jej ognisko  $p$ , są w tym znaczeniu wzajemne względem ruchu chwilowego.

Nawzajem, płaszczyzny normalne do torów, które przy danym ruchu chwilowym opisują punkty powierzchni  $f$ , są styczne do powierzchni  $F$ . Krańcowym bowiem położeniem płaszczyzny  $P$ , przechodzącej przez trzy nieskończenie bliskie punkty  $m_1, m_2, m_3$  powierzchni  $F$ , jest płaszczyzna styczna do  $F$  w punkcie  $m_1$ . Płaszczyzny normalne do torów punktów  $m_1, m_2, m_3$  przecinają się w ognisku  $p$  płaszczyzny  $P$ , a krańcowym położeniem tego ogniska jest punkt, odpowiadający płaszczyźnie  $P$  na powierzchni  $f$ . Ponieważ płaszczyzna  $P$  jest normalna do toru punktu  $p$ , przeto płaszczyzny normalne do torów, które opisują punkty powierzchni  $f$ , są styczne do powierzchni  $F$ .

Widzimy zatem, że każda z dwu powierzchni wzajemnych względem ruchu chwilowego jest miejscem geometrycznym ognisk, odpowiadających płaszczyznom, stycznym do pozostałej, lub obwiednią płaszczyzn, których ogniska leżą na tej pozostałej powierzchni. Ruch więc chwilowy wywołuje między figurami geometrycznymi zależność podobną do takiej, jaką w geometrii wprowadza metoda biegunowych wzajemnych.

## PRZYKŁADY I ĆWICZENIA.

(1). Punkt  $m_1$  (fig. 21) porusza się jednostajnie z prędkością  $v_1$  po osi  $x$ -ów; punkt  $m_2$  porusza się wzdłuż osi  $y$ -ów; punkt  $m_3$  porusza się na płaszczyźnie  $yAz$ ; mamy wyznaczyć ruch układu niezmiennego, który wyznaczają powyższe trzy punkty. Jeżeli  $a_1 = m_2m_3$ ,  $a_2 = m_3m_1$ ,  $a_3 = m_1m_2$  oznaczają boki, a  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  przeciwległe tym bokom kąty trójkąta  $m_1m_2m_3$ , początek zaś osi  $A$  jest położeniem początkowym (dla  $t=0$ ) punktu  $m_1$ , to mamy dla  $t=0$

$$(1) \quad \begin{aligned} x_1=0, \quad y_1=0, \quad z_1=0; \quad x_2=0, \quad y_2=a_3, \\ z_2=0; \quad x_3=0, \quad y_3=a_2 \cos \alpha_1, \quad z_3=a_2 \sin \alpha_1. \end{aligned}$$

Podczas ruchu, gdy użyjemy znakowania art. 45-go, mieć będziemy

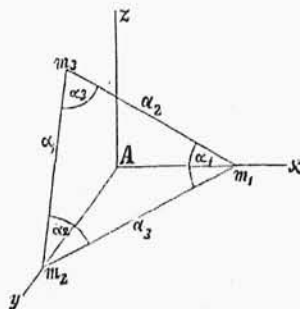


Fig. 21.

$$\begin{aligned} x_1=v_1t, \quad y_1=0, \quad z_1=0; \quad x'_1=v_1, \quad y'_1=0, \quad z'_1=0; \\ x_2=0, \quad z_2=0; \quad x'_2=0, \quad z'_2=0; \quad p_2=0, \quad q_2=1, \quad r_2=0; \\ x_3=0; \quad A_3=1, \quad B_3=0, \quad C_3=0. \end{aligned}$$

Spółrzędne ruchu chwilowego będą, według art. 45-go,

$$(2) \quad \begin{aligned} \Xi &= -v_1^2 t \cdot \frac{y_3 - y_2}{y_2^2 z_3}, & H &= v_1 \cdot \frac{y_3 - y_2}{y_2 z_3}, & Z &= \frac{v_1}{y_2}, \\ \Lambda &= v_1, & M &= -\frac{v_1^2 t}{y_2}, & N &= v_1^2 t \cdot \frac{y_3 - y_2}{y_2 z_3}, \end{aligned}$$

z czego wynika wyrażenie parametru

$$(3) \quad \kappa = -v_1^3 t \cdot \frac{y_3 - y_2}{y_2^2 z_3}.$$

Ruch więc chwilowy jest skretem, ponieważ  $\kappa$  nie jest równe zero. Oznaczając przez  $y'_2$ ,  $y'_3$ ,  $z'_3$  odpowiednie składowe prędkości punktów  $m_2$  i  $m_3$ , według równania (7) art. 43-go mamy naprzód

$$y'_2 = -\frac{v_1^2 t}{y_2}, \quad \text{czyli} \quad y_2 \cdot dy_2 = -v_1^2 t \cdot dt.$$

Całkując to równanie i uwzględniając warunki (1), otrzymamy

$$(4) \quad y_2 = \sqrt{a_3^2 - v_1^2 t^2},$$

jako równanie ruchu punktu  $m_2$  na osi  $y$ -ów. Następnie mieć będziemy

$$y'_3 = \frac{v_1^2 t}{y_2^2} (y_3 - 2y_2), \quad z'_3 = -\frac{v_1^2 t (y_3 - y_2)^2}{y_2^2 z_3}.$$

Pierwsze równanie daje, po wstawieniu wartości na  $y_2$ , równanie

$$dy_3 \sqrt{a_3^2 - v_1^2 t^2} - y_3 \cdot \frac{v_1^2 t \cdot dt}{\sqrt{a_3^2 - v_1^2 t^2}} = -2v_1^2 t \cdot dt;$$

całkując je i przytym uwzględniając równania (1), otrzymamy

$$(5) \quad y_3 = \frac{a_2 a_3 \cos \alpha_1 - v_1^2 t^2}{\sqrt{a_3^2 - v_1^2 t^2}}.$$

Podstawiawszy zaś  $y_2$  i  $y_3$  w  $z'_3$ , otrzymamy po scałkowaniu

$$(6) \quad z_3 = a_1 \cdot \sqrt{\frac{a_3^2 \sin^2 \alpha_2 - v_1^2 t^2}{a_3^2 - v_1^2 t^2}}.$$

Rugując czas  $t$  z równań (5) i (6) i kładąc  $a = a_3 \sin^2 \alpha_2 - a_2 \cos \alpha_1$ , otrzymamy równanie toru ( $m_3$ ) punktu  $m_3$  na płaszczyźnie  $yAz$ ,

$$(7) \quad (a a_1 - z_3^2 \cos \alpha_2)^2 - (a_1^2 - z_3^2) y_3^2 \cdot \cos^2 \alpha_2 = 0.$$

Z tego równania okazuje się, że punkt  $m_3$  opisuje krzywą rzędu 4-go, której środkiem jest punkt  $A$ , a której osiami symetrii są osi  $Ay$  i  $Az$ . Wyrażenia na  $y'_3$  i  $z'_3$  pozwalają w każdej chwili obliczyć prędkość ruchu tego punktu. Pierwsze trzy równania (2) wyznaczają kierunek osi chwilowej; jeżeli zatem przez  $A$  przesuniemy równoległą do téj osi, to otrzymamy stożek kierunkowy powierzchni centralnej w przestrzeni. Równania tworzącój tego stożka są:

$$xZ - z\Xi = 0, \quad yZ - zH = 0,$$

czyli, po wstawieniu wartości

$$\begin{aligned} x \cdot \sqrt{a_3^2 - v_1^2 t^2} \cdot \sqrt{a_3^2 \sin^2 \alpha_2 - v_1^2 t^2} - z \cdot v_1 t a_3 \cos \alpha_2 &= 0, \\ y \cdot \sqrt{a_3^2 \sin^2 \alpha_2 - v_1^2 t^2} + z \cdot a_3 \sqrt{a_3^2 - v_1^2 t^2} \cdot \cos \alpha_2 &= 0. \end{aligned}$$

Rugując  $t$  z tych równań, otrzymamy równanie stożka żądanego,

$$(8) \quad a_3^2 \cdot \cos^2 \alpha_2 \cdot x^2 y^2 - (a_3^2 z^2 \cos^2 \alpha_2 - y^2)(a_3^2 z^2 \cos^2 \alpha_2 - y^2 \sin^2 \alpha_2) = 0.$$

Stożek więc kierunkowy jest rzędu 4-go. Ruch ciągły układu otrzymamy, posuwając wierzchołek tego stożka na torze któregośkolwiek punktu z prędkością tego punktu, oraz obracając układ około następujących po sobie tworzących tego stożka z odpowiednią prędkością kątową, którą z wzorów (2) z łatwością obliczyć można. — Jeżeli współrzędne ruchu chwilowego wyrazimy przez czas zapomocą równań (1), (2), (4), (5) i (6), obliczymy z nich równania osi chwilowej we współrzędnych prostokątnych, a z otrzymanych dwu równań wyrugujemy czas, to otrzymamy powierzchnię centralną w przestrzeni. Obierając np. punkt  $m_1$  za początek ruchomych osi współrzędnych  $m_1 \xi$ ,  $m_1 \eta$ ,  $m_1 \zeta$ , bok  $m_1 m_2$  za oś  $m_1 \xi$ , a płaszczyznę trójkąta za płaszczyznę  $\xi m_1 \eta$ , otrzymamy równanie powierzchni centralnej układu, wyrażając równania osi centralnej we współrzędnych  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  i rugując czas. Pozostawiamy to dochodzenie czytelnikowi.

(2). Doskonałym przykładem ruchu podwójnego (postępowego i obrotowego) jest ruch ziemi. Środek ziemi opisuje elipsę na ekliptyce (ruch roczny), a jednocześnie ziemia obraca się około pewnej osi, przez jej środek przechodzącej (ruch dzienny). Jeżeli prostą, łączącą obadwa bieguny ziemi, nazwiemy jej osią geometryczną, to ta oś geometryczna nie jest zarazem chwilową osią obrotu ziemi, lecz ziemia obraca się w każdej chwili około innej prostej. Oś geometryczna ziemi nie porusza się równolegle do siebie, a tego skutkiem jest tak zwana precesja, czyli cofanie się punktów równonocnych. Równik przecina stałą ekliptykę podług prostej, która na sklepieniu niebieskim wyznacza punkty równonocne, lecz te punkty, jak wiadomo, poruszają się na niebie w kierunku przeciwnym obrotowi dziennemu ziemi, t. j. od wschodu na zachód. Równik przeto nie posuwa się równolegle do siebie, a zatem oś geometryczna, prostopadła do niego, zmienia swój kierunek w przestrzeni podczas ruchu ziemi. — Aby wyznaczyć oś tego obrotu chwilowego, który razem z ruchem postępowym po ekliptyce daje całkowity ruch ziemi, rozłożmy obrót chwilowy na dwa: jeden około prostopadłej  $AB$  (fig. 22) do ekliptyki (t. j. około prostej łączącej bieguny ekliptyki), drugi około osi geometrycznej  $NS$ . Widomym skutkiem obrotu około  $AB$  jest precesja punktów równonocnych, które obecnie opisują rocznie na niebie łuk, wynoszący przeszło 50 sekund, a więc 0,137 sekundy łuku w średnim dniu gwiazdowym. Każdy punkt na ziemi opisuje w tym czasie około  $NS$  obwód koła. Gdy zatem dzień gwiazdowy przyjmiemy jako

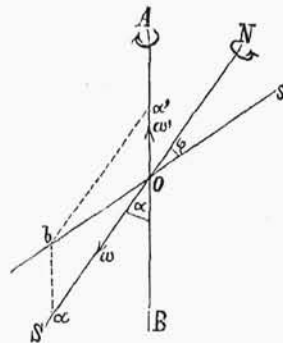


Fig. 22.

jednostkę czasu, prędkość kątowna  $\omega$  obrotu około NS będzie wynosiła  $2\pi$ . Jeżeli zaś  $\omega'$  oznacza prędkość kątowną obrotu około AB, to

$$\frac{\omega'}{0,137} = \frac{2\pi}{360 \cdot 60 \cdot 60} = \frac{\omega}{360 \cdot 60 \cdot 60}, \text{ skąd}$$

$$\omega' = \frac{0,137}{360 \cdot 60 \cdot 60} \cdot \omega.$$

Obroty  $\omega$  i  $\omega'$  mają miejsce w kierunkach strzałek; odcinając zatem  $\omega$  od O do  $a$  ku biegunowi południowemu S, należy  $\omega'$  odciąć od O do  $a'$ . Przekątna  $s$  równoległoboku  $Oab'a'$  przedstawiać będzie oś obrotu chwilowego ziemi. Oznaczmy przez  $\alpha$  kąt, który prosta NS tworzy z prostą AB, a przez  $\varphi$  kąt osi chwilowej  $s$  z osią NS; wówczas, z powodu, że prędkość kątowna obrotu około  $s$  bardzo mało się różni od  $\omega$ , można przyjąć

$$\sin \varphi = \frac{\omega'}{\omega} \cdot \sin \alpha.$$

Wstawiawszy wartości, otrzymamy

$$\sin \varphi = \frac{0,137}{360 \cdot 60 \cdot 60} \cdot \sin 23^{\circ} 27' 32'', \text{ a więc } \varphi = 0'',0087.$$

Ponieważ  $\varphi$  jest kątem stałym, przeto miejscem geometrycznym osi chwilowych w ziemi jest stożek, który otrzymamy, obracając oś  $s$  około geometrycznej osi ziemi. Obracając zaś  $s$  około AB, otrzymamy drugi stożek, do którego pierwszy jest styczny wewnątrz wzdłuż osi chwilowej. Ruch ziemi otrzymujemy, tocząc pierwszy stożek wewnątrz drugiego, podczas gdy ich spólny wierzchołek O posuwa się po ekliptyce. Stożek osi chwilowych w ziemi jest bardzo wąski; promień jego podstawy na powierzchni ziemi wynosi

$$6\,378\,000\,m \cdot \frac{0,0087 \cdot 2\pi}{360 \cdot 60 \cdot 60} = 0,270\,m;$$

możemy przeto z wystarczającym przybliżeniem oś geometryczną ziemi uważać za jej oś chwilową.

(3). Wiadomo, że księżyc jest ciągle zwrócony tą samą stroną ku ziemi (gdy pomijamy tak zwaną librację jego, czyli ważenie się); na mocy tego można okazać, że ruch księżyca względem ziemi nie jest postępowy, lecz składa się z obrotu jego środka około ziemi i z obrotu księżyca około prostej, przez środek przechodzącej, a obadwa obroty mają ten sam kierunek i okres.

(4). Obliczyć przyspieszenie styczne i przyspieszenie normalne dowolnego punktu układu niezmiennego, oraz wyznaczyć te punkty układu, których przyspieszenie czyto styczne, czytóż normalne, jest w danej chwili równe zeru.

(5). Wyznaczyć te punkty układu, których przyspieszenie jest prostopadłe do osi chwilowej ruchu.

(6). Okazać, że dwie osi sprzężone (art. 35) i oś chwilowa ruchu należą do tego samego układu tworzących paraboloidy hiperbolicznej równobocznej, t. j. takiej, której płaszczyzny asymptotyczne są do siebie prostopadłe.

(7). Okazać, że na poruszającej się prostej nie znajduje się wogólności żaden punkt, będący punktem przecięcia swego toru. Wyznaczyć warunek, aby na prostej znajdował się taki punkt osobliwy.

(8). Okazać, że wogólności osi krzywizny torów, opisywanych przez punkty poruszającej się prostej, są tworzącymi hiperbolojdy jednopowłokowej.

(9). Okazać, że wogólności normalne główne torów, opisywanych przez punkty poruszającej się prostej, są tworzącymi powierzchni skośnej rzędu 4-go, której stożek kierunkowy jest rzędu 3-go.

(10). Na podstawie własności poprzedzającej dowieść, że wogólności miejscem geometrycznym środków krzywizny torów, które punkty prostej opisują, jest krzywa skośna rzędu 5-go.

(11). Gdy  $\frac{x-X}{a} = \frac{y-Y}{b} = \frac{z-Z}{c}$  są równaniami prostej, okazać, korzystając ze wzorów art. 46-go, że wogólności równania prostej wzajemnej są

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ E & H & Z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \Lambda(X-x) + M(Y-y) + N(Z-z),$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ E & H & Z \\ a & b & c \end{vmatrix} = a\Lambda + bM + cN,$$

gdzie  $E, H, Z, \Lambda, M, N$  są spółrzednymi ruchu chwilowego.

(12). Wyznaczyć równanie charakterystyki danej płaszczyzny i spółrzedne jej ogniska, gdy są dane spółrzedne ruchu chwilowego.

(13). Okazać, że charakterystyki płaszczyzn, przecinających się podług tej samej prostej, są tworzącymi hiperbolojdy jednopowłokowej, której jedną osią główną jest najkrótsza odległość tej prostej od osi chwilowej.

(14). Okazać, że jeżeli trzy punkty prostej poruszają się na trzech danych płaszczyznach, natenczas każdy inny punkt tej prostej opisuje wogólności powierzchnią elipsojdy, której środkiem jest punkt przecięcia się danych płaszczyzn.

(15). Dowieść następującego twierdzenia: jeżeli cztery punkty prostej poruszają się na czterech płaszczyznach, to każdy inny punkt tej prostej będzie się poruszał na pewnej płaszczyźnie. Jaką krzywą będzie ów punkt opisywał na tej płaszczyźnie?