

MECHANIKA CIAŁ SZTYWNYCH.

CZĘŚĆ PIERWSZA.

KINEMATYKA CIAŁ SZTYWNYCH.

ROZDZIAŁ I.

RUCH BEZWZGLĘDNY PUNKTU.

1. PRAWO NIEZALEŻNOŚCI RUCHÓW. Ciało matematyczne, wyobrażające ustrój ciała sztywnego, możemy przyjmować jako układ punktów, linii, lub powierzchni, których wzajemne położenie jest dokładnie określone i podczas ruchu żadnej nie ulega zmianie. W tym znaczeniu ciało matematyczne, którego ruchem się zajmujemy, nazywamy układem geometrycznym niezmiennym, albo krócej układem niezmiennym. Takie określenie obejmuje także kształty geometryczne, których elementy nie następują po sobie w sposób ciągły.

Jako element układu przyjmujemy punkt, w którego pojęciu tkwi samo tylko wyobrażenie miejsca w przestrzeni. Znając położenie każdego punktu układu, znamy położenie układu samego; z ruchów zatem oddzielnych punktów rozpoznajemy ruch całego układu. Z tego wynika, że w nauce o ruchu należy się przedewszystkiem zająć ruchem punktu. Ponieważ punkt nie może z jednego miejsca przenieść się do innego, nie zajmując kolejno miejsc pośrednich, przeto ruch punktu ze względu na przestrzeń jest zjawiskiem ciągłym. —

Miejsce punktu wyznaczamy przez oznaczenie jego położenia względem innych punktów. Ponieważ zaś jedynym związkiem między dwoma punktami jest ich wzajemna odległość, przeto ze zmiany odległości punktu uważanego od innych punktów sądzimy o jego ruchu. Z tego wynika, że pojęcie ruchu punktu, a tym samym ruchu każdego układu punktów, jest pojęciem względnym. Skądinąd wiemy, iż w naturze niema ciała, o którym moglibyśmy

twierdzić, że nie porusza się względem innych ciał, z czego należałoby wnosić, iż przy badaniu ruchu punktu musimy zważać jednocześnie na ruch układu, względem którego ten ruch ma być wyznaczony, a który nazywać będziemy układem odniesienia. Atoli doświadczenie pozwala w pewnych przypadkach uważać układ odniesienia jako zostający w stanie spoczynku, a to na podstawie prawa, które zowiemy «prawem niezależności ruchów».

Jakimikolwiek byłyby cechy ruchu układu niezmiennego, możemy sobie już teraz przedstawić taki jego ruch, podczas którego w ruchach oddzielnych punktów tę tylko zaznaczyć można różnicę, iż one zachodzą w różnych miejscach w przestrzeni, wszystkie zaś inne cechy ruchów tych punktów są im wspólne. Taki ruch układu niezmiennego nazywamy «postępowym». Później (art. 21) ten ruch określimy dokładniej; tymczasem powyższe objaśnienie wystarczy do zrozumienia następującego prawa:

Prawo niezależności ruchów. Jeżeli układ niezmienny razem z punktem, do niego nie należącym, odbywa ruch postępowy i prostoliniowy, a nadto ten punkt porusza się względem układu, to ruch tego punktu względem układu odbywa się tak, jakgdyby owego wspólnego ruchu postępowego nie było.

Na mocy tego ważnego prawa możemy w wielu zagadnieniach o ruchu punktu pominąć ruch wspólny tego punktu i układu odniesienia, przyjmując, że układ odniesienia pozostaje w spoczynku. To postępowanie stosujemy do takich zagadnień, w których wiadomo, że układ odniesienia nie posiada innego ruchu, prócz ruchu wspólnego z jednym z ruchów punktu uważanego. Od takich zagadnień są odmienne zagadnienia o ruchu punktu względem układu odniesienia, jeżeli, prócz owego ruchu wspólnego, układ odniesienia ma jeszcze ruch inny (co sprawdzamy zapomocą innego układu odniesienia), lubtóż, jeżeli ów ruch wspólny układu odniesienia i poruszającego się punktu nie istnieje, a układ odniesienia ma pewien ruch.

Gdyby w kinematyce chodziło tylko o porównanie z sobą rozmaitych ruchów ze stanowiska geometrycznego, to wybór układu odniesienia byłby rzeczą obojętną. Ponieważ atoli przedmiotami kinematyki są ruchy, rzeczywiście w naturze spostrzegane, przeto w tych zagadnieniach, do których prawo niezależności ruchów ma być stosowane, układ odniesienia winien być tak dobierany, jak tego owo prawo wymaga. Umówmy się zatem, aby jako układ odniesienia obierać dowolny układ niezmienny, odbywający ruch prostoliniowy postępowy (o którego cesze, zależnej od czasu, niżej w art. 66-ym będzie mowa). Taki układ odniesienia nazywać będziemy układem zasadniczym.

Powyższe uwagi pozwalają zagadnienia o ruchu punktu podzielić na dwie grupy. Jeżeli układ zasadniczy porusza się razem z pewnym punktem, a nadto ów punkt porusza się względem tego układu, natenczas ten ostatni ruch punktu nazywamy ruchem bezwzględnym. Jeżeli zaś układ zasadniczy nie odbywa ruchu wspólnego z punktem, lub oprócz ruchu wspólnego posiada własny ruch postępowy, lub nakoniec jeżeli układ odniesienia nie jest zasadniczy, natenczas ruch punktu nazywamy ruchem względnym. Pra-

wo niezależności ruchów pozwala ruch bezwzględny tak rozważać, jakgdyby układ zasadniczy znajdował się w przestrzeni w spoczynku, jakkolwiek tak istotnie nie jest. Nazywanie ruchu bezwzględnym nie zgadza się wprawdzie z określeniem ruchu wogółności; będziemy jednak używali téj utartéj nazwy, rozumiejąc ją zawsze w znaczeniu tu określonym. Np. w zagadnieniach o ruchu punktu na ziemi lub w małych od niéj odległościach, a zwłaszcza dla ruchów krótkotrwałych, możemy ziemię przyjąć za układ zasadniczy, pomijając jéj obrót dzienny. Jeżeli pominiemy ruchy własne tak zwanych gwiazd stałych, to możemy układ odniesienia przyjąć w niezmiennym połączeniu z gwiazdami stałymi, i tym sposobem dochodzić ruchów bezwzględnych ziemi. W każdym razie pamiętać należy, że powyższe układy odniesienia tylko w przybliżeniu za zasadnicze uważane być mogą, że przeto wyniki badania tylko w przybliżeniu są prawdziwe. Dla ruchów na ziemi otrzymamy dokładne rezultaty dopiero po uwzględnieniu jéj obrotu dziennego.

2. RODZAJE RUCHU PUNKTU. Aby określić ruch bezwzględny punktu, należy znać zachowywanie się tego punktu w przestrzeni (t. j. względem układu zasadniczego) i w czasie. Zachowywanie się punktu w przestrzeni określa linia, łącząca miejsca, po sobie następujące, które on podczas tego ruchu zajmuje. Tę linię nazywamy drogą albo torem punktu. Jeżeli tę linię uważamy tylko pod względem jéj kształtu i położenia, to nazywać ją będziemy torem punktu, jeżeli zaś mieć będziemy na względzie jéj długość, wówczas używać będziemy wyrazu droga. Przy takim pojmowaniu mówić będziemy np. o drodze punktu, na pewnym torze opisanéj. Tor punktu jest linią prostą lub krzywą, i według tego odróżniamy ruch prostoliniowy od ruchów krzywoliniowych. Tor punktu m będziemy oznaczali symbolem (m). —

Zajmiemy się naprzód ruchem prostoliniowym. Określamy ten ruch zapomocą położenia prostéj w przestrzeni i zachowywania się punktu w czasie. Piérwsze wyznaczamy tak, jak to czyni geometryja; co do drugiego, należy przedewszystkiem podać kryterjum równości dwu czasów, aby z niego wyprowadzić sposób pomiaru czasu, pozwalający stosować do niego też same działania, jakim podlegają wielkości matematyczne.

Dwa przedziały czasu nazywamy równymi, jeżeli dwa punkty, znajdujące się w tych samych warunkach na początku każdego z tych przedziałów, odbywają w tych samych warunkach też same ruchy do końca przedziałów, a to względem tego samego układu odniesienia. Skoro po upływie jednego przedziału czasu następuje jakikolwiek drugi, przyjmujemy przedział czasu od początku 1-go do końca 2-go jako sumę obudwu przedziałów. Na podstawie tych określeń wymierzamy przedział czasu zapomocą innego, za jednostkę obranego, otrzymując tym sposobem liczbę, mierzonemu przedziałowi odpowiadającą. Ta liczba, wyobrażająca wielkość przedziału czasu, może być poddana rozmaitym działaniom, a dla krótkości wysłowienia wyrażamy się o tych działaniach często tak, jakgdybyśmy czas uważali jako liczbę, tym działaniom podlegającą. Czas (tempus) będziemy oznaczali literami t , T , τ .

Kierunek prosty, łączący miejsce wcześniejsze punktu z miejscem późniejszym, określa kierunek ruchu prostoliniowego tego punktu. Aby ruch określić co do czasu, porównujemy z sobą drogi, w równych czasach opisywane, które mogą być równe albo nierówne, co daje dwa rodzaje ruchu. Ruch prostoliniowy punktu nazywamy ruchem jednostajnym, gdy punkt w równych czasach, bez względu na ich długość, równe opisuje drogi. Każdy inny ruch nazywamy niejednostajnym, czyli zmiennym. Jeżeli więc w następujących po sobie przedziałach t czasu punkt opisuje równe drogi, w innych zaś przedziałach t' już to nie zachodzi, to ruch punktu jest zmienny.

3. RUCH JEDNOSTAJNY. Z podanego określenia wynika, że przy ruchu jednostajnym punkt opisuje w następujących po sobie jednostkach czasu, dowolnie zresztą obranych, równe drogi, — że zatem stosunek drogi do czasu jest stały. Ten stosunek, czyli — co na jedno wychodzi — tę drogę, którą punkt opisuje w jednostce czasu, nazywamy prędkością (chyżością, szybkością) ruchu jednostajnego prostoliniowego. Ruch jednostajny jest określony co do czasu przez prędkość, którą oznaczać będziemy literami v , c (velocitas, celeritas).

Jeżeli punkt m w czasie t (to znaczy: do końca przedziału t czasu) opisał drogę s , to wyrażenie na drogę będzie:

$$(1) \quad s = vt,$$

gdzie v oznacza prędkość tego ruchu. Wartość liczebna prędkości zależy od jednostek, użytych do mierzenia długości i czasu. Wybrawszy pewną jednostkę czasu, wyrażamy prędkość przez liczbę, mianowaną według użytej jednostki długości. Jeżeli przyjmiemy sekundę, t. j. 86 400-ną część średniego dnia słonecznego, jako jednostkę czasu, a centymetr jako jednostkę długości, natenczas prędkość wyrazimy przez ilość centymetrów, przebytych podczas sekundy, czyli, jak się krócej mówić zwykło, w centymetrach na sekundę.

Równanie (1), wyrażające związek między drogą a czasem, zwiemy «równaniem ruchu» jednostajnego prostoliniowego. Możemy ten ruch wyrazić także tym sposobem, że wyznaczamy w każdej chwili odległość poruszającego się punktu od punktu stałego, dowolnie na torze obranego. Niechaj O będzie takim punktem, od którego rozważamy ruch punktu m , a M miejscem poruszającego się punktu, od którego liczymy czas, to, kładąc $OM = S$, otrzymamy

$$(2) \quad s = S + vt,$$

jako równanie tego ruchu. Ono bowiem określa w każdej chwili miejsce punktu przez odległość jego od punktu O , i wyraża zarazem warunek, że w każdej jednostce czasu taż sama droga $v = (s - S) : t$ opisaną została. Gdyby punkt m poruszał się ku M , natenczas $s = S - vt$ byłoby równaniem ruchu. Punkt M wyobraża tak zwane miejsce początkowe, czyli położenie początkowe punktu m .

Z powyższych dwu postaci równania ruchu jednostajnego okazuje się, iż droga, opisana podczas ruchu jednostajnego i prostoliniowego, jest funkcją liniową, t. j. stopnia 1-go, względem czasu, i że, nawzajem, związek liniowy między drogą prostoliniową punktu a czasem wskazuje, że ruch tego punktu jest jednostajny. Spółczynnik czasu w równaniu ruchu przedstawia prędkość tego ruchu. —

Rzucamy punkt m w każdym położeniu podczas jego ruchu jednostajnego prostoliniowego prostopadle na daną prostą ab , która z torem jego (m) tworzy kąt α , i niechaj M' i m' będą rzutami punktów M i m . Wtedy droga s' rzutu m' wyrazi się przez równanie $s' = M'm' = Mm \cdot \cos \alpha = s \cdot \cos \alpha = v \cos \alpha \cdot t$, z którego się okazuje, że rzut punktu m porusza się na prostej ab jednostajnie z prędkością $v \cos \alpha$, co wyrażamy krótko, mówiąc, że *prędkość rzutu jest rzutem prędkości*. To twierdzenie jest także prawdziwe dla rzutów ukośnych na prostą.

Powyższe twierdzenie, przy którego pomocy z prędkości rzutu możemy wyznaczyć prędkość punktu samego, pozwala zastosować metodę współrzędnych do przedstawienia ruchu jednostajnego. Jakoż, niechaj układ prostokątny osi współrzędnych Ox , Oy , Oz wyobraża układ odniesienia, a x , y , z niech będą w tym układzie współrzędnymi punktu m , określającymi miejsce tego punktu w przestrzeni. Jeżeli a , b i c są dostawami kierunkowymi prostej (m) względem osi, to

$$v_x = av, \quad v_y = bv, \quad v_z = cv$$

są odpowiednio prędkościami rzutów m_x , m_y , m_z punktu m na osiach. Według zatem twierdzenia o rzutach prędkości, mamy

$$x = X + v_x t, \quad y = Y + v_y t, \quad z = Z + v_z t,$$

gdzie X , Y , Z są współzrędnymi miejsca początkowego M . Ruch zatem jednostajny prostoliniowy wyraża się przez trzy równania liniowe między współzrędnymi i czasem. — Nawzajem, takie trzy równania określają zawsze ruch jednostajny prostoliniowy. Jakoż, rugując z tych równań czas t , otrzymamy dwa równania między współzrędnymi x , y i z , mianowicie:

$$\frac{x - X}{v_x} = \frac{y - Y}{v_y} = \frac{z - Z}{v_z},$$

wyrażające, że torem punktu poruszającego się jest prosta, przechodząca przez punkt (X, Y, Z) , której kierunek wyznaczają współczynniki stałe v_x , v_y , v_z . Z pierwotnych zaś równań wynika, że te współczynniki są prędkościami rzutów punktu (x, y, z) na osi współrzędnych. Na mocy zatem twierdzenia o rzutach otrzymujemy, jako drogę punktu w jednostce czasu,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

wielkość stałą, z czego wnosimy, że ruch jest jednostajny.

Łatwo wniesiemy, iż powyższe dowodzenie stosuje się także do współrzędnych ukośnokątnych. Jeżeli współrzędne prostokątne wyrazimy przez współrzę-

дне biegunowe, to otrzymamy także równania ruchu liniowe względem czasu; zmiana bowiem współrzędnych wprowadza do rachunku pewne wielkości, od czasu niezależne, a wyrażające tylko związki geometryczne między współrzędnymi dawnymi i nowymi.

4. SKŁAD I ROZKŁAD PRĘDKOŚCI. W wielu zagadnieniach o ruchu wypada uważać dwa lub więcej ruchów jednostajnych, prostoliniowych, w których punkt bierze udział jednocześnie, a to wskutek tego, że należy do kilku układów niezmiennych, z których każdy taki ruch posiada. Niechaj punkt m (fig. 1) bierze udział w ruchu jednostajnym prostoliniowym układu A_1 , którego każdy punkt posiada prędkość $v_1 = ma$, a nadto względem tego układu porusza się jednostajnie i prostoliniowo z prędkością $v_2 = mb$; chcemy wyznaczyć ruch punktu m względem innego układu A_2 , znajdującego się w spoczynku. Prędkość v_1 , jaką posiada układ A_1 , unoszący punkt m z sobą, nazywamy prędkością unoszenia tego punktu.

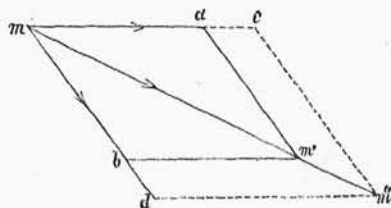


Fig. 1.

Z prawa niezależności ruchów wynika, że punkt m opisze w jednostce czasu drogę mb , niezależnie od tego, że ta prosta, jako część układu A_1 , przesunie się w tymże czasie równolegle o długość ma . Wskutek drugiego ruchu zajmie prosta mb względem układu A_2 położenie am' , równoległe do mb ; ponieważ zaś punkt m opisze wzdłuż niej drogę $am' = mb$, przeto punkt m zajmie względem A_2 położenie punktu m' . Miejsce m'' punktu m po upływie czasu t otrzymamy podobnym sposobem, odcinając od m długości $mc = v_1 t$, i $md = v_2 t$ i króśląc odcinek cm równy i równoległy do md . Z podobieństwa trójkątów mam' i $mc m''$ wynika, że punkty m, m', m'', \dots leżą na tej samej prostej, i że $mm'' = mm' \cdot t$, że zatem ruch punktu m jest prostoliniowy i jednostajny, a długość mm' przedstawia prędkość tego ruchu.

Opisane powyżej postępowanie nazywamy składaniem, albo składem dwu ruchów jednostajnych; a ponieważ ono sprowadza się właściwie do rozważania dwu prędkości, przeto mamy tu skład dwu prędkości. Dane prędkości mc, mb zwiemy prędkościami składowymi, prędkość zaś mm' prędkością wypadkową. Z figury widzimy, że prędkość wypadkowa co do wielkości i co do kierunku jest przekątną równoległoboku $mam'b$, wystawionego na prędkościach składowych; albo inaczej, trzecim bokiem trójkąta mam' lub mbm' , którego dwa boki w dowolnym porządku przedstawiają prędkości składowe co do wielkości i co do kierunku. Z tego się okazuje, popierwsze, że prędkość wypadkowa pozostaje taż sama, którakolwiek z danych prędkości jest prędkością unoszenia punktu, i powtórę, że prędkości składowe i ich wypadkowa leżą na tej samej płaszczyźnie.

Gdyby dana była prędkość mm' , moglibyśmy, odwrotnie, wyznaczyć dwie prędkości w kierunkach prostych ma i mb , których wypadkową byłaby właśnie

prędkość dana. To postępowanie nazywamy rozkładem prędkości. Długości boków równoległoboku, którego przekątną jest prędkość dana mm' , mających dane kierunki, przedstawiają szukane prędkości składowe. Ponieważ mm' jest przekątną nieskończenie wielu równoległoboków, przeto zadanie o rozkładzie prędkości posiada nieskończenie wiele rozwiązań i wtedy dopiero staje się oznaczonym, gdy dane są bądź kierunki obu dwu prędkości składowych, bądź kierunek i wielkość jednej z nich. Jeżeli bowiem składowa ma jest dana, to am' wyobraża drugą prędkość składową. —

Punkt m może brać udział w dowolnie wielu ruchach jednostajnych i prostoliniowych. Niechaj punkt m porusza się względem układu A_1 , z prędkością v_1 , układ A_1 unosi go z prędkością v_2 względem układu A_2 , układ A_2 unosi A_1 wraz z punktem m z prędkością v_3 względem układu A_3 , i t. d., na koniec układ A_{n-1} unosi układy $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-2}$ wraz z punktem m z prędkością v_n względem układu A_n . Wypadkowa v_{12} prędkości v_1 i v_2 , uważana jako prosta układu A_2 , zostaje uniesioną równolegle z prędkością v_3 względem A_3 ; składając zatem v_{12} z prędkością v_3 , otrzymalibyśmy prędkość v_{13} punktu m względem A_3 , gdyby ten układ A_3 był w spoczynku. Ta wypadkowa, uważana jako prosta układu A_3 , zostaje uniesioną z prędkością v_4 względem A_4 , wypadkowa zatem v_{14} prędkości v_{13} i v_4 byłaby prędkością punktu m względem A_4 , gdyby ten układ był w spoczynku. Postępując podobnie z pozostałymi prędkościami, otrzymamy prędkość $v_{1,n-1}$, która, uważana jako prosta układu A_{n-1} , zostaje uniesioną z prędkością v_n względem układu nieruchomego A_n . Wypadkowa $v_{1n} = v$ prędkości $v_{1,n-1}$ i v_n będzie zatem szukaną prędkością punktu m względem układu A_n .

Skład powyższych prędkości może być dokonany w ten sposób, iż do prędkości $v_1 = ma_1$ (fig. 2) przykładamy $v_2 = a_1a_2$, do niej $v_3 = a_2a_3$ i t. d., na koniec do $v_{n-1} = a_{n-2}a_{n-1}$ przykładamy $v_n = a_{n-1}a_n$; wtedy proste $ma_2,$

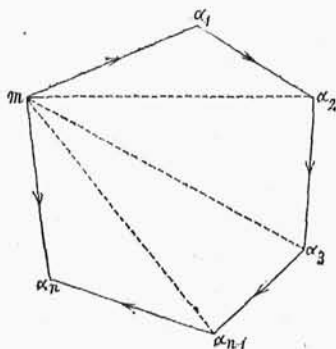


Fig. 2.

ma_3, \dots, ma_{n-1} przedstawiają kolejno prędkości $v_{12}, v_{13}, \dots, v_{1,n-1}$, a prosta ma_n przedstawia prędkość żądaną v . Tę prędkość zwiemy wypadkową danych n prędkości, które są jej składowymi. Prędkość wypadkowa określa ruch bezwzględny punktu m , który, co podobnie jak przy dwu prędkościach okazać można, jest prostoliniowy i jednostajny. Z figury okazuje się, że skład ilużkolwiek prędkości dokonywa się zapomocą wieloboku, którego następujące po sobie boki przedstawiają kolejno prędkości składowe; bok zaś ostatni, czyli zamykający, daje prędkość wypadkową. Taki wielobok zwiemy wielobokiem prędkości.

Z gicometrii wiadomo, iż długość ma_n jest niezależna od porządku, w jakim przykładamy do siebie długości $ma_1, a_1a_2, \dots, a_{n-1}a_n$; prędkość zatem wypadkowa nie zależy od porządku, w jakim dokonywamy

składu prędkości danych. Widoczna, że prędkość wypadkową otrzymalibyśmy także, rozdzielając prędkości dane na dwie lub więcej grup i składając wypadkowe tych grup.

W przypadku szczególnym, kiedy ostatni wierzchołek a_n wieloboku prędkości zejdzie się razem z początkowym m , prędkość punktu względem układu nieruchomego A_n będzie zerem, co oznacza, iż punkt pozostaje w spoczynku względem tego układu. W tym przypadku mówimy, że dane prędkości wzajemnie się znoszą. Wypadkowa $n - 1$ prędkości jest wtedy równa i o kierunku wprost przeciwnym n -tej prędkości. Dwie prędkości równe i o kierunkach wprost przeciwnych znoszą się.

Nawzajem, dana prędkość v może być rozłożona na n innych prędkości, których ona jest wypadkową. To zadanie jest podobnie nieoznaczone, jak odpowiednie przy dwu prędkościach. Mając $n - 1$ prędkości składowych v_1, \dots, v_{n-1} , można wyznaczyć n -tą składową zapomocą wieloboku. —

Prędkość punktu możemy zawsze rozłożyć na trzy prędkości w kierunkach trzech prostych, przez ten sam punkt przesuniętych i nie leżących na jednej płaszczyźnie. Jakoż, niechaj mx , my , mz będą takie proste, a v niech będzie prędkością punktu m . Przesuniemy płaszczyznę przez v i mx , która płaszczyznę ymz przetnie według prostej $m\xi$, i rozłożymy v na dwie składowe: v_x wzdłuż mx i v_ξ wzdłuż $m\xi$. Ponieważ prędkość v_ξ leży na płaszczyźnie ymz , przeto możemy ją rozłożyć na dwie prędkości v_y i v_z , wzdłuż prostych my i mz , i otrzymamy żądane trzy składowe v_x , v_y , v_z prędkości v wzdłuż danych prostych. Gdyby te trzy proste na jednej leżały płaszczyźnie, prędkość v takżeby leżała na tej płaszczyźnie; inaczej rozkład byłby niemożliwy.

Przy rozkładzie prędkości v na v_x i v_ξ otrzymujemy v_x , przesuwając przez punkt końcowy prędkości v prostą, równoległą do $m\xi$, lub, mówiąc inaczej, rzucając prędkość v na prostą mx równoległą do płaszczyzny ymz . Ponieważ podobnym sposobem otrzymujemy v_y i v_z , przeto każda z trzech składowych danej prędkości jest jej rzutem na odpowiednią prostą, równoległą do płaszczyzny, przesuniętą przez dwie pozostałe proste. A ponieważ, gdy dane są kierunki krawędzi równoległościanu, schodzących się w tym samym wierzchołku, i dana wielkość i kierunek jego przekątnej, przechodzącej przez tenże wierzchołek, wielkości każdej z owych krawędzi są oznaczone, przeto prędkość punktu daje się jednym tylko sposobem rozłożyć na trzy prędkości w kierunkach trzech prostych, nie będących równoległymi do tej samej płaszczyzny.

5. Podana metoda rozkładania prędkości pozwala obliczyć wypadkową ilukolwiek prędkości punktu m . Wystawmy w tym celu w punkcie O prostokątny układ osi współrzędnych Ox , Oy i Oz i oznaczmy przez α_i , β_i , γ_i kąty kierunkowe prędkości składowej v_i , gdzie wskaźnik i oznacza którąkolwiek z liczb 1, 2, 3, ..., $n - 1$, n . Rozłożymy każdą z n danych prędkości na trzy składowe prostokątne v_{ix} , v_{iy} , v_{iz} w kierunkach osi Ox , Oy , Oz ; wówczas

$$v_{ix} = v_i \cos \alpha_i, \quad v_{iy} = v_i \cos \beta_i, \quad v_{iz} = v_i \cos \gamma_i.$$

Stosując do wieloboku prędkości znane twierdzenie, że suma algebryczna rzutów wszystkich boków wieloboku zamkniętego na dowolną prostą jest zerem, otrzymamy dla rzutów v_x, v_y, v_z prędkości wypadkowej następujące wartości:

$$v_x = \Sigma v_{ix}, \quad v_y = \Sigma v_{iy}, \quad v_z = \Sigma v_{iz},$$

gdzie znak sumy algebrycznej Σ odnosi się do wszystkich wartości wskaźnika i od $i=1$ do $i=n$. Prędkość zatem wypadkowa będzie

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

gdzie pierwiastek ma być pojęty jako dodatni; kierunek tej prędkości wyznacza związek

$$\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma = v_x : v_y : v_z,$$

w którym α, β, γ są jej kątami kierunkowymi.

Obierzmy dowolnie trzy proste, l_ξ, l_η, l_ζ , które nie przechodzą przez ten sam punkt i nie są równoległe do tej samej płaszczyzny, i niechaj $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3$ oznaczają odpowiednio ich dostawy kierunkowe względem osi współrzędnych. Rzućmy prędkość v_i prostokątnie na każdą z tych prostych, i niechaj $v_{i\xi}, v_{i\eta}, v_{i\zeta}$ będą jej rzutami odpowiednio na l_ξ, l_η i l_ζ ; natenczas

$$v_{i\xi} = a_1 v_{ix} + b_1 v_{iy} + c_1 v_{iz},$$

$$v_{i\eta} = a_2 v_{ix} + b_2 v_{iy} + c_2 v_{iz},$$

$$v_{i\zeta} = a_3 v_{ix} + b_3 v_{iy} + c_3 v_{iz}.$$

Oznaczmy odpowiednio przez v_ξ, v_η, v_ζ rzuty prostokątne prędkości wypadkowej v na też proste, to

$$v_\xi = \Sigma v_{i\xi} = a_1 v_x + b_1 v_y + c_1 v_z,$$

$$v_\eta = \Sigma v_{i\eta} = a_2 v_x + b_2 v_y + c_2 v_z,$$

$$v_\zeta = \Sigma v_{i\zeta} = a_3 v_x + b_3 v_y + c_3 v_z.$$

Jeżeli dane prędkości v_i znoszą się, to $v=0$; będą zatem miały miejsce jednocześnie trzy równania

$$\Sigma v_{ix} = 0, \quad \Sigma v_{iy} = 0, \quad \Sigma v_{iz} = 0.$$

I nawzajem, skoro te trzy warunki zachodzą, to $v=0$, a zatem prędkości dane się znoszą. Te trzy równania warunkowe dają także:

$$\Sigma v_{i\xi} = 0, \quad \Sigma v_{i\eta} = 0, \quad \Sigma v_{i\zeta} = 0;$$

i nawzajem, skoro ostatnie trzy równania zachodzą, to $v_x=0, v_y=0, v_z=0$, a zatem $v=0$, wyznacznik bowiem układu współczynników

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

nie jest zerem, gdyż równanie $\Delta=0$ wyrażałoby, że powyższe trzy proste są równoległe do jednej płaszczyzny, co się sprzeciwia założeniu. Mamy zatem

następujące twierdzenie: *Aby ilekolwiek prędkości znosiło się nawzajem, potrzeba i wystarcza, żeby suma algebryczna ich rzutów prostokątnych na trzy dowolne proste, nierównoległe do tej samej płaszczyzny, była zerem dla każdej prostej zosobna.*

6. RUCH ZMIENNY. Zachowywanie się punktu podczas ruchu zmiennego względem czasu możemy rozpoznać przez porównanie tego ruchu z ruchem jednostajnym. Niechaj prosta (*m*) (fig. 3)

będzie torem punktu *m*, poruszającego się niejednostajnie, a *m*₁, *m*₂, *m*₃,... niechaj oznaczają jego kolejne miejsca w odstępach równych, zresztą dowolnych, przedziałów τ czasu. Drogi *m*₁*m*₂, *m*₂*m*₃,... są z założenia nierówne. Weźmy drugi punkt *n*, poruszający się razem z punktem *m* (co na rysunku tak przedstawiamy, jakby tory obudwu punktów były równoległe) ale tak, iż do miejsc *m*₁, *m*₂, *m*₃,... przybywa jedno-

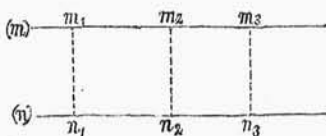


Fig. 3.

nocześnie z *m*, a między dwoma takimi miejscami porusza się jednostajnie. Z tego warunku wynika, że prędkość punktu *n* na drodze *m*₁*m*₂ będzie inna, niż na drodze *m*₂*m*₃, i t. d., a jeżeli te prędkości oznaczmy przez *v*₁, *v*₂, *v*₃,... i nazwiemy *s*₁ = *m*₁*m*₂, *s*₂ = *m*₂*m*₃,..., to

$$v_1 = \frac{s_1}{\tau}, \quad v_2 = \frac{s_2}{\tau}, \quad v_3 = \frac{s_3}{\tau}, \dots$$

Miedzy ruchami obudwu punktów zachodzi zgodność tylko o tyle, że obadwa punkty przybywają równocześnie do miejsc *m*₁, *m*₂,... Im mniejszy przedział τ czasu obierzemy, tym mniejsze będą drogi, w tym więcę z tym miejscach obadwa punkty razem się z sobą schodzić będą. Jeżeli ten przedział czasu nieograniczenie maleje, to obadwa punkty będą się razem schodziły w nieskończenie wielu miejscach. Możemy przeto osiągnąć zupełną zgodność ich ruchów, uważając te ruchy w przedziałach czasu nieskończenie małych, czyli, jak się wyrażamy, w elementach czasu, z których każdy uważać należy za nieskończenie mały przyrost czasu, po upływie którego obadwa punkty zajmują toż samo miejsce. Jeżeli więc obadwa punkty opisały do końca czasu *t* drogę *s*, a ten czas wzrośnie o *dt*, droga zaś obudwu punktów o *ds*, to, stosownie do pojęcia granicy i określenia prędkości, granica stosunku $\frac{ds}{dt}$ będzie

prędkością, z jaką punkt *n* opisuje drogę *ds*. Tę prędkość punktu *n* należy uważać za odpowiednią temu miejscu, które obadwa punkty zajmują po upływie tego samego czasu. Wyznaczoną tym sposobem prędkość punktu *n*, poruszającego się jednostajnie i zgodnie z punktem *m* podczas elementu czasu, nazywamy prędkością ruchu punktu *m* w tym miejscu, dla którego wyznaczoną została. Używając słownictwa rachunku różniczkowego, możemy dać następujące określenie ogólne: *prędkością ruchu prostoliniowego punktu nazywamy*

pierwszą pochodną drogi względem czasu. Oznaczając prędkość przez v , mamy ogólnie

$$(1) \quad v = \frac{ds}{dt}.$$

Ruch punktu będzie określony, jeżeli znamy związek między drogą a czasem, pozwalający wyznaczyć miejsce punktu w każdej chwili. Taki związek nazywamy równaniem ruchu, a piszemy je ogólnie:

$$s = F(t),$$

gdzie F jest znakiem funkcji dobrze określonej. Różniczkując to równanie względem t , otrzymamy $ds = F'(t) \cdot dt$, a zatem

$$(2) \quad v = F'(t).$$

Podstawiając w funkcji pochodnej $F'(t)$ zamiast czasu t wartość, odpowiadającą miejscu uważanemu, otrzymujemy prędkość punktu w tym miejscu. Prędkość v , dla danego czasu t obliczoną, nazywamy krótko: prędkością punktu w czasie t .

Powyższe określenie prędkości, którego źródłem jest ruch jednostajny, stosuje się także do tego ruchu. Z równania bowiem tego ruchu $s = vt$, lub $s = S + vt$, wynika $\frac{ds}{dt} = v$. Jeżeli droga punktu nie jest funkcją liniową czasu, ruch jest niejednostajny, i odwrotnie. Prędkość ruchu jednostajnego jest stała, prędkość ruchu niejednostajnego jest funkcją czasu.

Z równania (1) wynika:

$$(3) \quad ds = v \cdot dt;$$

skoro zatem dany jest związek między prędkością a czasem, $v = \varphi(t)$, to droga s , opisana w przedziale czasu od t_1 do t_2 , wyrazi się zapomocą wzoru

$$(4) \quad s = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) \cdot dt.$$

Możemy więc ruch niejednostajny określić także przez prędkość w funkcji czasu, a do równania ruchu dochodzimy przez całkowanie. Nakoniec mamy $dt = \frac{ds}{v}$, co pozwala obliczyć czas potrzebny do opisania pewnej drogi, skoro wiadomy jest związek między drogą a prędkością.

Skład prędkości, któryśmy poprzednio okazali dla ruchów jednostajnych, stosuje się także do ruchów niejednostajnych, z tą jednak różnicą, iż należy te ruchy brać w nieskończenie małym przedziale czasu, w którym je jako jednostajne uważamy. Nieskończenie mały ruch punktu nazywamy jego ruchem chwilowym, lub także ruchem elementarnym. Skład zatem prędkości można uważać ogólnie za skład chwilowych ruchów prostoliniowych, a ponieważ wiadomo, że prędkość wypadkowa nie zależy od porządku, w jakim

tego składu dokonywamy, przeto widzimy, iż *ruchy chwilowe punktu mogą być składane w dowolnym porządku*. Skład prędkości możemy także tak pojmować, że punktowi zostają jednocześnie udzielone ruchy chwilowe, a to tym sposobem, że punkt należy do kilku układów niezmiennych A_1, A_2, \dots, A_{n-1} , z których każdy posiada swój własny ruch względem układu nieruchomego A_n . Wskutek chwilowego ruchu każdego z tych układów otrzymuje punkt jednocześnie pewne prędkości v_1, v_2, \dots, v_{n-1} , których wypadkowa jest prędkością ruchu chwilowego tego punktu względem układu A_n . Takie pojmowanie składu i odpowiednie pojmowanie rozkładu prędkości jest zupełnie zgodne z prawem niezależności ruchów.

7. RUCH JEDNOSTAJNIE ZMIENNY. Prędkość ruchu zmiennego wzrasta lub ubywa z czasem, co wyrażamy mówiąc, że ruch taki jest odpowiednio ruchem przyspieszonym lub ruchem opóźnionym. Najprostszy z tych ruchów będzie ruch taki, w którym przyrosty lub ubytki prędkości w równych czasach są równe sobie. Taki ruch nazywamy wogólności ruchem jednostajnie zmiennym. Z określenia tego ruchu wynika, że przyrost lub ubytek prędkości w jednostce czasu jest stały. Przyrost prędkości ruchu jednostajnie przyspieszonego w jednostce czasu nazywamy przyspieszeniem, a ubytek prędkości ruchu jednostajnie opóźnionego w jednostce czasu nazywamy opóźnieniem ruchu rozważanego. Ponieważ opóźnienie można uważać jako przyspieszenie ujemne, przeto mówimy ogólnie o przyspieszeniu ruchu jednostajnie zmiennego, pojmując je jako dodatnie lub ujemne, według tego czy zachodzi przyrost, czytóż ubytek prędkości.

Jeżeli c jest prędkością początkową ruchu (dla $t = 0$), a γ przyspieszeniem, to prędkość ruchu jednostajnie zmiennego w czasie t wyrazi się wzorem:

$$(1) \quad v = c + \gamma t.$$

Ten związek wskazuje widocznie, że ruch jest jednostajnie zmienny; możemy przeto naodwrot uważać go za równanie tego ruchu. Liczymy czas od spoczynku; to przy $t = 0$ jest $c = 0$, a zatem $v = \gamma t$. Równanie (4) art. 6-go daje dla odległości punktu od miejsca początkowego wyrażenie

$$(2) \quad s = \int (c + \gamma t) \cdot dt = S + ct + \frac{\gamma}{2} t^2,$$

cechujące ruch jednostajnie zmienny, gdzie S oznacza tę odległość w czasie $t = 0$. Droga punktu w czasie t wynosi $s - S = ct + \frac{\gamma}{2} t^2$. Licząc czas od spoczynku i obierając początek odległości s w miejscu, w którym ruch się rozpoczyna, otrzymamy $S = 0$, $c = 0$, co daje

$$(3) \quad s = \frac{\gamma}{2} t^2.$$

Prędkość ruchu jednostajnie zmiennego wyraża się zapomocą funkcji liniowej, a droga zapomocą funkcji stopnia 2-go względem czasu. I nawza-

jem, jeżeli droga wyraża się zapomocą funkcji stopnia 2-go czasu, to ruch jest jednostajnie zmienny, albowiem prędkość jest wtedy funkcją liniową czasu.

Rugując czas z wyrażen na v i s , otrzymamy:

$$(3') \quad s = \frac{v^2}{2\gamma}, \quad v = \sqrt{2\gamma s},$$

co daje związek między drogą a prędkością przy końcu tej drogi. Z równania (3) wynika

$$(3'') \quad t = \sqrt{\frac{2s}{\gamma}},$$

z czego obliczamy czas, potrzebny na opisanie drogi s . Rozwiązując równanie ogólne (2) względem t , otrzymamy dwa pierwiastki, z których tylko pierwiastek dodatni przedstawia czas, potrzebny na opisanie drogi s — S .

Ponieważ $\frac{s}{t} = \frac{\gamma t}{2} = \frac{v}{2}$, przeto widzimy, że punkt musiałby się poruszać jednostajnie z prędkością, równą połowie prędkości końcowej, aby jednocześnie z punktem, odbywającym ruch jednostajnie zmienny, opisał tę samą drogę.

Kładąc w równaniu (3) $t = 1$, oznaczmy przez s_1 odpowiednią drogę; wtedy $s_1 = \frac{\gamma}{2}$, czyli $\gamma = 2s_1$; a zatem *przyspieszenie równa się podwojnój drodze, jakieś punkt, wyszedwszy ze spoczynku, dokonywa w pierwszej jednostce czasu. To twierdzenie pozwala wyznaczyć łatwym sposobem przyspieszenie ruchu jednostajnie zmiennego.*

Drogi, opisywane od wyjścia ze stanu spoczynku do końca jednej, dwu, trzech i t. d. jednostek czasu, są proporcjonalne względem kwadratów kolejnych liczb naturalnych. Z równania (3) wynika jeszcze, że drogi, opisywane podczas pierwszej, drugiej, trzeciej i t. d. jednostki czasu, są proporcjonalne względem kolejnych liczb nieparzystych. Jakoż, podstawmy kolejno za czas wartości: $n, n+1$; wówczas drogi s_n, s_{n+1} , opisane do końca tych czasów, będą $s_n = \frac{\gamma n^2}{2}$, $s_{n+1} = \frac{\gamma (n+1)^2}{2}$; droga zatem, podczas $(n+1)$ -ej jednostki czasu opisana, wynosi

$$s_{n+1} - s_n = \frac{\gamma}{2}(2n+1), \text{ przy } n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots,$$

$$\text{t. j.} \quad s_1 : s_2 : s_3 : s_4 : \dots = 1 : 3 : 5 : 7 : \dots$$

Przyspieszenie mianujemy według użytej jednostki długości (np. w centymetrach na sekundę), a rozmaite ruchy jednostajnie zmiennie odroźniamy od siebie według wielkości przyspieszenia.

Jeżeli punkt poruszający się rzucimy w każdym jego położeniu na daną prostą, która z torem jego tworzy kąt α , to droga jego rzutu będzie $\frac{\gamma \cos \alpha}{2} \cdot t^2$, rzut poruszać się więc będzie z przyspieszeniem $\gamma \cos \alpha$, co oznacza, że przy-

śpieszenie rzutu jest rzutem przyspieszenia. To twierdzenie pozwala ruch powyższy przedstawić zapomocą współrzędnych. Niech x, y i z będą współrzędnymi punktu, poruszającego się względem nieruchomych osi prostokątnych, c niech będzie jego prędkością początkową, γ zaś przyspieszeniem. Rzuty c_x, c_y, c_z prędkości c i rzuty $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ przyspieszenia γ określają ruchy jednostajnie zmienne trzech rzutów punktu wzdłuż osi. Jeżeli zatym X, Y i Z są współrzędnymi miejsca początkowego, to otrzymamy:

$$(4) \quad \begin{cases} x = X + c_x t + \frac{\gamma_x t^2}{2}, \\ y = Y + c_y t + \frac{\gamma_y t^2}{2}, \\ z = Z + c_z t + \frac{\gamma_z t^2}{2}. \end{cases}$$



Te równania określają ruch punktu m i dlatego także równaniami ruchu tego punktu bywają nazywane. Jeżeli tor punktu tworzy z osiami współrzędnych kąty λ, μ i ν , to

$$(5) \quad c_x : c_y : c_z = \gamma_x : \gamma_y : \gamma_z = \cos \lambda : \cos \mu : \cos \nu.$$

Można okazać, że trzy równania między współrzędnymi a czasem, do których czas wchodzi w potęgę 2-ą, mianowicie

$$(6) \quad \begin{cases} x = X + a_1 t + a_2 t^2, \\ y = Y + b_1 t + b_2 t^2, \\ z = Z + c_1 t + c_2 t^2, \end{cases}$$

tylko pod tym warunkiem wskazują, że ruch jest prostoliniowy i jednostajnie zmienny, jeżeli między ich współczynnikami zachodzi związek

$$(7) \quad a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2.$$

Jakoż, pomnożmy równania (6) odpowiednio przez $b_2 c_2, c_2 a_2, a_2 b_2$; otrzymamy:

$$b_2 c_2 (x - X - a_1 t) = c_2 a_2 (y - Y - b_1 t) = a_2 b_2 (z - Z - c_1 t),$$

albo, po uporządkowaniu,

$$\begin{cases} b_2 (x - X) - a_2 (y - Y) = t (a_1 b_2 - a_2 b_1), \\ c_2 (y - Y) - b_2 (z - Z) = t (b_1 c_2 - b_2 c_1), \\ a_2 (z - Z) - c_2 (x - X) = t (c_1 a_2 - c_2 a_1). \end{cases}$$

Pomnożmy ostatnie równania odpowiednio przez c_1, a_1 i b_1 i dodajmy je stronami odpowiednimi; wówczas

$$(8) \quad (b_2 c_1 - c_2 b_1)(x - X) + (c_2 a_1 - a_2 c_1)(y - Y) + (a_2 b_1 - b_2 a_1)(z - Z) = 0.$$

Z tego równania okazuje się, że punkt porusza się w pewnej płaszczyźnie, przechodzącej przez punkt (X, Y, Z) . Jeżeli tor punktu ma być linią prostą, to powyższa płaszczyzna jest nieoznaczona; i nawzajem, jeżeli ta płaszczyzna jest nieoznaczona, ruch będzie prostoliniowy. A zatym współczynniki równa-

nia (8) są, każdy z osobna, zerami, co ma miejsce, gdy między współczynnikami pierwotnych równań (6) zachodzi związek (7), c. n. d. Z poprzedniego twierdzenia wynika nadto, że każdy rzut punktu odbywa ruch jednostajnie zmienny, a zatem punkt także taki ruch odbywa, o prędkości początkowej $\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$, a przyspieszeniu $2\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}$.

8. SPADEK PIONOWY I UKOŚNY PUNKTU. Jeżeli ciało masyjne, samemu sobie zostawione, z niewielkiej wysokości spada pionowo na ziemię, to ruch każdego z punktów ciała jest jednostajnie przyspieszony. Przyspieszenie każdego punktu ciała spadającego jest to samo co do wielkości i kierunku, a przeto rozpoznamy prawa spadania ciała, uważając spадanie pionowe punktu na ziemię. Przyjmujemy przytym, że punkt spada w próżni.

Galileo Galilei pierwszy okazał, że spadek pionowy, zwany także wolnym, lub swobodnym, jest ruchem jednostajnie przyspieszonym i że przyspieszenie nie zależy ani od wielkości, ani od własności fizycznych ciała spadającego. Późniejsze doświadczenia stwierdziły doktrynę Galileusza, a nadto okazały, że przyspieszenie przy spadku ciał zależy od szerokości geograficznej miejsca i od jego wzniesienia nad powierzchnią morza. W szerokości geograficznej Paryża np. to przyspieszenie wynosi w jednej sekundzie 980,9 centymetra; najmniejsze jest na równiku, a największe na biegunach. Później poznamy dokładnie prawa tej zmiany przyspieszenia; nateraz możemy powyższą wartość liczebną uważać jako przybliżoną wielkość tego przyspieszenia we wszystkich miejscach strefy umiarkowanej w niewielkich wysokościach nad powierzchnią morza. Przyspieszenie podczas wolnego spadku w pewnym miejscu na ziemi oznaczamy zawsze literą g . W Warszawie wolno puszczonego punktu, na ziemi spadający, przebiega w pierwszej sekundzie drogę $\frac{g}{2} = 490,6 \text{ cm}$.

Równanie spadku jest

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

jeżeli zaś punkt posiada prędkość pionową początkową c , to

$$s = ct + \frac{gt^2}{2}.$$

Przyjmując w równaniach art. 7-go dla przyspieszenia γ wszędzie wartość g , otrzymamy ogólnie $v = c + gt$, a wraze, gdy początkowa prędkość pionowa $c = 0$, mieć będziemy jako prawa spadku pionowego:

$$v = gt, \quad s = \frac{v^2}{2g}, \quad v = \sqrt{2gs}, \quad t = \sqrt{\frac{2s}{g}}.$$

Ruch ciała, podrzuconego pionowo w górę z pewną prędkością początkową c , jest jednostajnie opóźniony, a g jest opóźnieniem tego ruchu. Dla każdego zatem punktu ciała będzie

$$v = c - gt, \quad s = ct - \frac{gt^2}{2}.$$

Punkt rzucony znajdować się będzie wtedy w spoczynku, kiedy prędkość jego v przybierze wartość zero, a zatem po upływie $\frac{c}{g}$ jednostek czasu. Droga opisana podczas tego ruchu opóźnionego wynosi $\frac{c^2}{2g}$; jest zatem równa tej wysokości, z jakiej punkt spadać ma na ziemię, aby przy końcu spadku miał tę samą prędkość c , z jaką zaczynał się podnosić. Punkt spadnie na ziemię w tym samym czasie, w którym doszedł do końca swój drogi przy podnoszeniu się; wróci zatem na ziemię po wyrzuceniu go w czasie $\frac{2c}{g}$, a jego prędkość końcowa będzie równa początkowej. —

Jeżeli punkt, samemu sobie zostawiony, spada po prostej, która z poziomem tworzy kąt α , to jego ruch jest także jednostajnie przyspieszony, a przyspieszenie wynosi $g \sin \alpha$; jest więc ono proporcjonalne względem wstawy kąta nachylenia drogi do poziomu. Otrzymamy zatem związki między drogą, czasem i prędkością dla spadku ukośnego, kładąc w poprzednich wzorach $g \sin \alpha$ zamiast g .

Niech ze szczytu A (fig. 4) koła, zakreślonego z punktu O w płaszczyźnie pionowej promieniem r , spada punkt ze spoczynku wzdłuż cięciwy AB, tworząc z pionem kąt φ , a z poziomem kąt α ; przyspieszenie spadku ukośnego będzie $g \sin \alpha = g \cos \varphi$. Punkt opisze zatem drogę AB w czasie $t = \sqrt{\frac{2 \cdot AB}{g \cos \varphi}}$; a ponieważ $\frac{AB}{\cos \varphi} = AC = 2r$, przeto

$$t = 2 \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

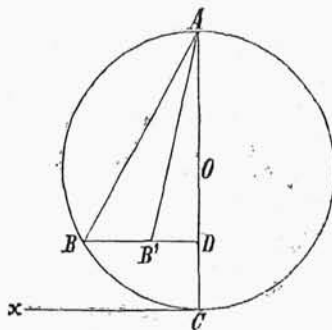


Fig. 4.

Czas więc spadania jest niezależny od kąta φ i równy czasowi spadania pionowego po średnicy koła. A zatem: jeżeli punkt spada po rozmaitych cięciwach z najwyższego punktu koła mającego położenie pionowe, to po każdej cięciwie przybywa do okręgu koła w tym samym czasie (twierdzenie Galileusza). Łatwo okazać, że to twierdzenie może być odwrócone, t. j., że miejscem geometrycznym punktów, do których punkt, spadający z miejsca A po rozmaicie nachylonych prostych, przybywa w tym samym czasie, jest koło w płaszczyźnie pionowej, dla którego A jest punktem najwyższym. Jakoż, skoro czas t spadku jest dany, to odpowiednia droga pionowa jest $AC = \frac{gt^2}{2}$. Przesuńmy przez punkt C dwie osi współrzędnych, oś poziomą Cx i pionową Cy; wówczas $AB = \frac{g \cos \varphi}{2} t^2$, skąd dla współrzędnych x i y punktu B otrzymujemy

$$\begin{cases} x = AB \sin \varphi = \frac{g t^2}{2} \cos \varphi \sin \varphi, \\ y = \frac{g t^2}{2} - \frac{g \cos^2 \varphi}{2} t^2 = \frac{g t^2}{2} \sin^2 \varphi. \end{cases}$$

Rugując z tych równań kąt φ , otrzymamy

$$x^2 + y^2 - \frac{g t^2}{2} y = 0$$

jako miejsce geometryczne tych punktów na płaszczyźnie pionowej, do których punkt, spadając z punktu A, w którym się znajdował w spoczynku, przybywa w czasie t . Miejscem przeto szukany jest koło, którego średnicą jest odcinek AC linii pionowej.

Prędkość punktu spadającego w punkcie B jest

$$v = \sqrt{2g \cdot AB \cdot \cos \varphi} = \sqrt{2g \cdot AD},$$

zatem też sama we wszystkich punktach B, B', D, ..., leżących na tym samym poziomie. *Prędkość końcowa punktu, spadającego po linii prostej z danego miejsca, w którym znajdował się w spoczynku, nie zależy od nachylenia tej prostej do poziomu i dla rozmaitych prostych jest też sama we wszystkich miejscach, które znajdują się na tym samym poziomie.*

9. RUCH NIEJEDNOSTAJNIE ZMIENNY. Tak nazywamy każdy ruch, w którym przyrosty prędkości w równych czasach nie są równe. Niech na fig. 3-iej prosta (m) będzie torem punktu, odbywającego ruch niejednostajnie zmienny, a m_1, m_2, m_3, \dots niech oznaczają miejsca tego punktu po upływie równych, zresztą dowolnych, przedziałów τ czasu. Weźmy pod uwagę inny punkt n , poruszający się jednostajnie z punktem m tak, iż do miejsc m_1, m_2, \dots przybywa razem z m i z taką samą prędkością, jaką punkt m w tych miejscach posiada, a między każdymi dwoma takimi miejscami obdarzony ruchem jednostajnie zmiennym. Jeżeli v_1, v_2, \dots są prędkościami ruchu obudwu punktów w miejscach m_1, m_2, m_3, \dots , to przyspieszenia $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ punktu n na drogach $m_1 m_2, m_2 m_3, \dots$ będą odpowiednio

$$\gamma_1 = \frac{v_2 - v_1}{\tau}, \quad \gamma_2 = \frac{v_3 - v_2}{\tau}, \dots$$

Miedzy ruchami obudwu punktów zachodzi zgodność o tyle, że one przybywają po upływie przedziałów τ czasu do tych samych miejsc z taką samą prędkością. Im mniejsze będą te przedziały czasu, w tym więcej miejscach zachodzić będzie zgodność między ruchami obudwu punktów; możemy więc osiągnąć zupełną zgodność między tymi ruchami, uważając je w elementach czasu. Prędkość v , jaką obadwa punkty posiadają po upływie czasu t , wzrośnie w elemencie czasu dt o dv ; granica zatem stosunku $\frac{dv}{dt}$ będzie przyspieszeniem ruchu punktu n , odpowiadającym temu miejscu, jakie obadwa punkty zajmują przy końcu czasu t . Przyspieszenie ruchu punktu n , odbywającego ruch

jednostajnie zmienny i zgodny z ruchem punktu m przez przeciąg elementu czasu, nazywany przyspieszeniem ruchu niejednostajnie zmiennego punktu m . Ponieważ $\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2s}{dt^2}$, przeto przyspieszenie ruchu prostoliniowego i niejednostajnie zmiennego wyraża się pierwszą pochodną prędkości względem czasu, czyli drugą pochodną drogi względem czasu.

Oznaczając przyspieszenie punktu m przy końcu czasu t przez γ , mamy ogólnie dla każdego ruchu prostoliniowego

$$(1) \quad \gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2},$$

a ponieważ $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$, przeto możemy γ wyrazić także wzorem

$$(2) \quad \gamma = v \cdot \frac{dv}{ds}.$$

Różniczkując dwukrotnie równanie ruchu $s = F(t)$ względem czasu i oznaczając przez F' i F'' dwie pierwsze pochodne funkcji F , wyrazimy w każdej chwili prędkość i przyspieszenie ruchu następującymi wzorami:

$$(3) \quad v = F'(t), \quad \gamma = F''(t),$$

w których dla t należy nadać wartość odpowiednią.

Powyższe określenie przyspieszenia stosuje się także do ruchu jednostajnie zmiennego; z równania bowiem $v = c + \gamma t$ wynika $\frac{dv}{dt} = \gamma = \text{stała}$.

Przyspieszenie ruchu jednostajnego jest zerem; przyspieszenie ruchu jednostajnie zmiennego ma wartość stałą; przy każdym zaś innym ruchu jest ono funkcją czasu. Mając przyspieszenie w funkcji czasu, otrzymamy z (1):

$$(4) \quad dv = \gamma \cdot dt, \text{ a więc } v = c + \int \gamma \cdot dt, \quad s = S + \int c \cdot dt + \int dt \int \gamma \cdot dt.$$

Dochodzimy zatem do prędkości ruchu przez jednokrotne, a do drogi opisaną przez dwukrotne całkowanie. Stałe całkowania, pozwalające obliczyć prędkość i drogę dla każdej wartości t , będą wiadome, skoro wiedzieć będziemy tak zwane warunki początkowe ruchu, t. j. prędkość i drogę na początku tego przedziału czasu, od którego ruch zaczynamy rozważać. Rugując czas z wyrażeń dla v i s , otrzymamy związek między drogą a prędkością; rugując go zaś z wyrażeń dla v i γ , otrzymamy związek między prędkością a przyspieszeniem.

Podobnie, jak przez jednokrotne i dwukrotne różniczkowanie drogi względem czasu obliczamy prędkość i przyspieszenie ruchu prostoliniowego, tak przez różniczkowanie wielokrotne możemy rozpoznać dalsze cechy tegoż ruchu. Przyspieszeniem rzędu n -go ruchu prostoliniowego nazywamy $(n+1)$ -szą pochodną drogi względem czasu, gdzie n jest liczbą całkowitą i dodatnią. Oznaczając to przyspieszenie ogólnie przez $\gamma^{(n)}$, mamy podług tego:

$$\gamma^{(n)} = \frac{d^{n+1}s}{dt^{n+1}}.$$

Stosownie do tego określenia prędkość należy przyjmować jako przyspieszenie rzędu zero, przyspieszenie zaś w ściślejszym znaczeniu jako przyspieszenie rzędu pierwszego. Przyspieszenie rzędu n -go jest granicą stosunku przyrostu przyspieszenia rzędu $(n-1)$ -go w elemencie czasu, do tego elementu czasu, gdy oba wyrazy stosunku zdążają do zera. Przyrost przyspieszenia rzędu $(n-1)$ go w elemencie czasu zowiemy przyspieszeniem elementarnym rzędu n -go; możemy zatem przyspieszenie rzędu n -go określić także jako granicę stosunku przyspieszenia elementarnego rzędu n -go do elementu czasu. Jeżeli v jest prędkością, to dv jest przyspieszeniem elementarnym ruchu rzędu 1-go, a zatem $\frac{dv}{dt}$ przyspieszeniem rzędu 1-go. Z wiadomego przyspieszenia rzędu n -go otrzymujemy drogę wskutek $(n+1)$ -krotnego całkowania, a stałe całkowania wyznaczamy z wiadomych warunków początkowych.

Z powyższych określeń widzimy, iż z danego związku między drogą a czasem możemy rozpoznać wszelkie cechy ruchu, a gdyby ten związek nie był wprost dany, należy go wyznaczyć przez całkowanie, aby potem dochodzić własności ruchu.

10. RUCH KRZYWOLINIOWY. Poznajemy cechy i własności krzywoliniowego ruchu punktu przez rozkład tego ruchu na ruchy elementarne, odbywające się w nieskończenie małych przedziałach czasu.

Granica kierunku prostej, która łączy miejsce punktu w czasie t z bezpośrednio następującym miejscem jego w czasie $t+dt$, wyznacza kierunek ruchu tego punktu. Ponieważ granicą tej prostej jest styczna do toru punktu, przesunięta w miejscu, które punkt zajmuje w czasie t , przeto ta styczna wyznacza kierunek ruchu. W elemencie czasu przyjmujemy ruch jako prostoliniowy; skoro zatem punkt do końca czasu t opisał drogę s , a w czasie dt drogę ds , to prędkość tego ruchu elementarnego w kierunku stycznej według poprzednich określeń będzie:

$$(1) \quad v = \frac{ds}{dt}.$$

Tę wielkość nazywamy prędkością krzywoliniowego ruchu punktu w tym miejscu na torze, które odpowiada obranej wartości dla t . Drogę s liczymy przytym od pewnego, zresztą dowolnie obranego, miejsca na torze poruszającego się punktu. Określenie prędkości, jako pierwszej pochodnej drogi względem czasu, stosuje się zatem do każdego ruchu punktu, jeżeli tylko kierunek ruchu przyjmujemy zarazem jako kierunek prędkości. Jeżeli prędkość jest stała, to ruch nazywamy jednostajnym, bez względu na tor poruszającego się punktu. Wszystkie twierdzenia o ruchu prostoliniowym i jednostajnym możemy zastosować do ruchu elementarnego na linii krzywej.

Niech x, y i z będą spólrzędnymi prostokątnymi miejscem m poruszającego się punktu, które on zajmuje w czasie t ; wówczas $x+dx, y+dy$ i $z+dz$ będą spólrzędnymi jego miejsca sąsiedniego w czasie $t+dt$, a różniczki $dx,$